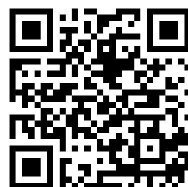


JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN
MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

HERAUSGEGEBEN VON

L. BIEBERBACH IN BERLIN
O. BLUMENTHAL IN AACHEN
G. FABER IN MÜNCHEN



1/10
16-30

SIEBENUNDDREISSIGSTER BAND

MIT DEN BILDNISSEN VON ADOLF KRAZER,
KARL DOEHLEMANN UND EMANUEL CZUBER
UND 28 FIGUREN IM TEXT



VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1928

Inhalt.

1. Abteilung.

Berichte, Nachrufe und Abhandlungen.

2. Abteilung.

Angelegenheiten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Aufgaben und Lösungen.

Mitteilungen und Nachrichten.

Akademien. Gesellschaften. Vereinigungen. Versammlungen.

Preisaufgaben und gekrönte Preisschriften.

Literarisches.

Notizen.

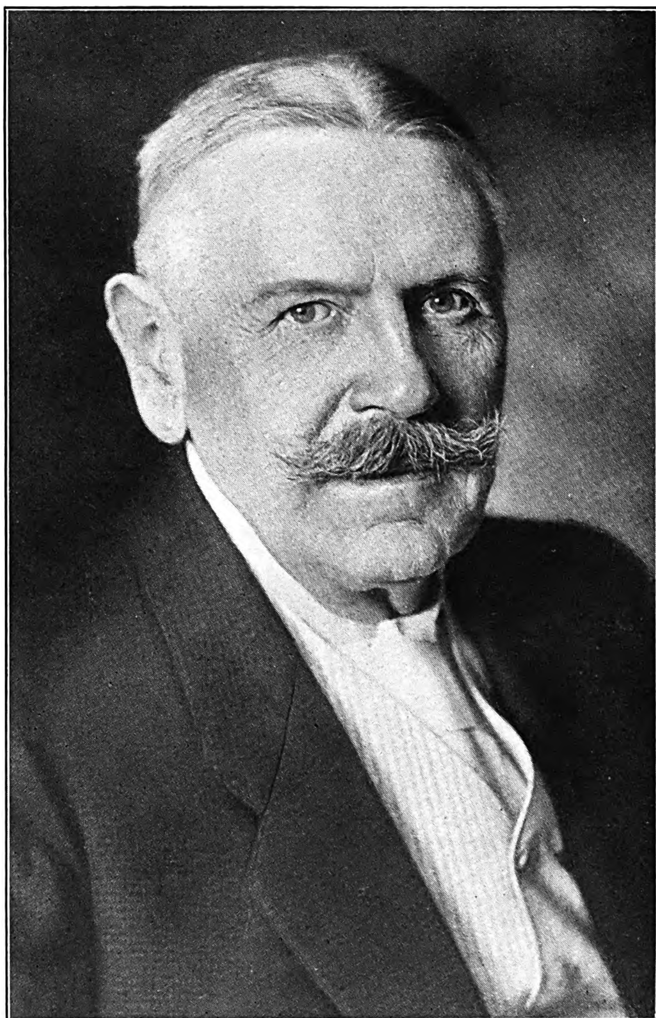
Besprechungen.

Zeitschriftenschau.

Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

Verfasserverzeichnis.

(Die im folgenden gebrauchte Abkürzung „K. V." bedeutet „Kissinger Vortrag".)



A. Kraus.

Adolf Krazer.

Von K. BOEHM in Karlsruhe.[1])

Hierzu Titelbild.

Wäre nur ein Mathematiker, und selbst ein hervorragender, von uns gegangen, so würden wir diese Trauerfeier in einem kleineren Hörsaale abhalten und auch einen solchen vielleicht nicht füllen können; denn es ist eine Besonderheit unserer Wissenschaft, daß sie nur denen sich erschließt und also auch nur diejenigen wahrhaft anzieht, welche ihr die Arbeit eines ganzen Lebens widmen — für ihre Jünger ein Vorzug und ein Martyrium zugleich.

Heute aber sehen wir uns umgeben von einer zahlreichen und vielartigen Zuhörerschaft. Die akademische Jugend ist zu uns gekommen, welche sonst durch Mathematik am wenigsten angelockt zu werden pflegt, der Lehrkörper ist mit allen seinen Schichten vertreten, aus der Stadt und von auswärts sind unsere Freunde erschienen bis hinauf zu einem Vertreter unseres Staatswesens. Dies bedeutet, daß nicht nur ein Forscher, ein Lehrer uns verloren gegangen ist, sondern ein Mann von weitgespannter Wirksamkeit, ein Freund von vielen Freunden.

Diesen Menschen und diesen Freund wollen wir heute herbeirufen, in sein Wesen wollen wir einzudringen versuchen. Was er war und wie er es im Laufe eines langen Lebens geworden ist, wollen wir uns vergegenwärtigen. Wenige von Ihnen werden enttäuscht sein, wenn dabei der strengsten Wissenschaft nur ein verhältnismäßig kleiner Raum gegönnt wird. Und wir wollen nicht sprechen in dem dunklen Ton der Grabrede; denn schon beginnt seine Persönlichkeit sich uns zu verklären. Wir wollen dem Lächeln nicht wehren, wenn es angelockt wird durch die Erinnerung an Einen, der selbst gern und viel gelacht und durch seinen goldenen Humor uns auch manche schwere Stunde erheitert hat. Wahrer Ernst und wahre Heiterkeit gehen gerne Arm in Arm; nur ihre falschen Doppelgänger befehden sich. Wir wollen uns auch nicht stellen, als sei der Verstorbene von allen Schwächen und Mängeln frei gewesen. Würden wir dies versuchen, so läge sogleich am

1) Diese Rede wurde am 12. Februar 1927 bei der von der Technischen Hochschule in Karlsruhe veranstalteten. Gedächtnisfeier gehalten.

Tage, daß wir den Ton des Lebens verfehlt haben; denn Goethe hat es gesagt:

„Gewisse Mängel sind notwendig zum Dasein des Einzelnen. Es würde uns unangenehm sein, wenn alte Freunde gewisse Eigenheiten ablegten."

So sehr sind wir Sterbliche in das Sinnenwesen verstrickt, daß nichts uns mehr ergreift als die äußere Gestalt eines Menschen. Tiefe Trauer kann gefaßt und ruhig bleiben, so lange sie sich mit den geistigen und seelischen Vorzügen des Abgeschiedenen beschäftigt. Die lebhafte Vorstellung seiner leiblichen Erscheinung, irgendein Objekt, das die Kraft solcher Vorstellung verstärkt, ruft sogleich der Träne. Wir erinnern uns heute der hohen Gestalt, die wir alle gekannt haben, die in so seltsamer Weise Wucht und Schwere mit Anmut und Eleganz verband. Es war, namentlich in früheren Jahren, eine Freude, Krazern vor sich hergehen zu sehen, die aufrechte Haltung und den federnden Schritt zu bewundern. Gewiß waren diese Gaben nicht einfach von der Natur geschenkt, sondern auch durch Bildung entwickelt. Überhaupt fand das Wort von dem Geiste, der sich den Körper baut, an unserem Freunde eine überraschende Bestätigung. Sein Äußeres wies durchaus auf seine engere Heimat hin; es war der kraftvolle Typus, welcher unter den Stämmen der deutschen Länder als einer der liebenswürdigsten, gemütlichsten angesehen wird, keineswegs aber als besonders fein und geistig gilt. Wer sich etwa vorstellen will, was aus der von der Natur geschenkten Materie geworden wäre, wenn nicht ein feiner, regsamer Geist darin gearbeitet hätte, der betrachte das Bildnis Krazers, welches leider in dem Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung nach seinem Tode veröffentlicht worden ist. Hier ist alles weggelöscht, was lebenslange Denkarbeit, scharfes Beobachten und heiteres Verstehen der Umwelt in die zwar wohlgeformten, aber von Natur nicht ungewöhnlichen Züge eingegraben hat. Ich erinnere nur an den entzückenden Strahlenkranz feiner und feinster Fältchen, welcher sich von dem Winkel des Auges nach den Schläfen zog und dem Blick eine unbeschreibliche Lebhaftigkeit oder Eindringlichkeit geben konnte, je nachdem scharfes Nachdenken ihn in die Ferne richtete oder Unwille oder ein schalkhafter Einfall darin aufblitzte. Der blaue Glanz des Auges war in diesen Zierrat gefaßt wie ein Edelstein in goldene Drähtchen. Wie wohlgebildet war die Stirne, wie schön gerundet die Schädelform! Darunter, weit weniger beeinflußt durch die formende Kraft des Geistes

„das gesunde Mondgesicht,
Ein voller Mund, erblühte Wangen".

Mit diesem stetigen Wirken des Geistes in die äußere Erscheinung hängt wohl noch ein anderes Merkwürdiges zusammen. Menschen, die wir nie gesehen haben, stellen wir uns meistens in einem bestimmten Lebensalter vor, als ob sie vorher oder nachher gar nicht existiert hätten. Diese Tatsache läßt sich nicht immer als Wirkung überlieferter Bildnisse erklären. Mit Menschen, welche persönlich in unser Leben eingetreten sind, ergeht es uns ähnlich. Waren sie uns als junge Leute bekannt und schwanden sie dann aus unserem Gesichtskreis, so können wir uns kaum vorstellen, daß auch sie alt geworden sind, und noch weniger, wie sie wohl aussehen mögen. Lernen wir sie als bejahrte Menschen kennen, so fällt es uns meist schwer, sie jugendlich zu denken und vorzustellen. Nicht so bei Krazer. Als er schon zu unseren Ältesten zählte, verbarg das Würdige seiner Erscheinung nicht den lebhafteren Mann eines mittleren Alters; auch die Studentenmütze konnte man sich noch recht wohl auf seinem Haupte denken, und manchmal lag noch etwas wie ein Widerschein der Kindheit auf seinem Antlitz. Wir glauben daher auch den Knaben vor uns zu sehen, wenn wir die anmutige Erzählung seiner frühesten Jugendzeit vernehmen, wie sie uns von seinen Verwandten überliefert wird.

Zusmarshausen ist ein Flecken und Bezirksamtshauptort an der Zusam im bayrischen Regierungsbezirk Schwaben. Dort wirkte um die Mitte des vorigen Jahrhunderts, in der Stellung eines Gerichtsassessors, Karl Krazer, ein Mann, der als hervorragender Jurist galt, als solcher sich auch schriftstellerisch betätigte. Seine Arbeitskraft war unermüdlich. Sommer und Winter saß er früh 6 Uhr an seinem Schreibtisch. Für Mathematik scheint er schon als Schüler eine besondere Begabung gezeigt zu haben; denn die Familie bewahrt noch heute eine Anzahl von Preisen auf, welche ihm für Leistungen in jener Wissenschaft erteilt worden waren, dazu ein gebundenes Buch, angefüllt mit mathematischen Übungen, die er aus eigenem Antrieb angefertigt hat. In seinem Wohnzimmer stand ein Spieltisch, auf dessen Brett stets eine Schachaufgabe aufgestellt war. Als der Sohn dieses Mannes wurde Adolf Krazer am 15. April 1858 geboren. Es hat ihm später viel Vergnügen gemacht, daß gerade der Geburtstag des großen Leonhard Euler es war, der auch ihn der Welt verliehen hatte. Man vernimmt mit Erstaunen, daß der Mann, welcher im späteren Leben, abgesehen von dessen letzten Monaten, krankhafte Zustände kaum gekannt hat, ein schwächliches, lange Zeit kränkelndes Kind war. Mit dem um 14 Monate älteren Bruder Eugen wuchs der Knabe auf in einem Hause, in welchem Geselligkeit gar nicht gepflegt, ja jeder Besuch mehr oder minder als Störung empfunden wurde, wo das Leben durchaus der starren, strengen, wohl

auch etwas trockenen und pedantischen Eigenart des Vaters angepaßt war, die Einwirkung der Mutter ganz zurücktrat, wo jeder Festtag Jahr für Jahr mit unabänderlicher Gleichmäßigkeit gefeiert wurde, wo es an nichts fehlte und wo doch die Luft viel zu schwer war für die heitere Entwicklung zweier aufblühender Kinderseelen. Was Wunder, wenn diese liebend ineinanderwuchsen, den Altersunterschied rasch ausglichen und einen Bund schlossen, wie er wohl selten zwischen Brüdern besteht. Nur der Tod konnte ihn lösen.

Als man im Anfang der sechziger Jahre in Bayern das Notariat einführte, wurde Karl Krazer als Notar nach Dillingen an der Donau versetzt, wo die beiden Söhne dann auch ihren Schulunterricht empfingen. Das Städtchen hatte einst sogar eine Universität besessen; es war noch Sitz eines Gymnasiums, welches namentlich die Zöglinge des bischöflichen Knabenseminars ausbildete.

Mit sechs Jahren kam Eugen, wie üblich, in die Schule; Adolf hatte noch ein Jahr zu warten, aber schon war er so sehr gewohnt, alles auch zu tun, was der Bruder tat, daß er in seiner Vereinsamung mit Begierde alle Kenntnisse in sich aufnahm, welche jener von der Schule mit nach Hause brachte, daß er schrieb und rechnete gleich ihm. Hefte füllte er mit Ziffern an, noch ehe er deren eigentliche Bedeutung kannte. Der mathematische Sinn, welcher ja sehr frühe zu erwachen pflegt, kündigte sich an: ein geheimnisvoller Zauber schien das Kind aus den halb verstandenen Symbolen anzuwehen.

Die Folge dieser gemeinsamen Übungen war, daß Adolf, als ein Jahr später die Reihe an ihn kam, die erste Klasse überspringen konnte und mit dem Bruder gemeinschaftlich das Lernen fortsetzte, bis die Universität jedem sein Studium anwies.

Als die Brüder in das Gymnasium eintraten, rüsteten sie sich alsbald zum Wettkampfe mit dem Elemente, welches sie „die schwarze Bande" nannten. Damit waren die Zöglinge jener bischöflichen Anstalt gemeint, zum großen Teil begabte Knaben vom Lande, welchen die ersten Plätze in der Klasse von den Brüdern Krazer nicht gegönnt wurden. Alles in allem hat man den Eindruck, daß diese sich ein wenig hochmütig von ihren Mitschülern absonderten. Um so inniger gestaltete sich ihr Verhältnis zueinander. Wie ihre Arbeit, so war auch ihre Erholung gemeinsam. Ein schön gepflegter Garten, dessen Gartenhaus die Familie im Sommer aufnahm, war der Schauplatz ihrer Spiele. Ihre Jugend fiel in eine Zeit, wo Leibesübung noch freiwillige und individuelle Betätigung eines schönen natürlichen Dranges war. Die Brüder schwammen in der Donau, turnten — wobei Adolf sich besonders auszeichnete — und wanderten. Der heute durch den Sport und durch

technische Bastelei fast ganz verdrängte Sinn für die von der Natur hervorgebrachten Dinge lenkte ihre Beschäftigung. Tiere und Pflanzen wurden gesammelt, konserviert, bestimmt. Die Ergebnisse solchen ernsthaften Bemühens wurden in Bücher eingetragen. Die heranwachsenden Jünglinge durften jedes Jahr eine kleine Reise unternehmen. Tagebücher, worin die Erlebnisse auf solchen Fahrten sorgfältig niedergelegt wurden, sind noch heute vorhanden. Was uns bedeutungsvoll erscheinen mag, ist, daß die Kasse immer von Adolf, und zwar auf das gewissenhafteste, geführt wurde. Wie oft hat er dieses Amt in späteren Jahren zum Vorteil so mancher Gemeinschaft verwaltet!

Waren sich so die eng verbundenen Brüder, einer dem andern, Gesellschaft genug, so konnte nur ein äußerer Umstand Schulgenossen in das Krazersche Haus führen. Dies geschah im letzten Jahre, als der Rektor des Gymnasiums für einige begabte bischöfliche Zöglinge, denen das weltliche Studium begehrenswerter schien als der Priesterstand, Freitische suchte. Drei von diesen Knaben erschienen dann an jedem Sonntage als Gäste bei unseren Freunden. Was die vereinigten fünf jungen Leute als Esser zu leisten vermochten, gab der Mutter Krazer noch lange Stoff zu heiteren Berichten. Ihr Sohn Adolf hat sich die Freude am guten Tisch sein ganzes Leben hindurch bewahrt. Sie offenbarte sich bei gemeinsamen Mahlzeiten in großer Gesellschaft, aber ebenso bei dem überaus bescheidenen Frühstück, welches er zwischen seinen beiden Vorlesungen im Sprechzimmer einzunehmen nie versäumte. Wenn er dabei das kleine, mit rotem Leder überzogene Fläschchen austrank, worin ein Schluck Wein enthalten war, dann leuchtete ein frohes Behagen aus seinen Augen.

Unter den Lehrern, welche am Gymnasium in Dillingen wirkten, interessiert uns der Professor der Mathematik, welcher uns aus dem lateinischen Lebenslauf in Krazers Inauguraldissertation als „Pillerus magister rerum mathematicarum peritissimus" bekannt ist. Der arme Mann war von einem schweren rheumatischen Leiden gepeinigt, dessen Ursache von denen, die ihn kannten, nicht in allzu trockener Ernährung gesucht wurde. Er wohnte im Gymnasium und wurde an schlimmen Tagen in einem großen Sessel, mit verbundenen Händen und Füßen, in das Klassenzimmer getragen. Da er in diesem Zustand die Hand nicht gebrauchen konnte, pflegte er den jungen Adolf Krazer zu sich heranzurufen, damit er ihm das Schreiben an die Tafel abnähme. Vielleicht hat dieser damals schon in sich den Grund gelegt zu einer Kunst, die er als akademischer Lehrer in hohem Grade besaß.

Wenn wir anderen oft im Eifer unbedacht kostbaren Raum der Wandtafel mit weniger bedeutenden Formeln füllen, dann für wichtiges

nur noch ein Eckchen finden, schließlich doch auslöschen müssen und dadurch den Überblick erschweren, so war bei Krazer die ganze Anordnung von vornherein auf das genaueste berechnet. Seine Schrift war zierlich, klein, aber klar und in nicht allzu großer Entfernung gut lesbar. Selten hatte er nötig, etwas Geschriebenes wieder zu entfernen, was er nur ungern tat. Wie ein Chemiker oder Physiker wohl seine Apparatur photographiert und dadurch zugleich den Inhalt der Vorlesung festhält, so hätte Krazer am Schluß der Stunde seine Tafeln faksimilieren lassen können. Es wäre auf diese Weise ein recht vollständiges Kolleg-heft zustande gekommen, in welchem nur die verbindenden Worte zwischen den Formeln gefehlt hätten.

Mag nun Krazers gichtbrüchiger Lehrer ein guter oder ein schlechter Mathematiker gewesen sein, jedenfalls hat er das Verdienst, die ungewöhnliche Begabung seines Schülers mit scharfem Blick erkannt und dem Vater enthüllt zu haben. Gewiß fiel seine Stimme schwer ins Gewicht, als es sich darum handelte, welches Studium der Abiturient ergreifen sollte. Wie groß muß die Freude des Vaters gewesen sein, als er die Frage entschieden und seine doppelte geistige Neigung, auf zwei hoffnungsvolle Söhne verteilt, ein anderes Mal die Bahn vom Wunsch zur Verwirklichung betreten sah. Der ältere Sohn wollte den juristischen Beruf des Vaters zu dem seinigen machen, durch den jüngeren sollte zur ernsten Lebensarbeit erhoben werden, was dem Notar von Dillingen eine geliebte Nebenbeschäftigung gewesen war.

Mit diesen Zielen zogen die beiden Jünglinge frohgemut über den Rhein, um auf der Universität zu Straßburg ihre Studien zu beginnen. Beide traten sogleich in ein akademisches Korps ein. Wenn man hört, daß Adolf Krazer schon in früher Jugend, und in weit höherem Grade als sein Bruder, ein Einsamer war, daß es ihm auch in späteren Jahren schwer fiel, sich an Menschen wahrhaft anzuschließen, mag man einen Augenblick über diesen Entschluß erstaunt sein. Und doch läßt er sich so leicht verstehen. Die Jünglinge hatten eine zwar glückliche, aber pedantisch überwachte, einförmige Schulzeit hinter sich. Wie begierig mußten sie sein, sich in das losgebundene akademische Leben als in einen erquickenden Strom zu stürzen. Die Poesie des Studententums aber ist in den Augen Vieler, und war es in jenen Zeiten noch mehr als in unseren Tagen, an Mütze und Band und Schläger geknüpft. Und unser Krazer hat sein Leben lang für festliches Gepränge viel Neigung gehabt. Er liebte es, seinen Frack anzulegen, der ihm nicht wie dem großen Bunsen ein lästiges „Kummet" war, im Talar zeigte er sich nicht ungern, und als Rektor unserer Hochschule trug er mit offensichtlichem Stolze das äußere Zeichen seines Amtes, die goldene Kette.

Wie hoch muß ihm das jugendliche Herz geschlagen haben, wenn er sich in studentischem Putze sehen durfte.

Lockte ihn so wohl zuerst die schillernde Außenseite des Korpslebens an, so war es gewiß ein tieferer Grund, der ihn darin festhielt und bis in das Alter hinein dafür wirken und arbeiten ließ. Diesmal haben wir nicht einen Gegensatz, sondern eine Ähnlichkeit mit seiner früheren Erziehung vor uns. Diese hatte ihn wohl durch ihre Starrheit beengt, aber sie hatte ihm dafür einen festen Halt gegeben. Und einen solchen suchte er auch als Student.

Im ganzen Leben hat er sich vor dem Versinken im Unbestimmten gefürchtet. Es gibt auch wissenschaftliche Probleme, in denen der Geist versinken kann, wenngleich es ein herrliches Sichverlieren ist. Er hat sie stets gemieden. Und wo ihm im Leben Freiheit gegeben war, hat er sich, etwa durch ein freiwillig vorgesetztes Pensum, durch eine starre Tageseinteilung, die er sich selbst vorschrieb, von ihr geschieden.

Das Korpswesen, welches dem einzelnen die Verantwortlichkeit für sein Handeln abnimmt, indem es dieses an ganz bestimmte Regeln bindet, muß bei solchen Naturen eine ähnlich wohltuende Empfindung auslösen wie das Militärleben. Krazer mag bedauert haben, daß er dieses niemals aus eigener Erfahrung kennen lernen durfte; eine schwere Verletzung am Kopfe, die er sich bei einer Mensur zugezogen hatte, war der Grund, welcher ihn davon ausschloß.

Wenn man zu einem Ideal gar keine Beziehungen hat, ist man schlecht geeignet, eine Tätigkeit im Dienste dieses Ideals so zu würdigen, wie sie es verdient. Doch darf ich mich nach jener Seite für entlastet halten durch die begeisterte Schilderung, welche Krazers Korps von seinem Wirken entworfen hat. Schlagen wir dieses Heft auf, so ruft uns ein auf der ersten Seite berichteter Zug sogleich unseren Krazer ganz vor Augen. Als er, damals schon Professor, im Jahre 1889 an die Universität Straßburg zurückkehrte, bestand der erste Liebesdienst gegen seine jungen Freunde darin, daß er ihre aus irgendeinem Grunde in Verwirrung geratene Kasse in Ordnung brachte.

Dies entspricht durchaus seinem späteren Grundsatz: Man könne einer Gemeinschaft, welche Ziele sie auch immer verfolge, nicht besser dienen als durch Befestigung ihrer materiellen Grundlage. Das Ideelle komme gewissermaßen von selbst. Darum hat er in der Sorge für das wirtschaftliche Wohl unserer Beamten und Studenten eine so bedeutende Aufgabe erblickt und niemals Bedenken getragen, ihr jedes Opfer an kostbarer Zeit und Arbeitskraft zu bringen. Ich hörte ihn einmal, als seinen Bestrebungen Mittel zugunsten irgendeines anderen Zweckes ent-

zogen werden sollten, sagen: Zuerst muß sich der Student satt essen können, wenn er etwas leisten soll.

Solche Einsicht ist um so höher zu werten, als Krazer selbst den Mangel nie aus eigener Erfahrung gekannt hat. Als Student war er von Hause nicht übermäßig, aber reichlich mit Mitteln ausgestattet. Der Dauer seines Studiums war keine enge Grenze gesetzt, darum konnte er sich sorglos und ohne Zwiespalt des Gewissens der studentischen Lust ergeben. Eine körperliche Verwandlung ging in jener Zeit mit ihm vor, wie wir sie so oft bei unseren feuchtfröhlichen Jungen sich vollziehen sehen: Der schmächtige Jüngling ward breitschultrig und erblühte zu jenen vollen Formen, die ihm bis in sein Alter geblieben sind.

Ob Krazer schon in den ersten Straßburger Semestern viel gearbeitet hat, ist mir nicht bekannt; ich halte es aber, obwohl er nicht nur einem Korps angehörte, sondern ein solches neu gründen half, obwohl er viele Stunden auf die mit Leidenschaft betriebene Fechtkunst verwandte, trotzdem für durchaus wahrscheinlich; denn er hat uns in späteren Epochen seines Lebens den Beweis geliefert, daß er durch zähe Arbeitskraft, durch eine gleichmäßige, nie sich überstürzende Tätigkeit, durch gewissenhafte Zeiteinteilung vielerlei nebeneinander zu bezwingen imstande war.

Wie dem auch gewesen sein mag, jedenfalls hat er den Zeitpunkt, welcher von so vielen versäumt wird, genau wahrgenommen, den Zeitpunkt, wo der Burschentraum eine Erinnerung werden und die Hingabe an die Aufgaben des Lebens beginnen muß.

Bei Christoffel, Reye, Kundt, Winneke und Roth hatte Krazer in den vier Straßburger Semestern Vorlesungen über Mathematik, Physik und Astronomie gehört. Vielleicht war es das noch vorwaltende Interesse an der zuletzt genannten Wissenschaft, welches ihn für das Wintersemester 1878/79 nach Leipzig zog, wo er den Unterricht des ausgezeichneten Astronomen Bruhns genoß und mathematische Vorlesungen bei Scheibner und Mayer besuchte.

Im Sommer 1879 betrat er die Stadt, welche für ihn in doppeltem Sinne die Stadt des Schicksals wurde: Würzburg. Sie gab ihm die Lebensaufgabe und die Frau, welche seine Lebensgefährtin hätte werden sollen, ihm aber nur für eine kurze Strecke des Weges gegönnt war.

Nicht jeder Mensch hat seine bestimmt umgrenzte Lebensaufgabe. Denken wir an einige der größten unseres Faches. Weder von Euler noch von Gauß läßt sich sagen, daß sie eine solche gehabt hätten; sie waren da, um Mathematik zu machen, wie Mozart geboren war, um Musik zu machen. Das ganze Gebiet, welches zu ihrer Zeit der Wissen-

schaft zugänglich war, durchstreifte ihr Genius, überall befruchtend, ohne daß sich auch nur ein beabsichtigter Weg nachweisen ließe. Weierstraß verfolgte mit seinem Forschen ein ganz bestimmtes Ziel, und gleich ihm erregt der Fortsetzer und Vollender seiner Lehre, Pringsheim, durch die Geschlossenheit seines Schaffens unsere Bewunderung.

Daß Krazer zu der zweiten Klasse von Forschern gehören würde, stand nach seinem Charakterbild, dessen Grundzüge wir aus der Jugendgeschichte abzulesen versuchten, fest. Auch hier drohte ja das Sichverlieren im Allzuweiten. Es sei gestattet, an dieser Stelle eine Anekdote zu erwähnen, welche einer meiner Kollegen von Krazer selbst erfahren hat. In der Würzburger Zeit, der wahrhaft fruchtbaren Periode seines Lebens, stand dieser, in tiefes Nachsinnen über ein Problem versunken, irgendwo an einer Straße lange Zeit regungslos, dem nichts ahnenden Beschauer das Bild träger Untätigkeit darbietend. Als er von seinem Zustand der Geistesabwesenheit zu sich selbst zurückkehrte, sah er sich von einem Steinklopfer beobachtet, welcher ihn mit den Worten anredete: „Sie haben ein schönes Leben, Herr! Schauen Sie dagegen mich an, wie hart ich arbeiten muß!“ „Wohl!“ meinte Krazer, „dafür kommt bei Ihrer Arbeit etwas heraus!“ Vortrefflich kennzeichnet dieses humorvolle Wort die Qualen des Forschers auf der einen Seite und auf der anderen den Lohn, welcher uns für eine gleichförmige, ja widerwärtige Tätigkeit entschädigen kann, wenn wir am Abend eines schweren Arbeitstages so etwas wie einen Haufen geklopfter Steine vor uns liegen sehen und mit gutem Gewissen die Ruhe aufsuchen.

Krazer kannte jene Qualen, denn er war damals ein Forscher im wahren Sinne des Wortes, aber er konnte nicht wünschen, ihnen sein Leben auszuliefern. Mit Anspannung aller Kräfte hatte er sich einen Weg eröffnet, welchen er nun im hellen Lichte vor sich liegen sah. Den wollte er gemächlich weitergehen, ohne den Lockungen nach rechts und nach links zu folgen, welche auf unsicheren Boden und in unheimlichen Schatten führen konnten. Daß er ihn eine große Strecke weit an der Seite und unter der Führung eines verehrten Meisters zurücklegen durfte, konnte seine Zuversicht nur erhöhen, mußte ihn in seinem Entschlusse bestärken.

Wenn ich mich nun anschicke, über Krazers wissenschaftliche Tätigkeit zu berichten, so gerate ich in die Verlegenheit, den anwesenden Fachgenossen nur Trivialitäten sagen zu können, und doch die Geduld der Fernerstehenden auf harte Proben stellen zu müssen. Denn der Eingang zu dem von ihm erwählten und bebauten Arbeitsfeld ist nur auf einem langen Wege zu erreichen, welcher durch ernste wissenschaftliche Gebiete sich hinzieht. Wer diesen scheut, kann nicht einmal

an einen Standort geleitet werden, von dem sich das Feld auch nur von ferne erblicken läßt. Krazer selbst hat diese Unmöglichkeit bitter empfunden, als er bei der Übernahme seines ersten Rektorates, hier in diesem Saale, versuchte, einer glänzenden Versammlung, mit dem Fürsten an der Spitze, über diese Dinge zu berichten.

Der Begriff der Funktion einer reellen Veränderlichen hat in der neueren Wissenschaft eine so große Bedeutung gewonnen, daß er heute schon zu den unentbehrlichen Stücken der sogenannten allgemeinen Bildung gezählt und auf den Schulen gelehrt wird. Wenige Nichtmathematiker sind sich bewußt, daß jener Begriff sich viel weiter erstreckt als auf den engen Bereich der Beispiele, welche wir zuerst erlernen und manchmal unter dem irreführenden Namen der „bekannten Funktionen" zusammenfassen hören. Aus gegebenen Funktionen lassen sich neue gewinnen. Zu den elementaren Operationen, welche hier in Frage kommen, treten zwei auf der Grenzwertbildung beruhende, die Ableitung oder Differentiation und die Integration, welche in gewissem Sinne als die Umkehrung jener aufgefaßt werden darf. Die Ableitungen der als „bekannte" bezeichneten Funktionen lassen sich, merkwürdigerweise, immer durch Funktionen aus demselben engen Bereiche darstellen. Wir begreifen daher, daß in der Mathematik lange Zeit hindurch die Überzeugung herrschen konnte, ähnliches müsse auch für die Integration gelten, eine Ansicht, die unter Nichtmathematikern selbst heute noch nicht völlig ausgerottet ist.

Wenn ein mathematisches Problem ein Jahrhundert lang den angestrengten Bemühungen der Besten widerstanden hat, dann taucht wohl die Vermutung auf, es sei wirklich unlösbar, also ohne Berechtigung gestellt. Bei diesem Stande der Meinungen wird dann der Beweis für die Unmöglichkeit versucht. Die Integrale, auf welche die Berechnung der Ellipsen- und Hyperbelbögen führt, und welche daher den Namen der elliptischen Integrale erhielten, durch bekannte Funktionen auszudrücken, war lange Zeit hindurch das Ziel hervorragender Mathematiker gewesen. Daß es vergeblich sein mußte, wurde endlich durch folgenden Gedankengang dargetan. Der gewöhnliche Sinus, die Exponentialfunktion, lassen sich als Umkehrungen gewisser bestimmter Integrale auffassen, vorausgesetzt, daß diese als Funktionen ihrer oberen Grenze betrachtet werden. Wenn es nun möglich ist, jene elliptischen Integrale in gleicher Weise umzukehren, und wenn sich dabei herausstellt, daß die Eigenschaften der Umkehrungen von denen aller bekannten Funktionen abweichen, so wird damit auch die Unmöglichkeit bewiesen sein, die elliptischen Integrale in dem Sinne jener unbegründeten Problemstellung „auszuführen".

Der Gedanke, an Stelle der elliptischen Integrale ihre Umkehrfunktionen zu studieren, war zuerst von dem unvergleichlichen Gauß gefaßt und entwickelt, aber nicht öffentlich mitgeteilt worden. Er entsprang dann abermals, fast gleichzeitig, in zwei wesentlich jüngeren Köpfen, in dem norwegischen Studenten Abel und dem jungen Königsberger Professor Jacobi. In einem beispiellosen Wettkampfe, der dem historischen Betrachter ein atemraubendes Schauspiel bietet und in welchem der genialere Kämpfer, der zarte Abel, sich aufrieb, begründeten beide in der kurzen Zeitspanne von 1826 bis 1829 die Theorie jener Umkehrfunktionen. Diese erhielten den Namen der elliptischen Funktionen und zeigten durch ihre doppelte Periodizität ein von allen bis dahin bekannten Funktionen abweichendes Verhalten.

Abels Blick reichte weiter als der seines Nebenbuhlers; er erfaßte von vornherein die Möglichkeit einer Ausdehnung der Untersuchung auf die Integrale beliebiger algebraischer Funktionen, welche wir, nach Jacobis Vorschlag, als „Abelsche Integrale“ bezeichnen. Zu den schönsten Entdeckungen Jacobis aber gehörte die Bemerkung, daß die Theorie der elliptischen Funktionen sich durch gewisse Hilfsfunktionen beherrschen läßt, welche zwar nicht selbst doppelperiodisch sind, aber den Charakter überall endlicher Funktionen haben. Zu ihrer Bezeichnung gebrauchte er den griechischen Buchstaben Θ. Diese Zufälligkeit hat zunächst der engeren Klasse von Funktionen einer Veränderlichen, sodann aber einer viel umfassenderen Klasse von Funktionen mehrerer Veränderlichen den Namen gegeben. Er bezeichnet auch das Lebenswerk des Mannes, zu dessen Gedächtnis wir hier versammelt sind.

Die doppelte Periodizität der Umkehrfunktionen elliptischer Integrale hatte sich nicht früher enthüllen können, als die Mathematiker den Mut faßten, eine Erweiterung des Zahlbereiches vorzunehmen und die als komplex oder imaginär bezeichneten Gebilde, welche sich längst aufgedrängt hatten, den reellen Zahlen durchaus gleichberechtigt an die Seite zu stellen.

Ein klares Verständnis für alle die neuartigen Erscheinungen konnte erst gewonnen werden, als die von dem französischen Mathematiker Cauchy in großartiger Weise begründete Theorie der Funktionen eines komplexen Argumentes sich mit dem Umkehrgedanken verband und eine jener glücklichen Epochen der Wissenschaft einleitete, welche einen alten Alchymistentraum zu verwirklichen scheinen: Wo Elemente, die bisher getrennt voneinander und langsam wuchsen, durch ihr scheinbar zufälliges Zusammentreffen Veranlassung zu unerhörten Kombinationen geben und wunderbare Kristallisationen von allen Seiten aufschießen.

Man kann sich kaum vorstellen, wie mächtig alle Kreise der Mathematik durch den Zauber der neuen Disziplinen gebannt waren. Jahrzehntelang gab es kaum ein großes oder kleines Talent, das nicht seine Kraft an den elliptischen und an den Abelschen Funktionen erprobt hätte. Über diese Talente ragte ein Genie von seltener Stärke empor: Bernhard Riemann. Es ist das Eigentümliche solcher Epochen, daß ihre Produktion eine stürmische ist. Der neuen Ausblicke sind so viele, daß der Drang in das Weite geht und die Sicherung des Weges den Nachfolgenden überlassen werden muß. Bei Riemann kam wohl noch dazu, daß er den Tod im Nacken fühlte, der auch ihn uns zu frühzeitig entreißen sollte. Er mußte den Schatz seiner Ideen in Sicherheit bringen, indem er sie in großartigen Entwürfen hinausschleuderte, ehe das Wrack seines Lebens unterging. Einer der Bedeutendsten, welche diesen Reichtum auffischten und treu verwalteten, war Krazers vortrefflicher Lehrer Prym.

Jacobis grundlegenden Gedanken, daß man, um für die allgemeinen Abelschen Integrale das Entsprechende zu leisten, was für die elliptischen Integrale durch die elliptischen Funktionen getan war, mehrere Summen aus einer gewissen Anzahl zusammengehöriger Abelscher Integrale bilden und deren obere Grenzen als Funktionen der Integralsummen, also von mehreren Veränderlichen studieren müsse, diesen Gedanken, der bei Jacobi und dessen unmittelbaren Fortsetzern einen mehr formalen Charakter trug, hatte Riemann mit dem Leben seiner funktionentheoretischen Anschauungen erfüllt. In der Theorie jener Funktionen (Jacobi hatte sie in Verehrung für seinen toten Mitkämpfer „Abelsche Funktionen" genannt) fiel die bedeutendste Rolle wiederum gewissen ganzen Funktionen, diesmal von mehreren Veränderlichen zu, welche als Verallgemeinerungen jener einfachen Thetafunktionen gelten konnten und mit ihnen auch den Namen teilten. In die ungemein verwickelte Lehre dieser Funktionen Ordnung zu bringen, für sie ein sicheres und wirksames Forschungsprinzip aufzustellen, war eines der Ziele Riemanns gewesen. Aber er hatte die Formel, welche dies leisten sollte, nur noch aussprechen, nicht mehr beweisen und fruchtbar machen können. Sein Schüler Prym betrachtete diese Aufgabe als kostbarstes Vermächtnis des Meisters, und er hat ihr sein ganzes arbeitsreiches Leben gewidmet, ohne sie doch in vollem Umfange lösen zu können. Der erste Mitarbeiter, welchen er sich erkor, war Adolf Krazer. Schon dessen Inauguraldissertation brachte eine Menge neuer Resultate von bleibendem Wert. Sie erschien mit Ergänzungen unter dem Titel „Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen auf Grund der Riemannschen Thetaformel" im Jahre 1882. In demselben Jahre gelang dem Verfasser eine

wertvolle Entdeckung, welcher er im folgenden Frühjahr seine Aufnahme als Lehrer an der philosophischen Fakultät der Universität Würzburg verdankte.

In den sechs Jahren, während deren er dort seine Lehrtätigkeit ausübte, arbeitete er täglich mehrere Stunden mit seinem Lehrer Prym zusammen an den „Neuen Grundlagen einer Theorie der allgemeinen Thetafunktionen". Von diesem grundlegenden Werke, in welchem ein beträchtlicher Teil von Krazers Lebensarbeit aufbewahrt ist, hat die Öffentlichkeit bisher leider nur einen im Jahre 1892 veröffentlichten Auszug erhalten. Es hätte keinen Sinn, die Titel all der von Krazer veröffentlichten Abhandlungen aufzuzählen. Sie fanden ihre Zusammenfassung und Krönung in dem umfangreichen Lehrbuche der Thetafunktionen, welches ein Jahrzehnt später erschien und seinem Verfasser ein nicht mehr zu erschütterndes rühmliches Ansehen in der wissenschaftlichen Welt begründete.

Aber wir sind den Ereignissen weit vorausgeeilt und haben ein bedeutendes Stück Lebensgeschichte nachzutragen. Zwar sind durch die äußeren Anlässe zu einzelnen Arbeiten bereits die akademischen Grade bezeichnet, welche der junge Gelehrte sich erworben hatte, und es bedarf kaum der Erwähnung, daß jede Stufe mit der höchsten Auszeichnung beschritten worden war.

Die Würzburger Epoche erstreckt sich über die Jahre 1879 bis 1889, umspannt also ziemlich genau das dritte Jahrzehnt in Krazers Leben und bildet innerlich in diesem eine Einheit. Äußerlich wird sie unterbrochen und in zwei ungleiche Abschnitte zerlegt durch eine Studienreise, welche sich über drei Semester erstreckte. Riemann und Weierstraß waren die beiden großen Meister, welche an dem von Cauchy begründeten Gebäude der Funktionentheorie weiterbauten, auch seine Fundamente nachträglich befestigten. Nach der Lehre dieser beiden Männer mußte Krazer, nachdem er die Funktionentheorie zum Gegenstand seiner Lebensarbeit erwählt hatte, begierig sein. Gleich nach der Promotion, welche am 30. Juli 1881 stattgefunden hatte, wandte er sich nach Berlin, wo er noch den Unterricht von Weierstraß selbst genießen konnte und neben ihm einen anderen hervorragenden Mathematiker, Kronecker, auf dem Lehrstuhle fand.

Riemann war seit bald zwei Jahrzehnten tot. Seine weittragenden Ideen hatte Krazer durch Prym kennen gelernt; sie wurden damals in glänzender Weise gelehrt und weiterentwickelt durch Felix Klein. Dieser wirkte damals, ein Dreiunddreißigjähriger, also neun Jahre älter als Krazer, in Leipzig. Als Lehrer und Schüler lernten sich hier die beiden Männer kennen; hier legten sie den Grund zu jener Be-

ziehung, welche bis zum Tode Kleins zwischen ihnen lebendig blieb und für Krazers künftiges Wirken bedeutungsvoll wurde. Schon im Seminar in Leipzig, an dem er, von Berlin kommend, zwei Semester hindurch teilnahm, empfing er sogar von Klein die Anregung zu der Arbeit, mit welcher er sich nachher in Würzburg die veniam legendi erwarb.

Dies geschah am 24. Mai 1883. Sofort begann er seine Tätigkeit mit einer Vorlesung über „Anwendung der Infinitesimalanalysis auf Geometrie und Mechanik“. Es ist erstaunlich, wieviel der Fünfundzwanzigjährige in so jungen Jahren erreicht hatte. Unwillkürlich erinnert man sich einer gelegentlich von Goethe gemachten Anmerkung, daß der manche Tage und Stunden gewinnt, der sie nicht mit Frauen vergeudet. Unser Freund schien dem Einfluß des weiblichen Elementes bis dahin ganz unzugänglich zu sein. Das Tanzen zu erlernen, war ihm, obwohl er sich sonst durch körperliche Gewandtheit auszeichnete, nicht gelungen; und dadurch war ihm wohl die Gelegenheit, mit Frauen zu verkehren, recht beschränkt. Aber auch seine Stunde sollte schlagen.

Im Jahre 1884 starb in Würzburg der Bürgermeister Dr. Georg von Zürn und hinterließ nach kurzer Ehe eine junge Witwe, Euphemie mit Vornamen, die jüngste Tochter des Würzburger Hofapothekers Alexander Sippel; sie war von der Natur und durch Bildung mit schätzenswerten Gaben ausgestattet. Kinderlos, mochte sie sich in der nun zu groß gewordenen Wohnung recht einsam fühlen. Sie hatte das Glück, daß der junge Privatdozent, durch einen wohlwollenden Freund aufmerksam gemacht, in ihre Zimmer und bald auch in ihr Herz einzog. Er fand bei der schönen, klugen Frau alle Eigenschaften, welche er von einer Lebensgefährtin erhoffen mochte, und bald, schon im Sommer des Jahres 1886, wurde die Verbindung geschlossen. Nun begann eine glückliche Zeit für unseren Freund. Alle diejenigen, welche den Verkehr der beiden Gatten damals und in späterer Zeit beobachten durften, stimmen überein in entzückten, ja gerührten Schilderungen. Es war nicht eine Ehe mit „Kindtauf, Geschäften, Zwist und Streit“, sondern eine anmutige, niemals durch leiseste Trübung gestörte Kameradschaft.

Krazer war damals ein rüstiger und unermüdlicher Fußgänger, was wir, die wir ihn viel später gekannt haben, mit ebenso großem Erstaunen vernehmen, als die Tatsache, daß er die stärkste Sommerhitze nicht scheute und in Würzburg täglich nach Tisch den glühenden Steinberg erstieg. Nun hatte er für seine Wanderungen einen Genossen gefunden, wie er ihn brauchte. Aber nicht nur die nähere Umgebung seines Wohnortes und die Wohnorte seines Bruders, bei dem das Ehepaar regelmäßig jeden Sommer zu Besuch war, durchstreifte die Gattin

mit ihm. Krazer reiste gern und viel. Besonders zog es ihn nach Italien. Durch ernsthafte Studien erwarb er sich eine gründliche Kenntnis dieses Landes und seiner Kunst. Lebhaft, wie er von Natur war, liebte er es, den Cicerone zu machen, und nicht nur seine Verwandten, auch seine Freunde und Kollegen haben aus dieser seiner Neigung Nutzen gezogen. Die junge Frau war ein idealer Reisekamerad; etwas pedantisch wie er selbst, vielleicht aus Liebe zu ihm pedantisch, entwarf sie mit ihm jeweils im Winter den genauen Plan, nach welchem dann in den Osterferien, gewöhnlich am 19. März, die Reise angetreten wurde. Sie hatten auch zusammen die italienische Sprache gelernt und auf ihren gemeinschaftlichen Spaziergängen eingeübt. Ich bezweifle allerdings, daß Krazer es in diesem Punkte sehr weit gebracht hat. Jedenfalls hat er mir selbst erzählt, das die Unterhaltung mit einem italienischen Kollegen, den er besuchte, in den kümmerlichsten Ansätzen stecken geblieben sei. Überhaupt hat der so vielseitig begabte Mann für die Erlernung von Sprachen, namentlich für den Gebrauch der lebenden, wenig Anlage gezeigt. Das Lateinische kannte er gründlich, doch war sein Ausdruck mühsam und etwas steif. Zur Beurteilung seiner griechischen Kenntnisse fehlt mir jeder Anhaltspunkt. Von den modernen Sprachen hat er das Englische nie erlernt, und er legte mit einem gewissen Unmut ein Buch, ein Heft beiseite, wenn es die ihm unsympathische Sprache zeigte. Die im Gymnasium erlernte französische Sprache mußte er, schon um seiner funktionentheoretischen Studien willen, fleißig üben; er kannte sie grammatikalisch sehr gut, seine Aussprache aber schien auf einen entschiedenen Mangel an Gehör zu deuten. Vielleicht war dieser Sinn auch bei der Erziehung vernachlässigt worden, gleich einem anderen, welcher schlief und in der jungen Frau eine Erweckerin finden sollte. Krazers Vater war, wie wir wissen, ein vortrefflicher, aber ein starrer, wohl etwas trockener Mann gewesen. Er stattete seine Söhne mit allem freigebig aus, nur mit einer Kunst nicht, die ihm entbehrlich schien. „Ich brauche Studenten und keine Musikanten", pflegte er zu sagen. Darum hat Krazer nie ein Instrument erlernt, was er später tief bedauerte. Frau Euphemie besaß eine schöne, zum Gesang ausgebildete Stimme. Gewiß war sie es, die in ihrem Gatten die Freude an der Musik zum Erblühen gebracht hat. Jedenfalls habe ich ihn nur bei zwei Gelegenheiten von seiner Frau reden hören. Einmal bei Erwähnung Siziliens, wohin sie ihm gefolgt war, das andere Mal nach einem Konzert, in welchem mehrere früher von ihr gesungene Lieder vorgetragen worden waren. Mit der schönen Fremde und mit der Musik war ihr Andenken für ihn untrennbar verbunden.

Obwohl sie die Gesellschaft nicht mieden, lebten die Gatten doch

im tiefsten nur füreinander, mit einer im behaglichen Gleichmaß gestalteten Einteilung ihrer Tage. Daß die Frau in ihrer zweiten Ehe wie in der ersten ohne Kinder blieb, war ihm nicht schmerzlich. Wenn sie darüber klagte, pflegte er sie mit den Worten zu trösten: „Du hast ja mich.“ Ein Beweis, daß auch er in ihr alles Glück vereinigt gefunden hatte.

Nach einer sechsjährigen Tätigkeit, welche er höchst erfolgreich als Privatdozent in Würzburg ausgeübt hatte, erhielt Krazer im Januar des Jahres 1889 eine Anfrage des Kurators der Universität Straßburg, ob er eine durch den Weggang des Professors Schering freigewordene außerordentliche Professur übernehmen wolle, mit der Verpflichtung, alljährlich Vorlesungen über algebraische Analysis, analytische Geometrie und Differential- und Integralrechnung abzuhalten.

Schmerzlich mag es ihm gewesen sein, das Werk, dessen Bearbeitung ihn alle die Zeit hindurch täglich für mehrere Stunden mit seinem Lehrer Prym zusammengeführt hatte, unvollendet zurückzulassen; allein da es diesem nicht gelang, die bayerische Regierung zu bindenden Versprechungen gegenüber seinem Mitarbeiter zu bewegen, mußte der Bund sich lösen. Krazer nahm seinen Abschied und zog im Sommersemester zum zweiten Male nach Straßburg, wo ihn seine jungen studentischen Freunde und seine alten Lehrer erwarteten.

Dreizehn Jahre hindurch übte nun Krazer in der neuen Stelle eine bedeutende Tätigkeit aus. Seine ausgezeichneten Vorlesungen erfreuten sich bald eines großen Rufes und füllten die bis dahin nur spärlich besetzten Hörsäle so reichlich mit Studierenden, daß begehrliche Blicke aus den oberen Regionen des akademischen Stufenreiches sich auf den Besitz des jungen außerordentlichen Professors richteten. Aber dieser blieb fest und wies seine Bestallung vor, welche ihm die Lehraufträge sicherte.

Ich erzähle dieses an sich unbedeutende Erlebnis, weil er es selbst mehrmals mit Behagen erzählt hat, und weil es auch wiederum für seine Art kennzeichnend ist. Die Fähigkeit, ein an ihn gerichtetes, ihm unbequemes Ansinnen mit einem gutmütigen und auch etwas ironischen Kopfschütteln einfach abzulehnen, hat er ja später unter uns viel geübt. So mancher drohende Zusammenstoß, welcher bei einem anderen zu Krieg und Feindschaft geführt hätte, wurde auf solche Weise unschädlich abgeleitet.

Schon in Straßburg war Krazer nicht nur allgemein beliebt, er hatte sich auch eine gewisse Machtsphäre geschaffen, er nahm eine nicht immer förmlich, aber durch unausgesprochene Unterwerfung anerkannte beherrschende Stellung ein, was zu den Bedürfnissen seines Lebens ge-

hörte. Im Sprechzimmer der Dozenten bildete er den Mittelpunkt, er bestimmte Anfang und Ende der Weihnachtsferien und der Pfingstferien, er stellte die Zahl der Anwesenden bei der Rektorwahl fest, alles kleine aber deutliche Symptome. Man hätte ihn, so wird behauptet, unfehlbar mit Einstimmigkeit zum Rektor gewählt, wenn die Verfassung der Universität die Verleihung dieser Würde an einen außerordentlichen Professor gestattet hätte.

Seine wissenschaftliche Arbeit gehörte dem Hauptwerke, dem Lehrbuch der Thetafunktionen, welches in jenen Jahren reifte.

Wenn man die Würzburger Epoche den Frühling in Krazers Leben nennen kann, so wird die Straßburger Zeit als sein Sommer zu gelten haben.

Aber schon ballten sich die Wolken, welche durch einen schweren Schlag den Herbst einleiten sollten. Im Jahre 1901 erkrankte seine Frau. Lange hielt sie sich aufrecht, um den geliebten Mann nicht zu bekümmern. Aber das Leiden war stärker als ihre Liebe. Nachdem sie sich erst einer, dann einer zweiten Operation hatte unterziehen müssen, schien sie sich völlig zu erholen. Auf die Weihnacht fuhr sie von Straßburg nach Traunstein, um das Fest in der Familie von Krazers Bruder zu feiern. Wie ein Kind soll sie sich dabei noch gefreut haben, obgleich das Fieber schon heimlich in ihr glühte. Sechs Wochen später erlosch sie in den Armen ihres Mannes mit den Worten: „Jetzt sterbe ich.“ Klar bis zum letzten Augenblick, hatte sie den Wunsch ausgesprochen, in Dillingen bestattet zu werden. Dort, in der Erde, welche die Jugendspiele ihres Gatten getragen hatte, wollte sie ihn erwarten.

Und mir scheint, das Vierteljahrhundert, welches er nach diesem Ereignis noch unter uns verlebt hat, so reich an Tätigkeit und Erfolg es auch war, so heiter sein Antlitz oft erscheinen, sein Lachen oft ertönen mochte, es war im Grunde auch für ihn nur ein großes Warten.

Er hatte der Sterbenden versprechen müssen, sich nach ihrem Tode wieder zu vermählen; er hat dieses Versprechen nicht gehalten, konnte es nicht halten. Auch er mußte treulos werden aus Treue.

Hätte die Gattin ihm Kinder hinterlassen, das Ereignis ihres Todes wäre, äußerlich genommen, furchtbarer gewesen; aber die Sorge würde ihm auch geholfen haben, den Schmerz zu überwinden. Gerade weil das Leben, welches er bis dahin mit ihr zusammen geführt hatte, in seiner gewohnten Form weitergehen konnte und doch seiner eigentlichen Seele beraubt war, deshalb muß es für ihn sehr schwer zu ertragen gewesen sein.

Die Nachtwachen, die bangen Sorgen und Aufregungen hatten ihn nie verhindern können, für die Vollendung seines Buches tätig zu sein: es erschien in demselben Jahre. In Würzburg hatte Krazer eine gewaltige Arbeit mit aufopfernder Hingabe an jenes Werk gewendet, welches ihn mit seinem Lehrer Prym verband. Diese Leistung war der wissenschaftlichen Welt nur durch einen im Jahre 1882 veröffentlichten Auszug ungefähr bekannt geworden; ihre volle Frucht ist uns ja auch heute noch nicht geschenkt. Nun, im Jahre 1902, stand Krazer zum ersten Male mit einem umfangreichen, selbständigen Werke vor seinen Fachgenossen. Der Weg zur ordentlichen Professur konnte ihm nicht mehr lange verschlossen bleiben. Unsere Hochschule hatte das Glück, ihn an sich zu ziehen und dauernd zu fesseln. Es ist das Verdienst des ausgezeichneten Geometers Friedrich Schur, den wir ja auch mit Stolz zu den Unseren zählen, daß das Ministerium einer von mächtigen Persönlichkeiten unserer Hochschule begünstigten Gegenströmung nicht achtete und auf den Lehrstuhl des vom Amte zurücktretenden Professors Ernst Schröder, des berühmten Schöpfers der „Algebra der Logik", Adolf Krazer berief. Noch im gleichen Jahre, im Wintersemester 1902 auf 1903, begann dieser seine Tätigkeit.

Die Einfügung in den neuen Wirkungskreis ging nicht reibungslos vor sich. Die Vorlesungen, welche in Straßburg so warme Anerkennung gefunden und Hörer in großer Anzahl angelockt hatten, erfreuten sich durchaus nicht von Anfang an der Beliebtheit, welche ihnen später mit Recht zuteil ward. Man klagte, diese Vorträge seien zu schwer, ihr Zeitmaß zu rasch, und Krazer mußte sich kräftig seiner Haut wehren. Unter anderen Argumenten brachte er vor, was so richtig und so durchaus kennzeichnend für ihn ist: es sei gar keine große Empfehlung für eine Vorlesung, wenn sie ganz ohne Schwierigkeit verstanden werde. In seinem Falle lag die Sache wohl hauptsächlich daran, daß er so ausgezeichnet konnte, was unsere Studierenden damals so wenig konnten, als sie es heute können, weil die Schule sie darauf nur ungenügend vorbereitet: das Rechnen. Nicht die großen Linien, nicht die führenden Gedanken konnten dem Zuhörer Schwierigkeiten bereiten; denn die wußte er so klar und ohne alle Akribie vorzutragen wie nur einer; aber wenn er, um nicht kostbare Zeit zu verlieren, eine elementare Rechnung, deren Hilfsmittel er als bekannt voraussetzte, mit der ihm eigenen unfehlbaren Sicherheit in eiligem Tempo durchführte, dann ging wohl der Kontakt mit seinen Zuhörern verloren, um die er sich recht wenig kümmerte. Er war sich bewußt, daß das, was er vortrug, richtig und gut war. Die Zuhörer mochten nun selbst zusehen, wie sie sich seine Lehre zunutze machen konnten. Zugeständnisse machte er nicht.

Eines darf nicht verschwiegen werden: Krazer wollte nie anerkennen, daß der mathematische Unterricht auf der Technischen Hochschule sich von dem Universitätsunterricht wesentlich unterscheiden müsse. Er hatte seine Vorlesungen als Universitätslehrer auf das sorgfältigste ausgearbeitet, und noch in den letzten Jahren in Karlsruhe benutzte er jene zierlich beschriebenen Zettel, auf denen zu lesen war: Straßburg, in dem und dem Semester. Zur Stützung seiner Ansicht pflegte er auszuführen, daß man unter den jungen Technikern gewiß nicht weniger gute Köpfe antreffe als unter den Studierenden des höheren Lehramts (er pflegte seine Erfahrungen an diesen nicht mit den schmeichelhaftesten Ausdrücken wiederzugeben). Freilich handelt es sich bei der Frage keineswegs darum, ob die Ansprüche an Intelligenz und Fassungskraft auf der einen oder auf der anderen Seite höher gespannt werden dürfen, sondern es handelt sich um die Richtung, das Ziel, die Grundeinstellung des Geistes, die Mentalität. Aber darüber war nicht mit ihm zu reden.

Der größte Teil der Arbeit, welche Krazer auch in Karlsruhe seinen Vorlesungen reichlich widmete, bestand in der Ausarbeitung und Zusammenstellung von Beispielen und Übungsaufgaben. Hierin war er ein Meister. So wurden seine Vorträge immer mehr zu Kunstwerken. Der Gegenstand für jede Stunde war genau bestimmt und überschritt nie die vorgesetzte Zeit. Seine Stimme war nicht stark und nicht immer den in einem Hörsaal kaum verstummenden Geräuschen gewachsen. Seine Redeweise vermied nicht den liebenswürdigen Ton seiner Heimat, ward aber niemals nachlässig. Er sprach im allgemeinen ruhig, ohne rednerische Wirkung anzustreben, und doch niemals einförmig. Drollige, im vollkommenen Ernst oder mit feinem Lächeln ausgesprochene Bemerkungen würzten seinen Vortrag.

Im Zusammenhang mit der Betrachtung seiner Lehrtätigkeit mag einer merkwürdigen Tatsache gedacht werden. Es wird uns erzählt, daß Krazer schon als Schüler niemals bei Schlußfeiern und dergleichen Anlässen vortragen wollte, wozu ihn seine Stellung in der Klasse berechtigte; er überließ diese Auszeichnung gern seinem Bruder. Ebensowenig hat er als akademischer Lehrer außerhalb des Hörsaals das Wort zu wissenschaftlicher Rede ergriffen, wenn nicht irgendeine besondere Gelegenheit, wie etwa die Feier der Übernahme des Rektorates, ihn dazu verpflichtete.

Reibungen wie die oben erwähnte können zu Feindschaften und bitteren Kämpfen führen und haben auch an unserer Hochschule in ähnlichen Fällen schwere, ja tragische Konflikte nach sich gezogen. Nicht so bei Krazer. Er wußte sich in Karlsruhe wegen des anfänglichen Mißerfolges seiner Vorlesungen ebenso geschickt zu verteidigen,

als er sich in Straßburg wegen ihres neidweckenden Erfolges gewehrt hatte. Er besaß eine Persönlichkeit von unwiderstehlichem Zauber, große weltmännische Gewandtheit; er wußte genau, wie weit er in jedem Falle gehen durfte, und reizte seine Gegner niemals unnötigerweise. So kam es, daß, wie einer von seinen Freunden sehr schön sagte, „jeder fremde Wille vor dem seinen erlag“. Wir müssen allerdings hinzufügen: Wenn er fast immer erreichte, was er wollte, so wollte er auch niemals etwas, das ihm nicht erreichbar schien. In der Minderheit zu kämpfen, war er nicht der Mann. Eine Unternehmung, deren Mißerfolg ihm als sicher galt, widerriet er, auch wenn er ihr Ziel billigte. Mit einem guten Antrag überstimmt zu werden, schien ihm eine Niederlage, welche seinen Stolz, seine Eitelkeit verletzte.

Solche Vorsicht, von einem scharfen psychologischen Blick, von einer immer zunehmenden Erfahrung unterstützt, gehörte zu den Eigenschaften, welche ihn nach und nach in eine beherrschende Stellung führten. Wenig bedeutet es in dieser Beziehung, daß er zweimal das Amt des Rektors an unserer Hochschule bekleidet hat. Es wäre ihm gewiß noch öfter gegönnt worden, wenn er es gewünscht hätte. Aber er war ja viel mehr. Er war gewissermaßen unser ständiger Rektor, jedenfalls der Ratgeber für alle diejenigen, welche sich um die Geschicke der Fridericiana bemühten.

Und wie wir, nach Goethes tiefsinnigem Wort, Menschen um der Wohltaten willen lieben, welche wir ihnen erweisen, so verwuchs er immer enger mit seiner Hochschule durch das Gute, welches er ihr tat. Deshalb hat er sich wohl niemals ernstlich nach einem anderen Wirkungskreis gesehnt, wenn er sich auch einmal ernstlich gekränkt fühlte, als ihm eine Stelle, auf die er sich ein Anrecht zuschrieb, entging.

Möglich wäre es ihm wohl gewesen, seinen Einfluß auch in eigener Sache zu verwerten. Denn schnell war seine Machtsphäre weit über den engen Bereich der Hochschule hinausgewachsen. Die Unterrichtsverwaltung unseres Landes erkannte bald, welche Kraft sie an ihm besaß, suchte seinen Rat in zahlreichen Fällen und übertrug ihm stets neue Würden und Pflichten. Durch sein Amt als Schriftführer der Deutschen Mathematiker-Vereinigung stand er mit den meisten prominenten Vertretern unseres Faches in Beziehungen.

Viele Jahre hindurch kam es im Bereiche deutscher Hochschulen kaum zur Besetzung eines mathematischen Lehrstuhls, ohne daß seine Meinung wenigstens angehört worden wäre. Und auf der anderen Seite erbaten manche von den Berufenen, welche sich unentschlossen fühlten, seine sicher leitende Hand. Er gefiel sich in dieser Machtstellung und erfreute sich an ihr wie an den äußeren Ehren, welche ihm reichlich

zuflossen. Seinen Titel, den er sich nie verbat, führte er mit Stolz bis an sein Ende. Und wer hätte ihm solche Genugtuung nicht gegönnt? Schwach genug war der Trost, den sie ihm bot für verlorenes Glück. Sein Leben spann sich in gewohnter Weise fort. Bis zum Kriege fuhr er immer noch in jedem Frühjahr nach Italien, öfters begleitet von seinen Verwandten; die Sommerferien verbrachte er in der bayerischen Heimat, zuletzt gewöhnlich in oder in der Nähe von Traunstein.

Wer die Geschichte seines Lebens nicht kannte, mochte ihn eher für einen Junggesellen als für einen Witwer halten. Ich denke dabei weniger an gewisse Eigenheiten, welche die Welt an jenen zu beobachten und zu belächeln pflegt, als vielmehr an die gesamte Geisteshaltung, welche man so kennzeichnen kann, daß der ledige oder doch kinderlose Mann die Ruhe und Ungestörtheit als den normalen Zustand, die Störung als die Ausnahme ansieht, während bei dem Familienvater dafür gesorgt ist, daß die entgegengesetzte Meinung sich ausbildet.

Man redet von pedantischen Junggesellen. War Krazer pedantisch? Ja, wenn man das Wort in der Bedeutung gebrauchen will, in welchem es oft aus dem Munde von Menschen zu tönen pflegt, welche selbst in weit schlimmerem Sinne Pedanten sind. Unser Freund beobachtete peinlich genau die Einteilung seiner Tage, und gewiß lächelten wir manchmal über die eigentümliche, an eine gespannte Feder erinnernde Haltung seines Körpers, wenn eine Sitzung, ein wissenschaftlicher Abend über die Stunde hinaus sich ausdehnte, welche ihn zur gewohnten Mahlzeit rief. Ja, ich erinnere mich, daß er einmal gegen einen Antrag stimmte, für welchen er sonst wohl wäre zu haben gewesen, weil dessen Urheber ihm durch die Sitzung das Mittagessen verdarb. Nun wohl! Das sind Gewohnheiten recht harmloser Art, welche kaum Schaden anrichten, demjenigen aber, dem sie eigen sind, gar nützlich sein können. Den Namen des Pedanten verdienen in Wahrheit nur die Menschen, welche das Leben durch das Wort töten. Nehmen wir die Bezeichnung in diesem tieferen Sinne, so war Krazer gerade das Gegenteil eines Pedanten. Warum unterschieden sich die Sitzungen, auf deren Verlauf er Einfluß gewinnen konnte, also namentlich die im engeren Kreise gehaltenen, so wohltuend von den fruchtlosen Redegefechten, wie wir sie oft erleben? Warum glichen die Zusammenkünfte unserer Abteilung, wenn er ihnen beiwohnte, dem Beisammensein einer friedlichen Familie? Warum erledigte er jede übernommene Verpflichtung glatt und sicher, so daß die Lösung der Aufgabe, auch wo sie vielleicht nicht die denkbar beste war, durch ihre Rechtzeitigkeit doch die wirksamste wurde? Eben weil er in wichtigen Dingen nicht von starren Grundsätzen abhing, sich um die Form eher zu wenig als zu viel kümmerte, weil er das, was die Stunde von ihm

forderte, so gut machte, als es ihm diese Stunde eingab, ohne durch ängstliches Streben nach größter Vollkommenheit die Erfüllung zu verzögern und dadurch wertlos zu machen.

Überall bekundete er einen herzhaften Sinn für das Wesentliche. In Nebensachen konnte er bis zur Nachlässigkeit gleichgültig erscheinen. Hier überließ er sich willig seinem Hang zur Bequemlichkeit, während er in jeder von ihm ernst genommenen Sache der gewissenhafteste aller Menschen war und keine Arbeit scheute.

Als wir mit Krazer in Würzburg und Straßburg weilten, haben wir sein wissenschaftliches Forschen an die erste Stelle gerückt; als wir seines Wirkens in Karlsruhe gedachten, drängte sich der glänzende Lehrer, der herrliche Mensch vor den Forscher. Zu einem großen und ungerechten Irrtum würden wir Veranlassung geben, wollten wir nicht sogleich betonen, daß Krazer ungeachtet der vielverzweigten und arbeitsreichen Verpflichtungen, die der allezeit zur Hilfe Bereite allmählich auf sich nahm, bis zu seinem Ende nicht aufgehört hat, der Wissenschaft höchst wertvolle Dienste zu leisten.

Sein Arbeitsgebiet blieb die Theorie jener Thetafunktionen, von welchen wir oben einen Begriff zu geben versucht haben. Obwohl er ungemein reiche Kenntnisse in allen Teilen der Mathematik besaß und durch die, bis in das Alter bewahrte Fähigkeit, sich leicht in fremde Gedankengänge hineinzuversetzen, dauernd noch vermehrte, hat er sich produktiv in engen Grenzen gehalten. Dies erkennt man, wenn man die Überschriften seiner gedruckten Arbeiten, die Gegenstände der glänzenden Vorträge durchsieht, welche er alljährlich in unserem mathematischen Kränzchen hielt. Dieses treue Bemühen um die Säuberung, Verschönerung, Ausgestaltung, Vollendung einer zuerst freiwillig gewählten Disziplin, vollzog sich bald im Dienste einer ihm von außen gestellten bedeutenden Aufgabe. Wir müssen hier wieder den Mann erwähnen, welchen wir in Leipzig als Lehrer Krazers kennengelernt haben.

Felix Klein hatte im Jahre 1894 in Gemeinschaft mit Franz Meyer den Plan zu einer Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften entworfen, welche in knappen Berichten das auf jedem Teilgebiete Geleistete zusammenfassen und mit einem reichen, womöglich vollständigen Apparat von Literaturangaben begleiten sollte. Ein die Potentialtheorie behandelnder Artikel war ganz in diesem Stile der straffsten Kürze von Heinrich Burkhardt und Franz Meyer verfaßt und an die anzuwerbenden Mitarbeiter versandt worden, um diese zu möglichst gleichmäßiger Behandlung ihrer Gegenstände aufzufordern.

Wer gute Köpfe zu gemeinsamer Arbeit versammeln will, muß gewärtig sein, auf Individualitäten zu stoßen, denen er seinen Willen nicht

aufzwingen kann. Pringsheim war wohl der erste, welcher den Rahmen der Enzyklopädie sprengte, indem er darin seine damals noch nicht im Zusammenhang veröffentlichten Forschungen über Funktionenlehre zur glänzenden Darstellung brachte. Felix Klein war viel zu klug und kannte viel zu gut den wahren Vorteil seines Unternehmens, als daß er so hervorragende Beiträge um der aufgestellten Richtlinien willen hätte beanstanden mögen. Er, der seine Absichten, wo es ihm notwendig schien, so gut durchzusetzen wußte, ließ sich gefallen, daß die Enzyklopädie weit über die ihr ursprünglich gesteckten Grenzen hinauswuchs und ein schon dem Umfange nach ganz gewaltiges Werk wurde. Wenn er auch allzu große Überschreitungen einzudämmen wußte, so ist es doch so gekommen, daß wir, wenn uns heute ein neues Heft der noch immer nicht abgeschlossenen Sammlung vorgelegt wird, eine Monographie des behandelten Gegenstandes erwarten, welche sich von einem Handbuche oder Lehrbuche nur durch das Fehlen ausgeführter Beweise und durch das Vorhandensein einer ungewöhnlichen Fülle von Literaturangaben unterscheidet. Die wissenschaftliche Forschung ist auf allen Gebieten der Mathematik durch die Enzyklopädie erleichtert und mächtig gefördert worden.

Zu den großen Gaben Felix Kleins gehörte auch der scharfe Blick bei der Wahl der Männer, denen er die Arbeit für die von ihm geleiteten Unternehmungen anvertraute. Daß für den geplanten Enzyklopädieartikel über Abelsche Funktionen Krazers Kraft gewonnen werden mußte, konnte ihm nicht zweifelhaft sein. Die ungemein reichen Kenntnisse, der unermüdliche Fleiß, die Gewissenhaftigkeit und das unparteiische gesunde Urteil ließen ihn gerade für diese Arbeit unschätzbar erscheinen. Aber so groß war die Aufgabe, daß auch ein solcher Mann sie kaum allein übernehmen konnte. Krazer gedachte sich mit dem hervorragenden Wiener Forscher Wirtinger darein zu teilen. Leider hat dieser, durch häusliches Ungemach und Krankheit bedrückt, seine Mitarbeit wesentlich einschränken und bald ganz einstellen müssen. So blieb die Last doch schließlich auf Krazers Schultern liegen. Dieser hätte nun die Möglichkeit gehabt, auch den Lohn der Anerkennung allein zu ernten und den Artikel nur mit seinem Namen zu zeichnen. Er hat dies verschmäht; und zwar einmal aus der Vornehmheit seiner Natur heraus, die ihm eigen war, sodann aber auch aus Einsicht und Klugheit. „Wirtinger“, sagte er einmal zu mir, „ist ein so genialer Kopf, daß mich eine in einem Briefe hingeworfene Äußerung von ihm oft weiter bringt als langes eigenes Suchen.“ Des Vorzuges solcher, wenn auch nur gelegentlicher, Förderung wollte er sich, wollte er sein Werk nicht berauben. Wir sehen, daß der Mann, welcher gewiß nicht ohne

Ehrgeiz, vielleicht nicht einmal ganz frei von einer gewissen Eitelkeit war, auf eigenen Ruhm verzichten konnte, wo es die Sache zu erheischen schien.

Wer den Dingen fernsteht, könnte auf den Gedanken verfallen, daß eine derartige Arbeit, da sie doch nur ein Referat darstelle, zwar großen Fleiß und gutes Verständnis für recht schwierige Gegenstände, aber kaum Erfindungsgabe verlange. Dies ist nun keineswegs der Fall. Gerade weil die Enzyklopädie jene Umwandlung durchgemacht hat, welche ich oben zu kennzeichnen versuchte, erforderte die Darstellung eines noch keineswegs in allen Teilen abgeschlossenen Gebietes wahre Forscherarbeit. Eine Anekdote möge dies bestätigen. Als der Artikel schon im Druck war, wurde plötzlich ein Blatt der Handschrift vermißt. Krazer glaubte die Lücke rasch schließen und die verlorene Seite wieder ausarbeiten zu können. Es gelang ihm nicht, das, was ihm einst eine glückliche Stunde eingegeben hatte, wiederzufinden, und hätte er nicht aus Vorsicht ein zweites Exemplar des Manuskriptes in der Stahlkammer seiner Bank verwahrt gehabt, so wäre dem Werke ein nicht gut zu machender Schaden erwachsen. Darum klang es nur paradox, entsprach aber durchaus den Tatsachen, daß unser Kollege Baldus den Enzyklopädieartikel Krazers als den Abschluß von dessen produktiver Tätigkeit bezeichnete.

Als Krazer im Jahre 1920 diese mühevolle Arbeit vollendete, hatte sich auf dem Gebiete der Mathematik ein für ihn sehr schmerzlicher Umschwung vollzogen. Wir haben gesehen, wie mächtig das Problem der Umkehrung Abelscher Integrale und die damit zusammenhängenden Theorien alle Kreise ergriffen und zu wetteifernder Tätigkeit erhitzt hatte. Dieses Feuer war mit unerhörter Plötzlichkeit erloschen, das allgemeine Interesse hatte sich ganz anderen Dingen zugewendet. Erscheinungen ähnlicher Art lassen sich auch in den anderen Wissenschaften beobachten, und desto häufiger, je größer die Unrast der Zeit wird. Die Tatsache ist nicht eben erfreulich, und eine Untersuchung ihrer mannigfaltigen Ursachen möchte nicht ohne Interesse sein; denn wenn wir uns auch gerne damit abfinden, daß Hüte und Kleider in immer kürzeren Zeitspannen Form und Farbe wechseln, so will uns doch mit dem Ernste der Wissenschaft die Mode nicht recht zusammenstimmen. Gewiß trägt das System unserer akademischen Berufungen mit seiner, in der Wurzel wohlberechtigten, in der Auswirkung unheilvollen Forderung produktiver Leistungen einen Teil der Schuld an solcher Unbeständigkeit der Forschungswege. Wie dem auch sei, es mußte Krazern kränken und hat ihm gewiß die Lust zu weiterer Beschäftigung mit dem Gegenstande verleidet, daß sein Werk, als er es aus der Hand gab, klanglos in das Leere versank.

Gut war es daher, daß in diesem entmutigenden Zeitpunkte schon seit vielen Jahren eine andere wissenschaftliche Aufgabe auf seinen Schultern lag, welche er nun mit ungeteilter Arbeitskraft fördern durfte.

Wir haben heute schon wiederholt den Namen Leonhard Euler genannt. Wer nichts anderes von diesem großen Forscher weiß, hat doch vielleicht von seiner erstaunlichen Fruchtbarkeit reden hören. Gerade die übergroße Anzahl seiner mehr oder weniger umfangreichen Werke hatte bewirkt, daß der bald nach Eulers Tode und später wiederholt geäußerte Wunsch, das Werk des Meisters in einer Gesamtausgabe vereinigt zu sehen, nach einigen wissenschaftlichen Vorarbeiten als unerfüllbar bezeichnet werden mußte.

Seltsame Empfindungen und Gedanken werden in uns wach, wenn wir hören, daß unserer, von unerhörten Ereignissen erschütterten Zeit die Erfüllung dessen vorbehalten war, was vorhergehenden Generationen unausführbar schien, daß, wenige Jahre nur vor dem Weltkriege, Gelehrte aller Nationen sich zu einem Friedenswerke ohnegleichen zusammenschlossen, daß man zur Überwindung der ungeheuren finanziellen Schwierigkeiten in dem unglücklichsten Zeitpunkte endlich den Mut faßte. Denn zwischen ihm und der Vollendung des Werkes sollte ja die Wirtschaft der ganzen europäischen Welt zusammenbrechen.

Wie jede bedeutende Tat, entsprang auch die Verwirklichung jenes Unternehmens dem Enthusiasmus. Diesmal dem Enthusiasmus eines einzigen Mannes, welchen die Wissenschaft um dieser Hingabe willen nie vergessen wird: Ferdinand Rudio.

Es ist ein Ruhm für unsere Hochschule, daß auf dem Generaltitel der stattlichen Bände, welche jetzt die *Opera omnia Leonhardi Euleri* der wissenschaftlichen Welt zugänglich machen, neben jenem Namen die Namen von zweien ihrer Lehrer stehen:

Paul Staeckel und Adolf Krazer.

Der ausgezeichnete Historiker Staeckel hatte einen großen Teil der wissenschaftlichen Vorarbeit geleistet; er beseelte und befeuerte in seiner Weise das Unternehmen. Krazer wirkte neben ihm mehr im Stillen und erst nach Staeckels Tode wurde man recht gewahr, welche Kraft das Eulerunternehmen schon längst an Krazer besaß.

Das war nun auch eine Arbeit, wie sie seiner Natur vollkommen entsprach. Sie war wissenschaftlich in höchstem Sinne, erforderte eindringendes mathematisches Verständnis, reiche Kenntnisse, einen ausgeprägten Sinn für historische Zusammenhänge, und hatte doch etwas von jener beglückenden, stillen Regelmäßigkeit, um welche er einst den Steinklopfer in Würzburg beneidet hatte. Wie dieser die Steinhaufen,

so konnte Krazer nun am Abend die erledigten Bogen zählen und mit Befriedigung zur Post bringen. An Tagen, welche ihm die Eingebung zu eigener Produktion versagten (und solche kennt der Mathematiker ebensowohl als der Schriftsteller, der Künstler), brauchte er nicht zu feiern oder sich unnötig zu quälen; denn hier war ja Arbeit, welche ohne besondere Stimmung von dem Fleißigen getan werden konnte und das böse Gewissen beruhigte, welches den mit dem Fetisch der Arbeit aufgewachsenen Kulturmenschen plagt, wenn er einmal untätig sein muß.

Mit welcher Liebe widmete sich aber auch unser Freund diesem Geschäfte! Hier kannte seine Gewissenhaftigkeit keine Grenzen, und die Pedanterie in kleinen Dingen, welche wir als einen harmlosen, beinahe liebenswürdigen Zug seines Wesens hatten gelten lassen, sollte diesem Werke zum Segen gereichen. Die große Eulerausgabe bezweckt nicht nur die Herstellung eines dem Inhalte nach korrekten Textes, sie will auch durch Vorreden und zahlreiche Anmerkungen das Verhältnis der Arbeiten untereinander, zu den Leistungen der Vorgänger und Zeitgenossen sowie die Auswirkung in die Folgezeit kennzeichnen, dunkle Stellen aufklären und die Berechtigung zweifelhafter Schlüsse untersuchen.

Daß Krazer diese großen Aufgaben vortrefflich löste, braucht kaum ausgesprochen zu werden. Aber seine Aufmerksamkeit erstreckte sich auch auf die kleinsten Dinge. Ich hatte das Glück, die Druckbogen der von mir herausgegebenen Abhandlungen in stundenlangen Sitzungen mit ihm durchzusprechen, und zehre noch jetzt bei der Fortsetzung der Arbeit von dem, was ich dabei gelernt habe. Die Interpunktion überlegte er auf das sorgfältigste. Hatten wir aber einmal einen Grundsatz aufgestellt, so blieb er unerbittlich dabei, auch wenn der besondere Fall eine Ausnahme zu fordern schien. Er war stolz auf seine Fähigkeit, Druckfehler zu bemerken, und es machte ihm die größte Freude, wenn er ein von mehreren Korrektoren nicht beachtetes Versehen dieser Art entdeckte. In der Anordnung des Satzes war nichts seiner Sorgfalt zu unwichtig, und es war erfreulich zu sehen, wie er dabei seinen feinen und gebildeten ästhetischen Sinn neben der logischen Forderung zur Geltung kommen ließ.

An sechs Bänden der Gesamtausgabe hat er als Herausgeber gewirkt. Einige waren von vornherein seiner Sorgfalt anvertraut, andere hat der Hilfsbereite in kritischen Augenblicken übernommen, wenn der Tod eines Mitarbeiters das Werk ins Stocken zu bringen drohte. Vielleicht noch mehr als dies bedeutet die Tatsache, daß kein Bogen des bereits auf 22 Bände angewachsenen Werkes gedruckt worden ist, ohne daß er ihn durchgesehen hätte. Wir verstehen den Schmerz Rudios,

welcher vor kurzem die Worte schrieb: „Die Schwere des Verlustes wird erst im Laufe der Zeit empfunden und gebührend gewürdigt werden können."

Da wir mit dieser Skizze von dem Mathematiker Krazer Abschied nehmen müssen, ist wohl hier der Ort, wo wir versuchen sollten, mit kurzen Strichen seine besondere Art zu kennzeichnen.

Es gibt sehr verschiedene Mathematiker. Auf dem einen Flügel stehen diejenigen, welchen es darauf ankommt, die Natur des mathematischen Denkens zu ergründen. Das sind die Philosophen, welche sich zu Mathematikern machen, um die eigene Arbeit zum Gegenstand erkenntnistheoretischer Betrachtung zu erheben. Zu ihnen gehörte Krazer gewiß nicht. Andere sind schon wirklich Mathematiker, aber auch ihnen ist das Ziel nicht köstlicher als der Weg, sie freuen sich ebensosehr über einen neuen Beweis eines alten Satzes, als über ein neues Resultat. Sie sind Kritiker und Ästhetiker. Sie sind immerfort beschäftigt, an den Fundamenten des Baues zu arbeiten. Auch hier treffen wir unsern Freund nicht an. Das Gebiet zum Beispiel, welches wir als „Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen" zu bezeichnen pflegen, hat ihn niemals angezogen. Ja, ich habe ihn im Verdacht, daß er eine heimliche Schadenfreude empfand, als in unseren Tagen der Intuitionismus so manches anscheinend unumstößlich begründete Resultat doch wieder in Zweifel zog. Dabei lag es ihm ganz ferne, sich selbst etwa den Intuitionisten beizählen zu wollen.

Auf dem anderen Flügel stehen diejenigen, welche die Mathematik nur um ihrer wunderbaren Anwendungen willen lieben, Männer der Naturwissenschaft und der Technik, auch diese wieder in mannigfachen Abstufungen, von dem rein wissenschaftlich gerichteten Geiste bis zu dem, welcher in der Mathematik nur die melkende Kuh erblickt. Auf dieser Seite wird denn auch unsere Wissenschaft mehr oder minder unsauber getrieben.

Zwischen beiden Flügeln sehen wir wahre Mathematiker, und unter ihnen werden wir unsern Krazer finden, ich will sie die Mathematiker der Mitte nennen. Ihnen kommt es auf das Resultat an, aber nicht auf die außermathematische Anwendung. Die Methode ist ihnen Mittel, nicht Zweck. Sie wählen ihr Werkzeug so scharf, als es ihnen eine gewisse Epoche überliefert hat, ohne auf seine Überfeinerung bedacht zu sein. Ja manchmal bekümmert es sie kaum, wenn es an einem Problem sich stumpf gearbeitet hat. Wenn nur die Arbeit damit noch Ergebnisse liefert. Daß ich diese Mathematiker nicht herabsetzen will, möge dadurch bekundet werden, daß ich Eulern ihren Anführer und Feldherrn nenne. Weil Krazer zu dieser Heerschar gehörte, deshalb ist es so

schön und bedeutungsvoll, das seine letzte Tätigkeit dem literarischen Denkmal des großen Mannes gegolten hat.

Noch in der letzten Zeit hatte er die Aufgabe übernommen, Eulers Briefe herauszugeben. Keinen Besseren hätte man damit betrauen können. Hier würde nicht nur sein vielseitiges mathematisches Wissen, sein historischer, durch sorgfältige Studien entwickelter Sinn, es würde auch seine feine und umfassende allgemeine Bildung, sein ästhetisches und psychologisches Feingefühl sich an einer würdigen Aufgabe haben auswirken können. Er freute sich darauf, diese Arbeit mit hinüberzunehmen in eine durch amtliche Verpflichtungen nicht mehr belastete Zeit, und seinen Lebensabend damit auszufüllen. Nur die zum Studium des Materials wünschenswerte Reise nach Petersburg, so scherzte er, wolle er nicht mehr selbst unternehmen.

Aber nicht nur diese sollte ihm versagt bleiben; das Werk selbst glitt aus der Hand, welche so freudig danach gegriffen hatte. Das Schicksal hatte gerufen, das große Warten ging seinem Ende entgegen.

Mitten in der Tätigkeit wurde der Arbeitsame von dem Übel ergriffen, welches in wenigen Monaten seine Kräfte aufzehren sollte. Im Februar war er von einer Dienstreise mit einem Unbehagen zurückgekehrt, welches er für eine durch Diätfehler verursachte vorübergehende Störung ansah, so daß er sich dadurch nicht abhalten ließ, in den Osterferien, wie gewöhnlich, nach Traunstein zu fahren. Doch fand er dort nicht die gewohnte Erholung. Das wonnige Vorfrühjahr, welches uns der April schenkte, genoß er nicht. Gewiß war er schon um diese Zeit, ohne es zu wissen, von Fieberzuständen heimgesucht; denn die Wärme war ihm lästig, und der Mann, welcher einst in der vollen Mittaghitze seine Spaziergänge zu unternehmen liebte und sich unter dem glühenden Himmel Italiens wohl fühlte, war diesmal froh, als eintretender Schneefall der frühen Sommerherrlichkeit ein Ende bereitete und sein heimliches Brennen linderte. Er kehrte nach Karlsruhe zurück und nahm seine Tätigkeit wieder auf. Am fünften Mai eröffnete er, nachdem er am Morgen schon seine Vorlesungen gehalten hatte, nachmittags das mathematische Seminar, worin er uns über Eulers Arbeiten zur Theorie der bestimmten Integrale berichten wollte. Der einführende, über zwei Stunden sich erstreckende Vortrag wird jedem, der ihn gehört hat, unvergeßlich bleiben. Es war eine glänzende Leistung und würde selbst einem jungen vollkräftigen Manne Bewunderung eingetragen haben.

Danach fühlte er sich freilich recht erschöpft. Bevor er unser gemeinsames Sprechzimmer verließ, setzte er sich in meinen Stuhl, der ihm am nächsten stand, und plauderte noch ein Viertelstündchen, zum ersten Male Unzufriedenheit mit seinem körperlichen Befinden äußernd.

Es waren die letzten Minuten, welche er in unserer Hochschule zubrachte. Am Abend befiel ihn in einem Konzert ein Fieberschauer und zwang ihn, nach Hause zu eilen. Dies war der Beginn eines entschiedenen Krankheitszustandes, der ihm zwar — wir danken dem Geschicke dafür — wenig schmerzhafte Leiden, aber einen traurigen Verfall der körperlichen Kräfte brachte. Wie stets in seinem Leben, fügte er sich auch jetzt ohne Klage in sein Los. Schweigend schlürfte er die Bitternis, die ihm beschieden war. Zwar sprach er in der ersten Zeit, nach Art der Kranken, gerne und umständlich von seinen Zuständen und von deren Behandlung. Aber das waren nur die Äußerlichkeiten. Das Tiefste trug er als ein Einsamer. So wissen wir nicht zu sagen, ob noch die Hoffnung zu genesen in ihm lebte, oder ob er das Ende vorfühlte. Ich möchte das Letztere glauben. Seinen Freunden mußte es das Herz zerreißen, wenn sie ihn so geduldig, so matt und müde in seinem Stuhle sitzen sahen und dem glanzlosen Blick seines Auges begegneten.

Welche Bilder mögen hinter dieser Stirn aufgezogen sein, wenn er lange Stunden auf seinem Balkon zubrachte und in die Baumwipfel blickte, welche, wie alles Grün der Stadt, sich frühzeitig entlaubten? Die trüben, regenschwangeren Tage seines letzten Sommers waren den trüben Erinnerungen mehr angepaßt als den heiteren. Und an jenen fehlte es ihm nicht.

Auch nach dem großen Schlage, der ihn für die Folge gewissermaßen unverletzlich machte, da kein Verlust sich mehr mit dem ersten an Schwere messen konnte, war ihm noch viel Leides geschehen.

Er mußte an das Totenbett seines geliebten Bruders treten, mit welchem ihn ein Verhältnis von einzigartiger Innigkeit verband.

Er, der als Knabe durch Freudenschüsse aus einer kleinen Kanone die Siege der Jahre 1870 und 1871 begrüßt hatte, mußte die Greuel des Weltkrieges erleben und dessen Ende, für einen guten Patrioten, der er war, eine Quelle tiefen Kummers und Unwillens. Er mußte die geliebte Stadt, in welcher er als fröhlicher Korpsstudent seine Jugend, als junger Professor seine beste Manneskraft genossen hatte, sich ablösen sehen von dem Reiche, dem sie damals neu gewonnen war, als er sie zum ersten Male betrat.

Er, der in allen Dingen an dem Bestehenden hing und eingreifende Änderungen überall zu vermeiden suchte, mußte die alte Form unseres Staates zerbrechen sehen. Er, der sein Behagen und die Güter des Lebens vielleicht ein klein wenig mehr liebte, als es einem Weisen, wofür er im gewissen Sinne gelten konnte, anstand, mußte seinen Besitz in dem Strudel des wirtschaftlichen Niederganges untergehen sehen.

Und bei allen diesen schmerzlichen Eindrücken fehlte ihm die Hoff-

nung und die Zuversicht, welche in vielen von uns lebt, daß in jenem verwüstenden Wirbelsturm die gebärende Kraft eines Frühlingsgewitters wohnen könne, daß unser neuer Staat das größte Hindernis für den inneren und äußeren Frieden beseitigt habe, und daß der erste Schritt zu dem Wohl nicht nur eines Volkes, sondern eines großen Bundes von Völkern getan sei.

Nein, er war kein Freund des Neuen. Ich sage es, von meinem Standpunkte aus, mit Betrübnis, aber es muß gesagt sein: Er liebte die Republik nicht und mißtraute dem Gedanken der Völkerversöhnung. So mußten ihm alle die schweren Opfer, welche gebracht waren, nutzlos, nichtig und sinnlos erscheinen. Grund genug, um seine letzten Tage zu verdüstern, wenn die Erinnerung ihm alle diese schweren Erlebnisse zurückrief.

Allein auch der lastende graue Himmel des letzten Sommers wurde ab und zu von einem heiteren Sonnenblick durchbrochen. Und so mag es wohl in der Seele des Dahinsiechenden manchmal licht geworden sein. Welches waren die goldenen Strahlen, die dann wärmend darin aufzuckten? Soviel ihm das Leben genommen hatte, zweierlei Güter mußte es ihm lassen:

Das Bewußtsein einer treu und bis zum letzten Atemzug bewährten Pflichterfüllung und den sicheren Besitz an Liebe, an Verehrung, wie sie ihm von allen Seiten entgegenblühte, die Gewißheit, daß sein Andenken in manchen Herzen, sein Name in den Annalen mancher Gemeinschaft, in der Geschichte der Forschung weiterleben würde.

Ob er auch daran gedacht hat, daß wir uns eines Tages zu seinem Gedächtnis versammeln würden, wie wir es heute getan haben? Wer kann es wissen? Aber den Dank, welchen ich Ihnen, hochverehrte Anwesende, für Ihre ernste Teilnahme an dieser Feier ausspreche, darf ich in das schlichte Wort kleiden, dessen alltäglicher Klang in einem Werke eines unserer lebenden Dichter zu dem Glockenton rührender Feierlichkeit gesteigert worden ist:

„Es hätte ihn herzlich gefreut“.

Veröffentlichungen.

Zusammengestellt von Samson Breuer.

1. Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen auf Grund der Riemann'schen Thetaformel. Erster Theil. Über ein merkwürdiges System linearer Gleichungen. Inaug.-Diss. Würzburg. Leipzig 1881. 4°. IV (2), 36 (2) S. (Die Arbeit stimmt mit S. 1—30, 61—66 der folgenden Arbeit überein.)
2. Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen auf Grund der Riemann'schen Thetaformel. Leipzig 1882. 4°. VIII, 66 S.

3. Über Thetafunctionen, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind. Habilitationsschrift Würzburg. Leipzig 1883 = Math. Annalen **22**, 416—449. 1883.
4. Über die Verallgemeinerung der Riemann'schen Thetaformel. (Mit F. Prym.) Acta mathematica **3**, 240—276. 1883.
5. Über die Zusammensetzung ganzzahliger linearer Substitutionen von der Determinante Eins aus einer geringsten Anzahl fundamentaler Substitutionen. Annali di Mat. Ser. II. Tom. XII, 283—300. 1883/84.
6. Zur Bildung allgemeiner σ-Functionen. Math. Annalen **33**, 591—599. 1889.
7. Neue Grundlagen einer Theorie der allgemeinen Thetafunctionen. Von Dr. A. Krazer, Professor der Mathematik an der Universität Straßburg, und Dr. F. Prym, Professor der Mathematik an der Universität Würzburg. Kurz zusammengefaßt und herausgegeben von Dr. A. Krazer. Leipzig 1892. 4°. X (2), 133 (1) S.
8. Über lineare Relationen zwischen Thetaproducten. Acta mathematica **17**, 281—296. 1893.
9. Die Transformation der Thetafunctionen einer Veränderlichen. Erste und zweite Abhandlung. Math. Annalen **43**, 413—456, 457—504. 1893.
10. Über ein specielles Problem der Transformation der Thetafunctionen. Journ. f. d. reine und angewandte Math. **111**, 64—86. 1893.
11. Die quadratische Transformation der Thetafunctionen. Math. Annalen **46**, 442—461. 1895.
12. Über die Convergenz der Thetareihe. Math. Annalen **49**, 400—416. 1897.
13. Über allgemeine Thetaformeln. Math. Annalen **52**, 369—416. 1899.
14. Über den Unterricht in der darstellenden Geometrie an der Universität Straßburg. Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. **8**, 119—120. 1900.
15. Die Reduzierbarkeit Abel'scher Integrale. In „Straßburger Festschrift zur XLVI. Versammlung Deutscher Philologen und Schulmänner, herausgegeben von der Philosophischen Facultät der Kaiser-Wilhelms-Universität. Straßburg 1901. gr. 8°". S. 167—187.
16. Lehrbuch der Thetafunktionen = B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf d. Gebiete der math. Wiss. m. Einschl. ihrer Anw. Band XII. Mit 10 Textfiguren. Leipzig 1903. 8°. XXIV, 509 (1) S. — Hierzu eine Selbstanzeige im Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. **12**, 301—302. 1903.
17. Zur Geschichte des Umkehrproblems der Integrale. Festrede bei dem feierlichen Akte des Rektoratswechsels an der Großherzoglich Technischen Hochschule Fridericiana zu Karlsruhe am 18. November 1908. 8°. II, 35 (1) S. = Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. **18**, 44—75. 1909.
18. Die Erklärung der Vieldeutigkeit der elliptischen Integrale bei Jacobi und Puiseux. Bibliotheca math. 3. Folge **10**, 250—259. 1909/10.
19. Zur Theorie der mehrfachen Gaußschen Summen. In „Festschrift Heinrich Weber zu seinem siebzigsten Geburtstag am 5. März 1912 gewidmet von Freunden und Schülern. Leipzig und Berlin 1912. 8°." S. 181—197.
20. Über die Unendlichkeits- und Nullpunkte einer algebraischen Funktion. Sitzungsberichte d. Heidelberger Akad. d. Wiss. Math.-naturw. Klasse. Band IV A. Jahrgang 1913. 24. Abhandlung. Heidelberg 1913. 10 S.
21. Zur Geschichte der graphischen Darstellung von Funktionen. Festschrift zur Feier des achtundfünfzigsten Geburtstages Seiner Königlichen Hoheit des Großherzogs

Friedrich II. herausgegeben von der Großherzoglichen Technischen Hochschule Fridericiana unter dem Rektorate von Dr. Adolf Krazer. Karlsruhe 1915. 8°. VIII, 31 (1) S. = Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. **24**, 340—363, 1915 („mit einigen Zusätzen und Änderungen . . ., die hauptsächlich durch die nach ihrer Abfassung im 14. Bande der Bibliotheca Mathematica erschienene Ableitung Wieleitners verursacht sind").

22. Friedrich Ostendorf. Rede des Rektors bei dem Begräbnisse des Oberbaurat Professor Dr.-Ing. h. c. Friedrich Ostendorf am 29. März 1915 auf dem Friedhofe in Karlsruhe.

23. Zum Gedächtnis an Friedrich Prym. Verhandl. der Phys.-Med. Gesellschaft zu Würzburg. N. F. **44**, 167—171. 1917.

24. Friedrich Prym. Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. **25**, 1—15. 1917.

25. Nekrolog auf Prym, unter dem Sammeltitel „Nekrologe", Jahrbuch der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften 1916 (München 1916), S. 140—147. Ihm folgt (S. 147/48) ein Schriftenverzeichnis, das mit dem in Nr. 24 gegebenen übereinstimmt.

26. Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Funktionen von Karl Weierstraß. Bearbeitet von J. Knoblauch. — Vorlesungen über Anwendungen der elliptischen Funktionen von Karl Weierstraß. Bearbeitet von Rudolf Rothe. (Referate.) Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. **25**. 2. Abteilung. S. 44—52, 68—72. 1917.

27. Abelsche Funktionen und allgemeine Thetafunktionen. (Mit W. Wirtinger.) Enzykl. d. math. Wiss. II B 7. S. 604—873. Leipzig 1921.

28. Zum Gedächtnis an August Gutzmer. Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. **33**. 2. Abteilung. S. 1—3. 1925.

29. Die Konvergenz der allgemeinen p-fach unendlichen Thetareihe. In „Festschrift zur Hundertjahrfeier der Technischen Hochschule Karlsruhe 1925. 8°." S. 96—99.

30. Die soziale Fürsorge an der Technischen Hochschule Fridericiana. Rede anläßlich des fünfjährigen Bestehens der Mensa Academica. Gehalten am 2. Februar 1926 in der Aula der Technischen Hochschule. Karlsruhe. IV, 11 (1) S.

Hinzu kommen zahlreiche größere und kleinere Berichte im Jahresber. der Deutschen Math.-Ver. aus der Tätigkeit als Schriftführer und Kassenwart dieser Vereinigung sowie über den Stand der Euleransgabe und der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften.

Von ersteren sei genannt:

31. Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung in den Jahren 1903—1920. Bericht des Schriftführers. Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. **31**. 2. Abteilung. S. 21—34. Nachträgliche Bemerkung hierzu: S. 65. 1922.

Krazer hat ferner die nachstehenden Werke (z. T. mit anderen zusammen) herausgegeben:

Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8.—13. August 1904. Herausgegeben von dem Schriftführer des Kongresses. gr. 8°. X, 756 S. Leipzig 1905. — Hierzu eine Selbstanzeige im Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. **14**, 281—282. 1905.

E. B. Christoffel, Gesammelte mathematische Abhandlungen. Unter Mitwirkung von A. Krazer und G. Faber herausgegeben von L. Maurer. 2 Bände. Leipzig und Berlin 1910.

Als Mitglied der Redaktion von „Leonhardi Euleri opera omnia" hat Krazer u. a. den „Redaktionsplan für die Eulerausgabe" im Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. 19, 2. Abteilung, S. 94—103, 1910 (mit Rudio und Stäckel) veröffentlicht. Er hat ferner bei den Bänden 6, 8, 18, 19 (unter der Presse), 20, 21 der ersten Reihe als Herausgeber, z. T. als alleiniger, mitgewirkt. Näheres über seine Tätigkeit bei der Eulerausgabe findet man in dem Bericht „Die Eulerausgabe" von Ferdinand Rudio, Vierteljahrsschrift der Naturf. Ges. in Zürich 71, 299—302, 1926.

An Nachrufen auf Krazer seien erwähnt:

Adolf Krazer. Von F. Rudio. Neue Züricher Zeitung, Morgenausgabe vom 11. August 1926.

Adolf Krazer. Von Richard Baldus. Badische Presse, Morgenausgabe vom 17. August 1926. Auch als Sonderdruck der „Druckerei Karlsruher Studentendienst E. V." erschienen.

Zum Gedächtnis an Adolf Krazer. Sonderabdruck der „Korps-Zeitung der Rhenania/Straßburg zu Marburg". Sommer-Semester 1926.

Ein Nachruf des Verlages und der Herausgeber des Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, nebst einem Bilde von Krazer, findet sich im Band 35, 2. Abteilung, S. 81 dieser Zeitschrift.

(Eingegangen am 15. 7. 27.)

Neuere Untersuchungen über den Fundamentalsatz in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Von MAX MÜLLER in Heidelberg.

Seitdem im Jahre 1900 die deutsche[1]) und im Jahre 1910 die französische[2]) Ausgabe des Enzyklopädieartikels des Herrn Painlevé über die Existenz und Einzigkeit der Lösungen eines Systemes gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$y_i' = f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

veröffentlicht wurde, sind einige neue Untersuchungen über diesen Gegenstand mitgeteilt worden, über die hier berichtet werden soll. Dabei beschränken wir uns auf das reelle Gebiet und behandeln nur den Fall regulärer Anfangsbedingungen $y_i(x_0) = y_{i0}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, in welchem in einer Umgebung des Wertesystems $(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0})$ die Funktionen f_i

1) Enzyklopädie der math. Wiss. II, 1, 1, S. 189 ff. P. Painlevé, Gewöhnliche Differentialgleichungen; Existenz der Lösungen. Im folgenden zitiert mit P. d. und Angabe der Abschnittnummer.

2) Encyclopédie des sciences mathém. Tome II. Vol. 3. Fasc. 1. S. 1 ff. P. Painlevé, Existence de l'intégrale générale. Détermination d'une intégrale particulière par ses valeurs initiales. Im folgenden zitiert mit P. fr. und Angabe der Abschnittnummer.

stetig sind. Wir benützen gleichzeitig die Gelegenheit, Herrn Painlevés Ausführungen in einigen Punkten zu ergänzen.[3])

I. Die Funktionen f_i sind Potenzreihen in $x, y_1, \ldots, y_n$ oder Potenzreihen in $y_1, \ldots, y_n$ mit von x stetig abhängenden Koeffizienten.

J. Newton formuliert bereits das allgemeine Integrationsproblem[4]), das sowohl die gewöhnliche Quadratur als auch die Integration von Differentialgleichungen umfaßt: „Data Aequatione, Fluentes quotcunque Quantitates involvente, Fluxiones invenire, et vice versa". Er greift es an mittels eines allgemeinen Integrationsprinzips, dessen Methode besteht „in assumptione Seriei pro Quantitate quâlibet incognitâ, ex quâ cetera commodè derivari possunt; et in collatione Terminorum homologorum Aequationis resultantis ad eruendos Terminos assumptae Seriei"[5]); in der „Methodus fluxionum" von 1671 entwickelt er das Integral in eine nach steigenden Potenzen der unabhängigen Veränderlichen fortschreitende Reihe.[6]) G. W. Leibniz[7]) hat die Methode der unbestimmten Koeffizienten an Beispielen besonders klar erläutert. Joh. Bernoulli[8]) unternahm 1694 den Versuch, die Methode, die Leibniz nur an Beispielen besprochen hatte, allgemein darzustellen, bei L. Euler[9]) kommt sie in praktischer Hinsicht zur vollen Auswirkung.

A. Cauchy[10]) beweist 1831 als erster allgemein mittels seines calcul des limites die Konvergenz der für das Integral gefundenen Potenzreihen. Der Konvergenzbeweis von K. Weierstraß[10]) ergibt darüber hinaus, daß die Integrale, falls die Funktionen f_i ganze rationale Funktionen ihrer Argumente, nicht nur analytische Funktionen der unabhängigen Veränderlichen x, sondern auch analytische Funktionen von $x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}$

3) Ausschnitte aus der Geschichte unseres Gegenstandes behandeln auch: Ch.-J. de la Vallée Poussin, Brux. mém. cour. 47, 1893, Anhang; G. Peano, Torino Atti 33, 1897/98, S. 9—18; A. Vaccaro, Torino Atti 36, 1900/01, S. 708—720.

4) In Briefen an Joh. Wallis vom 27. VIII. 1692 und 17. IX. 1692. Vgl. J. Newtoni Opuscula I (Lausannae et Genevae 1748), S. 361—370.

5) Opuscula I, S. 366. Integrationsproblem und Integrationsprinzip finden sich, in Anagrammen versteckt, bereits im Brief Newtons an H. Oldenburg vom 24. X. 1676; vgl. Opuscula I, S. 355 bzw. 356.

6) Opuscula I, S. 53—86. Eine etwas durchsichtigere Darstellung in den Wallisschen Briefauszügen, ebenda S. 367—370.

7) Acta Erud. Lps. 1693 [1695], S. 178—180 [= Leibnizens math. Schriften, herausgeg. von G. J. Gerhardt, I, 1858, S. 285—288]; in deutscher Übersetzung von G. Kowalewski in Ostwalds Klass. d. exakt. Wiss. Nr. 162 (Leipzig 1908, W. Engelmann), S. 19—23.

8) Acta Erud. Lps. 1694, S. 437—444.

9) Opera omnia (1), 11 (Leipzig und Berlin 1913, B. G. Teubner).

10) P. d. und P. fr. Nr. 11.

sind. H. Poincaré[11]) beweist dies dann ganz allgemein für reguläre Funktionen f_i. Herr J. Horn[12]) verwendet in einem speziellen Fall die Entwickelbarkeit des Integrals nach dem Anfangswert $c = y_{10}$ zur Bestimmung des Integrales selbst; dabei sind die Koeffizienten der Potenzreihe in c Funktionen der unabhängigen Variablen x, die sich sukzessive durch Quadraturen gewinnen lassen.

Herr O. Perron[13]) zeigte 1919, daß die Entwicklung nach Potenzen der Integrationskonstanten ein Spezialfall einer viel allgemeineren Methode der Integration durch Reihen ist. Hierbei wird das Integral der Differentialgleichung

$$(1) \qquad y' = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x) y^\nu \qquad (f_0(x), f_1(x), \ldots \text{ stetig für } a \leqq x \leqq b)$$

in Form einer allgemeinen unendlichen Reihe

$$(2) \qquad y = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \varphi_\lambda(x)$$

angesetzt; führt man (2) formal in (1) ein, so ergibt sich

$$(3) \qquad \sum_{\lambda=1}^{\infty} \varphi_\lambda'(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu \Big(\sum_{\lambda=1}^{\infty} \varphi_\lambda\Big)^\nu$$
$$= \sum \frac{(k_1 + k_2 + \cdots + k_\mu)!}{k_1! \, k_2! \ldots k_\mu!} f_{k_1+k_2+\cdots+k_\mu} \varphi_1^{k_1} \varphi_2^{k_2} \ldots \varphi_\mu^{k_\mu},$$

oder, wenn man hier die rechte Seite wieder formal in die Form einer einfach unendlichen Reihe bringt:

$$(4) \qquad \sum_{\lambda=1}^{\infty} \varphi_\lambda'(x) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \omega_\lambda(x);$$

dabei kann ω_1 einen ganz beliebigen Teil der auf der rechten Seite von (3) vorkommenden Terme (in endlicher oder unendlicher Anzahl) bedeuten, ω_2 irgend einen weiteren Teil, ω_3 wieder einen usw., derart, daß die Summe auf der rechten Seite von (4) gerade alle Terme umfaßt; nur wird man es so einrichten, daß ω_1 überhaupt kein φ, ω_2 nur φ_1, ω_3 nur φ_1 und φ_2, und allgemein ω_λ nur $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{\lambda-1}$ enthält. Die Differentialgleichung (1) wird dann sicher befriedigt, wenn man in (4)

$$\varphi_\lambda'(x) = \omega_\lambda(x) \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots)$$

setzt, und aus diesen Gleichungen kann man bei der angegebenen Wahl

11) Méthodes nouvelles de la mécanique céleste I (Paris 1892, Gauthier-Villars), S. 52 ff. Vgl. auch E. Picard, Traité d'analyse III (Paris 1908, Gauthier-Villars), 2. Auflage, S. 159 ff.

12) Zeitschr. f. Math. u. Phys. 47, 1902, S. 403.

13) Heidelb. Ak. Sitzungsber. 1919, Nr. 2, 8, 12.

der ω_λ sukzessive die Funktionen φ_λ durch Quadratur bestimmen; wenn $y(a) = c$ sein soll, am einfachsten in folgender Weise:

$$\varphi_1 = c + \int_a^x \omega_1 dx, \quad \varphi_\lambda = \int_a^x \omega_\lambda dx \qquad (\lambda = 2, 3, 4, \ldots).$$

Der Konvergenzbeweis für die so gefundene Reihe (2) wird nach der Majorantenmethode erbracht. U. a. ergibt sich: Ist $|f_\nu(x)| \leqq KM^\nu$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$, $|c| < M^{-1}$, wo K und M positive Zahlen, so konvergiert die Reihe (2) sicher im Intervall

$$a \leqq x \leqq \operatorname{Min}\left\{b,\ a + \frac{(1 - M|c|)^2 - \varepsilon}{2KM}\right\} \qquad (\varepsilon > 0, \text{ beliebig klein});$$

ist $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, $|f_\nu(x)| \leqq KM^{\nu - 2}$ $(\nu = 2, 3, \ldots)$, $|c| < M^{-1}$, so konvergiert die Reihe (2) sicher im Intervall

$$a \leqq x \leqq \operatorname{Min}\left\{b,\ a + \frac{M}{K}\left(\log(M|c|) + \frac{1}{M|c|} - 1 - \varepsilon\right)\right\}$$
$$(\varepsilon > 0, \text{ beliebig klein}).$$

Die Differentialgleichungen

$$y' = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x) y^{-\nu} \quad \text{und} \quad y' = g(x)y + \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x) y^{-\nu}$$

lassen sich auf die behandelte zurückführen. Im Spezialfall der Entwicklung nach Potenzen des Anfangswertes gestalten sich die Fehlerabschätzungen recht günstig. Die Methode ist auf Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen und auch auf partielle Differentialgleichungen[14]) übertragbar.

II. Die Funktionen f_i sind stetige Funktionen ihrer Argumente.

Vorbemerkung zu den Abschnitten II und III.

Im folgenden wird, falls nicht Gegenteiliges gesagt wird, vorausgesetzt: Die Funktionen $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sind stetig in dem durch die Ungleichungen

$$x_0 - a \leqq x \leqq x_0 + a, \quad |y_i - y_{i0}| \leqq b \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

definierten Bereich $\mathfrak{B}$. Es ist

$$M = \operatorname{Max}_{\mathfrak{B}} \{|f_1|, |f_2|, \ldots, |f_n|\},$$
$$a' = \operatorname{Min}\left(a, \frac{b}{M}\right).$$

Gesucht werden Integrale des Differentialgleichungssystems

(5) $$y_i' = f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

mit den Anfangswerten

(6) $$y_i(x_0) = y_{i0} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

14) O. Perron, Heidelb. Ak. Sitzungsber. 1920, Nr. 9.

a) Die Methode von Cauchy-Lipschitz und die Methode der benachbarten Differentialgleichungen.

Überzeugt, daß man wohl kaum bei jeder Differentialgleichung die Variablen trennen und damit mittels der damals bekannten elementaren Methoden die Integration leisten könne, hat Joh. Bernoulli[15]) nach einem stets anwendbaren Integrationsverfahren gesucht und 1694 als bequemste der von ihm gefundenen Methoden die Isoklinenmethode mitgeteilt; bei derselben werden die Integralkurven durch geradlinige Polygonzüge ersetzt, die ihre Richtung beim Auftreffen auf eine geeignet gewählte endliche Schar von Isoklinen (directrices) der vorgelegten Differentialgleichung ändern. Daß dies nur eine Annäherung ist, sagt er nicht.

L. Euler[16]) verwendet statt der Isoklinen als Ort der Richtungsänderungen der Polygonzüge Parallelen zur y-Achse. Bei Systemen ist Eulers Ansatz der folgende: Um Näherungswerte für die Werte $y_i(\xi)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ zu erhalten, die die Integrale $y_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ des Systems (5) mit den Anfangswerten (6) an der Stelle $x=\xi$ annehmen, macht er eine Unterteilung des Intervalles $\langle x_0, \xi\rangle$

$$\mathfrak{E}_k:\quad x_0 < x_1 < \cdots < x_\varkappa < x_{\varkappa+1} < \cdots < x_k = \xi$$

und bildet die Funktionen

$$(7)\qquad \begin{cases} y_{ik}(x_0) = y_{i0} \quad (i=1,2,\ldots,n), \\ y_{ik}(x) \;= y_{ik}(x_\varkappa) + f_i(x_\varkappa, y_{1k}(x_\varkappa), \ldots, y_{nk}(x_\varkappa))\,(x-x_\varkappa) \\ \qquad \text{für } x_\varkappa < x \leqq x_{\varkappa+1}\ (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots, k-1) \\ \qquad\qquad (i=1,2,\ldots,n); \end{cases}$$

$y_{ik}(\xi)$ ist dann der gesuchte Näherungswert für $y_i(\xi)$ $(i=1,2,\ldots,n)$.

In der Tat hat A. L. Cauchy[17]) unter der Voraussetzung, daß die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial y_\mu}$ $(i,\mu=1,2,\ldots,n)$ stetig sind, und allgemeiner R. Lipschitz[17]) unter Voraussetzung der „Lipschitz-Bedingung", daß für $(x, y_1, \ldots, y_n)$ und $(x, z_1, \ldots, z_n)$ in $\mathfrak{B}$

$$(8)\qquad |f_i(x, y_1, \ldots, y_n) - f_i(x, z_1, \ldots, z_n)| \leqq K \sum_{\varrho=1}^{n} |y_\varrho - z_\varrho| \quad (i=1,2,\ldots,n)$$

(K positive Konstante), gezeigt, daß

$$(9)\qquad \lim_{(\mathfrak{E}_k)} y_{i,k}(\xi) = y_i(\xi) \qquad (i=1,2,\ldots,n).$$

---

15) Acta Erud. Lps. 1694 [= Opera I, S. 123 f.].

16) Opera omnia (1), 11, S. 424—434.

17) P. d. und P. fr. Nr. 3, 4. Vgl. etwa die Darstellung in Serret-Scheffers, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung III (Leipzig und Berlin 1914, B. G. Teubner), S. 43 ff.

Der Beweis beruht auf einer Übertragung der der Cauchyschen Integraldefinition zugrunde liegenden Gedanken von der einfachen Differentialgleichung $y' = f(x)$ mit dem Integral

$$y(\xi) = y_0 + \int_{x_0}^{\xi} f(x)\,dx$$

auf das System (5). Cauchy macht für jede einzelne Stelle ξ des Intervalles $\langle x_0, x_0 + a' \rangle$ den Ansatz (7) und den Grenzübergang (9); erst dann werden die einzelnen so gefundenen Werte $y_i(\xi)$ in ihrer Abhängigkeit von ξ untersucht und erweisen sich dabei als stetige Integrale des Systems (5).

In neuerer Zeit, seitdem der damals Cauchy noch fehlende Begriff der gleichmäßigen Konvergenz in weitem Umfang verwendet wird, ist eine etwas andere Darstellung des Beweises üblich geworden.[18]) Man macht den Ansatz (7) von vornherein für die Stelle $\xi = x_0 + a'$ und betrachtet die Funktionen

$$(10)\quad \begin{cases} y_{ik}(x_0) = y_{i0} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ y_{ik}(x) = y_{ik}(x_\varkappa) + f_i(x_\varkappa, y_{1k}(x_\varkappa), \ldots, y_{nk}(x_\varkappa))\,(x - x_\varkappa) \\ \qquad \text{für} \quad x_\varkappa < x \leqq x_{\varkappa+1}\ (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots, k-1) \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

als Näherungs*funktionen*, von denen aus der *gleichmäßig im ganzen Intervall* $\langle x_0, x_0 + a' \rangle$ vollzogene Grenzübergang

$$(11)\qquad \lim_{(\mathfrak{E}_k)} y_{ik}(x) = y_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

zu einem Integralsystem von (5) mit den Anfangswerten (6) führt. Dabei werden die Funktionen (10) als Integrale eines zum System (5) „benachbarten" Deriviertengleichungssystems

$$D_{\pm} Y_i(x) = F_{\mathfrak{E}_k, i}(x, Y_1, \ldots, Y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

aufgefaßt; für die Funktionen $F_{\mathfrak{E}_k, i}$ gilt in $\mathfrak{B}$:

$$|F_{\mathfrak{E}_k, i}(x, y_1, \ldots, y_n) - f_i(x, y_1, \ldots, y_n)| \leqq \delta_{\mathfrak{E}_k} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$\lim_{(\mathfrak{E}_k)} \delta_{\mathfrak{E}_k} = 0.$$

Der Grenzübergang (11) läßt sich dann mittels der Ungleichungen rechtfertigen, welche die Differenz der Integrale benachbarter Differentialgleichungen abschätzen.

18) Vgl. Ch.-J. de la Vallée Poussin, Cours d'analyse infinitésimale II (Paris 1912, Gauthier-Villars), S. 181—185; L. Schlesinger, Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage (Berlin und Leipzig 1922, de Gruyter & Co.), S. 5 ff.

Ist in $\mathfrak{B}$ allgemein

$$\left.\begin{aligned} &|f_i(x, y_1, \ldots, y_n)| \leqq M, \quad |\varphi_i(x, y_1, \ldots, y_n)| \leqq M, \\ &|f_i(x, y_1, \ldots, y_n) - \varphi_i(x, y_1, \ldots, y_n)| \leqq N, \\ &|f_i(x, y_1, \ldots, y_n) - f_i(x, z_1, \ldots, z_n)| \leqq K \sum_{\varrho=1}^{n} |y_\varrho - z_\varrho|, \\ &y_i(x) = y_{i0} + \int_{x_0}^{x} f_i(t, y_1(t), \ldots, y_n(t))\, dt, \\ &z_i(x) = y_{i0} + \int_{x_0}^{x} \varphi_i(t, z_1(t), \ldots, z_n(t))\, dt \end{aligned}\right\} (i = 1, 2, \ldots, n),$$

so verwenden Herr Ch.-J. de la Vallée Poussin[18]) und Herr L. Schlesinger[18]) die durch direkte Abschätzung gefundene, für das Intervall

$$|x - x_0| \leqq \operatorname{Min}\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1-\varepsilon}{nK}\right) \qquad (\varepsilon > 0, \text{ beliebig klein})$$

gültige Ungleichung

$$(12) \qquad |y_i(x) - z_i(x)| \leqq \frac{nN|x - x_0|}{1 - nK|x - x_0|} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Herr L. Bieberbach[19]) gewinnt mittels des Verfahrens der sukzessiven Approximationen, Herr O. Hölder[20]) mittels der Methode von Cauchy-Lipschitz und auch direkt die für das Intervall $\langle x_0 - a', \; x_0 + a' \rangle$ geltende Ungleichung

$$(13) \qquad |y_i(x) - z_i(x)| \leqq \frac{N}{nK}\left(e^{nK|x - x_0|} - 1\right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Beide Abschätzungen lehren, daß für $N \to 0$, d. h. $\varphi_i \to f_i$ auch $z_i(x) \to y_i(x)$ ist.

b) Die Methode der sukzessiven Approximationen.

Die Konvergenz dieser Methode wurde zunächst für den Fall bewiesen, daß die Lipschitz-Bedingung (8) mit konstantem Koeffizienten K gilt.[21]) Herr A. Rosenblatt[22]) hat bemerkt, daß man die Konstante K durch die nicht mehr beschränkten Funktionen $k|x - x_0|^{-m}$ $(k > 0, \; 0 < m < 1)$ oder $k|x - x_0|^{-1}$ $\left(0 < k < \frac{1}{n}\right)$ ersetzen kann. Herr J. Bendixson[23]) hat gezeigt, daß die nach diesem Verfahren gebildeten Funktionen:

19) Theorie der Differentialgleichungen (Berlin 1923, J. Springer), S. 34 f. Unsere Ungleichung (13) kann unmittelbar aus der dortigen Herleitung gefolgert werden.

20) Schwarz-Festschrift (Berlin 1914, J. Springer), S. 116—132.

21) P. d. und P. fr. Nr. 9.

22) Ark. för Math., Astron. och Fys. 5, 1909, Nr. 2.

23) P. d. und P. fr. Nr. 10. Die Angaben der Herren Bendixson und Painlevé sind ungenau und bedürfen der Richtigstellung in der im Text angegebenen Weise.

$$y_{i1}(x) = y_{i0} + \int_{x_0}^{x} f_i(t, y_{10}, \ldots, y_{n0})\, dt,$$

$$y_{i,\lambda+1}(x) = y_{i0} + \int_{x_0}^{x} f_i(t, y_{1\lambda}(t), \ldots, y_{n\lambda}(t))\, dt$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n;\ \lambda = 1, 2, 3, \ldots)$$

gleichmäßig gegen ein Integralsystem konvergieren, falls die aus ihnen gebildeten Funktionenfolgen $\{y_{i\lambda}(x)\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ überhaupt konvergieren. Beispielsweise tritt im Intervall $\langle x_0, x_0 + a' \rangle$ Konvergenz ein, wenn die Funktionen f_i nicht negativ sind und mit jedem ihrer n letzten Argumente monoton wachsen, im Intervall $\langle x_0 - a', x_0 \rangle$ dagegen, wenn daselbst die Funktionen f_i mit jedem ihrer n letzten Argumente monoton abnehmen.

Herr L. Lichtenstein[24]) hat das Verfahren etwas modifiziert; er bildet erst n Folgen von Funktionen $\{f_{i\lambda}(x, y_1, \ldots, y_n)\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, für welche gleichmäßig in $\mathfrak{B}$

$$\lim_{\lambda \to \infty} f_{i\lambda}(x, y_1, \ldots, y_n) = f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

und dann die Funktionen

$$y_{i1}(x) = y_{i0} + \int_{x_0}^{x} f_{i1}(t, y_{10}, \ldots, y_{n0})\, dt,$$

$$y_{i,\lambda+1}(x) = y_{i0} + \int_{x_0}^{x} f_{i,\lambda+1}(t, y_{1\lambda}(t), \ldots, y_{n\lambda}(t))\, dt$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n;\ \lambda = 1, 2, 3, \ldots);$$

dieselben konvergieren bei erfüllter Lipschitz-Bedingung ebenfalls gegen das Integralsystem. Dieses modifizierte Verfahren liefert eine einheitliche Basis für den Beweis der Sätze über die Abhängigkeit der Integrale von den Anfangswerten und Parametern.

Herr D. Jackson[25]) bemerkt, daß das Verfahren der sukzessiven Approximationen wie auch die Methode von Cauchy-Lipschitz in *jeder* Umgebung $\langle x_0 - \alpha_1, x_0 + \alpha_2 \rangle$ $(0 \leqq \alpha_1 \leqq a,\ 0 \leqq \alpha_2 \leqq a)$ der Stelle $x = x_0$ das Integralsystem mit den Anfangswerten (6) liefert, in welcher $|y_i(x) - y_{i0}| \leqq b$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ bleibt. Allgemeiner hat Herr E. Trefftz[26]) folgenden auf Systeme übertragbaren Satz bewiesen: Man führe als unabhängige Variable in der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ die Bogenlänge s der Integralkurve ein, indem man die Gleichung in der Form

$$\frac{dx}{ds} = g(x, y), \qquad \frac{dy}{ds} = h(x, y) \qquad (g^2 + h^2 = 1)$$

24) Palermo Rend. 28, 1909, S. 267—306.
25) Annals of Math. (2), 23, 1923, S. 75—77.
26) Math. Ann. 76, 1915, S. 327—332.

schreibt. Setzt man dann von den reellen Funktionen $g(x, y)$ und $h(x, y)$ voraus, daß längs jeder Kurve in der x, y-Ebene die Integrale

$$\int g(x, y)\, ds \quad \text{und} \quad \int h(x, y)\, ds$$

existieren, so konvergiert das Verfahren der sukzessiven Approximationen so lange, als die Lipschitzschen Differenzenquotienten

$$\left|\frac{g(x_1, y_1) - g(x_2, y_2)}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}\right| \quad \text{und} \quad \left|\frac{h(x_1, y_1) - h(x_2, y_2)}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}\right|$$

für eine beliebig kleine, aber endliche Umgebung der Integralkurve endlich bleiben.

c) Die Methode der Ober- und Unterfunktionen.

Die Methode der Ober- und Unterfunktionen erfordert von der Funktion $f(x, y)$ nur Stetigkeit und liefert einen Bereich gesicherter Existenz der Integrale, in welchem alle bisher gefundenen Existenzbereiche enthalten sind.

Die Funktion $f(x, y)$ sei stetig in einem Gebiet

$$T: \quad x_0 \leqq x \leqq X, \qquad \omega(x) \leqq y \leqq \Omega(x).$$

Dabei sollen die Funktionen $\omega(x)$ und $\Omega(x)$ 1. im Intervall $\langle x_0, X\rangle$ stetig sein und den Anfangsbedingungen $\omega(x_0) = \Omega(x_0) = y_0$ genügen, 2. dort vor- und rückwärts genommene Differentialquotienten $D_+\omega(x)$, $D_-\omega(x)$, $D_+\Omega(x)$, $D_-\Omega(x)$ besitzen, für welche die Ungleichungen

$$D_\pm \omega(x) \leqq f(x, \omega(x)), \qquad D_\pm \Omega(x) \geqq f(x, \Omega(x))$$

gelten. Dann gibt es im Intervall $\langle x_0, X\rangle$ mindestens ein ganz in T bleibendes Integral der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$.

Ein solches Integral ist nach Herrn G. Peano[27]) die obere Grenzfunktion $g(x) = \limsup_{\varphi} \varphi(x)$ [bzw. untere Grenzfunktion $G(x) = \liminf_{\psi} \psi(x)$] aller stetigen Funktionen $\varphi(x)$ [bzw. $\psi(x)$], die der Anfangsbedingung $\varphi(x_0) = y_0$ [bzw. $\psi(x_0) = y_0$] und im Intervall $\langle x_0, X\rangle$ der Derivierten-ungleichung

$$D_\pm \varphi(x) < f(x, \varphi(x)) \; [\text{bzw. } D_\pm \psi(x) > f(x, \psi(x))] \quad \text{genügen.}$$

Diese Methode von Peano geriet im Gegensatz zu der unter d) geschilderten in Vergessenheit; 1915 wurde sie von Herrn O. Perron[28]) im Anschluß an seine Integraldefinition[29]) unabhängig wiedergefunden; bei ihm heißen die Funktionen $\varphi(x)$ Unterfunktionen, die Funktionen $\psi(x)$ Oberfunktionen.

27) Torino Atti 21, 1885/86, S. 677—685.
28) Math. Ann. 76, 1915, S. 471—484.
29) O. Perron, Über den Integralbegriff. Heidelb. Ak. Sitzungsber. 1914, Nr. 14.

Der gewonnene Existenzbereich, der die Integrale „eingabelt“, ist für topologische Untersuchungen der Integralkurven geeignet, wie Herr O. Perron a. a. O. an zwei Beispielen gezeigt hat. Jedes beliebige Integral mit dem Anfangswert y_0, das dem Gebiet T angehört, verläuft im Intervall $\langle x_0, X \rangle$ auch zwischen $g(x)$ und $G(x)$; Herr O. Perron nennt deswegen $g(x)$ die Minimal-, $G(x)$ die Maximallösung, doch besteht diese extremale Eigenschaft nur relativ zum Gebiet T. Durch jeden Punkt (x_1, y_1) des von den Kurven $y = g(x)$ und $y = G(x)$ sowie der Geraden $x = X$ begrenzten Gebietes geht eine Integralkurve, die auch den Punkt (x_0, y_0) enthält.

Auf Systeme läßt sich die Methode nicht übertragen, wie Herr Ch.-J. de la Vallée Poussin[30]) hervorhebt.

d) Die Methode der ausgewählten Polygonzüge.

Bei Systemen von gewöhnlichen Differentialgleichungen ging Herr G. Peano[31]) folgendermaßen vor. Er betrachtete die Menge aller Systeme von stetigen, derivierbaren Funktionen $y_{1h}(x), \ldots, y_{nh}(x)$ mit den Anfangswerten $y_{ih}(x_0) = y_{i0}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, die die Ungleichungen

$$| D_{\pm} y_{ih}(x) - f_i(x, y_{1h}(x), \ldots, y_{nh}(x)) | < h \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

d. h. das vorgegebene System (5) näherungsweise befriedigen. Solche Funktionen sind beispielsweise bei hinreichend feiner Unterteilung $\mathfrak{E}_k$ die Polygonzüge (10).

Ist $h_1 > h_2 > \cdots > h_\sigma > \cdots$, $\lim\limits_{\sigma \to \infty} h_\sigma = 0$, so läßt sich für eine geeignet ausgewählte Folge von Funktionensystemen $y_{ih_\sigma}(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ zeigen, daß sie gleichmäßig im Intervall $\langle x_0, x_0 + a' \rangle$ gegen ein System stetiger Integrale konvergiert.

Es gibt im allgemeinen mehr als ein Integralsystem mit den Anfangswerten (6). Ist $x_0 \leqq c \leqq x_0 + a'$, so hat Herr H. Kneser[32]) gezeigt, daß die Menge aller durch solche Integralsysteme hervorgebrachten Zahlensysteme $\{y_1(c), \ldots, y_n(c)\}$ ein Kontinuum im $(y_1, \ldots, y_n)$-Raume ist; für $n = 1$ folgt hieraus die schon in Abschnitt c) erwähnte Tatsache, daß das Gebiet zwischen Maximal- und Minimallösung ganz mit Integralkurven ausgefüllt ist.

Den von Peano mit Hilfe der Symbolik des Logikkalküls dargestellten Beweis haben Herr G. Mie[33]) und Herr Ch.-J. de la Vallée

30) Brux. mém. cour. 47, 1893.
31) Math. Ann. 37, 1890, S. 182—228.
32) Preuß. Ak. d. Wiss. Sitzungsber. 1923, S. 171—174.
33) Math. Ann. 43, 1893, S. 553—568.

Poussin[34]) in gewöhnlicher Sprache überarbeitet und etwas vereinfacht. C. Arzelà[35]) und anschließend Herr P. Montel[36]) haben bemerkt, daß die Funktionen $y_{ih}(x)$ $(i=1,2,\ldots,n;\ 0<h<H)$ eine Menge gleichgradig stetiger[37]) und gleichmäßig beschränkter Funktionen bilden, aus denen sich nach einem allgemeinen Arzelàschen Satz[37]) n gleichmäßig gegen ein Integralsystem konvergierende Teilfolgen auswählen lassen. Der Auswahlprozeß erfährt dadurch eine einfachere Darstellung. Herr O. Perron[38]) hat diese Beweismethode wiedergefunden und besonders durchsichtig gestaltet.

e) Die Methode der Übertragung der Riemannschen Integraldefinition.

Die Grundgedanken der Riemannschen Integraldefinition hat Herr Ch.-J. de la Vallée-Poussin[39]) auf Differentialgleichungen übertragen; wir beschränken uns der Einfachheit wegen auf eine Differentialgleichung, doch läßt sich die Methode auf Systeme ausdehnen.

$f(x, y)$ sei in $\mathfrak{B}$ nicht notwendig stetig, aber beschränkt, und zwar sei

$$-a = \operatorname{Min}(l, 0) \leqq l \leqq f(x, y) \leqq L \leqq \operatorname{Max}(L, 0) = A.$$

Ist $x_0 < x \leqq x_0 + a'$, so werden für eine Unterteilung $\mathfrak{E}_k$ des Intervalles $\langle x_0, x\rangle$ die Summen

$$Y_\varkappa = y_0 + M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \cdots + M_\varkappa(x_\varkappa - x_{\varkappa-1}) = Y_{\varkappa-1} + M_\varkappa(x_\varkappa - x_{\varkappa-1}),$$

$$y_\varkappa = y_0 + m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \cdots + m_\varkappa(x_\varkappa - x_{\varkappa-1}) = y_{\varkappa-1} + m_\varkappa(x_\varkappa - x_{\varkappa-1})$$

gebildet, wobei

$$M_\varkappa = \limsup_{(x,y)\prec \mathfrak{R}_\varkappa} \{f(x,y)\}, \qquad m_\varkappa = \liminf_{(x,y)\prec \mathfrak{R}_\varkappa} \{f(x,y)\} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k);$$

$\mathfrak{R}_\varkappa$ ist der durch die Ungleichungen

$$x_{\varkappa-1} \leqq x \leqq x_\varkappa; \qquad y_{\varkappa-1} - a_\varkappa(x_\varkappa - x_{\varkappa-1}) \leqq y \leqq Y_{\varkappa-1} + A_\varkappa(x_\varkappa - x_{\varkappa-1})$$

definierte Bereich; die Zahlen $a_\varkappa$ und $A_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$ genügen den Ungleichungen $A_\varkappa \geqq A$, $a_\varkappa \leqq a$ und sind in ihrer Gesamtheit beschränkt;

34) Brux. soc. sc. 17, 1893, S. A. 8—12.

35) Bologna Mem. (5) 5, 1895, S. 257—270; (5) 6, 1896, S. 131—140.

36) Ann. de l'Éc. Norm. 24, 1907, S. 264—283.

37) Wegen dieses Begriffes und des nachher erwähnten Satzes von C. Arzelà vgl. etwa: H. Hahn, Theorie der reellen Funktionen I (Berlin 1921, J. Springer), S. 300 ff.; M. Fréchet-A. Rosenthal, Funktionenfolgen, Enzykl. II C 9 c, Nr. 49 b, Gleichgradig stetige Funktionenmengen, S. 1144—1146.

38) Math. Ann. 78, 1918, S. 378—384.

39) Brux. mém. cour. 47, 1893, 82 S.

man kann $A_\varkappa = A$, $a_\varkappa = a$ wählen. Bei unbegrenzter Verfeinerung der Unterteilung $\mathfrak{E}_k$ streben die Summen

$$Y_k(x) = y_0 + \sum_{\varkappa=1}^{k} M_\varkappa(x_\varkappa - x_{\varkappa-1}) \quad \text{und} \quad y_k(x) = y_0 + \sum_{\varkappa=1}^{k} m_\varkappa(x_\varkappa - x_{\varkappa-1})$$

gegen stetige Grenzfunktionen von x

$$\limsup_{(\mathfrak{E}_k)} y_k(x) = y(x) \quad \text{bzw.} \quad \liminf_{(\mathfrak{E}_k)} Y_k(x) = Y(x),$$

die von der Wahl der Größen $a_\varkappa$ und $A_\varkappa$ unabhängig sind.

Herr Ch.-J. de la Vallée Poussin stellt nun die „*Integrabilitätsbedingung* für die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$", daß im Intervall $\langle x_0, x_0 + a' \rangle$ $y(x) = Y(x)$ sein soll; ist sie erfüllt, so heißt die Differentialgleichung „integrabel". Jede Lösung $F(x)$ der Integralgleichung

$$F(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, F(t))\, dt$$

heißt „Integral der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$". Ist $y' = f(x, y)$ „integrabel", so ist $F(x) = y(x) = Y(x)$ ein „Integral" im angegebenen Sinn, und zwar das einzige mit dem Anfangswert $F(x_0) = y_0$.

Insbesondere ist die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ „integrabel", wenn f in bezug auf x und y stetig und f'_y beschränkt ist. Aber auch, wenn f'_y beschränkt und f in bezug auf y stetig und für jedes festgehaltene y in bezug auf x nach Riemann integrierbar ist. In gewissen Fällen darf f sowohl in bezug auf x als auch in bezug auf y unstetig sein.

Herr W. F. Osgood[40]) hat denselben Grundgedanken, beschränkt sich aber auf eine Differentialgleichung und stetige Funktionen $f(x, y)$ und bestimmt die Konstanten $m_\varkappa$ und $M_\varkappa$ so, daß $m_\varkappa$ nur von den $y_\varkappa$, nicht aber von den $Y_\varkappa$ abhängt, und umgekehrt. Daher kann er von jeder der Funktionen $y(x)$ und $Y(x)$ nachweisen, daß sie ein Integral mit dem Anfangswert y_0 ist; und zwar ist $y(x)$ das Minimal-, $Y(x)$ das Maximalintegral. Da hierbei Herr Osgood alle den Ungleichungen

$$y_0 - M|x - x_0| \leqq z(x) \leqq y_0 + M|x - x_0| \quad (M = \operatorname{Max}_{\mathfrak{B}} |f(x, y)|)$$

genügenden Lösungen $z(x)$ ins Auge faßt, besteht diese extremale Eigenschaft absolut. — Die Funktionen $y(x)$ und $Y(x)$ entsprechen dem Darbouxschen Unter- bzw. Oberintegral.

f) Untersuchungen von Herrn C. Carathéodory.

Herr C. Carathéodory[41]) läßt außer der Stetigkeit auch noch die Beschränktheit der Funktionen f_i fallen und beweist mit Verwendung

40) Monatsh. f. Math. u. Phys. 9, 1898, S. 331—345.

41) C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen (Leipzig und Berlin 1918, B. G. Teubner), S. 665—688.

des Lebesgueschen Integralbegriffs folgenden Satz: Sind die Funktionen $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ für konstante Werte von $y_1, \ldots, y_n$ in x meßbar und für konstante Werte von x in $(y_1, \ldots, y_n)$ stetig, ist außerdem für $a < x < b$

$$|f_i(x, y_1, \ldots, y_n)| \leqq M(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

wobei $M(x)$ eine über (a, b) summierbare Funktion bedeutet, so gibt es für jeden Punkt x_0 in (a, b) und n Konstanten $y_{10}, \ldots, y_{n0}$ ein System von totalstetigen Funktionen $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, für welche die Gleichungen

$$y_i(x) = y_{i0} + \int_{x_0}^{x} f_i(t, y_1(t), \ldots, y_n(t))\, dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

überall in (a, b) erfüllt sind. — Der Fall, daß die Funktionen f_i nur in einem endlichen Gebiet $a < x < b$, $a_\nu \leqq y_\nu \leqq b_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ die genannten Eigenschaften haben, läßt sich leicht auf den behandelten Fall zurückführen.

III. Untersuchungen über Ein- und Mehrdeutigkeit der Integrale.

Die Eindeutigkeit der zu einem vorgegebenen System von Anfangswerten (6) gehörigen Integrale kann, wenn die Lipschitz-Bedingung (8) erfüllt ist, aus den Ungleichungen (12) und (13) geschlossen werden.[42]) Ein einfacherer Beweis findet sich zuerst in der zweiten Auflage des Cours d'analyse von C. Jordan[43]): Für zwei Integralsysteme $y_i(x)$ und $z_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ des Systems (5) mit denselben Anfangswerten ist, wenn zur Abkürzung

$$\operatorname*{Max}_{x_0 \leqq x \leqq x_0 + \frac{1}{2nK}} \sum_{i=1}^{n} |y_i(x) - z_i(x)| = \mu$$

gesetzt wird, im Intervall $\left\langle x_0, x_0 + \frac{1}{2nK} \right\rangle$

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i(x) - z_i(x)| \leqq \int_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{n} |f_i(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)) - f_i(t, z_1(t), \ldots, z_n(t))|\, dt$$

$$\leqq nK \int_{x_0}^{x} \sum_{\varrho=1}^{n} |y_\varrho(t) - z_\varrho(t)|\, dt \leqq nK\mu\, |x - x_0| \leqq \frac{\mu}{2},$$

---

42) P. d. und P. fr. Nr. 3, 4. Ferner: G. Peano, Nouv. Ann. (3), 11, 1892, S. 79—82; F. d'Arcais, Ven. Ist. Atti 61 [= (8), 4], 1901/02, S. 851—855. Vgl. auch Serret-Scheffers, a. a. O. S. 65 f.

43) C. Jordan, Cours d'analyse III (Paris 1896, Gauthier-Villars), 2. Auflage, S. 92 f. Vgl. H. v. Mangoldt, Einführung in die höhere Mathematik III (Leipzig 1920, S. Hirzel), 2. Auflage, S. 480; L. Bieberbach, a. a. O. S. 28.

also auch $\mu \leqq \frac{\mu}{2}$, also $\mu = 0$, also $y_i(x) \equiv z_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Durch Aneinanderreihen von Intervallen der Länge $\frac{1}{2nK}$ ergibt sich dann die Einzigkeit im ganzen Bereich, wo (8) erfüllt ist. Herr C. Carathéodory[44]) hat gezeigt, daß man in (8) die Konstante K durch eine nach Lebesgue integrable Funktion $K(x)$ ersetzen kann. Herr O. Perron[45]) hat einen auf vollständiger Induktion im Kontinuum beruhenden Beweis gegeben, wodurch das Aneinanderreihen von Intervallen entbehrlich wird.

Die ersten einfachen Beispiele für Mehrdeutigkeit finden sich bei Herrn G. Peano[31]), Herrn G. Mie[33]) und Herrn J. Bendixson[46]); das einfachste bilden die Integrale der Differentialgleichung $y' = \sqrt{|y|}$, die der Anfangsbedingung $y(0) = 0$ genügen:

$$y(x) = \begin{Bmatrix} 0 & \text{für} & a \leqq x \leqq b, \\ \frac{1}{4}(x-b)^2 & \text{„} & b < x, \\ -\frac{1}{4}(x-a)^2 & \text{„} & x < a \end{Bmatrix} \qquad (a \leqq 0,\ b \geqq 0).$$

Hier ist die Lipschitz-Bedingung nicht erfüllt. Andererseits braucht es trotz verletzter Lipschitz-Bedingung nur ein Integral zu geben, wie Herr C. Carathéodory[44]) an einem Beispiel zeigt.

Herr W. F. Osgood[40]) bewies für eine, Herr O. Perron[45])[47]) für ein System von Differentialgleichungen: Ist $\omega(u)$ stetig, $\omega(0) = 0$, $\omega(u) > 0$ für $u > 0$, $\omega(-u) = \omega(u)$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{u_0} \frac{du}{\omega(u)} = \infty \qquad (0 < \varepsilon < u_0)$$

und in $\mathfrak{B}$

$$|f_i(x, y_1, \ldots, y_n) - f_i(x, z_1, \ldots, z_n)| \leqq \varphi\left(\operatorname*{Max}_{\varrho = 1, \ldots, n} |y_\varrho - z_\varrho|\right) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

so hat das System (1) nur ein Integralsystem mit den Anfangswerten (2). Die angegebenen Bedingungen erfüllen beispielsweise die Funktionen $\omega(u) = k|u|$, k absolute Konstante (gewöhnliche Lipschitz-Bedingung), $\omega(u) = k|u| \lg \frac{1}{|u|}$, $\omega(u) = k|u| \lg \frac{1}{|u|} \lg \lg \frac{1}{|u|}$, usw.

Herr J. Tamarkine[48]) fand das Osgoodsche Ergebnis mit der Einschränkung wieder, daß $\omega(u)$ mit u monoton wächst. Er stellte außerdem folgende *hinreichende Bedingung für Mehrdeutigkeit* auf: Gibt es eine

44) Vorlesungen über reelle Funktionen, S. 672 ff.
45) Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. 35, 1926. S. 202 f.
46) Öfersigt af Kongl. Vetensk.-Ak. Förhandl. 1897, S. 605—622.
47) Math. Ann. 95, 1926, S. 98—101.
48) Math. Zeitschr. 16, 1923, S. 207—213.

positive, mit u monoton wachsende Funktion $\psi(u)$ mit $\psi(0) = 0$ derart, daß

$$\lim_{u \to +0} \int_u^{u_0} \frac{du}{\psi(u)} \qquad (0 < u < u_0)$$

endlich ist, und ist in einer beliebig kleinen, aber endlichen Umgebung des Punktes (x_0, y_0)

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \geqq \psi(|y_2 - y_1|),$$

so schickt die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ durch diesen Punkt mindestens zwei Integralkurven.

Herr M. Lavrentieff[49]) konstruierte eine Differentialgleichung, die durch *jeden* Punkt des Rechtecks $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ mindestens zwei verschiedene Integralkurven schickt, während dies vorher nur für alle Punkte eines eindimensionalen Kontinuums geschehen war.

Herr E. Bompiani[50]) bewies für eine Differentialgleichung und unter der Einschränkung, daß $\varphi(x, z)$ mit z monoton wächst, Herr O. Perron[47]) für ein System und ohne Monotoniebedingung: Sind die Funktionen $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ im Bereich $0 \leqq x \leqq a$, $|y_i| \leqq b$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ stetig und den Ungleichungen

$$(14) \quad |f_i(x, y_1, \ldots, y_n) - f_i(x, Y_1, \ldots, Y_n)| \leqq \varphi(x, z), \quad z = \max_{i=1,\ldots,n} |y_i - Y_i|$$

unterworfen, wobei $\varphi(x, z)$ für $0 \leqq x \leqq a$, $z \geqq 0$ stetig ist, so gilt für zwei beliebige, für $x = 0$ verschwindende Integrale $y_i(x)$ und $Y_i(x)$ des Systems (5) im Intervall $\langle 0, a \rangle$

$$(15) \quad |y_i(x) - Y_i(x)| \leqq z(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

wo $z(x)$ das für $x = 0$ verschwindende Maximalintegral der Differentialgleichung $z' = \varphi(x, z)$ ist. — Wenn also insbesondere $\varphi(x, 0) = 0$, und wenn $z = 0$ das einzige für $x = 0$ verschwindende Integral der Differentialgleichung $z' = \varphi(x, z)$ ist, so ist $y_i = Y_i$, das Integral des Systems (5) also einzig. Hierin ist das oben erwähnte Ergebnis von Herrn Osgood und Herrn Perron enthalten.

Herr L. Tonelli[51]) hat im Falle einer einzigen Gleichung gezeigt, daß man statt der Bedingung (14) nur die Ungleichung

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) \begin{cases} \leqq \varphi(x, y_2 - y_1) \text{ im Intervall } \langle 0, a \rangle \\ \geqq \varphi(x, y_2 - y_1) \quad \text{„} \qquad \text{„} \quad \langle -a, 0 \rangle \end{cases} \qquad (y_1 \leqq y_2)$$

49) Math. Zeitschr. 23, 1925, S. 197—209.

50) Atti della R. acc. naz. dei Lincei, Rendiconti (6) 1, 1925, S. 298—302.

51) Atti della R. acc. naz. dei Lincei, Rendiconti (6) 1, 1925, S. 272—277.

vorauszusetzen braucht, um (15) sicherstellen zu können. Weiter zeigt Herr L. Tonelli: Ist $\omega(u)$ stetig, $\omega(u) > 0$ für $u > 0$,

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\varepsilon}^{u_0} \frac{du}{\omega(u)} = +\infty \qquad (0 < \varepsilon < u_0),$$

$\varphi(x)$ im Intervall $\langle x_0, x_0 + a\rangle$ [bzw. $\langle x_0 - a, x_0\rangle$] definiert und in jedem Intervall $\langle x_1, x_0 + a\rangle$, $(x_1 > x_0)$ [bzw. $\langle x_0 - a, x_1\rangle$, $(x_1 < x_0)$] nach Lebesgue integrierbar,

$$\lim_{x_1 \to x_0 + 0} \int_{x_1}^{x_0 + a} \varphi(x)\, dx \quad [\text{bzw.} \lim_{x_1 \to x_0 - 0} \int_{x_1}^{x_0 - a} \varphi(x)\, dx]$$

vorhanden, ferner in jedem Rechteck $x_1 \leqq x \leqq x_0 + a$, $|y - y_0| \leqq b$, $(x_0 < x_1 < x_0 + a)$ [bzw. $x_0 - a \leqq x \leqq x_1$, $|y - y_0| \leqq b$, $(x_0 - a < x_1 < x_0)$] stets

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) \leqq \varphi(x)\,\omega(y_2 - y_1) \qquad (y_1 < y_2),$$

[bzw.

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) \geqq \varphi(x)\,\omega(y_2 - y_1) \qquad (y_1 < y_2)],$$

so hat die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ im Intervall $\langle x_0, x_0 + a\rangle$ [bzw. $\langle x_0 - a, x_0\rangle$] nur ein Integral mit dem Anfangswert [bzw. Endwert] y_0.

Herr L. Tonelli[51]) und Herr T. Yosie[52]) zeigten ferner: Dasselbe gilt, wenn insbesondere $f(x, y)$ für alle Werte x des Intervalles $\langle x_0, x_0 + a\rangle$ mit y nicht wächst [bzw. für alle Werte des Intervalles $\langle x_0 - a, x_0\rangle$ mit y nicht abnimmt].

Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Einzigkeit des Integrals der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ hat im Anschluß an die Methode der Ober- und Unterfunktionen Herr T. Yosie[52]) aufgestellt: Es muß zu jeder positiven Zahl ε ein Paar stetige, derivierbare Funktionen oder insbesondere ein Paar Polygonzüge oder auch ein Paar Polynome $\psi(x)$, $\varphi(x)$ mit folgenden Eigenschaften geben:

$$\begin{aligned} 0 < \psi(x) - \varphi(x) &< \varepsilon && \text{für} \quad x_0 \leqq x \leqq X, \\ D_{\pm}\psi(x) &> f(x, \psi(x)) && \quad „ \quad x_0 \leqq x \leqq X, \\ D_{\pm}\varphi(x) &< f(x, \varphi(x)) && \quad „ \quad x_0 \leqq x \leqq X, \\ \psi(x_0) \geqq y_0 &\geqq \varphi(x_0). \end{aligned}$$

52) Jap. Journ. of Math. 2, 1926, S. 161—178.

(Eingegangen am 9. 2. 27.)

Reine und angewandte Mathematik.[1])

Von H. BEHMANN in Halle.

Mit 3 Figuren im Text.

Die heute übliche Einteilung des Forschungs- und Lehrbetriebes der Mathematik in einen theoretischen und einen praktischen Teil, in die sogenannte reine und angewandte Mathematik, ist verhältnismäßig jungen Datums. In der heroischen Zeit der Mathematik, als deren letzten großen Vertreter wir Carl Friedrich Gauß betrachten dürfen, verstand es sich noch von selbst, daß der rechte und echte Mathematiker auf allen Gebieten seiner Wissenschaft, theoretischen wie praktischen, bewandert sein müsse. Daß man sich etwa auf den — noch dazu von allen Beziehungen zur Wirklichkeit sorgfältig gereinigten — theoretischen Teil der Mathematik beschränken und die Tatsache ihrer Anwendbarkeit als einen mehr oder minder zufälligen, für die reine Theorie aber jedenfalls belanglosen Nebenumstand betrachten könne, wäre — wenn wir von einer der zu schildernden analogen Entwicklung innerhalb der griechischen Mathematik absehen — früheren Zeiten völlig unfaßbar gewesen. Doch mit dem beständigen Anwachsen des Stoffes wurde eine solche Trennung natürlich unvermeidlich. Ob man diese Entwicklung begrüßen oder beklagen soll, ist eine müßige Frage; es handelt sich hier eben um ein notwendiges Schicksal, und das einzige, was wir tun können und müssen, ist, eine Entfremdung zwischen den Teilgebieten nach Möglichkeit zu verhindern und dahin zu wirken, daß jeder Mitarbeitende seine Kräfte gerade in einer solchen Weise schult und einsetzt, wie es nicht allein für die Förderung der Mathematik im ganzen, sondern für unser gesamtes Erkennen und Dasein am ersprießlichsten ist.

Wenn wir unter „reiner Mathematik" denjenigen Teil der Mathematik verstehen, der einzig auf die abstrakte Eigengesetzlichkeit des Mathematischen ausgeht und die Beziehung auf die Wirklichkeit völlig aus dem Spiel läßt, unter „angewandter Mathematik" dagegen die mathematische Theorie der einzelnen Anwendungsgebiete, so werden wir bei genauerem Zusehen erkennen, daß diese Disjunktion keine vollständige ist. Es ist nämlich außer den beiden genannten noch eine mathematische Theorie möglich, die sich nicht auf diese oder jene

---

1) Antrittsvorlesung anläßlich der Umhabilitation an die Universität Halle am 18. Dez. 1925.

bestimmte Anwendung, sondern auf alle Anwendungen gleichmäßig bezieht, also eine Theorie der Anwendung der Mathematik auf die Wirklichkeit. Und eine solche Theorie ist nun tatsächlich vorhanden und ein unentbehrliches Mittelglied zwischen reiner Theorie und Anwendung. Und zwar handelt es sich hier um die drei Gebiete des numerischen Rechnens, der graphischen Methoden und der darstellenden Geometrie, von denen das erste die rechnerische und das zweite die zeichnerische Anwendung der Arithmetik und Analysis auf die Wirklichkeit umfaßt, während das dritte das entsprechende für die Geometrie leistet.

Es ist wiederum unnötig, zu fragen, ob man dieses Zwischengebiet zur reinen oder zur angewandten Mathematik rechnen soll; viel wichtiger ist die Bemerkung, daß sowohl der reine als auch der angewandte Mathematiker darin bewandert sein sollten. Während der angewandte Mathematiker sich natürlich selber im Lichte stehen würde, wenn er die eigens für ihn auf diesem Gebiet geleistete Arbeit ungenutzt ließe, würde der reine Mathematiker im gleichen Falle sowohl auf ein höchst wertvolles Anregungsmittel für seine theoretische Forschung als auch auf ein in gleichem Maße wichtiges praktisches Hilfsmittel verzichten. Denn jeder reine Mathematiker ist ja gezwungen, seine Theorie gelegentlich auf Einzelfälle anzuwenden. Es wäre ja geradezu ein Wahnsinn, wenn er sich bei allen Überlegungen und Vermutungen grundsätzlich allein durch abstrakte logische Schlüsse leiten lassen wollte, ohne hin und wieder einmal zu probieren, ob die Sache wirklich stimmt oder wie sie sich wohl verhalten mag. Gerade hierfür ist Gauss das beste Beispiel; es ist bekannt, daß seine außerordentliche Fruchtbarkeit in der Zahlentheorie zu einem wesentlichen Teil seinem geschickten und unermüdlichen Zahlenrechnen zu verdanken ist. Und warum sollte, wer die Theorie der Zahlen bearbeitet, nicht auch ihre Praxis kennen und mit Rechenschieber und Rechenmaschine zu arbeiten verstehen!

Durchaus Entsprechendes gilt natürlich für die übrigen Gebiete der reinen Mathematik; wesentlich darum habe ich die Zahlentheorie herausgegriffen, weil man es bei ihr vielleicht am wenigsten erwarten würde. In der Theorie der Differentialgleichungen, der Funktionentheorie im weitesten Sinne, der Theorie der Kurven und Flächen treten vorzugsweise die graphischen Methoden in ihr Recht, während andererseits jedem, der ein mathematisches Buch verfaßt, worin auch Figuren vorkommen, die darstellende Geometrie nicht dringend genug ans Herz gelegt werden kann.

Daß diese Theorie der Anwendung der Mathematik bei den Ver

tretern der reinen Mathematik bisher nicht durchweg den gebührenden Anklang gefunden hat, rührt einmal daher, weil dieses Gebiet fast allein von den angewandten Mathematikern im engeren Sinne, also den Physikern, Geodäten, Astronomen, Technikern usw., für ihre eigenen Bedürfnisse ausgearbeitet worden ist. Dies hat z. B. zur Folge gehabt, daß vieles davon mehrmals unabhängig entdeckt und ausgearbeitet worden ist. Ja, es hat sich sogar ereignet, daß die Techniker bei der graphischen Darstellung der Wechselströme die komplexen Zahlen von neuem entdeckt haben! Zum anderen kommt es daher, weil die Gesichtspunkte, nach denen man auf diesem Gebiet arbeitet, notwendig von denen, die man in der reinen Mathematik als maßgebend betrachtet, grundverschieden sind. Während in der reinen Mathematik Allgemeinheit, Geschlossenheit und Eleganz ihre Triumphe feiern, entscheidet hier allein die nüchterne Zweckmäßigkeit.

Es wäre allerdings ein Unrecht, nun zu denken, daß eine solch einen nüchternen Grundsatz befolgende Wissenschaft selber etwas sehr Nüchternes haben müsse. Im Gegenteil darf man sagen, hier ist die höchste Zweckmäßigkeit die höchste Schönheit. Gerade, wo eine Idee in höchster Vollendung durchgeführt ist, haben wir ja eben den Eindruck des Schönen. Selbst die an sich bestechendste Eleganz eines Rechenverfahrens würde uns hier völlig kalt lassen, sobald sich etwa erweisen sollte, daß das fragliche Verfahren irgendeinem viel näher liegenden praktisch unterlegen wäre. Vielmehr werden wir stets demjenigen Verfahren den Vorzug geben, das ein gegebenes Ziel mit einem möglichst geringen Aufwand an Zeit und Anstrengung und — wenn ich es wagen darf, das hier auszusprechen — an Kosten zuverlässig zu erreichen gestattet. Es kann übrigens durchaus vorkommen, daß dieser letzte Gesichtspunkt sogar vor den ersten beiden den Vorrang behauptet. So ist z. B. in der Technik für die dort außerordentlich häufige Aufgabe der harmonischen Analyse einer periodischen Funktion ein Rechenverfahren (das Hermannsche) gebräuchlich, das für den geübten Mathematiker keineswegs das zweckmäßigste ist, das aber den Vorteil hat, daß es auch von mathematisch nicht vorgebildeten Hilfskräften, die infolgedessen für geringere Entlohnung arbeiten, erlernt und zuverlässig gehandhabt werden kann.

Ein anderer grundlegender Begriff, der neben den der Zweckmäßigkeit tritt, ist der der Genauigkeit. Für den angewandten Mathematiker sind die absolut genauen reellen Zahlen des reinen Mathematikers und deren Unterscheidung in rationale und irrationale, algebraische und transzendente eine bloße Fiktion; er kennt grundsätzlich — abgesehen höchstens von Anzahlen — nur Zahlen, die mit einer

gewissen beschränkten Genauigkeit gegeben sind. Wollen wir z. B. die Länge eines Stabes wissen, so können wir ihn messen, indem wir einen Maßstab oder ein Meßband anlegen. Damit können wir die Anzahl der Zentimeter und der Millimeter ablesen, die Zehntel Millimeter dagegen schon nicht mehr zuverlässig. Um die Länge auf mehr Dezimalen zu bestimmen, können wir einen feineren Maßstab und etwa noch ein Mikroskop anwenden. Aber welche Hilfsmittel wir auch anwenden mögen, wir werden niemals die Länge des Stabes mit zehn oder gar zwanzig Dezimalen angeben können. Zunächst hat der Stab keine glatte Begrenzung; wir wissen also gar nicht, von welchem Punkt des einen Endes bis zu welchem Punkt des anderen Endes wir messen sollen. Überdies ist er, genau genommen, gar kein starrer Körper, sondern besteht aus Molekülen, die in fortgesetzter schwingender Bewegung sind. Die Frage: „Welches ist die Länge dieses Stabes in cm auf 10 Dezimalstellen?“ ist also nicht etwa nur praktisch nicht zu beantworten, sondern geradezu sinnlos, umsomehr natürlich die Frage nach seiner absolut genauen Länge.

Es ist also kein Mangel, daß wir in der angewandten Mathematik keine absolut genauen Zahlen haben, sondern liegt durchaus im Wesen der Sache. Absolut genaue Zahlen würden uns auch gar nichts nützen, da wir sie ja nicht einmal hinschreiben könnten, sondern jede Zahl notgedrungen nach irgendeiner Anzahl von Stellen doch abbrechen müßten. Wesentlich ist nur, daß man die Genauigkeit der vorkommenden Zahlen wirklich kennt, also z. B. zwei einander genügend nahe Zahlen (etwa in Gestalt von abbrechenden Dezimalbrüchen) angeben kann, zwischen denen die fragliche Zahl sicher liegt.

Dieser Umstand hat nun mancherlei Auswirkungen. Zunächst einmal werden die Größen, die auf Grund ungenauer Größen bestimmt worden sind, ihrerseits im allgemeinen eine noch etwas geringere Genauigkeit haben, und es ist dann nutzlos, wenn nicht geradezu verwirrend, mit mehr Dezimalen zu rechnen, als dieser Genauigkeit angemessen ist. Sind also die Daten z. B. nur mit der verhältnismäßig geringen Genauigkeit von $2^0/_{00}$ bekannt (was besagt, daß der praktisch gegebenen oder ermittelten Maßzahl a eine „genaue“ Zahl zwischen $a - 0{,}002a$ und $a + 0{,}002a$ entspricht), so wird man mit dem Rechenschieber oder auch graphisch arbeiten, während man für größere Genauigkeit Logarithmen oder die Rechenmaschine verwenden wird.

Das Zahlenrechnen in der angewandten Mathematik ist demgemäß durchweg ein abgekürztes, d. h. man schreibt bei jeder vorkommenden Zahl oder Ziffergruppe nur so viele Stellen hin, wie man einigermaßen garantieren kann, indem man die erste fortgelassene in bekannter

Weise gegebenenfalls zur Erhöhung der letzten stehenbleibenden verwendet. (Allerdings pflegt man vorsichtshalber eine bis zwei unzuverlässige Stellen mitzuführen, um die Häufung der Abrundungsfehler im Ergebnis zu vermeiden.) Von Bedeutung ist, wie bereits gesagt, daß man von jeder auftretenden Zahl die Unsicherheit annähernd kennt, um einerseits die Rechnung nicht mit zu vielen Ziffern zu belasten und andererseits die Unsicherheit des Ergebnisses richtig einzuschätzen.

Hierzu ist es nun sehr nützlich, die „Fehlerfortpflanzung“ für die einzelnen Operationen zu kennen. Addiert man zwei Zahlen mit dem maximalen Fehler, besser gesagt, der maximalen Korrektur α, so hat die Summe augenscheinlich die maximale Korrektur 2α. Ein wenig verwickelter wird es schon beim Produkt. Hier lautet die praktische Regel für den einfachsten Fall folgendermaßen: Sind zwei regelrecht abgekürzte Dezimalbrüche von der gleichen Stellenzahl n (was keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet), also je mit der Maximalkorrektur $\frac{1}{2} \cdot 10^{-n}$, gegeben, so erhält man die Fehlergrenzen des Produkts mit ausreichender Genauigkeit, indem man das arithmetische Mittel der Faktoren, noch mit einer Einheit der letzten Stelle, also mit 10^{-n} multipliziert, zu dem Produkt der Näherungswerte addiert und von ihm subtrahiert.

Sind die gegebenen Zahlen z. B. 3,7284 und 0,9156 und ist die zugehörige genaue, etwa von der Rechenmaschine abgelesene, Produktzahl 3,413 723 04, so ergibt die folgende Rechnung:

$$\frac{3{,}73 + 0{,}91}{2} = 2{,}32$$

$$\begin{array}{r} 3{,}413\,723 \\ \pm\, 2{,}32 \\ \hline 3{,}413\,491 \\ 3{,}413\,955 \end{array}$$

praktisch hinreichend genau das kleinste Intervall, innerhalb dessen der wahre Produktwert notwendig liegt. — Sind nämlich allgemein a und b die gegebenen Näherungswerte, so sind die gesuchten Intervallgrenzen augenscheinlich

$$(a-\alpha)(b-\alpha) \quad \text{und} \quad (a+\alpha)(b+\alpha)$$

oder, nach Ausmultiplikation und bei Vernachlässigung der praktisch belanglosen Größe α^2,

$$ab-(a+b)\alpha \quad \text{und} \quad ab+(a+b)\alpha.$$

Ähnliche Regeln lassen sich für die Division, das Potenzieren usw. aufstellen.

Dem Umstand, daß die gegebenen Größen eine beschränkte Genauigkeit haben und infolgedessen auch das Ergebnis vernünftigerweise nur mit einer gewissen Genauigkeit verlangt werden darf, ist es weiter zuzuschreiben, daß die vielberufenen Fragen der Konvergenz für die angewandte Mathematik, streng genommen, keine Bedeutung haben.

Haben wir es mit irgendeinem unendlichen Prozeß zu tun, z. B. einer unendlichen Reihe

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n \cdots,$$

so wird der reine Mathematiker zunächst fragen, ob sie konvergiert, d. h. ob ihre Teilsummen sich einem gewissen Wert mehr und mehr beliebig nähern, je größer n wird; wenn das nicht der Fall ist, wird er vielleicht weiter untersuchen, ob sie summierbar ist, usw. Ganz anders der angewandte Mathematiker. Er fragt nicht, ob man mit hinreichend vielen Schritten dem Ergebnis beliebig nahe kommen kann, sondern ihm liegt allein daran, ob man mit verhältnismäßig wenigen Schritten, also durch eine nicht zu lange Rechnung, dem Ergebnis innerhalb der gerade in Betracht zu ziehenden Genauigkeitsgrenzen nahe kommt. Schreiben wir die Reihe z. B.

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + R_5,$$

wo R_5 der noch verbleibende Rest ist, so wird der angewandte Mathematiker, falls er von R_5 zeigen kann, daß es unterhalb des im Resultat ohnehin zu erwartenden Fehlers liegt, einfach die Summe

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

bilden und diese als Ergebnis nehmen.

Wie sich das Restglied bei wachsendem n verhält, ob es sich der Null nähert oder aber die Reihe divergiert, ist ihm dagegen gleichgültig. Ja, er wird eine derartige divergente Reihe einer konvergenten wie der folgenden:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots,$$

bei der die Ermittlung etwa der ersten sechs Dezimalen bereits jahrelanges Rechnen erfordern würde und die daher praktisch völlig unbrauchbar ist, unbedingt vorziehen.

Solche divergente Reihen, die sich dennoch praktisch wie konvergente Reihen verhalten, kommen nun in der Mathematik gar nicht selten vor. Sie können dazu dienen, eine Größe zwar nicht mit beliebiger, aber doch unter Umständen ziemlich großer Genauigkeit zu berechnen. Das einfachste Problem, bei dem sie auftreten, ist das der Interpolation.

Sind die Werte einer Funktion für äquidistante Werte des Arguments, etwa, wie wir unbeschadet der Allgemeinheit annehmen können, für $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots,$ gegeben und wollen wir — unter Voraussetzung eines hinreichend glatten Verlaufes der Funktion — ihre Werte auch für zwischenliegende Argumentwerte ermitteln, so bedienen wir uns des folgenden Verfahrens:

Wir schreiben zunächst die gegebenen Funktionswerte, nach steigendem Argumentwert geordnet, untereinander, dann in einer weiteren Spalte, um eine halbe Zeilenhöhe verschoben, den (positiven oder negativen) Zuwachs jeder Zahl der vorhergehenden Spalte im Vergleich zur darüberstehenden, weiter in einer neuen Spalte, wieder mit geeigneter halbstufiger Verschiebung, die Differenzen je zweier aufeinanderfolgender Zahlen der vorausgehenden Spalte, usf.

Für die Darstellung der Theorie ist es zweckmäßig, die gegebenen Funktionswerte $f(n)$ überdies mit $(n, 0)$, die „ersten Differenzen" $(n+1, 0) - (n, 0)$ mit $(n + \frac{1}{2}, 1)$, weiter die „zweiten Differenzen" $(n + \frac{1}{2}, 1) - (n - \frac{1}{2}, 1)$ mit $(n, 2)$ zu bezeichnen, usf. So entsteht das folgende „Differenzenschema":

$f(-3) = (-3, 0)$			
	$(-2\frac{1}{2}, 1)$		
$f(-2) = (-2, 0)$		$(-2, 2)$	
	$(-1\frac{1}{2}, 1)$		$(-1\frac{1}{2}, 3)$
$f(-1) = (-1, 0)$		$(-1, 2)$	
	$(-\frac{1}{2}, 1)$		$(-\frac{1}{2}, 3)$
$f(0) = (0, 0)$		$(0, 2)$	
	$(\frac{1}{2}, 1)$		$(\frac{1}{2}, 3)$
$f(1) = (1, 0)$		$(1, 2)$	
	$(1\frac{1}{2}, 1)$		$(1\frac{1}{2}, 3)$
$f(2) = (2, 0)$		$(2, 2)$	
	$(2\frac{1}{2}, 1)$		
$f(3) = (3, 0)$			

Man erkennt, daß bei geeigneter Zählung der erste Bestandteil des Klammersymbols die Zeilennummer und der zweite die Spaltennummer bedeutet.

Außer dem obigen Zahlwert (n, m) ordnen wir jeder Stelle des Schemas eine gewisse ganze rationale Funktion von x zu, die wir mit $[n, m]$ bezeichnen wollen.[1]) Und zwar bedeutet $[n, 0]$ die Funktion $x - n$, weiter $[n + \frac{1}{2}, 1]$ das durch $2!$ dividierte Produkt der zwei zur Zeile $n + \frac{1}{2}$ symmetrisch liegenden aufeinanderfolgenden Funktionen $[n, 0]$ und $[n + 1, 0]$ der Spalte 0, entsprechend $[n, 2]$ das durch $3!$ dividierte Produkt der drei zur Zeile n symmetrisch liegenden Funktionen $[n - 1, 0]$, $[n, 0]$ und $[n + 1, 0]$, usf. Dies ergibt das folgende „Funktionenschema":

1) Dies ist eine vom Verfasser eingeführte Symbolik.

$$[-3, 0] = x + 3$$
$$[-2, 0] = x + 2$$
$$[-1, 0] = x + 1$$
$$[0, 0] = x$$
$$[1, 0] = x - 1$$
$$[2, 0] = x - 2$$
$$[3, 0] = x - 3$$

$$[-2\tfrac{1}{2}, 1] = \frac{(x+3)(x+2)}{2!}$$
$$[-1\tfrac{1}{2}, 1] = \frac{(x+2)(x+1)}{2!}$$
$$[-\tfrac{1}{2}, 1] = \frac{(x+1)x}{2!}$$
$$[\tfrac{1}{2}, 1] = \frac{x(x-1)}{2!}$$
$$[1\tfrac{1}{2}, 1] = \frac{(x-1)(x-2)}{2!}$$
$$[2\tfrac{1}{2}, 1] = \frac{(x-2)(x-3)}{2!}$$

$$[-2, 2] = \frac{(x+3)(x+2)(x+1)}{3!}$$
$$[-1, 2] = \frac{(x+2)(x+1)x}{3!}$$
$$[0, 2] = \frac{(x+1)x(x-1)}{3!}$$
$$[1, 2] = \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}$$
$$[2, 2] = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{3!}$$

Es besteht nun der merkwürdige Sachverhalt, daß man — unter gewissen sehr allgemeinen, hier nicht näher zu untersuchenden Voraussetzungen — eine brauchbare Reihenentwicklung für die Funktion $f(x)$ bekommt, indem man, von einer der Zahlen $(n, 0)$ ausgehend, irgendwie um eine halbe Stufe auf- oder absteigend im Zickzack nach rechts fortschreitet und diese Zahlwerte der Reihe nach mit den gleichliegenden Elementen des Funktionenschemas in einer gewissen Weise verkettet. Verfolgen wir z. B. den in Fig. 1 eingezeichneten (von $(0, 0)$ ausgehend gedachten) Weg, so lautet die zugehörige Entwicklung, wenn wir der Deutlichkeit halber die Abhängigkeit der vorkommenden Größen von der Funktion f und dem Argumentwert x durch Indizes ausdrücklich kennzeichnen:

Fig. 1.

$$f(x) = {}^{f}(0, 0) + {}^{f}(-\tfrac{1}{2}, 1)\,[0, 0]_x + {}^{f}(0, 2)\,[-\tfrac{1}{2}, 1]_x + {}^{f}(\tfrac{1}{2}, 3)\,[0, 2]_x + {}^{f}(0, 4)\,[\tfrac{1}{2}, 3]_x + {}^{f}(\tfrac{1}{2}, 5)\,[0, 4]_x + \cdots$$

Die Funktionen haben die gleichen Nummern wie die Differenzen, bleiben aber hinter diesen jeweils um einen Schritt zurück.[1]) Wenn die obigen Funktionen tabelliert vorliegen, macht die praktische Ausrechnung, namentlich beim Arbeiten mit der Rechenmaschine, geringe Mühe.

1) Das obige Prinzip bleibt übrigens wörtlich bestehen, wenn man in bekannter Weise in das Differenzenschema und nunmehr entsprechend auch in das Funktionenschema zwischen je zwei übereinander stehende Werte ihre arithmetischen Mittel als „Nebenwerte" einfügt und die Bedingung hinzunimmt, daß diese Nebenwerte stets in wagerechter Richtung zu überschreiten sind.

Das Seltsamste bei diesem Ergebnis ist nun aber, daß die so entstehenden Reihen nicht konvergent, sondern nur, wie man sagt, „semikonvergent“ zu sein pflegen. Daß wir hier in der Tat im allgemeinen nicht auf Konvergenz rechnen dürfen, überlegen wir leicht folgendermaßen: Hat etwa die vorgelegte Funktion für einen der gegebenen Werte, nehmen wir an, für $n = -3$, eine Unendlichkeitsstelle, so werden natürlich die von dieser Stelle ausstrahlenden Differenzen ebenfalls unendlich oder unbestimmt. Eine Reihenentwicklung, die in diesen Winkel eindringt, kann also unmöglich konvergieren, da ihre Glieder sogar unbestimmt werden. Ähnliches tritt aber auch dann ein, wenn die Unendlichkeitsstelle irgendwo zwischen den gegebenen Werten liegt. Dann zeigen die Differenzen in dem fraglichen Winkelraum ein ganz unregelmäßiges Verhalten, und daher ist für Interpolationsreihen, die in diesen Winkelraum eintreten — was nur in dem ganz speziellen Falle vermieden wird, daß nur auf einer Seite der Ausgangsstelle Unendlichkeitsstellen liegen und der Entwicklungszug von einer gewissen Stelle an der zunächstliegenden Begrenzung des kritischen Winkelraumes parallel läuft, die Entwicklung also eine Newtonsche ist —, also für die weitaus größte Zahl der praktischen Fälle, keine Konvergenz zu erwarten; vielmehr wird die Reihe von einer gewissen Stelle an divergieren.[1]) Vorher aber strebt sie — einen hinreichend glatten und ruhigen Verlauf der gegebenen Funktion vorausgesetzt — ganz brav, so gut sie eben vermag, dem gemeinten Funktionswert zu. — Handelt es sich um die Interpolation einer nur empirisch gegebenen Funktion, so wird die Frage der Konvergenz oder Divergenz natürlich überhaupt nicht akut, weil wir in diesem Falle ja nur endlich viele Funktionswerte zur Verfügung haben und infolgedessen auch nur endlich viele Differenzen bilden können.

Wenn wir das praktische Vorgehen des angewandten Mathematikers betrachten, so werden wir noch auf einen anderen Widerstreit zwischen den Idealen der reinen und der angewandten Mathematik aufmerksam. Die reine Mathematik erstrebt, wie schon früher gesagt, Geschlossenheit; sie steht im ganzen unter der Herrschaft der Formel, des „geschlossenen Ausdrucks“, der die Ergebnisse in möglichst allgemeiner Form derart verkörpern soll, daß alle Einzeltatsachen sich durch bloßes Einsetzen besonderer Werte in den allgemeinen Ausdruck ergeben, und zu ihren wichtigsten Problemen gehört bekanntlich die Ermittlung der Grenzen einer solchen Darstellbarkeit und gegebenen-

1) Die obige Überlegung besagt selbstverständlich nicht, daß etwa nur im Falle von Unendlichkeitsstellen im Reellen und Endlichen mit Divergenz bzw. Semikonvergenz zu rechnen wäre.

falls der Nachweis ihrer Unmöglichkeit. Ich erinnere hier nur an den klassischen Beweis der Tatsache, daß die Wurzeln einer Gleichung von höherem als viertem Grade sich nicht vermittelst der vier Spezies und des Ziehens der n-ten Wurzel durch die Koeffizienten darstellen lassen, sowie an den Beweis der Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises, d. h. der Unmöglichkeit, einen beliebig vorgegebenen Kreis vermittelst endlich vieler Anwendungen von Zirkel und Lineal in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln.

Dem angewandten Mathematiker liegt an dieser „Geschlossenheit" wiederum wenig oder gar nichts. Für ihn ist die Formel nur eine besondere Art unter vielen, ein Rechenverfahren übersichtlich vor Augen zu stellen, die nicht schon an sich vor anderen einen Vorzug hat, und Entsprechendes gilt für das auf Grund endlich vieler Schritte absolut genaue Konstruktionsverfahren. Er setzt also grundsätzlich an die Stelle der Formel die Rechenvorschrift, den „Algorithmus" — wovon die Formel, wie schon gesagt, ein besonderer Fall ist —, und trägt natürlich auch da, wo an sich eine geschlossene Formel möglich wäre, keinerlei Bedenken, eine nicht unmittelbar als Formel darstellbare Vorschrift, falls sie schneller zum Ziel führt — und das ist außerordentlich häufig der Fall —, dieser vorzuziehen. Übrigens gibt es solche Algorithmen bekanntlich auch in der reinen Mathematik — das wichtigste Beispiel ist der Euklidische Algorithmus für die Ermittlung des größten gemeinsamen Teilers —; der wesentliche Punkt ist aber dieser, daß dort die geschlossene Formel notwendig einen grundsätzlichen Vorzug vor dem bloßen Algorithmus hat, in der angewandten Mathematik aber nicht. So macht es für den angewandten Mathematiker nicht den geringsten grundsätzlichen Unterschied, ob eine algebraische Gleichung vom vierten oder vom fünften Grade ist, da das Verfahren, das die numerische oder graphische Bestimmung der Wurzeln leistet, in beiden Fällen ein und dasselbe ist. Ebenso kann es ihn völlig kalt lassen, daß das einem Kreise flächengleiche Quadrat oder das reguläre Siebeneck nicht, das reguläre Siebzehneck andererseits doch mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist, da es bekanntlich keine Schwierigkeit macht, die in Betracht kommenden Größen numerisch mit beliebiger oder graphisch mit der erreichbaren Genauigkeit der Zeichnung zu ermitteln, und er wird daher nicht im entferntesten daran denken, die verwickelte Gaußsche Konstruktion des regulären Siebzehnecks etwa praktisch zu verwenden.

Durch diesen in ihrem Wesen liegenden Verzicht auf die eben gekennzeichnete Geschlossenheit wie auch auf die absolute Genauigkeit gewinnt augenscheinlich die angewandte Mathematik von vornherein

eine viel größere Freiheit und damit ein wesentlich umfassenderes Feld von Möglichkeiten. Allerdings ein Feld von Möglichkeiten, das zunächst verwirrend erscheinen könnte, und wo es vorerst einmal einer allgemeinen Anleitung bedarf, um im einzelnen Falle zunächst bis zu einem gewissen Grade gefühlsmäßig die aussichtsreichsten und für eine engere Wahl in Betracht kommenden aussondern zu können. Aber zum Glück ist ein solches leitendes Prinzip leicht anzugeben, und überdies ist es so einfach, wie es nur sein kann. Es verhält sich hier nämlich fast immer so, daß das natürlichste Verfahren auch das praktisch einfachste ist oder doch immerhin einen Leitfaden gibt, um das einfachste und zweckmäßigste aufzufinden.

Nehmen wir als Beispiel etwa die kubische Gleichung

$$7{,}8x^3 - 15{,}2x^2 + 0{,}8x - 27{,}3 = 0.$$

Wer in der Schule seine Algebra gut gelernt hat, wird hier zunächst reduzieren, dann die Diskriminante berechnen und hierauf je nach deren Vorzeichen entweder die Cardanische Formel oder die trigonometrische Auflösung anwenden. Wer aber von alledem keine Ahnung hätte, nur etwa wüßte, was Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und was Potenzieren mit ganzen positiven Zahlen ist, würde, wenn etwa für ihn die Gewinnung irgendeiner Belohnung davon abhinge, die reelle Wurzel der Gleichung mit, sagen wir, fünf Dezimalen zu ermitteln, durchaus nicht zu verzweifeln brauchen. Er würde wahrscheinlich erst ganzzahlige Werte für x probieren und finden, daß der Ausdruck links von Gleichheitszeichen irgendwo sein Vorzeichen wechselt, und zwischen den fraglichen Werten — im angegebenen Beispiel zwischen $x = 2$ und $x = 3$ — mit Recht eine Wurzel vermuten; dann wird er vermutlich ebenso die Zehntel von 2,1 bis 2,9 durchprobieren, dann die Hunderstel usw. — Ganz so wird es der angewandte Mathematiker freilich nicht machen, aber er wird trotzdem dieses Probierverfahren zum Vorbild nehmen und nur sehen, wie er die einzelnen Schritte möglichst zweckmäßig ausführen und überdies mit möglichst wenigen Schritten ans Ziel kommen kann. So gelangt er zu der Regula falsi und dem Newtonschen Verfahren in Verbindung mit dem Hornerschen Einsetzungsschema.

Als ein anderes Beispiel möge noch die Aufgabe der Halbierung einer Strecke betrachtet werden. Wer seinen Euklid kennt, wird zwei Kreise mit gleichgroßem beliebigem (nicht zu kleinem) Halbmesser um A und B schlagen und die beiden entstehenden Schnittpunkte durch eine Gerade verbinden, die die Strecke AB in dem gesuchten Punkt schneidet. Wer das Verfahren nicht kennt, wird wiederum probieren. Er wird von A und von B aus mit dem Zirkel oder mit einem Papier-

streifen eine Strecke abtragen, die schätzungsweise gleich der Hälfte der gegebenen Strecke ist, und, falls die entstehenden Punkte nahe genug zusammen liegen, nach Augenmaß deren Mitte nehmen, andernfalls das Verfahren wiederholen.

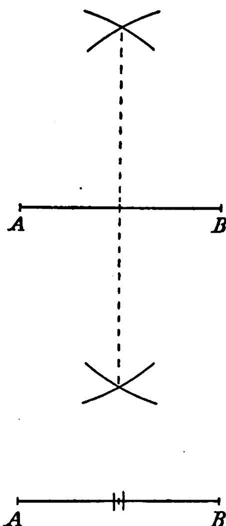


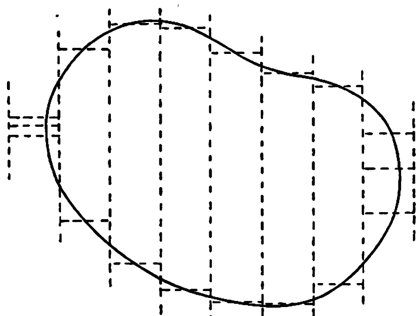
Fig. 2.

Auf die zweite Art macht es auch der angewandte Mathematiker. Im ersten Fall hat man zwar die Gewißheit, daß man, wenn man absolut genau zeichnet, auch den Halbierungspunkt absolut genau erhält. Aber man zeichnet ja nicht absolut genau; jeder Punkt hat eine gewisse Breite, ebenso jede Linie, kein Lineal ist absolut genau, keine Linie geht absolut genau durch einen gegebenen Punkt. Sind Zirkel und Bleistift nicht sehr gut gespitzt und sind vielleicht obendrein die beiden Kreise erheblich größer, als der Zweckmäßigkeit entspricht, so werden schon deren Schnittpunkte bereits um einen merklichen Bruchteil eines Millimeters abweichen. Das Schwierigste ist dann, die beiden Schnittpunkte zu verbinden. Das sieht zwar ganz leicht aus. Legt man aber das Lineal an, so sieht man nur noch die eine Hälfte der symmetrischen Figur, und, nachdem man das Lineal wieder weggenommen hat, wird man wahrscheinlich feststellen, daß die gezogene Linie doch nicht genau die Symmetrieachse ist. Ganz anders im zweiten Fall. Dort sieht man unmittelbar die erreichte Genauigkeit. So genau man sehen und einen Punkt mit der Nadel einstechen kann, so genau ist auch das Ergebnis. Zwar kann man im ersten Fall nachträglich die Probe machen, um sich von dem Genauigkeitsgrad zu überzeugen, aber im zweiten hat man bereits die Probe gemacht. Dieses Verfahren kontrolliert also sich selbst. Und dies ist ein sehr großer Vorteil.

Denken Sie sich, jemand wollte die vorhin betrachtete kubische Gleichung nach dem Verfahren der Algebra behandeln. Er würde eine längere Rechnung anstellen, Quadrat- und Kubikzahlentafeln oder, wenn er sie nicht hat, Logarithmen anwenden. Dabei hat er die mannigfachste Gelegenheit, sich zu verrechnen, falsch abzulesen oder sich sonst zu irren. Aber er muß geduldig ausharren; erst wenn er den Wert hat, kann er die Probe damit machen. So lange schwebt er im Ungewissen, ob nicht vielleicht nahezu die ganze Rechnung vergeblich ist. — Ganz anders derjenige, der nach einem systematischen Probierverfahren rechnet. Er weiß in jedem Augenblick: der letzte Näherungswert hat die und die Genauigkeit, mit dem folgenden Schritt

werde ich diese Genauigkeit bis zu dem und dem Grade verbessern.[1]) Er macht in jedem Augenblick die Probe, denn darin besteht das Verfahren, und kommt nicht nur rascher, sondern auch sicherer zum Ziel als der andere.

Eine sehr wichtige Sonderaufgabe der hier besprochenen Theorie der Anwendung der Mathematik auf die Wirklichkeit, die ich hier wegen der Kürze der Zeit nur streifen will, besteht in der Theorie und der Verwendung der praktischen Hilfsmittel des Rechnens und Zeichnens. Was das letzte betrifft, so ist die Tatsache, daß im systematischen Aufbau der Geometrie Lineal und Zirkel und auch nur diese als Hilfmittel ausdrücklich vorausgesetzt werden, wohl nur eine historische Zufälligkeit. Der angewandte Mathematiker würdigt dagegen nicht minder Dreieck und Reißschiene, ja selbst den unscheinbaren Papierstreifen seiner Beachtung. Daneben kennt er eine große Anzahl verwickelterer Instrumente, wie z. B. das Planimeter zur raschen Ermittlung von Flächeninhalten, den Integraphen zur Bestimmung der abgeleiteten und der Integralfunktion, und schreckt andererseits auch nicht vor der gelegentlichen Anwendung des Augenmaßes zurück. So besteht z. B. ein gar nicht unpraktisches Verfahren, den Flächeninhalt eines beliebig gegebenen Ebenenstückes zu ermitteln, darin, daß man das Flächenstück in Streifen von, sagen wir, 1 cm Breite zerlegt und die krummlinig begrenzten Enden in der Weise durch geradlinig begrenzte ersetzt, daß man auf Grund einer Schätzung nach dem Augenmaß stets ebensoviel hinzusetzt, wie man abschneidet. Da das Auge für Größenunterschiede kleiner Flächen sehr empfindlich ist, erweist sich diese Schätzung als wesentlich genauer, als der Unkundige zu erwarten geneigt ist. Schließlich wird mit einem Papierstreifen die Gesamtlänge der Streifen bestimmt, die in dem angenommenen Falle zugleich den Flächeninhalt darstellt. Dies Verfahren der Inhaltsbestimmung ist, wenn auch nicht an Schnelligkeit, so doch in bezug auf Genauigkeit der Anwendung


Fig. 3.

1) Freilich darf man hierbei nicht an ein exaktes und apodiktisches Wissen im Sinne der reinen Mathematik denken. Vielmehr wird der praktische Mathematiker auf die strenge Fehlerabschätzung, die unter Umständen ein Problem von größerer Verwicklung als die vorgelegte Aufgabe selbst darstellen würde, vielfach verzichten und sich mit einem Wahrscheinlichkeitsschluß aus dem tatsächlich beobachteten Verhalten der sukzessiven Näherungswerte begnügen.

des Planimeters zum mindesten ebenbürtig.[1]) Für das Rechnen gibt es außer den bekannten Tafelwerken und dem modernen Hilfsmittel der Nomographie im wesentlichen nur noch zwei Hilfsmittel, dafür aber von grundlegender Wichtigkeit, den logarithmischen Rechenschieber und die Rechenmaschine. Freilich liegt die Zeit noch vor uns, wo beide von den Vertretern der reinen Mathematik wie auch denen der Anwendungsgebiete in dem Maße gewürdigt werden, wie dies von den Technikern und Kaufleuten in Anbetracht der mit ihrer Anwendung verbundenen außerordentlichen Ersparnis an Zeit und an Nervenkraft schon jetzt geschieht.

Hochverehrte Anwesende! Nichts würde mir ferner liegen, als durch die vorausgehende Aufzählung und Aufweisung von Wesensunterschieden zwischen reiner und angewandter Mathematik den Eindruck erwecken zu wollen, als ob es sich in der angewandten Mathematik, insbesondere ihrem theoretischen Teil, um etwas von der reinen Mathematik Grundverschiedenes und darum sorgfältig zu Trennendes handelte. Ganz im Gegenteil möchte ich behaupten, daß sowohl die reine Mathematik als auch die angewandte für sich allein unvollständige Bruchstücke der Gesamtmathematik sind und einander aufs innigste durchdringen, so daß eine Scheidung zwar der Zielsetzung und den verwendeten Prinzipien nach an sich möglich, aber dem sachlichen Gehalt nach unmöglich und geradezu widersinnig sein würde. Denn außer dem Umstand, daß es sich ja hier wie dort um die gleichen Probleme, wie Gleichungsauflösung, Integration, Interpolation usw. handelt, ist zu bedenken, daß ja überhaupt Theorie und Anwendung in dem logischen Verhältnis des Allgemeinen zum Besonderen stehen. Wie nun aber das Wesen einer allgemeinen Behauptung darin besteht, daß besondere einzelne Sachverhalte unter sie fallen, wie die Aussage $a + b = b + a$ leer sein würde ohne ihre Anwendungsfälle $2 + 3 = 3 + 2$ usw. und diese wieder, die ja ihrerseits wiederum allgemeiner Natur sind, ohne deren Anwendungsfälle, wie z. B. „Zwei Äpfel und drei Äpfel sind ebensoviel wie drei Äpfel und zwei Äpfel“, so ist die reine Mathematik nur darum sinnvoll, weil sie in ihren allgemeinen Gesetzen eben alle besonderen Anwendungsfälle implizit behauptet. Schon der Ausdruck „Anwendung“ bedeutet eigentlich eine schiefe Beurteilung, denn der ursprüngliche Prozeß ist augenscheinlich der der Abstraktion des allgemeinen Gesetzes aus den einzelnen Sachverhalten und die Anwendung erst die nachträgliche Umkehrung davon.

Gegenüber diesen letzten Ausführungen werden manche, vielleicht

1) Vgl. C. Runge: Graphische Methoden. S. 4—5.

sogar die Mehrzahl der Vertreter der reinen Mathematik den Einwand erheben, daß diese bei der ihr allein angemessenen rein logischen Begründung jeder Beziehung auf die Welt des Wirklichen entraten könne. Gewiß ist es möglich und in vieler Hinsicht auch zweckmäßig, die Sätze der Mathematik als rein logische Sachverhalte zu deuten. Aber man darf nicht denken, daß damit nun ein scharfer Schnitt zwischen idealer Gesetzlichkeit und konkreter Wirklichkeit gemacht wäre. Denn auch die Logik setzt natürlich eine konkrete, zum mindesten aber außerlogische Wirklichkeit voraus. Zwar kann ein Begriff von der Art sein, daß unter ihn wieder Begriffe fallen; auch unter diese Begriffe können wiederum Begriffe fallen; aber bei Vermeidung eines logischen Zirkels muß diese Kette irgendwann einmal abbrechen und man schließlich auf Dinge kommen, die selbst nicht begrifflicher Natur sind Nach Kants Ausspruch sind Begriffe ohne Anschauungen leer, ebenso wie Anschauungen ohne Begriffe blind sind. Und selbst diejenige Richtung der Mathematik, die, ohne die Logik als Wissensgebiet vorauszusetzen, rein „formal" vorgeht, bezieht sich ihrerseits doch in letzter Hinsicht auf die konkrete Wirklichkeit der Zeichen, die man mit Tinte auf dem Papier oder mit Kreide an der Wandtafel hervorbringt.

Was nun der Begriff ohne die Anschauung und die Anschauung ohne den Begriff ist, das ist die reine Mathematik ohne die angewandte und die angewandte ohne die reine. Erst beide miteinander, beider Gehalt und beider Geist zusammengenommen, geben die volle Harmonie. Und so lassen sie mich schließen mit einem Ausspruch Bertrand Russells[1]) zum Preise der Mathematik, den ich ausdrücklich eben auf die Mathematik, ohne ihrer künstlichen Scheidung in reine und angewandte Mathematik zu gedenken, beziehen möchte:

„Der Mathematik eignet, recht betrachtet, nicht allein Wahrheit, sondern höchste Schönheit — eine Schönheit, die kalt und herb ist wie die der Bildhauerkunst, die, ohne irgendeiner Seite unserer schwächeren Natur zu schmeicheln, ohne den schimmernden Prunk der Malerei oder der Musik, dennoch von erhabener Reinheit ist und einer strengen Vollendung fähig, wie nur die höchste Kunst sie zeigen kann. Das Erlebnis wahrer Freude, die Begeisterung, das Gefühl, mehr zu sein als Mensch, das der Prüfstein alles wahrhaft Großen ist, findet man in der Mathematik so gewiß wie in der Dichtkunst. Das Beste der Mathematik verdiente nicht bloß wie eine Aufgabe gelernt, vielmehr in das alltägliche Denken aufgenommen und wieder und wieder dem Geiste vorgestellt zu werden mit immer erneuter Ermunterung. Das wirkliche

1) B. Russell: The Study of Mathematics. 1902.

Leben ist für die meisten Menschen ein dauerndes Nachgeben, ein ewiger Kompromiß zwischen dem Ideal und dem Möglichen; die Welt des Reinvernünftigen aber kennt keinen Kompromiß, keine kleinliche Rücksicht, keine Schranke für die schöpferische Tätigkeit, die in prächtigen Gebäuden die leidenschaftliche Sehnsucht nach dem Vollkommenen verkörpert, aus der alles Große entspringt."

(Eingegangen am 23. 1. 26.)

Über einen Satz von L. Fuchs.

Von RUDOLF STOLZENBERG† in Leipzig.

L. Fuchs hat in einer Arbeit im Crelleschen Journal[1]) folgenden Satz bewiesen:

Die einzigen rationalen Funktionen $w = R(z)$, die einen Kreis der z-Ebene auf einen Schlitzbereich der w-Ebene schlicht abbilden, sind die Funktionen zweiten Grades.

Dabei ist unter einem Schlitzbereich ein schlichter Bereich verstanden, dessen Komplementärbereich keinen inneren Punkt enthält.

Aus dem Satz von Fuchs folgt sofort, daß der Schlitz unseres Bereiches durch einen Kreisbogen gebildet wird. Denn durch je eine lineare Transformation der z- und der w-Ebene kann bekanntlich erreicht werden, daß die Funktion zweiten Grades in $w = z + \frac{1}{z}$ übergeht und der Kreis in den Einheitskreis $|z| < I$. Die Abbildung erfolgt bei dieser Funktion auf die schlichte w-Ebene exkl. der geradlinigen Strecke zwischen $w = -2$ und $w = 2$.

Die Arbeit von L. Fuchs erscheint vielleicht nicht sehr durchsichtig, und es ist wohl nicht ganz überflüssig, einen einfachen geometrischen Beweis dieses Satzes anzugeben.

I.

Sei also $w = R(z)$ eine rationale Funktion, die das Innere des Einheitskreises der z-Ebene auf einen Schlitzbereich — wir nennen ihn B — abbildet. Wir wollen die Funktion abgekürzt mit $w(z)$ und ihre Umkehrung mit $z(w)$ bezeichnen. Wir nehmen zunächst an, daß wir folgendes bewiesen hätten:

Die Begrenzung σ des Bereiches B besteht aus einem stetigen exkl. höchstens der Endpunkte Q' und Q'' regulären analytischen Kurvenbogen. Denkt man sich die w-Ebene längs σ aufgeschnitten, so entspricht jedem

1) Bd. 77, S. 339.

Uferpunkte genau ein Punkt auf $|z| = 1$, *und* $z(w)$ *ist auf* σ *regulär außer in* Q' *und* Q'', *wo* $z(w)$ *von erster Ordnung verzweigt ist.*

Den Beweis dieses Satzes geben wir im zweiten Abschnitt. Indem wir hier diesen Satz voraussetzen, beweisen wir:

Die Funktion $w(z)$ *ist notwendig eine rationale Funktion zweiten Grades.*

Dazu benutzen wir das analytische Spiegelungsprinzip, das wir kurz vorausschicken. Sei s ein inklusive seiner Endpunkte regulärer analytischer Kurvenbogen der z-Ebene. Wie bekannt, gibt es dann einen schlichten s einbettenden Streifen S, der durch eine analytische Funktion $z(t)$ auf einen schlichten Streifen S' der t-Ebene, der in bezug auf die reelle Achse der t-Ebene symmetrisch liegt, eineindeutig und konform abgebildet wird, so daß dabei dem Bogen s ein Stück der reellen Achse entspricht. Bezeichnet man zwei Punkte P und $\overline{P}$, deren Bilder bei dieser Abbildung in bezug auf die reelle t-Achse symmetrisch liegen, als in bezug auf die Kurve s spiegelbildliche Punkte, so gilt der Satz:

Die Zuordnung von in bezug auf s *spiegelbildlichen Punkten ist von der abbildenden Funktion* $z(t)$ *unabhängig, also nur durch die Gestalt der Kurve* s *bestimmt.*

Ersetzt man jeden Punkt aus S durch sein Spiegelbild in bezug auf s, so wird dadurch eine indirekt konforme Abbildung des Streifens S auf sich selbst definiert, bei der die Punkte von s festbleiben. Es gibt nur eine solche Abbildung. Sie wird offenbar durch eine analytische Funktion von $\bar{z}$ (= konjugiert komplexer Wert von z) vermittelt. Setzt man diese Funktion $z' = F(\bar{z})$ fort, unter Einbeziehung ihrer algebraischen Singularitäten, so erhält man eine erweiterte Zuordnung spiegelbildlicher Punkte, die jetzt auf einer Riemannschen Fläche gelegen sind. Die Zuordnung bleibt, wegen der Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung, eindeutig bestimmt.

Sei nun $f(z)$ in der Umgebung von z_0, wo z_0 auf s gelegen ist, eine reguläre Funktion, und es sei $f'(z_0) \neq 0$. Durch $f(z)$ wird ein z_0 enthaltendes Stück der Kurve s auf ein reguläres Kurvenstück s' abgebildet, und es gilt das Prinzip der analytischen Spiegelung, das wir in folgender Fassung aussprechen:

Seien A und $\bar{A}$ zwei in bezug auf s spiegelbildliche Punkte, und es entspreche einem gestreckten Winkel in A ein Winkel der Öffnung $n_1\pi$ in $\bar{A}$. Durch $f(z)$ werde A auf einen Punkt B und ein gestreckter Winkel in A auf einen Winkel der Größen $m\pi$ in B abgebildet. Gibt es zu B in bezug auf s' einen Spiegelpunkt $\overline{B}$, und entspricht einem gestreckten Winkel in B ein Winkel der Öffnung $n_2\pi$

in $\bar{B}$, so wird $\bar{A}$ durch $f(z)$ auf $\bar{B}$ abgebildet, und ein gestreckter Winkel in $\bar{A}$ auf einen Winkel der Größe $\frac{m \cdot n_2}{n_1}\pi$. Die Zahlen n_1, n_2, m seien rational und größer als Null.

Ist speziell $n_2 = m = 1$, und $n_1 = n + 1$, so wird ein gestreckter Winkel in $\bar{A}$ auf einen Winkel der Öffnung $\frac{\pi}{n+1}$ in $\bar{B}$ abgebildet, $\bar{A}$ ist also ein Verzweigungspunkt n-ter Ordnung für $f(z)$, wenn n eine ganze Zahl ist.

Diesen Satz wenden wir an. Wir denken uns die Riemannsche Fläche für $z(w)$ konstruiert. Wir nennen sie F. Jedem Punkte auf F entspricht in bezug auf σ ein auf F gelegener spiegelbildlicher Punkt. Denn spiegeln wir die z-Ebene an $|z| = 1$, so entspricht dieser Spiegelung offenbar eine indirekt konforme Abbildung der Fläche auf sich selbst, bei der die Punkte beider Ufer von σ festbleiben. Das ist aber gerade die Abbildung, durch die die Zuordnung von zu σ spiegelbildlichen Punkten gegeben wird. — Dem schlichten Bereich B entspricht offenbar der übrige Teil von F spiegelbildlich.

Wir bringen nun die Endpunkte von σ — Q' und Q'' — durch eine lineare Transformation $w' = L(w)$ nach $w' = 0$ und $w' = \infty$. Wir betrachten die größte zweiblättrige Kreisfläche mit $w' = 0$ als Mittelpunkt, die außer dem Bildpunkte von Q' keinen Windungspunkt im Innern enthält. Ist diese unendlich groß, so bildet $z(w')$ die schlichte z-Ebene auf die doppelt überdeckte w-Ebene mit den Windungspunkten $w' = 0$ und $w' = \infty$ ab; $L(w)$ und damit $w(z)$ ist also in z rational vom zweiten Grade, und unser Satz ist bewiesen.

Wir nehmen an, daß der Kreis einen endlichen Radius hat, und leiten daraus einen Widerspruch her. Wir wollen statt w' wieder w schreiben und die alten Bezeichnungen F und σ auch für die neue w-Ebene in diesem Abschnitt beibehalten. Sei k die doppelt zu durchlaufende Begrenzung unseres Kreises. Wir durchlaufen k von einem Punkte des Bereiches B aus, so daß $w = 0$ zur Linken bleibt. Dabei müssen wir auf einen ersten für $z(w)$ singulären Punkt Q_1 stoßen, Q_1 sei ein Windungspunkt der Ordnung n. Bevor man nach Q_1 gelangt, wird man einen letzten Schnittpunkt von k mit σ zu passieren haben (dieser ist natürlich von Q_1 verschieden). Der Bogen von k, der von diesem Schnittpunkt bis Q_1 durchlaufen wird, möge τ_1 heißen. Über τ_1 liegt noch ein zweiter Bogen von k, den wir mit τ_2 bezeichnen; sein nicht auf σ gelegener Endpunkt sei Q_2. Es verläuft τ_1 außerhalb B und τ_2 in B. Die Spiegelbilder von τ_1 und τ_2 — $\bar{\tau}_1$ und $\bar{\tau}_2$ — verlaufen natürlich auch relativ zur z-Ebene übereinander; ihre Endpunkte auf der Fläche F seien $\bar{Q}_1$ und $\bar{Q}_2$. Es verläuft $\bar{\tau}_1$ in B und $\bar{\tau}_2$ außer-

halb B. In der z-Ebene entspricht τ_1 eine in $|z| \geqq 1$ verlaufende Kurve t_1, τ_2 eine in $|z| \leqq 1$ verlaufende Kurve t_2; $\bar{\tau}_1$ und $\bar{\tau}_2$ Kurven $\bar{t}_1$ und $\bar{t}_2$, die in bezug auf $|z| = 1$ spiegelbildlich zu t_1 und t_2 gelegen sind, $\bar{\tau}_1$ und $\bar{\tau}_2$ verlaufen in $|z| \leqq 1$ bzw. $|z| \geqq 1$. Die nicht auf $|z| = 1$ gelegenen Endpunkte dieser Kurven seien P_1 und P_2, bzw. $\bar{P}_1$ und $\bar{P}_2$.

Da bei der Abbildung von Q_1 auf P_1 einem gestreckten Winkel in Q_1 ein Winkel der Öffnung $\frac{\pi}{n+1}$ in P_1 entspricht, bei der Spiegelungsbeziehung von P_1 auf $\bar{P}_1$ die Winkel erhalten bleiben, und die Abbildung durch $w(z)$ in $\bar{P}_1$ konform ist, so ist die $(n+1)$-fache Umgebung von Q_1 auf die schlichte Umgebung von $\bar{Q}_1$ spiegelbildlich bezogen. Einem Winkel der Öffnung π in Q_1 entspricht bei der Spiegelung also in $\bar{Q}_1$ ein Winkel der Öffnung $\frac{\pi}{n+1}$.

Da die Spiegelungsbeziehung zwischen Q_2 und $\bar{Q}_2$ dieselbe ist wie bei den Punkten Q_1 und $\bar{Q}_1$, so entspricht einem Winkel der Öffnung π in Q_2 ein Winkel der Öffnung $\frac{\pi}{n+1}$ in $\bar{Q}_2$. Da ferner durch $w(z)$ die schlichte Umgebung von P_2 auf die schlichte Umgebung von Q_2 abgebildet wird, und da der durch Spiegelung an $|z| = 1$ vollzogene Übergang von P_2 zu $\bar{P}_2$ winkelerhaltend ist, muß also ein gestreckter Winkel in $\bar{P}_2$ auf einen Winkel der Öffnung $\frac{\pi}{n+1}$ in $\bar{Q}_2$ abgebildet werden, $\bar{P}_2$ wäre also ein Verzweigungspunkt n-ter Ordnung für $w(z)$; das widerspricht der Eindeutigkeit von $n(z)$.

Also ist $w(z)$ eine rationale Funktion zweiten Grades.

II.

Wir haben jetzt den Beweis des im Eingang des vorigen Abschnitts genannten Satzes nachzutragen.

Sei P ein Punkt auf $|z| = 1$, in dem die durch $w(z)$ vermittelte Abbildung konform ist. Sein auf σ[1]) gelegenes Bild heiße Q. Wir setzen $w(z)$ längs $|z| = 1$ von P aus einmal um den Einheitskreis herum fort, so daß die Kreisfläche zur Linken bleibt. In der w-Ebene werden wir auf σ von Q aus entlanggehen müssen, und schließlich auf eine Singularität — einen Verzweigungspunkt von $z(w)$ — stoßen müssen. Denn sonst wäre σ eine reguläre geschlossene Kurve, der Komplementärbereich von B hätte also innere Punkte.

Sei also P^1 ein auf $|z| = 1$ gelegener Punkt, dem ein Verzweigungspunkt Q^1 entspricht. In Q^1 muß offenbar eine Winkelverdoppelung

1) Wir nehmen hier, ohne die Festsetzungen des ersten Abschnitts zu berücksichtigen, an, daß σ ganz im Endlichen liege.

stattfinden, d. h. Q^1 ist ein Windungspunkt erster Ordnung. Denn wäre Q^1 ein Verzweigungspunkt höherer Ordnung, so würde der Durchschnitt einer Umgebung von P^1 mit dem Kreis $|z| < 1$ auf ein zum Teil mehrfach überdecktes Flächenstück abgebildet; es war aber vorausgesetzt, daß $|z| < 1$ schlicht auf B abgebildet wird.

Wir zeigen jetzt: Setzen wir $w(z)$ über P^1 hinaus fort, so muß man im Bilde ein Stück auf dem schon zurückgelegten Teil QQ^1 zurücklaufen. Denn sonst würden in Q^1 zwei verschiedene auf σ gelegene Bögen unter dem Winkel 2π zusammenstoßen. Wir wollen diese Bögen mit σ_1 und σ_2 bezeichnen. Sei K ein genügend kleiner Kreis um Q^1. Es gibt dann jedenfalls genau zwei Gebiete U_1 und U_2, von denen jedes je von σ_1, σ_2 und je einem Bogen von K begrenzt ist, und die beide Q^1 auf der Begrenzung enthalten. Beide Gebiete haben keinen inneren Punkt gemein. Durch genügend kleine Wahl von K läßt sich erreichen, daß ein Gebiet, sagen wir U_1, den Punkten einer Umgebung von P^1, die in $|z| < 1$ liegen, entspricht. Umläuft man die Begrenzung von U_1 in positivem Sinne, so bilden σ_1 und σ_2 den Winkel 2π, umläuft man also U_2 in positivem Sinne, so bilden sie den Winkel Null.

Es kann nun sein, daß in U_2 noch weitere Bogen von σ verlaufen. Wählt man K genügend klein, so können diese nur in Q^1 enden. Sei U_3 ein von zwei solchen Bögen — sie mögen σ_3 und σ_4 heißen — und von einem Bogen des Kreises K begrenztes Teilgebiet von U_2, das nur aus inneren Punkten von B besteht. Dem Gebiet U_3 entspricht ein Gebiet in $|z| < 1$ und den Bögen σ_3 und σ_4 zwei Bögen auf $|z| = 1$, die in einem von P^1 verschiedenen Punkte P^2 zusammenstoßen. Da aber bei positiver Durchlaufung von U_3 die Kurven σ_3 und σ_4 den Winkel Null bilden, so müßte ein gestreckter Winkel in P^2 auf einen Winkel der Öffnung Null in Q^1 abgebildet werden, was nicht möglich ist.

Wir können jetzt sagen: σ ist ein Kurvenbogen mit sich stetig drehender Tangente. In den Endpunkten — wir nennen sie Q' und Q'' — ist $z(w)$ in erster Ordnung verzweigt.

Mit der üblichen elementaren Schlußweise zeigt man, daß ein Windungspunkt in einem von den Endpunkten verschiedenen Punkt von σ nicht auftreten kann: das würde der vorausgesetzten Schlichtheit der Abbildung von B auf die Fläche $|z| < 1$ widersprechen.

Daraus folgt: die Kurve σ ist ein höchstens exkl. der Endpunkte regulärer analytischer Kurvenbogen.

Schließlich zeigt man noch in ebenfalls bekannter Weise: durchläuft man $|z| = 1$ genau einmal, so wird σ genau zweimal durchlaufen.

Damit ist der im ersten Abschnitt vorausgesetzte Satz bewiesen.

(Eingegangen am 15. 9. 26.)

Mathematische Miszellen. XI.

Über den Lerchschen Satz.

Von Alexander Ostrowski in Basel.

Für den Satz von Lerch, wonach aus dem Verschwinden von

$$\int_0^1 x^n f(x)\,dx \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{1}$$

für alle ganzen $n \geqq 0$ das identische Verschwinden der als reell und stetig vorausgesetzten Funktion $f(x)$ folgt, gibt es mehrere Beweise, die entweder auf dem Weierstraßschen Satz von der Approximation einer stetigen Funktion durch Polynome oder auf dem Gebrauch geeigneter Diskontinuitätsfaktoren beruhen.[1]) Im folgenden gebe ich einen besonders einfachen und elementaren Beweis des Lerchschen Satzes.

Es sei $f \not\equiv 0$. Dann gibt es ein Intervall $J(a \leqq x \leqq b)$, $0 \leqq a < b \leqq 1$, in dem $f(x)$ konstantes Vorzeichen behält, und wir dürfen annehmen, daß dieses Vorzeichen positiv ist. Für $0 < \varepsilon < \frac{b-a}{3}$ sei J_ε das Intervall $a+\varepsilon \leqq x \leqq b-\varepsilon$. Das Polynom

$$P(x) = 1 - (x-a)(x-b)$$

ist innerhalb des Intervalls J größer als 1, innerhalb J_ε größer als $1+\varepsilon^2$, und hat im übrigen Teil des Intervalls $0 \leqq x \leqq 1$ zwischen 0 und 1 liegende Werte. Für jedes ganze $m \geqq 0$ folgt aus dem Verschwinden von (1) offenbar

$$\int_0^1 P^m(x) f(x)\,dx = 0, \qquad \text{daher}$$

$$\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} P^m(x) f(x)\,dx \leqq \int_a^b P^m(x) f(x)\,dx = -\int_0^a - \int_b^1 \leqq \int_0^1 |f(x)|\,dx.$$

[1]) Der Lerchsche Beweis (Rospravy české Akademie. II. Kl., Bd. 1 (1892), Nr. 33, S. 6—7; Acta math., Bd. XXVII (1903), S. 339—351) beruht auf dem Weierstraßschen Satze. Stieltjes deutet in einem Briefe an Hermite vom 12. 9. 1893 (Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, Bd. II (Paris 1905), S. 337—339) einen Beweis an, der den Diskontinuitätsfaktor $(1-(x-\xi)^2)^n$ benutzt, und gibt einen zweiten Beweis, der auf der komplexen Funktionentheorie beruht. Den Stieltjesschen Diskontinuitätsfaktor hat später Landau zum Beweis des Weierstraßschen Satzes herangezogen (Pal. Rend., t. XXV (1908), S. 1—9). Endlich ist noch ein Beweis von Phragmén zu erwähnen, der sich auf einen transzendenten Diskontinuitätsfaktor von H. von Koch stützt (Acta math., Bd. XXVIII (1904), S. 361—363)

Wegen $$\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} P^m(x) f(x)\, dx \geqq (1+\varepsilon^2)^m \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\, dx$$

folgt hieraus $$\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\, dx \leqq \frac{\int_0^1 |f(x)|\, dx}{(1+\varepsilon^2)^m},$$

d. h., für $m \longrightarrow \infty$ $$\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\, dx = 0,$$

was der Positivität von $f(x)$ in J_ε widerspricht.

Wenn $f(x)$ nur als (reell und) nach Lebesgue integrabel vorausgesetzt wird, versagt unsere Schlußweise. In diesem Falle gelangt man aber leicht folgendermaßen zum Ergebnis, daß $f(x)$ bis auf eine Nullmenge verschwindet, indem man den oben erwähnten Weierstraßschen Satz heranzieht.[1])

Für $0 \leqq y < 1$ und $0 < \varepsilon < 1 - y$ sei $\varphi_\varepsilon(x)$ die stetige Funktion, die für $0 \leqq x \leqq y$ gleich 1, für $y + \varepsilon \leqq x \leqq 1$ gleich 0 und für $y \leqq x \leqq y + \varepsilon$ linear ist. Approximiert man $\varphi_\varepsilon(x)$ durch Polynome $P_1(x), P_2(x), \ldots$, die gleichmäßig in $0 \leqq x \leqq 1$ gegen $\varphi_\varepsilon(x)$ konvergieren, so folgt aus $\int_0^1 P_m(x) f(x)\, dx = 0$, daß auch $\int_0^1 \varphi_\varepsilon(x) f(x)\, dx = 0$ ist. Daher

$$\left|\int_0^y f(x)\, dx\right| = \left|\int_y^{y+\varepsilon} \varphi_\varepsilon(x) f(x)\, dx\right| \leqq \int_y^{y+\varepsilon} |f(x)|\, dx.$$

Für $\varepsilon \longrightarrow 0$ folgt dann $$\int_0^y f(x)\, dx = 0$$

für jedes y mit $0 \leqq y < 1$. Und da nach Lebesgue die Ableitung unseres Integrals nach der oberen Grenze y für fast alle y gleich $f(x)$ ist, folgt die Behauptung.

---

1) Diese Formulierung findet sich ohne Beweis bei H. Hamburger, Math. Z. Bd. 10 (1919), S. 198, Fußnote.

(Eingegangen am 25. 8. 27.)

Geschichtliches über geometrische Konstruktionen.

Vortrag, gehalten an den Universitäten Heidelberg und Bonn.

Von Tadahiko Kubota in Sendai (Japan).

Meine Damen und Herren!

Das Hauptinteresse der Geometer hat sich in der letzten Zeit meist solchen geometrischen Disziplinen zugewandt, die vom analytischen Gesichtspunkt aus Interesse haben. Trotzdem sind letzthin — besonders in der Affingeometrie — Sätze aufgefunden worden, die auch vom rein geometrischen Standpunkt aus Interesse beanspruchen können. Aber es ist bedauerlich, daß verhältnismäßig wenig Geometer den rein geometrischen Tatsachen die gebührende Beachtung schenken. Das Interesse an rein geometrischen Untersuchungen ist eben gegenwärtig in den Hintergrund getreten.

In meinem heutigen Vortrag möchte ich Ihnen etwas Geschichtliches über geometrische Konstruktionen mitteilen und dabei zum Schluß auch auf meine eigenen Arbeiten zu sprechen kommen. Es handelt sich um ganz elementare Dinge. Aber ich würde mich recht freuen, wenn ich Ihnen eine kleine Anregung zur Beschäftigung mit der reinen Geometrie geben könnte.

Es ist wohl bekannt, daß J. Steiner im Jahre 1833 folgenden Satz ausgesprochen hat:

Wenn ein Kreis mit seinem Mittelpunkt vorgezeichnet ist, kann man alle geometrischen Konstruktionen ersten und zweiten Grades mit Hilfe des Lineals ausführen.[1])

Den Grundgedanken dieses Satzes hat schon früher (1814) Poncelet in seinem Buche „Traité des propriétés projectives des figures“ angegeben.

Im Jahre 1915 hat dann ein ungarischer Geometer Obláth dazu die Bemerkung gemacht, daß der Kreis nicht vollkommen gezeichnet zu sein braucht. D. h. schon dann, *wenn nur ein beliebig kleiner Bogen eines Kreises mit seinem Mittelpunkt gezeichnet vorliegt, kann man alle geometrischen Konstruktionen ersten und zweiten Grades mittels des Lineals ausführen.*[2])

1) Steiner, Geometrische Konstruktionen ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises, Berlin 1833.

2) Obláth, Monatshefte für Math. u. Phys. 16.

Dieser Satz steht in engem Zusammenhange mit dem Vahlenschen Satz[1]):

Wenn ein beliebig kleiner Bogen eines Kegelschnitts gezeichnet vorliegt, kann man alle projektiv-geometrischen Konstruktionsaufgaben zweiten Grades mittels des Lineals lösen.

Cauer hat im Jahre 1913 nach einem Gedankengang von Hilbert folgendes bewiesen:

Wenn zwei sich nicht treffende (d. h. weder sich schneidende noch berührende) Kreise gezeichnet vorliegen, ist es nicht möglich ihre Mittelpunkte mit Hilfe des Lineals allein zu finden. Wenn aber zwei sich treffende oder drei sich nicht treffende Kreise vorgezeichnet sind, kann man alle geometrischen Konstruktionen ersten und zweiten Grades mit Hilfe des Lineals ausführen.

Im Jahre 1866 hat weiter die Berliner Akademie die folgende nach Steiner benannte Preisaufgabe gestellt:

Es sei ein Kegelschnitt, der kein Kreis ist, vorgezeichnet. Welche geometrischen Konstruktionsaufgaben sind dann mittels Lineal und Zirkel lösbar?

Im Jahre 1869 haben voneinander unabhängig H. S. Smith und Kortum dieses Problem gelöst und den Satz bewiesen[2]):

Wenn ein Kegelschnitt, der kein Kreis ist, gezeichnet vorliegt, kann man alle geometrischen Konstruktionsaufgaben dritten und vierten Grades mit Lineal und Zirkel lösen.

Im Jahre 1896 hat endlich F. London den folgenden Satz als Verallgemeinerung des Smith-Kortumschen Satzes angegeben[3]):

Wenn eine rationale Kurve dritter Ordnung (z. B. ein Cartesisches Blatt) gezeichnet vorliegt, so kann man alle geometrischen Konstruktionen dritten und vierten Grades durch Lineal und Zirkel ausführen.

Diesen Satz habe ich im Jahre 1914 erweitert und folgendes bewiesen[4]):

Wenn eine rationale Kurve vierter Ordnung (z. B. eine Pascalsche Schnecke oder eine Herzkurve) gezeichnet vorliegt, kann man alle geometrischen Konstruktionsaufgaben dritten und vierten Grades mit Lineal und Zirkel lösen.

Einen zweiten Anknüpfungspunkt für meine Arbeiten bildet ein Satz von Petersen.

---

1) Vahlen, Konstruktionen und Approximationen, 1911.
2) H. S. Smith, Annali di Mat. 1869. Kortum, Bonner Berichte, 1869.
3) F. London, Zeitschrift für Math. u. Phys. 1896.
4) P. Kubota, Tôhoku Math. Journal, 5, 1914.

Petersen hat im Jahre 1878 in seinem Buche über algebraische Gleichungen den folgenden Satz bewiesen:

Wenn eine nichtzerfallende algebraische Kurve durch eine gewisse Anzahl ihrer Punkte gegeben ist und wenn ihre Schnittpunkte mit einer beliebigen Geraden mit Hilfe von Lineal und Zirkel bestimmbar sind, so muß die Kurve notwendig eine Gerade oder ein Kegelschnitt sein.

Ich habe diesen Satz im Jahre 1915 folgendermaßen erweitert[1]):

Wenn eine nichtzerfallende algebraische Kurve durch eine gewisse Anzahl ihrer Punkte gegeben ist, und wenn ihre Schnittpunkte mit einem beliebigen Kegelschnitt unter Verwendung eines gezeichnet vorliegenden Kegelschnitts mit Lineal und Zirkel bestimmbar sind, so muß die Kurve ebenfalls eine Gerade oder ein Kegelschnitt sein.

Der Beweis dafür, daß es unmöglich ist, eine geometrische Konstruktionsaufgabe mit vorgeschriebenen Mitteln auszuführen, wenn ein Kegelschnitt gezeichnet vorliegt, ist etwas schwieriger als ein Unmöglichkeitsbeweis, der sich auf Konstruktionen mit dem Lineal und Zirkel allein bezieht. Denn man muß in diesem Falle beweisen, daß man die gesuchten Größen aus den gegebenen nicht durch rationale Operationen und Ausziehen der quadratischen und kubischen Wurzeln erhalten kann.

Mittels des erweiterten Satzes kann man die Unmöglichkeit der Lösung der folgenden Verallgemeinerung des Castillonschen Problems beweisen.

Es seien vier Kegelschnitte C, C_1, C_2, C_3 gegeben. Gesucht sei ein dem Kegelschnitt C eingeschriebenes Dreieck, dessen Seiten bzw. C_1, C_2, C_3 berühren.

In diesen Zusammenhang gehört auch eine Aufgabe, die ich im Jahre 1918 im Tôhoku Math. Journ. 16 behandelt habe:

Wann ist die n-Teilung des Kreises unter Verwendung eines gezeichnet vorliegenden Kegelschnitts mit Lineal und Zirkel möglich?

Wenn n eine Primzahl p ist, so ist für die Möglichkeit der p-Teilung notwendig und hinreichend, daß p von der Form $2^\mu 3^\nu + 1$ ist, wobei μ, ν ganze nichtnegative Zahlen bedeuten.

Z. B. ist p-Teilung für

$$p = 7 = 2 \cdot 3 + 1 \quad \text{möglich,}$$
$$p = 11 = 2 \cdot 5 + 1 \quad \text{unmöglich,}$$
$$p = 13 = 2^2 \cdot 3 + 1 \quad \text{möglich.}$$

Wie ist es nun, wenn n eine zusammengesetzte Zahl ist?

---

1) Proceedings of the Tôkyo Physico-Math. Soc. (2) 8, 1915.

Damit die n-Teilung möglich ist, ist es notwendig und hinreichend, daß sich n in eine der Gestalten

$$2^k 3^l \quad k \geqq 0, \quad l \geqq 0,$$
$$2^k 3^l p_1 p_2 p_3 \cdots p_\varrho$$

bringen läßt, wobei p_i verschiedene Primzahlen $\neq 2$ und $\neq 3$ von der Form

$$2^\mu 3^\nu + 1 \quad \mu \geqq 0, \quad \nu \geqq 0$$

bezeichnen. Z. B. ist die Lösung für

$$n = 7^2 = 49 \qquad \text{unmöglich,}$$
$$n = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42 \quad \text{möglich.}$$

Vorgetragen am 8. Nov. 1926 in Heidelberg und am 10. Nov. 1926 in Bonn.

(Eingegangen am 13. 11. 26.)

Über ein Eliminationsproblem.

(Zweite Mitteilung.)

Von W. Fr. Meyer in Königsberg i. Pr.

Einleitung. In einer voraufgehenden Mitteilung (s. diese Berichte Band 36, S. 228) wurde, geometrisch gesprochen, das Problem gelöst, bei vorgegebener Abbildung einer kubischen Fläche F_3 auf eine Ebene E, d. h. bei bekannter Lage der sechs Fundamentalpunkte A, die implizite F_3-Gleichung abzuleiten.

Von der nämlichen Grundlage aus lassen sich aber auch die anschließenden Aufgaben behandeln, die Gleichungen der 45 Tritangentialebenen T und der 27 Geraden g der F_3, sowie der 28 Doppeltangenten t_2 der — durch Geisersche Projektion der F_3 von irgendeinem ihrer Punkte aus hervorgehenden — Kurve vierter Ordnung c_4, *rational und explizite* in den Koordinaten der A darzustellen. Diese Gleichungen besitzen eine verhältnismäßig einfache und durchsichtige Gestalt und können daher dazu dienen, nicht nur bekannte Lagenbeziehungen jener Gebilde rechnerisch zu bestätigen, *sondern auch zu neuen zu gelangen.*

1. In der Bildebene E lag, unter Auszeichnung einer einzelnen T-Ebene, ein natürliches Koordinatendreiseit (z_i, z_k, z_l) zugrunde, so daß jede seiner Seiten, z. B. die i-te, ein Paar (reeller resp. konjugiert imaginärer) Punkte A_i, A_i' trägt. Die Lage irgendeines Punktes einer Seite, z. B. $z_i = 0$, bestimmt sich durch das Koordinatenverhältnis $\zeta_i = z_k / z_l$, und zyklisch so weiter.

Die drei Paare A_i, A'_i sind damit durch drei Wertepaare ζ_i, ζ'_i festgelegt, mit den (stets reellen) symmetrischen Verbindungen:

(1) $$-s_i = \zeta_i + \zeta'_i, \quad p_i = \zeta_i \zeta'_i.$$

2. Es bedeute $c_{ii'}$ die Seite (A_i, A'_i), c_{ik} die Gerade (A_i, A_k) usf. Durch die vier Punkte A_i, A'_i, A_k, A'_k geht ein Kegelschnittbüschel B_{ik}. Man hat zunächst die Darstellungen:

(2) $$c_{ik} \equiv - z_l \zeta_i + z_i \zeta_i \zeta_k + z_k = 0, \quad c_{i'k'} \equiv - z_l \zeta'_i + z_l \zeta'_i \zeta'_k + z_k = 0$$

und damit die des Geradenpaares $(c_{ik}, c_{i'k'})$:

(3) $$c_{i'k} \cdot c_{i'k'} \equiv q_{ik} + z_i z_k \sigma_{ik} = 0,$$ wo:

(4) $$q_{ik} \equiv z_l p_i (z_l + z_i s_k) + z_k (z_k + z_l s_i) + z_i^2 p_i p_k,$$

(5) $$\sigma_{ik} \equiv \zeta_i \zeta_k + \zeta'_i \zeta'_k.$$

Vermöge der zu (5) analogen Abkürzung:

(5') $$\sigma'_{ik} \equiv \zeta_i \zeta'_k + \zeta'_i \zeta_k$$

wird die Gleichung des Geradenpaares $(c_{i'k} c_{ik'})$:

(3') $$c_{i'k} \cdot c_{ik'} = q_{ik} + z_i z_k \sigma'_{ik} = 0.$$

Damit lautet die Gleichung des Büschels B_{ik}, mit dem Parameter μ_{ik}:

(6) $$B_{ik} \equiv q_{ik} + z_i z_k \mu_{ik} = 0.$$

Seien ferner B'_l resp. B_l die beiden Individuen von B_{ik}, die durch A_l resp. A'_l gehen, so hat man:

(7) $$B'_l \equiv \zeta_l q_{ik} - z_i z_k \eta_l = 0, \quad B_l \equiv \zeta'_l q_{ik} - z_i \zeta_k \eta'_l = 0,$$ wo

(8) $$\eta_l \equiv \zeta_l^2 \mu_i \mu_k + 1, \quad \eta'_l \equiv \zeta_l'^2 p_i p_k + 1.$$

Die in der ersten Mitteilung aus B_{ik} für $\mu_{ik} = s_l p_i p_k$ entstandenen drei Formen k_i kommen im folgenden direkt nicht in Betracht; statt ihrer empfiehlt sich vielmehr die Verwendung der Formen q_{ik}.

3. Aus dem Gebüsch der kubischen Kurven durch die A greife man vier linear unabhängige Individuen heraus, deren linke Seiten dann als Koordinaten eines variierenden Punktes der F_3 dienen. Man wähle als die für die folgenden Zwecke einfachsten[1]) die folgenden:

(9) $$d_i \equiv z_i q_{kl} \text{ usf.}, \quad d_m = - z_i z_k z_l \equiv - \pi_z.$$

Man braucht insbesondere die Kenntnis der Koeffizienten von z_i^3, z_k^3, z_l^3 in resp. d_i, d_k, d_l; es gilt zyklisch:

(10) $$d_i \equiv z_i^3 p_k + \cdots, \quad d_k \equiv z_k^3 p_l + \cdots, \quad d_l \equiv z_l^3 p_i + \cdots$$

---

1) In der ersten Mitteilung waren statt der Größen d die Größen c gewählt, wo $c_i \equiv z_i k_i$, $c_m \equiv + \pi_z$. Vgl. Nr. 18.

4. Es sind zuerst die Gleichungen der 45 Tritangentialebenen T der F_3 aufzustellen; aus ihnen fließen die Gleichungen (oder auch die Achsenkoordinaten) der 27 Geraden g, indem man jede g als Schnittachse von zwei geeigneten T auffaßt.

Es empfiehlt sich indessen, eine gewisse Abwechselung hinsichtlich der T und g zu beobachten. Mit Rücksicht auf Nr. 1 und 2 seien die 27 g bezeichnet mit a_i, a'_i; b_i, b'_i; $c_{ii'}$ c_{ik}, $c_{i'k'}$ $c_{i'k}$, $c_{ik'}$ usf. Dann sind deren Bilder in der Ebene E die drei Paare von Punkten A_i, A'_i; die drei Paare von Kegelschnitten B_i, B'_i; endlich die 15, mit den nämlichen Zeichen versehenen Verbindungsgeraden c je zweier A.

Die 45 T zerlegen sich bekanntlich in zwei Klassen von 15 und 30 Individuen, je nachdem sie ein Dreiseit vom Typus (ccc), oder aber vom Typus (abc) enthalten.

5. Zunächst mögen die ersteren, vom Typus (ccc), verfolgt werden. Sie zerfallen in folgende Untertypen:

(I) $c_{ii'} c_{kk'} c_{ll'}$ (mit einem Individuum);

(II) $c_{ii'} c_{kl} c_{k'l'}$, (mit je drei Individuen);

(II′) $c_{ii'} c_{kl'} c_{k'l}$ (mit je drei Individuen);

(III) $c_{ik} c_{k'l'} c_{li'}$, (mit je drei Individuen);

(III′) $c_{ik} c_{k'l} c_{l'i'}$ (mit je drei Individuen);

(IV) $c_{ik'} c_{kl'} c_{li'}$, (mit je einem Individuum);

(IV′) $c_{i'k} c_{k'l} c_{l'i}$ (mit je einem Individuum).

Hat man irgendeines dieser Produkte als Linearform in den d dargestellt, so ist man auch im Besitze der *Gleichung (oder auch der Koordinaten) der entsprechenden, gleichbezeichneten Ebene T.*

6. *Die Untertypen* (I), (II) *und* (III).

Man hat sofort: $c_{ii'} c_{kk'} c_{ll'} \equiv \pi_s \equiv - d_m$, also als Gleichung der zugehörigen T:

$$\text{(I)} \qquad d_m = 0.$$

Diese ist eben die gemäß Nr. 1 ausgezeichnete, dem Koordinatendreiseit zugeordnete T.

Auf Grund von (3) und (3′), (9) und (10) kommt weiter:

$$\begin{cases} c_{ll'} c_{ik} c_{i'k'} \equiv z_l q_{ik} + \pi_s \sigma_{ik} \equiv d_l - d_m \sigma_{ik}, \\ c_{ll'} c_{ik'} c_{i'k} \equiv z_l q_{ik} + \pi_s \sigma_{i'k} \equiv d_l - d_m \sigma'_{ik}. \end{cases}$$

Somit lauten die Gleichungen der zugehörigen T:

$$\text{(II)} \qquad d_l - d_m \sigma_{ik} = 0, \qquad\qquad \text{(II′)} \qquad d_l - d_m \sigma'_{ik} = 0.$$

Sie gehen auseinander hervor, indem man die Indices i und i' (oder auch k und k') vertauscht. Aus (II) und (II') folgen als Achsenkoordinaten π_{rs} der Raumgeraden $c_{ii'}$:

$$(c_{ii'}) \quad \pi_{lm} \neq 0, \quad \text{alle übrigen} = 0, \quad \text{wie es sein muß.}$$

7. *Die Untertypen* (III) *und* (III').

Sie gehen durch Vertauschung der Indizes l und l' auseinander hervor, so daß es genügt, etwa den ersteren zu betrachten.

Nach Nr. 2 ergibt sich durch Multiplikation der drei bezüglichen c-Formen:

$$-c_{ik}c_{k'l'}c_{ll'} \equiv z_l^3 p_l \zeta_i + z_i^3 p_k \zeta_i + z_k^3 p_l \zeta_k' + \cdots - \pi_z \lambda_m,$$

wo zur Abkürzung steht:

$$(11) \qquad \lambda_m \equiv s_k \zeta_l \zeta_i + (1 - \zeta_i \zeta_k' \zeta_l') + \zeta_l \zeta_i' (\zeta_i \zeta_i' p_k - \zeta_k').$$

Hieraus folgen als Gleichungen der zugehörigen T:

$$\begin{cases} \text{(III)} & d_i \zeta_i + d_k \zeta_k' + d_l \zeta_l + d_m \lambda_m = 0, \\ \text{(III')} & d_i \zeta_i + d_k \xi_k' + d_l \zeta_l' + d_m \lambda_m' = 0, \end{cases}$$

wo λ_m' aus λ_m durch Vertauschung von ζ_l und ζ_l' hervorgeht. Die Ausdrücke λ_m und λ_m' lassen sich übersichtlicher gestalten. Bedient man sich noch der Abkürzungen:

$$(12) \quad \pi_\zeta \equiv \zeta_i \zeta_k \zeta_l, \quad \pi_{\zeta'} \equiv \zeta_i' \zeta_k' \zeta_l', \quad \pi_p \equiv p_i p_k p_l, \quad \varrho \equiv \pi_p + 1, \quad \delta_i = \zeta_i - \zeta_i',$$

so liefert einfache Umformung einmal:

$$(13) \quad \lambda_m \equiv \varrho - \pi_\zeta + \pi_{\zeta'} - s_l s_i \zeta_k', \qquad (13') \quad \lambda_m' \equiv \varrho + \pi_\zeta - \pi_{\zeta'} - s_k s_l \zeta_i.$$

Mittels (III) und (III') bilde man die Achsenkoordinaten π_{rs} der F_3-Geraden c_{ik} auf Grund der erzeugenden Matrix

$$\begin{vmatrix} \zeta_i & \zeta_k' & \zeta_l & \lambda_m \\ \zeta_i & \zeta_k' & \zeta_l' & \lambda_m' \end{vmatrix}:$$

$$\begin{cases} \pi_{li} = \zeta_i \delta_l, & \pi_{im} = \zeta_i (\lambda_m' - \lambda_m), & \pi_{ik} = 0, \\ \pi_{lk} = \zeta_k' \delta_l, & \pi_{km} = \zeta_k' (\lambda_m' - \lambda_m), & \pi_{lm} = \zeta_l \lambda_m' - \zeta_l' \lambda_m. \end{cases}$$

Hier sind noch die beiden Ausdrücke $\lambda_m' - \lambda_m$ und $\zeta_l \lambda_m' - \zeta_l' \lambda_m$ weiter auszuführen. Es wird:

$$(14) \qquad \lambda_m' - \lambda_m = \delta_l \sigma_{ik}, \qquad\qquad (15) \quad \zeta_l \lambda_m' - \zeta_l' \lambda_m = \delta_l (\varrho + s_l \zeta_i \zeta_k').$$

Trägt man dies ein und unterdrückt den gemeinsamen Faktor δ_l, so folgt als definitive Darstellung der π_{rs} von c_{ik}:

$$(c_{ik}) \qquad \begin{cases} \pi_{li} = \zeta_i, & \pi_{im} = \zeta_i \sigma_{ik}, & \pi_{ik} = 0, \\ \pi_{lk} = \zeta_k', & \pi_{km} = \zeta_k' \sigma_{ik}, & \pi_{lm} = \varrho + s_l \zeta_i \zeta_k'. \end{cases}$$

Dieses zyklische Gesetz ist so durchsichtig, daß man es kurz mit dem Symbol $\{l, i, k'\}$ bezeichnen kann, so daß man schreiben darf:

$$c_{ik} \equiv \{l, i, k'\}.$$

Eine Kontrolle und zugleich einfachere Ableitung gewinnt man, wenn man an Stelle von (III′) lieber (II) wählt. Die erzeugende Matrix wird dann:

$$\begin{vmatrix} \zeta_i & \zeta_k' & \zeta_l & \lambda_m \\ 0 & 0 & -1 & \sigma_{ik} \end{vmatrix}.$$

Die π_{rs} werden direkt die oben angegebenen, nur daß π_{lm} jetzt in der Gestalt $\pi_{lm} = \lambda_m + \zeta_l \sigma_{ik}$ auftritt; man erkennt aber leicht, daß dieser Wert mit dem obigen $\varrho + s_l \zeta_i \zeta_k'$ übereinstimmt.

Löst man (14) und (15) nach λ_m und λ_m' auf, so gelangt man zu einer weiteren Darstellung dieser Größen:

$$\begin{cases} (13\text{a}) & \lambda_m \equiv \varrho + s_l \zeta_i \zeta_k' - \zeta_l \sigma_{ik}, \\ (13\text{a}') & \lambda_m' \equiv \varrho + s_l \zeta_i \zeta_k' - \zeta_l' \sigma_{ik}, \end{cases}$$

die den gegenseitigen Übergang durch Vertauschung von ζ_l und ζ_l' unmittelbar ersehen läßt.

8. Aus c_{ik} gehen der Reihe nach $c_{i'k'}$, $c_{ik'}$, $c_{i'k}$ hervor, wenn man einmal zugleich i mit i', k mit k' vertauscht, oder aber nur k mit k', oder endlich nur i mit i'. Demgemäß gelten nach dem Muster von c_{ik} die symbolischen Darstellungen:

$$c_{i'k'} \equiv \{l, i', k\}, \quad c_{ik'} \equiv \{l, i, k\}, \quad c_{i'k} \equiv \{l, i', k'\}.$$

Damit sind alle 15 Raumgeraden c erledigt.

9. *Die Untertypen* (IV) *und* (IV′).

Sie gehen auseinander hervor durch gleichzeitige Vertauschung von i mit i', k mit k', l mit l'.

Andererseits gehen (III) und (IV) ineinander über durch Vertauschung von k mit k'. Somit entsteht ohne Rechnung für die Gleichungen der T-Ebenen (IV), (IV′):

$$\begin{cases} (\text{IV}) & d_i \zeta_i + d_k \zeta_k + d_l \zeta_l + d_m \mu_m = 0, \\ (\text{IV}') & d_i \zeta_i' + d_k \zeta_k' + d_l \zeta_l' + d_m \mu_m' = 0, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung steht:

$$\begin{cases} (16) & \mu_m \equiv \varrho + s_l \zeta_i \zeta_k - \zeta_l \sigma_{ik}', \\ (16') & \mu_m' \equiv \varrho + s_l \zeta_i' \zeta_k' - \zeta_i' \sigma_{ik}'. \end{cases}$$

10. Nunmehr kommen die T vom Typus (abc) an die Reihe; es sind also, mit Rücksicht auf Nr. 2, die Produkte für die folgenden Unter-

typen zu bilden: $(\mathrm{V}'_{\nu' l})$ $B'_l c_{\nu' l}$; $(\mathrm{V}'_{\nu' i})$ $B'_l c_{\nu' i}$, $(\mathrm{V}'_{\nu' i'})$ $B'_l c_{\nu' i'}$; $(\mathrm{V}'_{\nu' k})$ $B'_l c_{\nu' k}$, $(\mathrm{V}'_{\nu' k'})$ $B'_l c_{\nu' k'}$, nebst den analogen (V) für B_l.

11. *Die Untertypen* $(\mathrm{V}'_{\nu' l})$, $(\mathrm{V}'_{\nu' i})$ und $(\mathrm{V}'_{i i'})$.

Es ergibt sich:

$$B'_l c_{\nu' l} \equiv z_l^3 p_i \zeta_l + \cdots - \pi_z \eta_l \equiv d_l \zeta_l + d_m \eta_l (\eta_l = \zeta_l^2 p_i p_k + 1),$$

und damit für die zugehörige T:

$$(\mathrm{V}'_{\nu' l}) \qquad d_l \zeta_l + d_m \eta_l = 0.$$

Die beiden Untertypen $(\mathrm{V}'_{\nu' i})$ und $(\mathrm{V}'_{\nu' i'})$ gehen durch Vertauschung von i mit i' ineinander über. Es wird:

$$B'_l c_{\nu' i'} \equiv - z_k^3 p_l + z_l^3 p_i p_l \zeta'_i + z_i^3 p_k p_i \zeta_l + \cdots - \pi_z \nu_m,$$

wo ν_m den Wert hat:

$$(17) \qquad \nu_m \equiv \varrho \zeta_l \zeta'_i + p_l p_i s_k + \sigma_{li},$$

und entsprechend:

$$(17') \qquad \nu'_m \equiv \varrho \zeta_l \zeta_i + p_l p_i s_k + \sigma'_{li}.$$

Die Gleichungen der korrespondierenden T sind daher:

$$\begin{cases} (\mathrm{V}'_{\nu' i'}) & d_i p_i \zeta_l - d_k + d_l p_l \zeta'_i + d_m \nu_m = 0. \\ (\mathrm{V}'_{\nu' i}) & d_i p_i \zeta_l - d_k + d_l p_l \zeta_i + d_m \nu'_m = 0. \end{cases}$$

12. Aus der Matrix von $(\mathrm{V}'_{\nu' i'})$ und $(\mathrm{V}'_{\nu' l})$ berechne man zuerst die Koordinate π_{lm}:

$$\pi_{lm} = p_l \zeta'_i \eta_l - \zeta_l \nu_m \equiv \zeta_l (\zeta_l s_i - p_l p_i s_k).$$

Damit werden die Koordinaten der Raumgeraden b'_l:

$$(b'_l) \qquad \begin{cases} \pi_{li} = - p_i \zeta_l^2, & \pi_{im} = p_i \zeta_l \eta_l, & \pi_{ik} = 0, \\ \pi_{lk} = \zeta_l, & \pi_{km} = - \eta_l, & \pi_{lm} = \zeta_l (\zeta_l s_i - p_l p_i s_k), \end{cases}$$

und analog die von b_l durch Vertauschung von ζ_l mit ζ':

$$(b_l) \qquad \begin{cases} \pi_{li} = - p_i \zeta_l'^2, & \pi_{im} = p_i \zeta'_l \eta'_l, & \pi_{ik} = 0, \\ \pi_{lk} = \zeta'_l, & \pi_{km} = - \eta'_l, & \pi_{lm} = \zeta'_l (\zeta'_l s_i - p_l p_i s_k). \end{cases}$$

13. *Die beiden Untertypen* $(\mathrm{V}'_{\nu' k})$, $(\mathrm{V}'_{\nu' k'})$.

Sie gehen aus $(\mathrm{V}'_{\nu' i})$ resp. $(\mathrm{V}'_{\nu' i'})$ durch Vertauschung der Indizes i und k hervor, so daß für die T kommt:

$$\begin{cases} (\mathrm{V}'_{\nu' k}) & d_i p_k \zeta_l - d_k + d_l p_l \zeta_k + d_m (\varrho \zeta_k \zeta_l + p_k p_l s_i + \sigma'_{kl}) = 0, \\ (\mathrm{V}'_{\nu' k'}) & d_i p_k \zeta_l - d_k + d_l p_l \zeta'_k + d_m (\varrho \zeta'_k \zeta_l + p_k p_l s_i + \sigma_{kl}) = 0. \end{cases}$$

14. Hieran schließen sich die Koordinaten der sechs Geraden a. Um etwa die von a_l zu erhalten, sehe man a_l an als Schnittachse der

beiden T-Ebenen $(a_l b'_i c_{l'l})$ und $(a_l b'_k c_{k'l})$, betrachte also in E die beiden Produkte $B'_l c_{l'l}$ und $B'_k c_{k'l}$. Man erhält:

$$B'_k c_{k'l} \equiv -d_i + d_k p_k \zeta_l + d_l p_l \zeta_k + d_m \sigma_m,$$

wo σ_m den Wert hat:

$$(18) \qquad \sigma_m \equiv \varrho \zeta_k \zeta_l + p_k p_l s_i + \sigma'_{kl}.$$

Die Matrix von $B'_k c_{k'l}$ und $B'_{il} c_{l'l}$ liefert somit als Koordinaten von a_l:

$$(a_l) \qquad \begin{cases} \pi_{li} = \zeta_l, & \pi_{im} = -\eta_l, \quad \pi_{ik} = 0, \\ \pi_{lk} = -p_k \zeta_l^2, & \pi_{km} = p_k \zeta_l \eta_l, \quad \pi_{lm} = \zeta_l(\zeta_l s_k - p_k p_l s_i), \end{cases}$$

und hieraus wieder die von a'_l durch Vertauschung von ζ_l und ζ'_l. Offenbar gehen die Koordinaten von b'_l und a_l, b_l und a'_l je ineinander über, wenn man jeweils links und rechts die Indizes i und k vertauscht.

Damit sind wir im Besitze der Koordinaten aller 45 T und aller 27 g. Weitere Aufgaben sind nunmehr leicht lösbar. So gehen durch jede g 5 T, deren Formen also an drei lineare Identitäten geknüpft sind, usw.

15. Nunmehr kommen wir zu den Gleichungen der 28 Doppeltangenten t_2 einer ebenen c_4. Legt man mit Geiser von irgendeinem Punkte P' der F_3 an sie den Berührungskegel und schneidet ihn mit irgendeiner Ebene E, so erhält man eine allgemeine c_4 (vom Geschlecht 3) mit 28 t_2. Von diesen sind 27 die Projektionen der 27 g, während die letzte die Spur der Tangentialebene T' in P' ist.

16. Man nehme nun das Projektionszentrum $P'(d')$ auf der F_3 willkürlich, nur außerhalb der Projektionsebene E $(d_m = 0)$ an, deren Punktkoordinaten wiederum mit z_i, z_k, z_l bezeichnet seien.

Die Koordinaten von P' sind gemäß (5):

$$(5') \qquad d'_i \equiv z'_i q_{kl}(z') \text{ usf.}, \quad d'_m \equiv -\pi_{z'},$$

wo unter den $z'_i (\neq 0)$ drei arbiträr zu wählende homogene Parameter zu verstehen sind.

Bedeutet $P(d)$ für den Augenblick einen beliebigen Raumpunkt, so hat die Spur des Projektionsstrahles $(P'P)$ die Koordinaten $d_m d_i - d'_i d_m$. Folglich wird die Gleichung der Projektion p' irgendeiner Raumgeraden $p = \{P(d), P(e)\}$, mit den Strahlenkoordinaten $p_{rs} = (de)_{rs}$, die Gleichung:

$$(19) \qquad p' \equiv \sum z_i \begin{vmatrix} d_k d'_m - d_m d'_k, & e_k d'_m - e_m d'_k \\ d_l d'_m - d_m d'_l, & e_l d'_m - e_m d'_l \end{vmatrix} \equiv \sum z_i m_i = 0,$$

wo die Koeffizienten m_i die entwickelten Werte haben:

$$(20) \qquad m_i \equiv p_{kl} d'_m + p_{lm} d'_k + p_{mk} d'_l.$$

Führt man hier statt der p_{rs} die komplementären Achsenkoordinaten π_{tu} von p ein und zieht zusammen, so ergibt sich als Gleichung der Projektion p' von p:

(19a) $$p' \equiv d'_m \sum z_i \pi_{im} + \begin{vmatrix} \pi_{kl} & \pi_{li} & \pi_{ik} \\ z_i & z_k & z_l \\ d'_i & d'_k & d'_l \end{vmatrix} = 0.$$

17. Jetzt lassen sich die Gleichungen der Projektionen t_2 der 27 g ohne weiteres hinschreiben; man hat nur die früher gewonnenen Werte der π für die 27 g nacheinander in (19a) einzutragen.

Für die drei Geraden vom Untertypus $c_{ll'}$ (Nr. 6) waren $\pi_{lm} \neq 0$, die übrigen $\pi = 0$, somit ist die Gleichung der entsprechenden $t_2(ll')$:

$$t_2(ll') \equiv d_i = 0,$$

wie es sein muß, da jede dieser drei Geraden ihre eigene Projektion ist.

Sodann kommen die dreimal vier Geraden g der Untertypen c_{ik}, $c_{i'k'}$, $c_{ik'}$, $c_{i'k}$ in Betracht. Es genügt, mit Rücksicht auf die Regel der Nr. 8, die Betrachtung von $c_{ik'}$. Gemäß Nr. 7 und (19a) wird die Gleichung der $t_2(ik')$:

$$t_2(ik') \equiv d'_m \{\sigma'_{ik}(z_i\zeta_i + z_k\zeta_k) + z_l(\varrho + s_l\zeta_i\zeta_k)\} \\ + \pi_{kl}(z_k d'_l - z_l d'_k) + \pi_{li}(z_l d_i - z_i d'_l) = 0.$$

Hieran schließen sich die Projektionen $t_2(b'_l)$, $t_2(b_l)$, $t_2(a_l)$, $t_2(a'_l)$ der Geraden b'_l, b_l, a_l, a'_l.

Es genügt die Aufstellung der Gleichung von $t_2(b'_l)$. Mit Rücksicht auf Nr. 12 kommt:

$$t_2(b'_l) \equiv d'_m \{\eta_l(z_i p_i \zeta_l - z_k) + z_l\zeta_l\zeta_i(\zeta_l s_i - p_l p_i s_k)\} \\ - \zeta_l \{(z_k d'_l - z_l d'_k) + p_i\zeta_l(z_i d'_k - z_k d'_i)\} = 0.$$

18. Etwas umständlicher gestaltet sich die Ableitung der Gleichung für die letzte Doppeltangente $t_2 \equiv t'_2$ als Spur der Tangentialebene T' der F_3 in P'.

Zu dem Behuf ist vorab die Gleichung der F_3 in den Koordinaten $d_i \dots d_m$ zu entwickeln.

In der ersten Mitteilung lautete unter (I) die Gleichung der F_3 in den Raumpunktkoordinaten $c_i \dots c_m$ (s. Nr. 2) für:

(21) $$c_i \equiv z_i k_i \text{ usf.}, \quad c_m \equiv \pi_s,$$
(22) $$k_i \equiv q_{kl} + z_k z_l s_i p_k p_l,$$ wie folgt:

(I_c) $$F_3(c) \equiv c_m^3 + c_m \sum c_i y_i + \pi_y - \pi_c = 0,$$ wo:

(23) $$y_i \equiv p_i c_i + s_i c_m.$$

Mit Rücksicht auf Nr. 2 sind nun in (I_c) statt der Größen c die d einzuführen:

(5) $$d_i \equiv z_i q_{kl}, \quad d_m \equiv -c_m, \qquad \text{so daß umgekehrt:}$$

(5_a) $$c_i \equiv d_i - d_m s_i p_k p_l, \quad c_m \equiv -d_m.$$

Berechnet man die drei Ausdrücke $\sum c_i y_i$, $\pi_y \equiv y_i y_k y_l$, $\pi_c \equiv c_i c_k c_l$ in den d, so geht die Gleichung (I_c) über in:

(I_d) $$F_3(d) \equiv d_m^3 [1 + (\pi_p + 1) \sum s_i^2 p_k p_l + \pi_s \{(\pi_p + 1)^3 - \pi_p^2\}]$$
$$- d_m^2 [(2\pi_p + 1) \sum d_i s_i + (\pi_p^2 + \pi_p + 1) \sum d_i p_i s_k s_l]$$
$$+ d_m [\sum d_i^2 p_i + \pi_p \sum d_k d_l s_i p_k p_l] - \pi_d (\pi_p - 1) = 0.$$

Vergleicht man $F_3(d)$ mit $F_3(c)$, so erkennt man, daß, abgesehen von den Koeffizienten der Kuben von c_m und d_m, die übrigen Koeffizienten nur geringe Abweichungen aufweisen.

19. Nunmehr ist die Gleichung der 28ten Doppeltangente t_2', als Spur der Tangentialebene T' in P' leicht aufzustellen. Die Gleichung von T' ist:

(24) $$T' \equiv \sum d_i \frac{\partial F_3}{\partial d_i'} + d_m \frac{\partial F_3}{\partial d_m'} = 0,$$

mithin die ihrer Spur in der Ebene $d_m = 0$:

$$t_2' \equiv \sum z_i \frac{\partial F_3}{\partial d_i'} = 0.$$

Gemäß (I_d) besitzen hier die Koeffizienten $\frac{\partial F_3}{\partial d_i'}$ die Werte:

(25) $$\frac{\partial F_3}{\partial d_i'} \equiv - d_m'^2 \{(2\pi_p + 1) + (\pi_p^2 + \pi_p + 1) p_i s_k s_l\}$$
$$+ p_i d_m' \{2 d_i' + \pi_p (d_k' p_k + d_l' p_l)\} - d_k' d_l' (\pi_p - 1).$$

Zum Schlusse sei noch betont, daß man auf Grund von Nr. **17** und **19** die Gleichungen der 28 Doppeltangenten t_2 der gesamten ∞^2-Schar von c_4 beherrscht, die durch Variieren des Projektionszentrums P' auf der F_3 hervorgehen.

(Eingegangen am 27. 10. 26.)

Über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises.

Von K. Reinhardt in Greifswald.

Von den Herren Koebe und Bieberbach stammt der folgende bekannte Satz[1]): Wird der Einheitskreis durch eine in ihm reguläre Funktion $f(z)$, für die $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$ ist, schlicht abgebildet, so enthält der Bildbereich stets den Kreis $|z| < \frac{1}{4}$. Dieser Satz läßt sich sehr leicht verschärfen. Ich beweise den folgenden: *Wird der Einheitskreis durch eine in ihm reguläre Funktion* $f(z) = z + a_2 \cdot z^2 + \cdots$ *schlicht abgebildet, so enthält der Bildbereich stets den Kreis mit dem Mittelpunkt* $\frac{\bar{a}_2}{4 - |a_2|^2}$ *und dem Radius* $\frac{2}{4 - |a_2|^2}$. Dabei sei daran erinnert, daß nach einem Satz von Bieberbach[1]) für die hier betrachtete Funktionenfamilie $|a_2| \leqq 2$ ist, und daß $|a_2| = 2$ nur dann stattfindet, wenn es sich um die Funktionen $\frac{z}{(1 - e^{i\psi} \cdot z)^2}$ handelt; dann geht der obige Kreis in eine Halbebene über.

Zum Beweise unseres Satzes übe man auf den Einheitskreis zunächst die Abbildung $w = f(z)$ aus, und dann auf den entstehenden schlichten Bildbereich B die lineare Abbildung $\omega(w) = \frac{-\alpha \cdot w}{w - \alpha}$, wobei α ein Punkt aus dem Äußeren oder dem Rande von B ist. Dann ist die Funktion $\omega(w)$ in B regulär, und überdies ist $\omega(0) = 0$ und $\omega'(0) = 1$. Folglich vermittelt die Funktion $\omega(z)$ ebenfalls eine reguläre schlichte Abbildung des Einheitskreises, und außerdem ist $\omega(z)_{z=0} = 0$ und $\omega'(z)_{z=0} = 1$. Entwickelt man daher $\omega(z)$ in eine Potenzreihe um den Nullpunkt, so gilt für den Koeffizienten von z^2 in dieser Entwicklung, der ersichtlich gleich $a_2 + \frac{1}{\alpha}$ ist, der oben erwähnte Bieberbachsche Satz, so daß man hat

$$(1) \qquad \left| a_2 + \frac{1}{\alpha} \right| \leqq 2.$$

Die Beziehung (1) muß für alle α außerhalb und auf dem Rande von B gelten. Diejenigen α also, für die $\left| a_2 + \frac{1}{\alpha} \right| > 2$ ist, liegen sicher innerhalb von B.

1) Vgl. etwa Enzyklopädie II C 4: Bieberbach, Neuere Untersuchungen über Funktionen von komplexen Variablen, S. 511.

Zur Diskussion können wir uns auf den Fall beschränken, daß a_2 positiv reell ist. Denn für $a_2 = |a_2| \cdot e^{i\varphi}$ übe man erst die Drehungen $z' = e^{i\varphi} \cdot z$, $w' = e^{i\varphi} \cdot w$ aus, so daß $w' = z' + |a_2| \cdot z'^2 + \cdots$ wird; damit hat man den allgemeinen Fall auf den besonderen zurückgeführt. Dann liegen alle α, für die $\left|a_2 + \frac{1}{\alpha}\right| = 2$ ist, auf dem Kreise über dem Durchmesser mit den Endpunkten $-\frac{1}{2 + a_2}$ und $\frac{1}{2 - a_2}$, und alle α, für die $\left|a_2 + \frac{1}{\alpha}\right| > 2$ ist, im Innern dieses Kreises. Daher gehört unser Kreis ganz dem Bereiche B an und unser Satz ist bewiesen.

Gilt in (1) für ein bestimmtes α das Gleichheitszeichen, d. h. ist der Punkt α unseres Kreises Randpunkt von B, so muß nach einer anfänglichen Bemerkung $\omega(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\chi} \cdot z)^2}$ sein, wo $\operatorname{arc}\left(a_2 + \frac{1}{\alpha}\right) = \chi$ gesetzt ist. Dann muß für diese Funktion $w = \frac{\alpha \cdot \omega}{\omega + \alpha}$ regulär sein, d. h. der Punkt $-\alpha$ darf kein innerer Punkt des durch $\omega(z)$ vermittelten Bildbereiches sein. Da dieser Bildbereich aber die geradlinig von $\frac{1}{4} \cdot e^{i(\pi - \chi)}$ bis ∞ aufgeschlitzte Ebene ist, so muß $\operatorname{arc}(-\alpha) = \pi - \chi$, d. h., falls $a_2 \neq 0$ ist, α positiv oder negativ reell sein. Die Punkte $\frac{1}{2 - a_2}$ und $\frac{-1}{2 + a_2}$ sind also die einzigen, die bei der Abbildung durch besondere Funktionen unserer Familie (a_2 positiv reell, $\neq 0$) wirklich als Randpunkte auftreten könnten. Der durch die Funktion

$$w = \frac{z}{1 - a_2 \cdot z + z^2}$$

vermittelte Bildbereich B, der aus der von $\frac{1}{2 - a_2}$ über ∞ nach $-\frac{1}{2 + a_2}$ aufgeschlitzten Ebene besteht, enthält diese Randpunkte tatsächlich. Ist aber $a_2 = 0$, unser Kreis also der Kreis mit dem Radius $\frac{1}{2}$ um den Nullpunkt, so kann jeder seiner Punkte als Randpunkt wirklich erhalten werden, nämlich durch die Funktion

$$w = \frac{z}{1 + e^{-2i\chi} \cdot z^2},$$

wo $\alpha = \frac{1}{2} \cdot e^{i\chi}$ ist. — Schließlich sei bemerkt, daß der Kreis mit dem Radius $\frac{1}{2 + |a_2|}$ um den Nullpunkt den Bildbereichen der weiteren Familie mit konstantem $|a_2|$ angehört, und natürlich jeder seiner Punkte als Randpunkt wirklich erhalten wird.

Auf dem hier eingeschlagenen Wege kommt man noch zu weiteren Ergebnissen, falls man auch die Abschätzung $|a_3| \leq 3$ benutzt, die

Herr Löwner für die hier in Rede stehenden Funktionen nachgewiesen hat.[1]) Auf diese Weise erhält man den weiteren Satz: *Wird der Einheitskreis durch eine in ihm reguläre Funktion* $f(z) = z + a_2 \cdot z^2 + a_3 \cdot z^3 + \cdots$ *schlicht abgebildet, so enthält der Bildbereich stets ein Gebiet, das aus dem Äußeren einer bestimmten hyperbolischen Cassinischen Kurve, die den Nullpunkt im Innern enthält, durch Spiegelung am Einheitskreis entsteht. Das charakteristische Produkt dieser Cassinischen Kurve ist* 3, *ihre Exzentrizität* $\left|\sqrt{|a_2^2 - a_3|}\right|$, *ihr Mittelpunkt liegt bei* $-\bar{a}_2$, *und ihre große Achse ist gegen die positive Richtung der reellen Achse um einen zwischen* $-\frac{\pi}{2}$ *und* $+\frac{\pi}{2}$ *gelegenen Winkel* $-\alpha$ *verdreht, der sich aus den Gleichungen* $\cos 2\alpha = \frac{R(a_2^2 - a_3)}{|a_2^2 - a_3|}$ *und* $\sin 2\alpha = \frac{J(a_2^2 - a_3)}{|a_2^2 - a_3|}$ *bestimmt.*

Zum Beweise verfahre man wie oben und betrachte dann in der Entwicklung von $\omega(z)$ den Koeffizienten von z^3, für den der Löwnersche Satz gelten muß. So erhält man

$$\left| a_3 + \frac{2 \cdot a_2}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right| \leqq 3 \tag{2}$$

für alle α außerhalb und auf dem Rande von B. Nun liegen alle Werte $\frac{1}{\alpha}$, für die $\left| a_3 + 2 \cdot a_2 \cdot \frac{1}{\alpha} + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \right| = 3$ ist, auf dem Spiegelbild der oben genannten Cassinischen Kurve an der reellen Achse, und die Werte $\frac{1}{\alpha}$, für die jener absolute Betrag größer als 3 ist, im Äußeren dieses Spiegelbildes. Daraus folgt unser Satz genau wie oben.

Die Cassinische Kurve ist hyperbolisch, wenn $|a_2^2 - a_3| < 3$ ist. Dies muß aber bei schlichten Abbildungen tatsächlich immer der Fall sein, wie man mit Hilfe derselben Methode erkennt, die $|a_2| \leqq 2$ liefert.[2]) Denn in der Hilfsfunktion

$$\sqrt{\frac{1}{f(z^2)}} = \frac{1}{z} + b_0 + b_1 \cdot z + b_2 \cdot z^2 + b_3 \cdot z^3 + \cdots$$

ist $\quad b_0 = 0, \quad b_1 = -\frac{a_2}{2}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \frac{1}{2} \cdot \left(a_2^2 - a_3 - \frac{a_2^2}{4}\right).$

Aus der Ungleichung $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot |b_n|^2 \leqq 1$ folgt daher:

---

1) K. Löwner, Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. Math. Ann. Bd. 89.

2) Vgl. etwa die Darstellung bei Hurwitz-Courant, Allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, 2. Aufl., S. 387 ff.

$$|b_1|^2 + 3 \cdot |b_3|^2 = \frac{|a_2|^2}{4} + \frac{3}{4} \cdot \left| a_2^2 - a_3 - \frac{a_2^2}{4} \right|^2 \leqq 1,$$

oder
$$\left| |a_2^2 - a_3| - \frac{|a_2|^2}{4} \right| \leqq \left| \sqrt{\frac{4 - |a_2|^2}{3}} \right|.$$

Nun ist entweder
$$|a_2^2 - a_3| \leqq \frac{|a_2|^2}{4} \leqq 1,$$

oder
$$|a_2^2 - a_3| \leqq \frac{|a_2|^2}{4} + \left| \sqrt{\frac{4 - |a_2|^2}{3}} \right| < 1 + \left| \sqrt{\frac{4}{3}} \right| < 3,$$

womit die Behauptung bewiesen ist. Das Gebiet, das nach unseren Untersuchungen ganz dem Innern von B angehört, stellt sich demnach tatsächlich als einfach zusammenhängend heraus.

Um festzustellen, ob durch unseren zweiten Satz eine bessere Annäherung an B erreicht wird, als durch den ersten, kann man die Cassinische Kurve mit dem Kreis vergleichen, der durch Spiegelung am Einheitskreis aus dem Kreise unseres ersten Satzes entsteht; er hat den Mittelpunkt $-\bar{a}_2$ und den Radius 2. Soll das zweite Ergebnis besser sein, so muß die Cassinische Kurve diesem Kreis ganz angehören. Da ihre halbe große Achse gleich $\left|\sqrt{3 + |a_2^2 - a_3|}\right|$ ist, so ist dies aber nur der Fall, wenn $|a_2^2 - a_3| \leqq 1$ ist. Aus anderen Gründen ist es wahrscheinlich, daß für schlichte Abbildungen stets diese (im Vergleich zu oben schärfere) Ungleichung gelten muß, doch ist es mir nicht gelungen, dies zu beweisen. Für die Funktion $\frac{z}{(1-z)^2}$ geht das von uns gefundene Gebiet in eine Halbebene über, die durch eine symmetrisch zur reellen Achse verlaufende Kurve 3. Ordnung begrenzt wird, deren Scheitel bei $-\frac{1}{4}$ liegt, und deren Asymptote die Gerade $\Re(w) = -\frac{5}{12}$ ist.

Fragen wir uns noch, ob ein Punkt des Randes unseres Gebietes für gegebenes a_2, a_3 (a_2 etwa wieder positiv reell) von einer Funktion der hierdurch bestimmten Familie wirklich als Randpunkt erreicht werden kann. Da dann in (2) das Gleichheitszeichen gelten muß, gilt es nach Löwner auch in (1), und es kommen daher auch hier keine anderen, als die bereits oben gefundenen Funktionen in Betracht. Da die für diese Funktionen nach dem zweiten Satz bestimmten Näherungsgebiete aber die kritischen Punkte α ebenfalls als Randpunkte enthalten, so sind die neuen Gebiete nur für den ganz besonderen Fall $a_3 = a_2^2 - 1$ bzw. $a_3 = -e^{-2i\chi}$, und auch dann nur in einer Richtung, die größtmöglichen.

(Eingegangen am 3. 6. 27.)

Über den Vektorenbereich eines Eikörpers.

Von Wilhelm Süss z. Zt. in Frankfurt a./M.

1. Es wird der folgende Satz bewiesen:

Trägt man alle Vektoren, deren Anfangs- und Endpunkte einem räumlichen konvexen Bereich E angehören, von einem festen Punkt M aus ab, so erfüllen sie einen konvexen Bereich V mit M als Mittelpunkt, den „Vektorenbereich" V von E. Für die Rauminhalte von E und V gilt die Ungleichung

(A) $$8\,J(E) \leqq J(V) \leqq 20\,J(E),$$

worin das erste Gleichheitszeichen Mittelpunktsbereiche E und das zweite Tetraeder kennzeichnet.

Herr H. Rademacher hat m. W. den ersten Beweis des entsprechenden, von Herrn W. Blaschke für *ebene* Bereiche ausgesprochenen Satzes veröffentlicht[1]), für den (A) durch

(B) $$4\,J(E) \leqq J(V) \leqq 6\,J(E)$$

zu ersetzen ist und Mittelpunktsbereiche und Dreiecke die Grenzen darstellen. Während der a. a. O. gegebene Beweis der linken Seite von (B) sich auf Grund der Minkowskischen Ungleichung für den gemischten Flächeninhalt sehr einfach gestaltet, hat derjenige für die rechte Seite von (B) einige Schwierigkeiten zu überwinden. Diese sind indessen nicht durch die zu beweisende geometrische Tatsache bedingt, wie ich gelegentlich einer Untersuchung zur sog. „relativen Differentialgeometrie" bemerkt habe.[2]) Man kann den Beweis so gestalten, daß beide Seiten der Behauptung sich gleicherweise aus der Minkowskischen Theorie konvexer Bereiche ergeben. Dabei hat sich herausgestellt, daß das Beweisverfahren geeignet ist, den entsprechenden Satz auch für dreidimensionale Bereiche abzuleiten, was ich hier in Nr. 3 für die Behauptung (A) zeigen

1) Über den Vektorenbereich eines konvexen ebenen Bereiches; Jahresbericht der D. Math.-Ver. 34, S. 64 ff. (Anmerkung bei der Korrektur): Inzwischen hat Herr Th. Estermann zwei kurze Beweise des Blaschkeschen Satzes veröffentlicht; ebenda Bd. 36, S. 197 ff.

2) Zur relativen Differentialgeometrie I: Über Eilinien und Eiflächen in der elementaren und affinen Differentialgeometrie; Japan. Journal of Math. 3, 1927. — Die relative Differentialgeometrie ist in den letzten Jahren mehrfach von Herrn Emil Müller behandelt worden; vgl. z. B. Monatshefte für Math. u. Phys. 31, S. 3 ff.

will. Vorher stelle ich in Nr. 2 die zum Beweis nötigen Hilfsmittel aus der relativen Flächentheorie[2]) zusammen.

2. Wir benutzen eine den Ursprung M im Innern enthaltende Eifläche[3]) $\mathfrak{e}(u, v)$ als sog. „Eichfläche" der relativen Flächentheorie, bezeichnen mit $\mathfrak{k}$ den Einheitsvektor der nach außen gerichteten Flächennormalen, mit $\overline{K}(\mathfrak{e})$ das Gaußsche Krümmungsmaß, mit $q(\mathfrak{k})$ den Abstand der Stützebene $\sigma(\mathfrak{k})$ an $\mathfrak{e}$ von M, mit $d\bar{o}(\mathfrak{e})$ und $d\bar{\omega}$ die Flächenelemente von $\mathfrak{e}$ bzw. der Einheitskugel.

Es sei $\mathfrak{x}(u, v)$ eine zweite, M im Innern enthaltende Eifläche, deren Punkte denen von $\mathfrak{e}(u, v)$ eineindeutig dadurch zugeordnet sind, daß die Vektoren $\mathfrak{k}$ für beide Flächen in Punkten mit denselben Parameterwerten u, v übereinstimmen. $p(\mathfrak{k})$ sei für $\mathfrak{x}(u, v)$ der Stützebenenabstand von M; mit $\overline{K}(\mathfrak{x})$ und $d\bar{o}(\mathfrak{x})$ seien Gaußsches Krümmungsmaß und Flächenelement von $\mathfrak{x}$ bezeichnet. Dann nennt man

(1) $$O = \oint do = \oint q\, d\bar{o}(\mathfrak{x})$$

die *„Relativoberfläche"* von $\mathfrak{x}$ bezüglich $\mathfrak{e}$ und

(2) $$\Omega = \oint d\omega = \oint q\, d\bar{o}(\mathfrak{e}) = 3\, J(\mathfrak{e})$$

die *„Eichoberfläche"*, welche gleich dem dreifachen Rauminhalt $J(\mathfrak{e})$ des von $\mathfrak{e}$ umschlossenen Eikörpers ist.

(3) $$\frac{do}{d\omega} = \frac{d\bar{o}(\mathfrak{x})}{d\bar{o}(\mathfrak{e})} = \frac{\overline{K}(\mathfrak{e})}{\overline{K}(\mathfrak{x})} = K^{-1}$$

definiert das *„Relativ-Krümmungsmaß"* K von $\mathfrak{x}$ (bez. $\mathfrak{e}$).

Sind $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{e}$ zweimal stetig-differenzierbar, so existieren in jedem Punkt von $\mathfrak{x}$ (und $\mathfrak{e}$) zwei ausgezeichnete, einander konjugierte Fortschreitungsrichtungen, die der *„Relativ-Krümmungslinien"*, längs welchen die *„Relativ-Normalen"* ($\mathfrak{e}$) Torsen bilden. Wählt man diese Kurven zu Parameterlinien, so wird

(4) $$\mathfrak{x}_u = R_1 \mathfrak{e}_u, \qquad \mathfrak{x}_v = R_2 \mathfrak{e}_v.$$

Hierin sind die R_i die sog. *„Relativ-Hauptkrümmungsradien"* und es ist $K^{-1} = R_1 R_2$. Führt man noch das Verhältnis

(5) $$r(\mathfrak{k}) = \frac{p(\mathfrak{k})}{q(\mathfrak{k})}$$

als den *„Relativ-Abstand"* der Stützebene $\sigma(\mathfrak{k})$ an $\mathfrak{x}$ vom Ursprung ein,

---

3) D. h. eine geschlossene konvexe Fläche, die mit jeder ihrer Stützebenen nur einen Punkt gemein hat.

so gelten analog zu der Minkowskischen Theorie der Eiflächen die Formeln

$$(6)\quad \begin{cases} J(\mathfrak{x}) = \frac{1}{3}\oint r\,do = \frac{1}{3}\oint p\,d\bar{o}(\mathfrak{x}), \\ O = \oint R_1 R_2\,d\omega = \frac{1}{2}\oint r(R_1 + R_2)\,d\omega = \oint q\,d\bar{o}(\mathfrak{x}), \\ M = \frac{1}{2}\oint (R_1 + R_2)\,d\omega = \oint r\,d\omega = \oint p\,d\bar{o}(\mathfrak{e}), \\ \Omega = 3\,J(\mathfrak{e}) = \oint q\,d\bar{o}(\mathfrak{e}). \end{cases}$$

Ihre Ableitung erfolgt vollkommen analog zu derjenigen der elementaren Differentialgeometrie.[2]) Dabei spielt eine Formel für die *„Relativ-Parallelfläche"*

$$\mathfrak{x}^* = \mathfrak{x} + \tau\mathfrak{e} \qquad (\tau \text{ konstant})$$

im R-Abstand τ eine Rolle. Für den von ihr umschlossenen Rauminhalt gilt entsprechend einem Satze J. Steiners[4])

$$(7)\qquad J(\mathfrak{x}^*) = J(\mathfrak{x}) + \tau O + \tau^2 M + \frac{\tau^3}{3}\Omega.$$

Die benötigten Ungleichungen für die gemischten Volumina in Minkowskis Theorie von Volumen und Oberfläche nehmen die Form an

$$(8)\qquad O^3 \geqq 9\,\Omega J^2(\mathfrak{x}), \qquad M^3 \geqq 3\,\Omega^2 J(\mathfrak{x}),$$

worin die Gleichheitszeichen nur dann gelten, wenn $\mathfrak{x}$ zu $\mathfrak{e}$ ähnlich und ähnlich gelegen ist. Die Größen O und M sind gegenüber Translationen invariant.

Es ist hervorzuheben, daß die Formeln (6), (7) und (8) auch dann einen Sinn behalten, wenn die Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{e}$ nicht den bei (3) gemachten Differenzierbarkeitsannahmen genügen und die Beschränkung in der Definition der Eiflächen[3]) aufgehoben wird.

3. Wir kommen zum Beweis des anfangs genannten Satzes. Es sei $\mathfrak{x}(u, v)$ die Oberfläche des betrachteten Eikörpers E. Wie schon Herr H. Rademacher ausführt[1]), ist der *„Vektorenbereich"* V zugleich der *„Breitenbereich"* von $E(\mathfrak{x})$, d. h. wählt man O zum Mittelpunkt von V, so ist die Breite von E in der Richtung $(\mathfrak{xi})$

$$(9)\qquad P(\xi) = p(\xi) + p(-\xi)$$

gleich dem Abstand der Stützebenen $\sigma(\xi)$ oder $\sigma(-\xi)$ an V von O. Dann aber ist *die Oberfläche $\mathfrak{x}^*(u, v)$ von V gerade die Relativ-Parallelfläche von $\mathfrak{x}(\xi)$ bezüglich der Eichfläche $\mathfrak{e}(\xi) = \mathfrak{x}(-\xi)$ im Relativ-Abstand* 1.

4) Ges. Werke II, S. 173—176.

Es ist also nach (7)

$$J(\mathfrak{x}^*) = J(\mathfrak{x}) + O + M + \frac{\Omega}{3}.$$

Nun ist $\Omega = 3\,J(\mathfrak{e}) = 3\,J(\mathfrak{x})$. Demnach lautet die Behauptung (A) jetzt

$$\text{(A')} \qquad 6\,J(\mathfrak{x}) \leqq O + M \leqq 18\,J(\mathfrak{x}).$$

Die linke Seite dieser Ungleichung ist mit (8) identisch. Und es ist nur dann $6\,J(\mathfrak{x}) = O + M$, wenn $\mathfrak{x}(\xi)$ zu $\mathfrak{e}(\xi) = \mathfrak{x}(-\xi)$ ähnlich und ähnlich gelegen ist. Läßt man die Schwerpunkte von $\mathfrak{x}(\xi)$ und $\mathfrak{e}(\xi)$ im Ursprung zusammenfallen, so muß also

$$p(\xi) = \alpha p(-\xi) \qquad (\alpha \text{ konstant}),$$

wegen der Geschlossenheit von $\mathfrak{x}$ somit $\alpha = 1$ sein. Dann aber ist $\mathfrak{x}$ eine *Mittelpunktseifläche*, wie behauptet wurde.

Wenn die Schwerpunkte von $\mathfrak{x}(\xi)$ und $\mathfrak{e}(\xi)$ in O liegen, so ist, wie ich weiter zeige,

$$(10) \qquad \frac{1}{3} \leqq r(\xi) = \frac{p(\xi)}{p(-\xi)} \leqq 3.$$

Die zur Stützebene $\sigma(\xi)$ parallele Ebene $\eta(\xi)$ durch O hat mit $E(\mathfrak{x})$ einen Eibereich $\varepsilon(\xi)$ gemeinsam. Es sei $R(-\xi)$ ein Punkt, den $\mathfrak{x}$ mit der Stützebene $\sigma(-\xi)$ gemein hat, und $\mathsf{E}(\xi)$ die Projektion von $\varepsilon(\xi)$ von $R(-\xi)$ aus auf die Stützebene $\sigma(\xi)$. Wegen der Konvexität von $E(\mathfrak{x})$ liegt dann der Schwerpunkt des von dem Kegel $\varkappa \equiv [R(-\xi), \mathsf{E}(\xi)]$ umschlossenen Raumteils in $\eta(\xi)$ oder zwischen $\eta(\xi)$ und $\sigma(\xi)$; er liegt nur dann in $\eta(\xi)$, wenn $\mathfrak{x}$ mit diesem Kegel $\varkappa$ identisch ist. Hiermit ist aber (10) bewiesen.

Nach (6) und (10) ist nun

$$(11) \qquad \begin{cases} M \leqq 3\Omega = 9\,J(\mathfrak{x}), \\ O \leqq 9\,J(\mathfrak{x}), \end{cases}$$

woraus sich die rechte Seite von (A') ergibt. Sollen in (11) die Gleichheitszeichen gelten, so muß für alle Richtungen (ξ), deren Element $d\omega(\xi)$ in (6) Beiträge zu M und O liefert, in (10) $r(\xi) = 3$ sein. Es muß also E für jedes derartige (ξ) ein Kegel sein, dessen Grundfläche in $\sigma(\xi)$ und dessen Schwerpunkt in O liegt. Dann aber ist E ein *Tetraeder*, w. z. b. w.

(Eingegangen am 16. 4. 27.)

Über Striktionsgebilde.[1])

Von H. Beck in Bonn.

Die erste Definition des Striktionspunktes auf einer Erzeugenden einer Regelschar findet sich bei Chasles im schwer zugänglichen XI. Bande der Correspondance mathématique et physique, Bruxelles 1839, in der Arbeit Sur les surfaces engendrées par une ligne droite, particulièrement sur l'hyperboloïde, le paraboloïde et le cône du second degré.

Chasles betrachtet auf einer Erzeugenden zwei Punkte von der Eigenschaft, daß ihre Tangentialebenen aufeinander senkrecht stehen. Ist dann der eine dieser beiden Punkte uneigentlich, so heißt der andere Striktionspunkt (point central). „Ce point jouit de plusieurs autres propriétés *qui peuvent servir pour le caractériser.*[2]) Il est le point où la droite qui mesure la plus courte distance entre les deux génératrices infiniment voisines s'appuie sur la première (p. 59).

Chasles hat wohl übersehen, daß die beiden Definitionen verschiedene Reichweite haben. Die erste gilt nicht für die Tangentenflächen, die zweite hat dann noch Sinn. Im imaginären Gebiet versagt die erste für alle nach Monge benannten ganz aus isotropen Geraden bestehenden Regelscharen; die zweite hat auch dann noch Sinn; *beispielsweise besitzt eine Kugel von nicht verschwindendem Radius noch eine Striktionskurve.*

Es muß also die zweite Definition verwandt werden, da sie die weiterreichende ist. Man hat sich aber meist an die erste gehalten. Dadurch sind eine Reihe unrichtiger Angaben über Striktionsgebilde entstanden. Z. B.:

„Die Striktionslinie auf einer Regelfläche dritten Grades ist von der achten Ordnung" usw., sie soll 21 scheinbare Doppelpunkte, 20 stationäre Schmiegungsebenen haben, eine Knotenkurve von der 90. Ordnung usw. usw.[3])

Man braucht nur an das Hamiltonsche Zylindroid zu denken. Dessen Striktionslinie ist bekanntlich eine gerade Linie!

Oder:

„Die Ordnung der Striktionslinie einer Regelfläche ist gleich $2k$, wenn k die Klasse eines ebenen Schnittes der Fläche bezeichnet."[4])

---

1) Erweiterte Fassung eines Vortrages auf der Düsseldorfer Versammlung 1926.

2) Im Original nicht kursiv.

3) Wien. Akad. Ber. 85. B. 2. Abt. 1882, S. 379, 380.

4) Wien. Akad. Ber. 80. B. 2. Abt. 1879, S. 1025.

Gegenbeispiel wieder das Zylindroid. Ein ebener Schnitt einer Regelfläche braucht nicht Klassenkurve zu sein.

Oder:

„Die Striktionslinie eines einschaligen Rotationshyperboloides besteht aus dem Kehlkreise (doppelt gezählt) desselben, und aus den zwei imaginären Erzeugendenpaaren, welche in den Tangentialebenen aus der Rotationsachse liegen.“[1])

Danach hätte eine analytische Regelschar eine nichtanalytische Striktionskurve! Gleichwohl ist diese letzte Behauptung neuerdings wieder aufgenommen. Es sind Sätze über die Striktionsgebilde algebraischer analytischer Regelflächen aufgestellt, die sich nicht halten lassen.[2])

Es erscheint daher angebracht, das Gebiet von neuem zu bearbeiten. Um aber außerdem etwas Positives zu leisten, geben wir noch *die Bestimmung aller Regelflächen zu einer vorgegebenen Striktionskurve.*

I.

§ 1. Die gemeinsame Normale zweier gerader Linien.

Zur erschöpfenden Behandlung dieser Angelegenheit bedient man sich sachgemäß Plückerscher Koordinaten. Dann ist ein System von vier linearen und einer quadratischen Gleichung zu lösen. Das gibt eine ganze Reihe von Möglichkeiten. Von den vier linearen Gleichungen können mehrere zusammenfallen oder identisch erfüllt werden. Auch kann die quadratische Gleichung bereits eine Folge der linearen sein. Wir wollen diesen verwickelten Fragenkomplex nur soweit anschneiden, als er für die Differentialgeometrie der Regelscharen in Frage kommt.

Die Figur der 2. ∞^2 gemeinsamen Normalen *zweier uneigentlicher* Geraden ist reduzibel; sie besteht aus einem Bündel und einem Felde. *Für Regelscharen, die ganz aus uneigentlichen Geraden bestehen, lassen sich Striktionsgebilde nicht erklären.*

Jetzt brauchen wir nur noch vorauszusetzen, daß die beiden geraden Linien G und H *eigentlich* sind.

Dann kann es vorkommen, daß ∞^1 gemeinsame Normalen vorhanden sind, *obwohl G und H nicht parallel sind.*

Beispiel 1. G: $x = t$, $y = it$, $z = t$, H: $x = t$, $y = it$, $z = -t$.

Beide Gerade sind euklidisch (anisotrop). Sie *schneiden sich* im Nullpunkt des rechtwinklig vorausgesetzten Koordinatensystems. Jede

1) Wien. Akad. Ber. 85. B. 2. Abt. 1882, S. 377.

2) Vgl. § 9.

Gerade $x = t$, $y = it$, $z = c$, wo die Konstante c beliebig wählbar ist, ist gemeinsame Normale. Sie schneidet G in (c, ic, c), H in $(-c, -ic, c)$. Außer diesen ∞^1 eigentlichen Normalen gibt es noch eine uneigentliche.

Beispiel 2. G: $x = 0$, $y = 0$, $z = t$, H: $x = t$, $y = it$, $z = 0$.

Hier ist G anisotrop, H isotrop (Minimalgerade). *Beide schneiden sich* im Nullpunkt. Die vorhin genannten ∞^1 gemeinsamen Normalen sind auch hier solche. Die Gerade G wird in $(0, 0, c)$ getroffen, H aber $(c \neq 0)$ im uneigentlichen Punkt. Hinzu kommt wieder eine einzige uneigentliche Normale.

Man kann darüber streiten, ob man hier im Beispiel 2 noch von einer gemeinsamen Normalen reden will. Wesentlich ist nur, daß ein irregulärer Fall vorliegt. Wir stellen fest:

Zwei getrennte eigentliche sich schneidende[1]) *gerade Linien sind ohne bestimmte gemeinsame Normale dann und nur dann, wenn sie durch eine Minimalebene verbunden werden.*

Beispiel 3.

G: $x = 0$, $y = 0$, $z = t$, H: $x = t$, $y = -2 + it$, $z = 0$.

Hier ist G anisotrop, H isotrop, beide sind zueinander *windschief*. Auch hier existieren ∞^1 gemeinsame Normalen, die sich wörtlich, wie im Beispiel 2 beschreiben lassen.

Zwei eigentliche zueinander windschiefe gerade Linien sind dann und nur dann ohne bestimmte gemeinsame Normale, wenn die eine anisotrop ist, und die andere eine zu ihr senkrechte Isotrope.

In allen übrigen Fällen eigentlicher getrennter nichtparalleler gerader Linien gibt es zwei bestimmte gemeinsame Normalen, von denen die eine stets uneigentlich ist. Die andere ist dann entweder eigentlich oder sie fällt mit der uneigentlichen zusammen.

Ein Beispiel für den letzten Fall liefern die beiden windschiefen anisotropen Geraden:

Beispiel 4.

G: $x = t$, $y = 1 + it$, $z = t$, H: $x = t$, $y = -1 + it$, $z = -t$.

Sind zwei zueinander windschiefe anisotrope Gerade zu einer Minimalebene parallel, so gibt es eine bestimmte, doppelt zählende gemeinsame Normale, die aber uneigentlich ist, eine Tangente des absoluten Kegelschnittes.

Damit sind alle Fälle besonderen Verhaltens aufgezählt.

---

1) D. i. nichtparallele.

§ 2. Darstellung der geraden Linie.

Die Plückerschen Geradenkoordinaten, der für die Betrachtung der Regelscharen sachgemäße Apparat, zeigen gewisse Schwächen, wenn man auch Punkte und Ebenen zu betrachten hat. Sie sind eben auf die Bedürfnisse der *gemischten* Gruppe der Kollineationen und Korrelationen zugeschnitten. Diese Schwächen lassen sich zwar überwinden, aber doch nur auf recht umständliche Weise. Andererseits spielt der Vorteil, den die Plückerschen Koordinaten gewähren, hier keine Rolle, da wir es in unserem Gegenstand in der Hauptsache mit *eigentlichen* Geraden zu tun haben. Wir ziehen daher eine Darstellung durch zwei Vektoren vor.

Der Radius Vektor x lege einen Punkt der Geraden fest. Dazu kommt ein elastischer Vektor $y \neq 0$, der die Richtung liefert. *Elastisch* nenne ich den Vektor, weil er durch ϱy ersetzt werden kann, wo ϱ ein beliebiger nicht verschwindender Skalar ist. Das bedeutet dann für $\varrho \neq 1$ einen Parameterwechsel (sehr spezieller Art) auf der Geraden. Als Einheitsvektor darf y nicht angenommen werden, weil wir auch isotrope Gerade zu betrachten haben. Ebensowenig darf das Bestehen der Gleichung $(xy) = 0$ gefordert werden, aus demselben Grunde.[1])

Irgendeine Aussage über die Vektorpaare (x, y), $(\bar{x}, \bar{y})$, ... ist nur dann eine solche über die geraden Linien $\{x, y\}$, $\{\bar{x}, \bar{y}\}$, ..., wenn sie alle Substitutionen verträgt.

$$x^* = x + \tau y, \quad y^* = \varrho y; \quad \bar{x}^* = \bar{x} + \bar{\tau}\bar{y}, \quad \bar{y}^* = \bar{\varrho}\bar{y}; \ \ldots,$$

wo die Skalare $\tau, \bar{\tau}, \ldots$ ganz beliebig gewählt werden dürfen, ebenso die Skalare $\varrho, \bar{\varrho}, \ldots$; letztere dürfen aber nicht verschwinden.

Wir betrachten zwei Gerade $\{x, y\}$ und $\{\bar{x}, \bar{y}\}$.

Sie fallen zusammen für

$$[y\bar{y}] = 0, \quad [\bar{x} - x, y] = 0;$$

fällt die letzte Gleichung, so sind sie parallel. Für

$$[y\bar{y}] \neq 0, \quad (\bar{x} - x, y\bar{y}) = 0$$

schneiden sie sich in einem eigentlichen Punkte; endlich sind sie windschief für

$$[y\bar{y}] \neq 0, \quad (\bar{x} - x, y\bar{y}) \neq 0.$$

---

1) Es bedeute, wie üblich, (xy) das skalare, $[xy]$ das Vektorprodukt, $(x[yz]) = (xyz)$ usw. Das Vektorprodukt mit seiner schwerfälligen Bezeichnungsweise läßt sich zwar vermeiden, was wir hier absichtlich unterlassen.

Im Falle $\quad [y\bar{y}] \neq 0, \quad (yy)(\bar{y}\bar{y}) - (y\bar{y})^2 \neq 0$

ist die gemeinsame Normale anisotrop. Ihr Richtungsvektor darf als $[y\bar{y}]$ angesetzt werden. Ihr Fußpunkt auf $\{x, y\}$ ergibt sich, wenn man in

(1) $$z = x + \tau y$$

für τ den Wert nimmt

(1) $$\tau = ([\bar{x} - x, \bar{y}]\,[y\bar{y}]) : ([y\bar{y}]\,[y\bar{y}]).$$

Schneiden sich die beiden Geraden, so liefert der Radius Vektor z in (1) jetzt den Schnittpunkt. Die beiden Geraden liegen dann nicht in derselben Minimalebene. (Wenn das der Fall ist, versagt die Formel (1) für den Schnittpunkt; man muß dann einen Hilfsvektor einführen.)

Zu beachten ist, daß zwei nichtparallele Minimalgerade eine anisotrope gemeinsame Normale besitzen. Sind sie windschief, so bestimmen sie eindeutig eine Kugel, und die gemeinsame Normale ist ein Durchmesser.[1])

Der Fall, daß die beiden Geraden $\{x, y\}$ und $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ zwei zusammenfallende, d. i. uneigentliche gemeinsame Normalen besitzen, wird durch die Bedingungen geliefert

$$[y\bar{y}] \neq 0,\; (\bar{x} - x, y\bar{y}) \neq 0,\; (yy) \neq 0,\; (\bar{y}\bar{y}) \neq 0,\; (yy)(\bar{y}\bar{y}) - (y\bar{y})^2 = 0.$$

(Beispiel 4.)

§ 3. Analytische Regelscharen.

Seien jetzt die Komponenten der beiden Vektoren x und y als eindeutige analytische Funktionen des komplexen Parameters u mit dem gemeinsamen Regularitätsbereich $\{u\}$ gegeben

$$x \equiv x(u), \quad y \equiv y(u).$$

Weiter werde vorausgesetzt, daß die beiden Vektoren

$$[yy_1] \quad \text{und} \quad [x_1 y]$$

in $\{u\}$ nirgends gleichzeitig verschwinden.[2]) Der Index bedeute Differentiation nach dem Parameter u.

Dann durchläuft die eigentliche Gerade $\{x, y\}$ eine analytische Regelschar. Etwaige uneigentliche Erzeugenden der Regelschar sind durch die obigen Festsetzungen beseitigt; sie lassen sich später durch Grenzübergang einbeziehen.

---

1) Deutsche Math.-Ver. 22, 1913, S. 231—232.

2) D. i. die Länge Null dürfen sie haben, nur sollen nicht gleichzeitig beide in den Nullvektor übergehen.

Die durch $[yy_1] \equiv 0$ gelieferten *zylindrischen* Regelscharen, die ja hinsichtlich der Striktionsgebilde völlig abweichendes Verhalten zeigen, sollen von der weiteren Betrachtung ausgeschlossen werden.

Der Vektor $y(u)$ liefert dann den Richtkegel der Regelschar, der in ein Geradenbüschel ausarten kann.

§ 4. Striktionsgebilde.

Im Bereich $\{u\}$ stellt man eine Folge $u_1, u_2, u_3, \ldots$ von Stellen her, die gegen u_0 konvergiert und so beschaffen ist, daß für jedes Paar (u_0, u_n) von Erzeugenden der Regelschar *bestimmte* gemeinsame Normalen existieren.

Das ist nicht immer möglich. *Liegen alle Erzeugende der Schar in einer Minimalebene, so kann man nirgends eine solche u-Folge herstellen.* Auch diese Regelscharen sollen daher weiterhin ausgeschlossen werden.

In allen übrigen Fällen kann man, abgesehen von höchstens einer abzählbaren Menge von Stellen u_0 immer solche u-Folgen bilden. Für jede solche nach u_0 konvergierende Folge konvergiert die Folge der gemeinsamen Normalen gegen ein und dieselbe Grenzlage, die dann als *Striktionsgerade* an der Stelle u_0 erklärt wird. (Es gibt deren natürlich zwei, von denen die eine stets uneigentlich ist.)

Läßt man jetzt u_0 den Bereich $\{u\}$ durchlaufen, so kann es sein, daß an allen Stellen, wo die Striktionsgerade definiert ist, *dieselbe* Gerade geliefert wird. Sie ist dann auch solchen Stellen als Striktionsgerade beizulegen, an denen keine u-Folge existierte. Im anderen Falle bildet die Gesamtheit der Striktionsgeraden eine analytische Regelschar, die *Striktionsschar* (das *Striktionsband*), und etwaige Fehlstellen erhalten von hier aus nachträglich ihre Striktionsgerade.

Jede der in der u-Folge auftretenden gemeinsamen Normalen (u_0, u_n) hat auf der Erzeugenden u_0 einen Fußpunkt, und die Folge dieser Fußpunkte konvergiert wieder gegen eine Grenzlage, den *Striktionspunkt*[1]) auf der Erzeugenden u_0. Für die Kegel haben alle Erzeugenden denselben (eigentlichen) Striktionspunkt. In allen übrigen Fällen existiert eine *analytische Striktionskurve,* und von hier aus erhalten die Fehlstellen, die keinen Striktionspunkt besaßen, einen solchen durch analytische Fortsetzung.

1) So sagt man heute zweckmäßig, weil dann das Wort Zentralpunkt für die Affingeometrie frei wird.

§ 5. Die Striktionskurve. Allgemeiner Fall.

Den allgemeinen Fall bilden die Regelscharen, für die

$$(yy)(y_1 y_1) - (y y_1)^2 \not\equiv 0.$$

Um zum Striktionspunkt zu gelangen, haben wir in (1) zu setzen

$$\bar{x} = x + h x_1, \quad \bar{y} = y + h y_1$$

und lassen h irgendwie gegen Null konvergieren. Das gibt

(2) $$\tau \rightarrow (x_1 y)(y y_1) - (x_1 y_1)(yy) : (yy)(y_1 y_1) - (y y_1)^2.$$

Als Beispiel betrachten wir eine Regelschar auf einem einschaligen Drehhyperboloid

$$x \equiv (\cos u, \ \sin u, \ 0), \qquad y \equiv (\sin u, \ -\cos u, \ 1).$$

Hier folgt sofort $$\tau \rightarrow 0.$$

Die Striktionskurve ist der Kehlkreis.

§ 6. Erster Sonderfall.

Es soll jetzt sein

$$(yy)(y_1 y_1) - (y y_1)^2 \equiv 0, \quad (yy) \not\equiv 0.$$

Alle diese Regelscharen lassen sich leicht angeben. Man darf hier y als Einheitsvektor annehmen. Dann hat man nur auf der Einheitskugel die Minimalkurven zu bestimmen. Diese sind gerade Linien, d. i.

$$\pm y \equiv \left(\frac{1 - cu}{c - u}, \ \frac{i(1 + cu)}{c - u}, \ \frac{-c - u}{c - u} \right),$$

wo c eine Konstante ist. Durch eine Bewegung oder Umlegung kann man dann immer erreichen

$$y \equiv (-u, \ iu, \ -1).$$

Diese Regelscharen liegen in einem speziellen Gewinde, dessen singuläre Gerade uneigentlich und zwar eine Tangente des absoluten Kegelschnittes ist.

Auszuschließen sind aber nach § 4 diejenigen Regelscharen, die ganz in einer Minimalebene durch die singuläre Gewindegerade liegen, d. i. der Vektor x ist noch an die Bedingung gebunden ($[y y_1] = -i y_1$)

$$(x_1 y_1) \not\equiv 0.$$

Dann ergibt sich aus (1) für den Striktionspunkt

$$\tau \longrightarrow \infty.$$

Für diese Regelscharen ist die singuläre Gewindegerade die (doppelt zählende, uneigentliche) Striktionskurve.

§ 7. Zweiter Sonderfall.

Es sei jetzt

$$(yy)(y_1y_1) - (yy_1)^2 \equiv 0, \quad (yy) \equiv 0, \quad (x_1y) \not\equiv 0.$$

Diese Regelscharen liegen auf *windschiefen* Mongeschen Flächen, d. i. Flächen, die eine Schar von Minimalgeraden enthalten, *ohne Tangentenflächen von Minimalkurven oder Minimalkegel zu sein.* Durch § 3 sind ferner schon die Minimalzylinder ausgeschlossen.

Auch diese Regelscharen lassen sich sämtlich angeben[1])

(3)
$$x \equiv \langle \sin u\,(p_1 + f), \quad -\cos u\,(p_1 + f), \quad ip \rangle,$$
$$y \equiv \langle \quad \cos u, \quad \sin u, \quad i \rangle,$$

wo die in $\{u\}$ regulären Funktionen $p(u)$ und $f(u)$ nur der einen Bedingung unterliegen

$$f \not\equiv 0.$$

Hier versagt die Formel (2).[2]) *Man muß also in* (1) *zu den Gliedern zweiter Ordnung übergehen.* Wegen $(y_1y_1) \equiv 1$, $(x_1y) \equiv f \not\equiv 0$ wird dann

$$\tau \longrightarrow \infty.$$

Für jede windschiefe Mongesche Regelschar wird die Striktionskurve zum absoluten Kegelschnitt.

Damit erhält also auch jede Kugel von nichtverschwindendem Radius eine Striktionskurve, nämlich den absoluten Kegelschnitt.

Die gemeinsame Normale zwischen den beiden Erzeugenden u und $\bar{u}$ läßt sich für $\bar{u} - u \not\equiv 0 \bmod \pi$ so darstellen:

$$x \equiv \left\langle \frac{\bar{p}\sin u - p\sin\bar{u}}{\sin(\bar{u} - u)}, \quad \frac{-\bar{p}\cos u + p\cos\bar{u}}{\sin(\bar{u} - u)}, \quad 0 \right\rangle,$$
$$y \equiv \langle -i(\sin u - \sin\bar{u}), \quad i(\cos u - \cos\bar{u}), \quad -\sin(\bar{u} - u) \rangle.$$

Dabei ist $\bar{p}$ für $p(\bar{u})$ gesetzt. Für $\bar{u} \longrightarrow u$ erhält man bei Beachtung der Elastizität des Richtungsvektors

$$x \equiv \langle p_1 \sin u - p\cos u, \quad -p_1\cos u - p\sin u, \quad 0 \rangle,$$
$$y \equiv \langle \quad \cos u, \quad \sin u, \quad i \rangle.$$

Die (eigentliche) Striktionsgerade für eine Erzeugende einer windschiefen Mongeschen Schar ist eine zu ihr doppelt parallele Isotrope (d. i. sie hat mit ihr auch noch die Minimalebene gemeinsam).

Bemerkenswert ist, daß die Funktion $f(u)$ ganz herausgefallen ist. Damit verträgt sich aber, daß die Striktionsgerade mit ihrer Erzeugenden

---

1) Deutsche Math.-Ver. 22 (1913), S. 235.

2) Weil (2) unter der unbestimmten Form 0 : 0 erscheint, hat man behauptet, auch der Striktionspunkt werde unbestimmt.

dort zusammenfällt, wo $f(u)$ verschwindet. Es braucht das also niemals einzutreten, höchstens kommt es an abzählbar vielen Stellen vor; aber auch diese Erzeugenden haben, wie wir bereits wissen, einen *bestimmten* Striktionspunkt.

Man kann die letzte Darstellung der Striktionsgeraden noch etwas vereinfachen:

$$x \equiv \langle p_1 \sin u, \quad -p_1 \cos u, \quad ip\rangle, \quad y \equiv \langle \cos u, \quad \sin u, \quad i\rangle.$$

Durch Vergleichung mit (3) folgt dann:

Die Striktionsschar einer windschiefen Mongeschen Schar besteht aus den Tangenten einer krummen Minimalkurve oder aus den Erzeugenden eines Minimalkegels.

Diese Minimalkurve

$$x \equiv \langle p_1 \sin u + p_2 \cos u, \quad -p_1 \cos u + p_2 \sin u, \quad i(p + p_2)\rangle$$

artet nämlich für $p_3 + p_1 \equiv 0$ in einen Punkt aus. Die zugehörige Mongesche Schar hat dann ihre Erzeugenden in der Kongruenz aller erzeugenden Geraden eines Büschels konzentrischer Kugeln.

Die Striktionsregelschar einer Kugel ist ihr Asymptotenkegel.

§ 8. Dritter Sonderfall.

Sei jetzt

$$(yy)(y_1 y_1) - (yy_1)^2 \equiv 0, \quad (yy) \equiv 0, \quad (x_1 y) \equiv 0.$$

Das gibt die Minimalkegel und die Tangentenflächen der Minimalkurven. Man erhält sie alle, wenn man in (3) setzt $f(u) \equiv 0$.

Um den Striktionspunkt zu finden, muß man jetzt in (1) zu den Gliedern der dritten Ordnung fortschreiten. Das ergibt dann

$$\tau \longrightarrow p_2.$$

Für die Minimalkegel $(p_3 + p_1 \equiv 0)$ fällt der Striktionspunkt in den Scheitel; *bei den Tangentenscharen der Minimalkurven fällt die Striktionslinie mit der Gratlinie zusammen.*

Trotzdem gilt:

Bei den Minimalkegeln und den Tangentenscharen der Minimalkurven ist jede Erzeugende ihre eigene Striktionsgerade.

§ 9. Nochmals das Drehhyperboloid.

Statt der Darstellung in § 5 nehmen wir jetzt eine andere

$$x \equiv \left\langle \frac{t-i}{t+i}, \quad -i\frac{t-i}{t+i}, \quad i \right\rangle, \quad y \equiv \langle -2t, \quad 1-t^2, \quad 1+t^2\rangle,$$

die jetzt auch die beiden Minimalerzeugenden enthält.

Wohlverstanden, es ist dieselbe Regelschar wie damals, nicht etwa die komplementäre, hat also ∞^1 reelle Gerade. Hier hat man, wenn die Indizes Differentiation jetzt nach t bedeuten

$$(x_1 y) \equiv -2, \quad (x_1 y_1) \equiv \frac{-4}{(t+i)}, \quad (yy) \equiv 2(1+t^2)^2, \quad (y y_1) \equiv 4t(1+t^2).$$

Für den Striktionspunkt auf der Erzeugenden t wird daher nach (2)

$$\tau \longrightarrow -i : (1+t^2).$$

Für die Minimalerzeugende $t = i$ wird also $\tau \longrightarrow \infty$.

Der Striktionspunkt auf dieser Minimalerzeugenden ist also keineswegs unbestimmt; er ist der uneigentliche Punkt der Erzeugenden.

Betrachten wir noch zum Überfluß *alle* gemeinsamen Normalen für diese Erzeugende

$$x = (0, 0, i), \quad y = (-2i, 2, 0).$$

Nach (1) erhält man für ihre Fußpunkte

$$\tau = +\frac{3}{2} i \frac{t+i}{t-i},$$

und für $t \longrightarrow i$ ergibt sich für den Striktionspunkt dasselbe, wie vorhin.

Natürlich gilt das auch für die zweite Minimalerzeugende der Regelschar ($t = -i$); bei deren Betrachtung wird man zweckmäßig noch einen Parameterwechsel vornehmen.

Es gilt also, entgegengesetzt zu anders lautenden Behauptungen, der schlichte Satz:

Die Striktionskurve des einschaligen Drehhyperboloides ist ein Kreis.

Unverständlich sind uns Behauptungen wie die folgenden[1]):

„Besitzt eine algebraische Regelfläche an einer Stelle n benachbarte, jedoch zueinander windschiefe Minimalerzeugende, so gehören $n-1$ derselben in ihrem ganzen Verlauf zur Striktionslinie der Fläche."

„Besitzt eine algebraische Regelfläche an einer Stelle zwei benachbarte sich schneidende Minimalerzeugende, so gehören diese in ihrem ganzen Verlauf zur Striktionslinie der Fläche."

§ 10. Eine vermutliche Fehlerquelle.

In der Literatur benutzt man fast durchweg folgende Konstruktion des Striktionspunktes.

Der absolute Pol der Tangente an die uneigentliche Kurve der Regelfläche im uneigentlichen Punkte der Erzeugenden u wird mit dieser Erzeugenden durch eine Ebene verbunden. Diese berührt die Regelfläche, und der Berührungspunkt ist der gesuchte Striktionspunkt.

1) Wiener Akad. Ber. Abt. IIa. Bd. 127 (1918), S. 18. 19.

Das ist ja lediglich eine Umschreibung der ersten Chaslesschen Definition. Sie sagt aus, daß man den Berührungspunkt sucht von der Ebene durch die Erzeugende $\{x, y\}$, die den Normalvektor $[y[y y_1]]$ besitzt.

Danach scheiden die Tangentenflächen aus, wo dieser Vektor vorhanden ist, wo aber jede Tangentialebene längs der ganzen Erzeugenden berührt. Ein Mittel, aus allen algebraischen Regelflächen diese auszuscheiden, haben wir nicht. Das müßten wir aber haben, um bei den ferneren Untersuchungen, die sich auf das — bekanntlich ebenfalls problematische — Prinzip von der Erhaltung der Anzahl stützen, die Reichweite jeder Behauptung zu erkennen. Hier berührt die Hilfsebene nicht; es gäbe also (i. a.) nirgends einen Striktionspunkt.

Nicht ganz so ist es bei den Mongeschen Scharen. Dort ist der fragliche Vektor überall der Nullvektor, so daß schon die Ebene unbestimmt wird. Hier müßte man von einer Striktionsfläche reden.

Der fragliche Vektor kann weiterhin an einer abzählbaren Menge von Stellen, die sich nirgends in $\{u\}$ häufen, zum Nullvektor werden. Hier hat man geschlossen, es würde auch der Striktionspunkt unbestimmt, die ganze Erzeugende gehöre zur Striktionskurve. Der Schluß ist falsch.

Man durfte nur so schließen: *Also versagt die Konstruktion.*

Denn erklärt man den zu einem Punkte in bezug auf einen runden Kreis inversen Punkt mit Hilfe der Tangenten usw., so versagt diese Konstruktion für solche Kreise, die in gerade Linien ausarten, und doch existiert auch hier der inverse Punkt.

§ 11. Regelflächen zweiter Ordnung.

Es will so scheinen, als ob der Fehler noch an einer andern Stelle seinen Ursprung hat. Betrachten wir die singularitätenfreien Flächen zweiter Ordnung

$$a_0^2 \xi_0^2 + a_1^2 \xi_1^2 + a_2^2 \xi_2^2 + a_3^2 \xi_3^2 = 0 \qquad (a_0 a_1 a_2 a_3 \neq 0).$$

Die ξ sollen homogene Punktkoordinaten sein (absoluter Kegelschnitt $\xi_0 = 0$, $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 0$). Auf dieser Fläche betrachten wir die Regelschar

$$x \equiv \left\{\frac{a_0}{a_1} \cdot \frac{i(1+t^2)}{2t},\ \frac{-a_0}{a_2} \cdot \frac{1-t^2}{2t},\ 0\right\}, \quad y \equiv \left\{\frac{1-t^2}{a_1},\ \frac{i(1+t^2)}{a_2},\ \frac{-2t}{a_3}\right\}.$$

Für $(a_2^2 - a_3^2)(a_3^2 - a_1^2)(a_1^2 - a_2^2) \neq 0$ ergibt sich die Striktionskurve nach (2)

$$(4) \qquad \begin{aligned} \xi_0 &= a_1 a_2 a_3 \{\langle a_1(1-t^2)\rangle^2 + \langle a_2 i(1+t^2)\rangle^2 + (-2 a_3 t\rangle^2), \\ \xi_1 &= a_0 a_2 a_3 (a_2^2 - a_3^2) \cdot i(1+t^2) \cdot (-2t), \\ \xi_2 &= a_0 a_3 a_1 (a_3^2 - a_1^2) \cdot (-2t) \cdot (1-t^2), \\ \xi_3 &= a_0 a_1 a_2 (a_1^2 - a_2^2) \cdot (1-t^2) \cdot i(1+t^2). \end{aligned}$$

Sie bildet einen partiellen Durchschnitt der Fläche mit dem bereits von Chasles angegebenen Kegel vierter Ordnung

$$a_2^2 a_3^2 (a_2^2 - a_3^2)^2 \xi_2^2 \xi_3^2 + a_3^2 a_1^2 (a_3^2 - a_1^2)^2 \xi_3^2 \xi_1^2 + a_1^2 a_2^2 (a_1^2 - a_2^2)^2 \xi_1^2 \xi_2^2 = 0.$$

Den totalen Durchschnitt erhält man, wenn man noch die Striktionskurve der komplementären Schar hinzunimmt; in (4) ist das Vorzeichen von ξ_0 abzuändern.

Soweit ist alles in Ordnung. Jetzt werde $a_1 = a_2 + a_3$.

Dann wird der Kegel wirklich reduzibel

$$\xi_3^2 (\xi_1^2 + \xi_2^2) = 0.$$

Daß jetzt nicht ξ_3, sondern ξ_3^2 auftritt, ist plausibel, weil ja die Striktionskurve der komplementären Schar mitgeführt wird. Außerdem müssen sich die beiden Faktoren $\xi_1 \pm i \xi_2$ auf die beiden Scharen verteilen und liefern tatsächlich die vier Minimalerzeugenden.

Aber die gehören nicht zur Striktionskurve; denn die Parameterdarstellung (4) der Striktionskurve wird jetzt im Einklang mit § 5, § 9

$$\xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = -\frac{2t}{a_0} : -\frac{i}{a_1}(1 + t^2) : \frac{1}{a_1}(1 - t^2) : 0,$$

und man erkennt, daß das Eliminationsresultat einfach $\xi_3 = 0$ heißt.

Die Übereinstimmung zwischen Parameterdarstellung und Eliminationsresultat, die im allgemeinen Falle stattfindet — hier tut sie es noch nicht einmal —, *braucht im speziellen Falle nicht erhalten zu bleiben.*

Das einfachste Beispiel dieser Art ist wohl das folgende:

$$x = \frac{pt^2}{2}, \quad y = pt \quad \text{und} \quad y^2 - 2px = 0$$

stimmen für $p \neq 0$ überein; für $p = 0$ wird aber links ein Punkt geliefert, rechts eine doppelt zählende Gerade.

Ist endlich $a_1 = a_2 = a_3$, so geht der Kegel gänzlich verloren. Aber auch die Parameterdarstellung (4), *weil* (2) *nicht mehr angewandt werden darf.* Trotzdem existiert die Striktionskurve. Man sieht, daß man beim Arbeiten mit algebraischen Regelflächen gar nicht vorsichtig genug sein kann.

II.

§ 12. Die Regelscharen mit vorgegebener Striktionskurve.

Wir geben jetzt die analytische Kurve $x \equiv x(u)$ und stellen die Aufgabe, alle Regelscharen zu ermitteln, die sie als Striktionskurve besitzen.

Aus § 7 wissen wir, daß die Mongeschen Scharen ausscheiden. Sollte $x \equiv x(u)$ eine Minimalkurve sein, so wissen wir bereits aus § 8,

daß ihre Tangentenschar der Aufgabe genügt; von dieser darf also im folgenden abgesehen werden, d. i. der elastische Vektor $y \equiv y(u)$ darf so normiert werden, daß $(yy) \equiv 1$ wird. Da der Sonderfall von § 6 ausscheidet, ist $(y_1 y_1) \not\equiv 0$. Damit ist die Formel (2) anwendbar, und man hat noch $(x_1 y_1) \equiv 0$ zu erfüllen.

Es ist also das System zu lösen

(5) $$(yy) \equiv 1, \quad (x_1 y_1) \equiv 0, \quad (y_1 y_1) \not\equiv 0.$$

§ 13. Die Striktionskurve ist eine reguläre Raumkurve oder eine krumme Kurve in einer anisotropen Ebene.

Sei u ihre Bogenlänge, R der Krümmungsradius und α, β, γ die Einheitsvektoren auf Tangente, Hauptnormale und Binormale. Dann wird

$$y \equiv \sin\varphi \cdot \alpha + \cos\varphi \{R\varphi_1 \cdot \beta + \sqrt{1 - R^2\varphi_1^2} \cdot \gamma\},$$

wo die in $\{u\}$ reguläre Funktion $\varphi \equiv \varphi(u)$ beliebig gewählt werden darf. Indessen erhält man für

$$\varphi \equiv \arcsin(c\alpha),$$

wo c ein beliebiger konstanter Einheitsvektor ist, alle anisotropen Zylinder durch die Kurve.

Im allgemeinen wird aber die Kurve $x \equiv x(u)$ nicht auf die Bogenlänge bezogen sein. Dann stellen sich die gesuchten Regelscharen so dar[1]):

$$y \equiv Ax_1 + Bx_2 + C[x_1 x_2] \qquad \text{für}$$

$$\sqrt{x_1 x_1}\, A \equiv \sin\varphi - \frac{(x_1 x_1)(x_1 x_2)}{(x_1 x_2 \mid x_1 x_2)}\varphi_1 \cos\varphi, \quad \sqrt{x_1 x_1}\, B \equiv \frac{(x_1 x_1)^2}{(x_1 x_2 \mid x_1 x_2)}\varphi_1 \cos\varphi,$$

$$(x_1 x_2 \mid x_1 x_2)\, C = \sqrt{(x_1 x_2 \mid x_1 x_2) - (x_1 x_1)^2 \varphi_1^2}\, \cos\varphi.$$

§ 14. Die Striktionskurve ist eine krumme Minimalkurve.

Nach § 8 ist sie Striktionskurve für ihre Tangentenschar, und es sind nur noch die sonstigen Regelscharen aufzusuchen. Sei

$$x \equiv \left\{ i\left(f - f_1 u - f_2\left(\frac{1-u^2}{2}\right)\right),\ f - f_1 u + f_2\left(\frac{1+u^2}{2}\right),\ i(f_1 - f_2 u) \right\} \quad f_3 \not\equiv 0.$$

Jede unebene Minimalkurve ist Parallelkurve einer speziellen algebraischen Minimalkurve dritter Ordnung

$$x \equiv \left\{ -\frac{iu}{2} + \frac{iu^3}{6},\ \frac{u}{2} + \frac{u^3}{6},\ -\frac{iu^2}{2} \right\}.$$

1) $(xy \mid zt) = (xz)(yt) - (xt)(yz)$.

Bei dieser, von der üblichen nur geringfügig abweichenden Darstellung der Minimalkurve kann der Ausdruck

$$\lambda = \int \sqrt{f_3}\, du$$

— im wesentlichen der von den Herren Vessiot und Study eingeführte natürliche Parameter — als Affinlänge erklärt werden, *während der Parameter u die Affinlänge der speziellen Parallelkurve ist.* Daß die metrischen Invarianten der Minimalkurve dann im wesentlichen Affininvarianten sind, ist mittlerweile von Herrn Wellstein veröffentlicht worden.[1])

Sei v der veränderliche Vektor

$$v \equiv \left\{ -\frac{i}{2}(1-u^2),\ \ \frac{1}{2}(1+u^2),\ \ -iu \right\}.$$

Dann lautet unsere Darstellung der Minimalkurve so

$$x \equiv f_2 v - f_1 v_1 + f v_2,$$

und die allgemeinste Regelschar, die sie als Striktionskurve besitzt, ergibt sich aus

$$y \equiv \frac{1}{2}\left\{ \frac{f_3^2 + \varphi_1^2}{f_3 \varphi} + \frac{f_4^2}{f_3^3}\varphi - \frac{2 f_4 \varphi_1}{f_3^2} \right\} v + \left\{ \frac{f_4 \varphi - f_3 \varphi_1}{f_3^2} \right\} v_1 + \frac{\varphi}{f_3} v_2.$$

Ist die Minimalkurve nicht in der speziellen Darstellung gegeben, so hat man dagegen

$$y \equiv A x_1 + B x_2 + C x_3$$

für

$$2A \equiv \frac{(x_2 x_3) - \varphi_1^2}{(x_2 x_2)\varphi} - \frac{(x_2 x_3 \mid x_2 x_3)}{(x_2 x_2)^3}\varphi, \quad B = \frac{(x_2 x_2)\varphi_1 + (x_2 x_3)\varphi}{(x_2 x_2)^2},$$

$$C = -\frac{\varphi}{(x_2 x_2)}.$$

Die in $\{u\}$ reguläre Funktion $\varphi \equiv \varphi(u) \not\equiv 0$ kann beliebig gewählt werden; aber für

$$\varphi \equiv (c x_1),$$

wo c ein konstanter Einheitsvektor ist, erhält man die anisotropen Zylinder durch die Minimalkurve.

§ 15. Die Striktionskurve sei eine krumme Kurve in einer Minimalebene.

Hier führen wir einen konstanten Hilfsvektor a ein, der der Ungleichung unterliegt

$$(a x_1 x_2) \not\equiv 0.$$

Dadurch läßt sich der Normalvektor p der anderen Minimalebene durch die Kurventangente angeben

$$p \equiv 2\,(a x_1 \mid x_1 x_2)\,[a x_1] - (a x_1 \mid a x_1)\,[x_1 x_2].$$

---

1) Sitzungsber. der Heidelberger Akad. Abt. A. Jahrg. 1924. S. 1—27.

Erklärt man dann noch

$$\sqrt{x_1 x_1} \equiv i(a x_1 \,|\, x_1 x_2) : (a x_1 x_2),$$

so werden die gesuchten Regelscharen dargestellt durch

$$y \equiv \frac{-i\varphi_1 \sin\varphi}{2\,(a x_1 x_2)^2}\, p + \frac{\cos\varphi}{\sqrt{x_1 x_1}}\, x_1 - \frac{i \sin\varphi}{2\,(x_1 x_1)\,\varphi_1}\, [x_1 x_2].$$

Durch
$$\varphi \equiv \operatorname{arc} \cos \left\{ c x_1 : \sqrt{x_1 x_1} \right\}$$
werden anisotrope Zylinder geliefert.

§ 16. Die Striktionskurve sei eine anisotrope gerade Linie.

Hier führen wir einen konstanten Hilfsvektor a ein, der der Ungleichung gehorcht

$$(x_1 x_1)\,(a a) - (x_1 a)^2 \not\equiv 0.$$

Ferner sei $\delta \not\equiv 0 \bmod \pi$ ein konstanter Skalar. Dann wird

$$y \equiv \cos\delta \frac{x_1}{\sqrt{x_1 x_1}}$$
$$+ \frac{\sin\delta}{\sqrt{x_1 x_1}\sqrt{x_1 a \,|\, x_1 a}} \left\{ \cos\varphi \langle (x_1 x_1)\, a - (x_1 a)\, x_1 \rangle + \sin\varphi \sqrt{x_1 x_1}\, [x_1 a] \right\}.$$

Für $\varphi_1 \not\equiv 0$ liegen nichtzylindrische Scharen vor. Sie sind dadurch charakterisiert, daß ihre Erzeugenden mit der (geradlinigen) Striktionskurve den konstanten Winkel δ bilden. Auf den Zylindern $(\varphi_1 \equiv 0)$, die hier Parallelenbüschel sind, ist die Striktionskurve *nicht* erzeugend (vgl. § 18).

Man kann diese Scharen noch anders beschreiben: Der uneigentliche Punkt der Striktionskurve bestimmt ein Büschel von Kurven 2. O. in der uneigentlichen Ebene, die den absoluten Kegelschnitt in zwei getrennten Punkten doppelt berühren.

Man beziehe die Punkte irgendeines irreduziblen dieser Kegelschnitte nach irgendeinem analytischen Gesetz auf die Punkte der Striktionskurve und verbinde zugeordnete Punkte.

§ 17. Die Striktionskurve sei eine isotrope Gerade.

Sei wieder a ein konstanter Hilfsvektor, für den

$$(a a) \neq 0, \quad (a x_1) \not\equiv 0.$$

Ferner sei $\delta \neq 0$ eine Konstante. Dann wird

$$y \equiv \frac{\delta}{\sqrt{a a}}\, a + \frac{\varphi}{(a x_1)}\, [a x_1] + \frac{1}{2\delta} \frac{\sqrt{a a}}{(a x_1)} \langle 1 - \delta^2 + \varphi^2 \rangle\, x_1.$$

Die nichtzylindrischen Scharen ergeben sich für $\varphi_1 \not\equiv 0$. Sie lassen sich ebenso beschreiben, wie die Scharen von § 16; an Stelle der (*zweite* Konstruktion!) den absoluten Kegelschnitt doppelt berührenden Kegelschnitte treten jetzt aber horozyklische, d. i. solche mit *vierpunktiger* Berührung.

§ 18. Die anisotropen Zylinder.

Es ist jetzt die Integration des Systems (5) in § 12 vollständig durchgeführt. In jedem Falle ergaben sich als Lösungen auch die Zylinder durch die vorgelegten Kurven. Daraus entnimmt man die Berechtigung, zu sagen:

Auf einem anisotropen Zylinder darf jede nichterzeugende (vgl. § 16) Kurve als Striktionskurve angesehen werden.

Einen Weg, diesen Satz auf Minimalzylinder auszudehnen, sehen wir nicht.

§ 19. Die Ordnung der Striktionskurve einer algebraischen Regelschar.

Die algebraische Regelfläche

$$\xi_0 \xi_2^{n-1} - \xi_3 \xi_1^{n-1} = 0 \qquad (n \geqq 2)$$

hat die Ordnung n; sie ist nicht Tangentenfläche. Ihre Punkte kann man so darstellen

$$\xi_0 = 1, \quad \xi_1 = v \cos u, \quad \xi_2 = v \sin u, \quad \xi_3 = \operatorname{tg}^{n-1} u,$$

und dadurch ist dann (auch für $n = 2$) eindeutig eine Regelschar bestimmt, deren Striktionskurve die z-Achse $\xi_1 = \xi_2 = 0$ ist. Unter Berücksichtigung von § 18 kann man daher sagen:

Es gibt algebraische (windschiefe, reelle!) Regelscharen beliebig hoher Ordnung, deren Striktionskurve eine (reelle, anisotrope) gerade Linie, also von erster Ordnung ist.

Es scheint danach der Zusammenhang zwischen der Ordnung einer algebraischen Regelfläche und der ihrer Striktionskurve ein verwickelter zu sein, jedenfalls ist er nicht so einfach, wie der Satz von Migotti es meint.

Bonn, 23. September 1926.

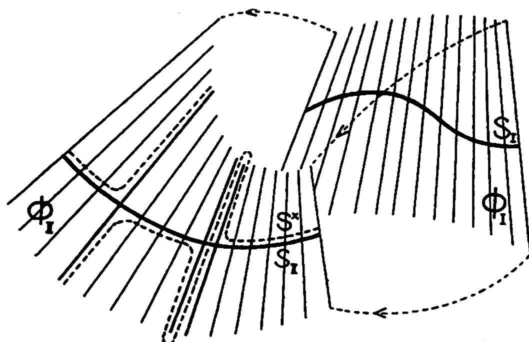
(Eingegangen am 30. 10. 26.)

Bemerkungen zum Vortrag von H. Beck „Über Striktionsgebilde“.[1])

Von Josef Krames in Wien.

Mit 1 Figur im Text.

Die *algebraischen windschiefen Regelflächen* sind hinsichtlich des Verhaltens ihrer Striktionslinie in drei Klassen I, II, III einzuteilen. In die erste Klasse gehören alle Flächen (von der genannten Art), deren Striktionslinie *irreduzibel* ist. Für solche Regelflächen gilt der von R. Sturm[2]) herrührende Satz: *Die Ordnung der Striktionslinie ist gleich dem doppelten Rang der Fläche.*[3]) In die Klasse II sind alle algebraischen windschiefen Flächen einzureihen, deren Striktionslinie in eine *„eigentliche Striktionslinie“ und eine endliche Anzahl von (besonderen) Erzeugenden zerfällt.* Es gilt hierbei der vom Verfasser zuerst ausgesprochene und (streng analytisch) bewiesene Satz: *Die Ordnung der eigentlichen Striktionslinie, vermehrt um die Anzahl der zur Striktionslinie gehörigen Erzeugenden ist ebenfalls gleich dem doppelten Rang der Fläche.*[4]) Der Grundgedanke des diesbezüglichen Existenzbeweises sei im folgenden kurz erläutert.



Ist Φ_{II} eine zur Klasse II gehörige Regelfläche vom Range r und bezeichnet Φ_I eine Fläche der Klasse I vom gleichen Rang, so denke man sich Φ_I durch *allmähliche (stetige) Formänderungen*[5]) in Φ_{II} übergeführt (siehe die Textfigur). Eine derartige Approximation kann natür-

1) Vgl. Jahresber. d. Deutschen Mathem.-Ver., 36. Bd. (1927), 2. Abt., S. *26*.

2) R. Sturm, Über Fußpunktskurven und -flächen, Normalen und Normalebenen. Math. Ann., VI. Bd. (1873), S. 255 ff.; ein weiterer (synthetischer) Beweis für den Satz über die Ordnung der Striktionslinie wurde von J. Majcen (Akademija znanosti i umjetnosti u Zagrebu, Rad 190 (1912), S. 44—53) geliefert.

3) Rang einer Regelfläche = Klasse eines beliebigen ebenen Schnittes.

4) J. Krames, Über das Zerfallen der Striktionslinie von Regelflächen. Sitz.-Ber. der Wiener Akad. der Wissensch., IIa. Bd. 135 (1926), S. 227—269. Diese Arbeit wird in der Folge kurz mit „Z“ bezeichnet.

5) S. „Z“, S. 234 f.

lich auf die verschiedensten Arten verwirklicht werden. Sorgt man aber dafür, daß Φ_I während dieser Formänderung vom Range r bleibt und (abgesehen von der Grenzform Φ_{II}) zur Klasse I gehört (also eine *irreduzible* Striktionslinie besitzt), so zeigt sich stets, daß die Striktionslinie S_I von Φ_I zunächst die in der Figur (gestrichelt) angedeutete Form $S^\times$ annimmt und sich schließlich (mit jeder verlangten Genauigkeit) *an die (eigentliche) Striktionslinie* S_{II} *von* Φ_{II} *und zugleich an bestimmte, diskrete Erzeugende von* Φ_{II} *anschmiegt.* Man kann daher sagen, daß die Striktionslinie von Φ_{II} in der oben genannten Weise zerfällt und erkennt somit, daß das *Sturmsche Gesetz*, sinngemäß erweitert, auch für die Regelflächen der Klasse II gilt. Die zur Striktionslinie gehörigen besondern Erzeugenden einer Regelfläche sind: 1. Alle Minimalerzeugenden, in deren Umgebung wenigstens *eine* weitere Minimalerzeugende vorhanden ist, 2. alle unendlichfernen Erzeugenden und 3. alle Torsallinien, deren Kuspidalpunkt im Unendlichen liegt oder deren Torsalebene eine Minimalebene ist. Jede solche Erzeugende ist hierbei (übereinstimmend mit der Art der Approximation von $S^\times$) mit einer bestimmten „Vielfachheit"[1]) zur Striktionslinie zu zählen. In vier der früheren Arbeiten[2]) des Verfassers wurden zahlreiche (besondre) Regelflächen der Klasse II eingehend untersucht.

Die Klasse III umfaßt endlich alle algebraischen windschiefen Flächen, deren sämtliche Erzeugende *Minimalgerade* sind. Bei diesen Flächen ist jede Erzeugende in ihrem ganzen Verlauf zur Striktionslinie zu zählen. Letztere überdeckt daher die ganze Fläche[3]), ist also gewissermaßen von der Ordnung ∞.

Während die oben für die ersten beiden Klassen angeführten Ergebnisse immer gelten, welche Definition der Striktionslinie[4]) auch zugrunde gelegt sei[5]), trifft dies für die Flächen der Klasse III nicht mehr zu. Definiert man nämlich die Striktionslinie einer Regelfläche Φ in der Weise, daß auf jeder Erzeugenden E jener Punkt zur Striktionslinie gehören soll, der erhalten wird, wenn man zwischen E und einer variablen Er-

1) Siehe „Z", S. 258 ff., Satz 1—12.

2) „Die Regelfläche dritter Ordnung, deren Striktionslinie eine Ellipse ist", Sitz.-Ber. der Wiener Akad. d. Wissensch., Bd. 127 (1918), IIa, S. 563—584; „Die Striktionslinie der Normalenfläche des Torus längs eines Loxodromenkreises", ebenda, Bd. 128 (1919), IIa, S. 623—634; „Die Regelflächen dritter Ordnung mit einem geraden kubischen Kreis als Striktionslinie", ebenda, Bd. 132 (1923), IIa, S. 165—175, und „Die Regelflächen dritter Ordnung, deren unendlichferne Kurve den absoluten Kegelschnitt doppelt oskuliert", ebenda, Bd. 133 (1924), IIa, S. 65—90.

3) Siehe „Z", S. 268.

4) S. weiter unten Bericht über die Literatur der Striktionslinie.

5) $S^\times$ ist nämlich in obigen Überlegungen stets irreduzibel.

zeugenden E_1 von Φ das Gemeinlot Z legt, E_1 nach E konvergieren läßt und die Grenzlage des Schnittpunktes von Z mit E ermittelt[1]), so besitzt jede Fläche der Klasse III eine *irreduzible Striktionslinie*, die dem Sturmschen Gesetz nicht genügt.[2]) Man erkennt hieraus die interessante, aber keineswegs sonderbare Tatsache, daß die verschiedenen, für reguläre Fälle übereinstimmenden Definitionen der Striktionslinie bei den Flächen der Klasse III verschiedene Resultate liefern können. Daraus läßt sich aber nicht schließen, wie H. Beck es zu tun scheint, daß die für die ersten beiden Klassen geltenden Sätze in Frage gestellt seien.

Für abwickelbare Regelflächen gilt der Sturmsche Satz i. a. nicht. Auf solche Flächen kann auch obiger Begriff „Rang“ nicht ohne weiteres übertragen werden. — In „Z“ finden sich ferner einige Bemerkungen über das Zerfallen der Striktionslinie von (beliebigen) *analytischen Regelscharen*.

Die von H. Beck behandelte Aufgabe, alle Regelflächen zu finden, die eine vorgegebene Striktionslinie haben, wurde in voller Allgemeinheit zuerst von R. Hoppe (*„Konstruktion einer Regelfläche aus gegebener Striktionslinie“*, Arch. Math., II. Reihe, 11. Bd. (1892), S. 345 bis 348), für eine ebene oder sphärische Striktionslinie bereits von G. Pirondini (*„Sulle superficie rigate“*, Battaglini G. XXV, 1887) gelöst. Die konstruktive Lösung dieser Aufgabe ergibt sich aber nach einem hübschen Satz von Darboux[3]) am einfachsten in folgender Weise: Man lege durch die gegebene Kurve S eine beliebige Torse T, verebne diese und ziehe durch die Punkte s^v der verebneten Kurve S^v von S parallele Gerade E^v von beliebiger Richtung; wird hierauf T in die ursprüngliche Lage gebracht, wobei die E^v in den zu den s^v gehörigen Ebenen von T festzuhalten sind, so ist S die Striktionslinie der von den neuen Lagen der E^v gebildeten Regelfläche.

Da, wie es scheint, die die Striktionslinie behandelnde Literatur wenig bekannt ist, dürften noch nachstehende Bemerkungen von einigem Interesse sein.

Der Begriff der Striktionslinie stammt von G. Monge. In seiner *„Géométrie descriptive“* vom Jahre 1811 findet sich in dem von J. N. Hachette

1) Vgl. z. B. K. Zindler, Liniengeometrie II (1906), S. 1.

2) Diese Kurve ist nämlich (nach H. Beck) der *absolute Kegelschnitt*. Letzteres folgt auch aus „Z“, S. 259, Satz 1 (oder S. 267, Satz 11).

3) Siehe S. 112, letzter Absatz. Vgl. auch Schell-Salkowski, Theorie der Kurven doppelter Krümmung. 3. Aufl. (1914), S. 83.

verfaßten „Supplément“ auf S. 4 folgende Definition der Striktionslinie: „... Deux droites consécutives de la surface gauche sont coupées par une troisième droite qui leur est perpendiculaire, et les pieds de ces perpendiculaires forment sur cette surface, une courbe remarquable, qu'on peut appeler *courbe de striction* ...“, und dies ist wohl die erste Stelle, wo diese Kurve genannt wird. Daß diese Definition von Monge selbst herrührt und nicht von Hachette, bezeugt S. F. Lacroix (der zugleich mit Monge an der Pariser „École Polytechnique“ als Professor wirkte) in seinem „Traité du calcul différentiel et du calcul intégral“, t. 3, Paris 1819, S. 666. In diesem Werk (S. 667—668) wird auch dargelegt, wie die Gleichungen der Striktionslinie einer (allgemeinen) Regelfläche zu berechnen sind. In den Büchern Monge, „Application de l'analyse à la géométrie II“, Paris 1809 (S. 26) und L. L. Vallée, „Traité de la géométrie descriptive“, Paris 1819 (S. 81) wird der Begriff der Striktionslinie bloß für spezielle Flächen (gerade Konoide) kurz erklärt.

Eingehendere Untersuchungen über die genannte Kurve finden sich erst in den nachfolgenden Arbeiten: M. Chasles, „*Sur quelques propriétés générales des surfaces gauches*“, Liouville J. II, 1837 und „*Mémoire sur les surfaces engendrées par une ligne droite, particulièrement sur l'hyperboloïde, le paraboloïde et le cône du second degré*“, Corr. math. (Quetelet) XI, 1839; E. Catalan, „*Mémoire sur les surfaces gauches à plan directeur*“, J. éc. pol., Cah. 29, 1843; A. Barré de Saint-Venant, „*Mémoire sur les lignes courbes non planes*“, J. éc. pol., Cah. 30, 1845[1]); O. Bonnet, „*Mémoire sur la théorie générale des surfaces*“, J. éc. pol., Cah. 32, 1848 und „*Notes sur la théorie des surfaces reglées*“, C. R. 46, 1858; J. L. F. Bertrand, „*Mémoire sur la théorie des courbes à double courbure*“, Liouville J. XV, 1850 und endlich E. Bour, „*Théorie de la déformation des surfaces*“, J. éc. pol., Cah. 39, 1862. Von diesen Arbeiten bildete insbesondere die *zweite von Chasles* die Grundlage für viele spätere Untersuchungen. In dieser Abhandlung werden zunächst der fundamentale Satz über die *projektive Beziehung* zwischen den durch eine Erzeugende einer windschiefen Fläche gehenden Tangentialebenen und deren Berührungspunkten[2]), sowie der Satz, daß die Striktionsregelfläche der Striktions-

1) Diese Arbeit enthält die berühmten drei Fragestellungen (S. 48), die restlos zuerst von Bertrand (a. a. O.) beantwortet wurden.

2) J. N. Hachette erkannte bereits, daß zwei Regelflächen, die sich in drei Punkten einer gemeinsamen Erzeugenden berühren, in allen Punkten dieser Erzeugenden dieselben Tangentialebenen besitzen. Siehe Suppléments aux Leçons de Géométrie descriptive par G. Monge, Paris 1799 und Corr. sur l'école polyt. t. II*, p. 18, sowie auch Lacroix, a. a. O., S. 669.

regelfläche einer Regelfläche[1]) i. a. mit letzterer identisch ist, abgeleitet. Ferner wird die Striktionslinie als Ort der Zentralpunkte jener auf allen Erzeugenden befindlichen Involutionen definiert, in deren Punktepaaren die Fläche normale Tangentialebenen besitzt, und der Begriff *„Verteilungsparameter“* (in neuester Zeit „Drall“ genannt[2])) eingeführt. Weiters wird gezeigt, daß die Striktionslinie einer Regelfläche zugleich auch der Ort der *Scheitel* jener (gleichseitigen) hyperbol. Paraboloide ist, die von den Flächennormalen in den Punkten jeder Erzeugenden gebildet werden. Schließlich werden auch die Striktionslinien *der beiden Scharen eines einschaligen Hyperboloides* rechnerisch ermittelt. Chasles hält aber diese Kurven (4. O., 2. Art) für eine einheitliche Kurve 8. O. Diesen Irrtum hat später A. Migotti in seiner Arbeit *„Über die Strictionslinie des Hyperboloides als rationale Raumkurve vierter Ordnung“*, Wiener Ber. Bd. 80, II (1879) richtig gestellt.

Weitere Untersuchungen über diese Kurve finden sich in: de la Gournerie, *„Traité de géométrie descriptive“* II, 1880, S. 193f.; Th. Schmid, *„Über die Strictionslinie des Hyperboloides als Erzeugnis mehrdeutiger Gebilde“*, Wiener Ber. 84, IIa (1881); A. Adler, *„Über die Striktionslinien der Regelflächen zweiten und dritten Grades“*, Wiener Ber. 85, II (1882); R. Mehmke, *„Über die Striktionslinien des einschaligen Hyperboloids“*, Math.-naturw. Mitteil., Stuttgart 1904; Rohn-Papperitz, *„Lehrbuch der darstellenden Geometrie“*, 3. Bd., 1906 und O. Danzer, *„Einfache Konstruktionen für metrisch spezielle Raumkurven vierter Ordnung zweiter Art“*, Wiener Ber., Bd. 122, IIa (1913). Die letzte Arbeit enthält den hübschen Satz: *„Die Striktionslinien des einmanteligen Hyperboloides bilden den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Strecken, die auf den Erzeugenden durch die Berührungskegelschnitte der dem Hyperboloid umschriebenen Drehzylinder ausgeschnitten werden“*. Diesen Satz hat später E. Müller (Wien) auf anderem Weg bewiesen, wobei er folgende Definition der Striktionslinie zugrunde legte[3]): *„Ist M die einer Regelfläche Φ umschriebene Minimaltorse und bezeichnet B die Berührungskurve von M und Φ, so bilden die Mittelpunkte der von B auf den Erzeugenden von Φ ausgeschnittenen Strecken die Striktionslinie von Φ“* und damit stellte er den Anschluß an die inhaltsreiche Arbeit *„Études*

---

1) Striktionsregelfläche = Gesamtheit der Gemeinlote von benachbarten Erzeugenden, nach E. Study, das *„Striktionsband“* der gegebenen Fläche; vgl. Study, *Geometrie der Dynamen*, 1903, S. 303f.

2) W. Blaschke, *Differentialgeometrie* I (Berlin 1921), S. 194.

3) E. Müller hat hierüber in Sondervorlesungen an der Wiener Technischen Hochschule wiederholt vorgetragen und auch den Verfasser dieser Zeilen auf die meisten der hier angeführten Arbeiten hingewiesen.

des éllassoides“ von A. Ribaucour (Paris 1880) her. In dieser wird unter vielem anderen gezeigt, daß die Striktionslinien aller Regelflächen, die in einer „*isotropen Kongruenz*“[1]) enthalten sind, eine Fläche, nämlich die „*Mittenfläche*“ dieser Kongruenz, erfüllen.

Eine weitere, von obigen Definitionen abweichende, *kinematische Erzeugungsweise* der Striktionslinie rührt von A. Mannheim („*Cours de géométrie descriptive*“, Paris 1880, S. 252 f.) her. Wohl den hübschesten Satz über die Striktionslinie von allgemeinen Regelflächen hat J. G. Darboux (s. „*Leçons sur la théorie générale des surfaces*“, Paris 1894, IV[e] partie, p. 343—345) gefunden.[2]) Er lautet: „*Umschreibt man einer Regelfläche Φ die längs ihrer Striktionslinie berührende Torse M und verebnet man diese, wobei die Erzeugenden von Φ in den hindurchgehenden Ebenen von M festzuhalten sind, so geht Φ in eine Schar von parallelen Geraden über.*“ Diese Tatsache enthält den wahren geometrischen Grund für den von Bonnet im Jahre 1848 (a. a. O.) mitgeteilten Satz: *Schneidet die Striktionslinie einer Regelfläche alle Erzeugenden unter gleichem Winkel, so ist sie eine geodätische Linie der Fläche* (und hiervon gelten auch beide Umkehrungen) sowie für folgenden Satz (vgl. z. B. Mannheim, „*Principes et développements de géométrie cinématique*, Paris 1894, S. 329): „*Dreht man alle Erzeugenden E_i einer Regelfläche Φ in ihren Zentralebenen um den Zentralpunkt durch einen beliebigen Winkel α, so bilden die neuen Lagen der E_i eine Regelfläche, deren Striktionslinie mit der Striktionslinie von Φ zusammenfällt.*“ Über den Gegenstand des Darbouxschen Satzes handelt auch die in neuerer Zeit erschienene Arbeit: A. Myller, „*Quelques propriétés des Surfaces réglées en liaison avec la théorie du parallelisme de M. Levi-Cività*“, C. R. 174 (1922), S. 997—999 (vgl. Levi-Civita, Rendiconti del Circolo matem. di Palermo, t. XLII, 1917, S. 173). Schließlich sei noch die Arbeit von M. Lelieuvre, „*Sur les lignes de courbure et les lignes asymptotiques des surfaces*“, C. R. 106 (1888), S. 183, erwähnt, in der Regelflächen betrachtet werden, deren Striktionslinie zugleich eine *Krümmungslinie* ist.

1) Für eine solche sind die beiden (konj. imag.) Mäntel einer Minimaltorse die *Brennflächen*.

2) Vgl. oben S. 109, 3. Absatz.

(Eingegangen am 29. 10. 26.)

Über neuere Untersuchungen in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen.[1])

Von Otto Schreier in Hamburg.

Meine Damen und Herren! Die Theorie der kontinuierlichen Gruppen ist — zumindest bei uns in Deutschland — längere Zeit hindurch verhältnismäßig wenig gepflegt worden. Zwar spielen in der neueren Differentialgeometrie verschiedene kontinuierliche Gruppen eine wichtige Rolle, allein die Gruppen werden dort nicht um ihrer selbst willen studiert, sie sind bloß Mittel zum Zweck. Die Gründe dafür, daß das Interesse für kontinuierliche Gruppen so nachgelassen hat, sind verschiedener Art. Einerseits besteht die Ansicht, die Theorie der kontinuierlichen Gruppen genüge nicht in vollem Umfang der in unserer Wissenschaft üblichen Forderung nach Strenge. Andrerseits ist vielfach die Meinung verbreitet, der Problemenkreis dieser Theorie sei durch Lie und seine Schule bereits in solchem Maße ausgeschöpft, daß es auf diesem Gebiet kaum mehr interessante Fragen gibt, deren Untersuchung sich lohnte.

Diese Sachlage scheint sich nun gründlich zu ändern. Eine Reihe von wichtigen Fortschritten sind in den letzten Jahren in unserer Theorie gemacht worden, und eine große Zahl schöner Probleme ist noch zu lösen. Ich komme darum gern der Aufforderung des Herrn Vorsitzenden unserer Vereinigung nach, Ihnen hier über einige von den neuen Methoden und Ergebnissen zu berichten, sowie auf einige der Lösung harrende Probleme hinzuweisen. Wie gesagt, bloß über einen Teil der neueren Untersuchungen will ich Ihnen hier berichten; denn die Theorie der kontinuierlichen Gruppen umfaßt so weit auseinanderliegende Gebiete, daß es kaum möglich erscheint, im Rahmen eines kurzen Vortrags von ihnen allen zu sprechen. Die Richtung der Theorie, über die ich Ihnen referieren werde, läßt sich etwa folgendermaßen beschreiben: Es handelt sich um Fragestellungen, die von der speziellen Auffassung der Gruppenelemente, etwa als Punkt- oder Berührungstransformationen, unabhängig sind, vielmehr an die innere Struktur der Gruppe anknüpfen und demnach Eigenschaften der zugrunde liegenden abstrakten Gruppe

1) Bericht, der Deutschen Mathematiker-Vereinigung erstattet am 22. September 1926 in Düsseldorf.

betreffen. Oder in der Lieschen Sprache ausgedrückt: die Untersuchungen werden sich im Parameterraum und nicht im Transformationsraum abspielen. Ein wesentliches Merkmal dieser Richtung und gleichzeitig vielleicht ihren Hauptreiz erblicke ich in dem Zusammenwirken analytischer, algebraischer und topologischer Betrachtungen.

Trotzdem ist es wohl zweckmäßig, wenn wir zunächst an Transformationsgruppen anknüpfen. Wir denken uns also eine Menge von Transformationen

$$x_i^* = f_i(x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

des x-Raumes gegeben. Die f_i sollen in einem Gebiet des (x, a)-Raums stetige Funktionen ihrer $n + r$ reellen Veränderlichen sein und ebenda eine eindeutige Auflösung nach den x_i besitzen. Für $a_k = a_k^0$ soll die identische Transformation $x_i^* = x_i$ resultieren. Außerdem sollen verschiedenen Werten der Parameter a in der Umgebung von a^0 auch verschiedene Transformationen entsprechen. Wenn dann zu je 2 Transformationen unserer Menge die Produkttransformation sinnvoll ist und in der Menge vorkommt, ebenso zu jeder Transformation die inverse, dann wollen wir von einer $r$gliedrigen Gruppe sprechen. Wenn wir dagegen beide Forderungen bloß in einer Umgebung des Parametersystems a^0 stellen, dann wollen wir unsere Menge als $r$gliedrigen Gruppenkeim bezeichnen. Diese Unterscheidung erweist sich aus mehreren Gründen als zweckmäßig. Wir wollen ferner zwei $r$gliedrige Gruppen als gleich bezeichnen, wenn ihre Elemente einander eineindeutig, beiderseits stetig und isomorph zugeordnet werden können. Dagegen wollen wir zwei Gruppenkeime bereits dann als gleich betrachten, wenn eine solche Abbildung in einer, wenn auch noch so kleinen Umgebung der Identität möglich ist.

Nunmehr muß ich an einige von Lies Hauptresultaten erinnern, weil wir von ihnen Gebrauch zu machen haben werden. Unter der Voraussetzung, daß die f_i sogar zweimal stetig differenzierbar sind, beweist Lie, daß jede Transformation eines Gruppenkeims — in der Umgebung der identischen Transformation — in genau einem eingliedrigen Untergruppenkeim enthalten ist. Dieses Resultat ist schon darum so wichtig, weil die eingliedrigen Gruppen (und Gruppenkeime) eine sehr durchsichtige Struktur besitzen. Ob man diesen Satz auch ohne Differenzierbarkeitsannahmen über die f_i beweisen kann, ist ein bis heute noch nicht allgemein gelöstes Problem von Hilbert. Seit L. E. J. Brouwer den Satz für die Gruppen der Geraden und der Ebene bewiesen hat[1]), sind

1) Die Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen, unabhängig von den Axiomen von Lie. Math. Ann. 67 (1909), S. 246 ff.; 69 (1910), S. 181 ff.

eigentlich keine wesentlichen Fortschritte in dieser Hinsicht mehr gemacht worden, trotz mannigfacher Versuche seitens verschiedener Mathematiker. Aber in Anbetracht des großen Aufschwungs, den die Topologie in der letzten Zeit genommen hat, ist vielleicht die Hoffnung nicht ganz unbegründet, das Problem werde doch bald bezwungen werden. — Wir setzen also jetzt die f_i als zweimal stetig differenzierbar voraus. Seien nun

$$x_i^* = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n; t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

die Gleichungen eines eingliedrigen Untergruppenkeims. Fassen wir diese Gleichungen als Beschreibung der Bewegung eines Kontinuums auf, wo t die Zeit bedeutet und so gewählt sei, daß für $t = 0$ gilt $x_i^* = x_i$. Nun betrachten wir das Geschwindigkeitsfeld unserer Bewegung zur Zeit $t = 0$; es sei das Feld des Vektors $v(x)$. Dann sieht man leicht, daß durch $v(x)$ der eingliedrige Keim bereits bestimmt ist und man sagt daher, er werde durch die zu dem Vektorfeld gehörige infinitesimale Operation erzeugt. Die Gesamtheit der infinitesimalen Operationen eines $r$gliedrigen Keimes bildet einen $r$dimensionalen linearen Raum; durch geeignete r unter ihnen läßt jede sich darstellen:

$$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_r u_r$$

mit konstanten Koeffizienten λ, dagegen nicht mehr durch weniger als r unter ihnen. Sind aber umgekehrt r linear unabhängige infinitesimale Operationen $u_1, \ldots, u_r$ gegeben, so erzeugen sie bloß dann einen r-gliedrigen Gruppenkeim, wenn die Jacobischen Klammerausdrücke $[u_i u_j]$ selbst unter den Linearkombinationen der u auftreten, also Gleichungen gelten

$$[u_i u_j] = \sum_{k=1}^{r} c_{ij}^k u_k \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, r)$$

mit konstanten Koeffizienten c_{ij}^k. Die c_{ij}^k bilden einen Tensor im Raum der infinitesimalen Operationen gemäß der Stellung der Indizes. Es gilt nun der wichtige Satz: Zwei Gruppenkeime sind dann und nur dann gleich — im Sinne der früher gegebenen Definition —, wenn ihre Tensoren c_{ij}^k übereinstimmen oder doch durch lineare Transformation ineinander übergeführt werden können. Man darf aber nicht glauben, daß zu jedem Tensor auch Gruppenkeime gehören. Denn zwischen den Klammerausdrücken bestehen gewisse Identitäten:

$$[uv] + [vu] = 0,$$

$$[[uv]w] + [[vw]u] + [[wu]v] = 0,$$

die zu gewissen Gleichungen für die c_{ij}^k führen. Diese Gleichungen sind aber nicht nur notwendig, sondern bereits hinreichend für die Existenz

eines zugehörigen $r$gliedrigen Gruppenkeims. Unter den Gruppen, die zu einem solchen Tensor gehören, gibt es insbesondere auch solche, für die die Funktionen f_i regulär analytisch ausfallen. Es ist daher naturgemäß, die Beschränkung auf reelle Veränderliche fallen zu lassen und die f_i als reguläre Funktionen von $n+r$ komplexen Veränderlichen anzunehmen. Über die infinitesimalen Operationen gilt dann wörtlich dasselbe wie zuvor, man hat bloß für die Koeffizienten λ auch komplexe Werte zuzulassen; demgemäß fällt dann auch der Tensor c^k_{ij} im allgemeinen komplex aus.

Die Bestimmung aller Typen von $r$gliedrigen Gruppenkeimen ist damit auf ein rein algebraisches Problem zurückgeführt. Dieses Problem der Bestimmung der $r$gliedrigen „infinitesimalen Gruppen" steht in einer bemerkenswerten Parallele zu einem anderen algebraischen Problem, der Bestimmung aller Systeme hyperkomplexer Zahlen mit r Basiszahlen. In beiden Fällen handelt es sich um ein System von Elementen v, für die die Operationen $u+v$ und λv für beliebiges komplexes λ definiert sind, derart daß das Gesamtsystem ein lineares Gebilde von r Dimensionen darstellt. Dazu kommt bei den $\left\{\begin{matrix}\text{hyperkomplexen Zahlen}\\ \text{inifitesimalen Gruppen}\end{matrix}\right\}$ die Operation $\left\{\begin{matrix}uv\\ [uv]\end{matrix}\right\}$ mit den Rechenregeln $(uv)w = u(vw)$ bzw. $[uv] + [vu] = 0$ und $[[uv]w] + [[vw]u] + [[wu]v] = 0$. Die vollständige Aufzählung aller Systeme ist beidemal unmöglich. Hingegen ist es in beiden Fällen gelungen, die sogenannten halbeinfachen Systeme vollständig zu ermitteln. Dabei heißt ein System halbeinfach, wenn es kein Teilsystem[1]) $\mathfrak{A}$ gibt, so daß mit a auch au bzw. $[au]$ für jedes u zu $\mathfrak{A}$ gehört, und für je zwei Elemente a, b aus $\mathfrak{A}$ gilt $ab=0$ bzw. $[ab]=0$, es sei denn, daß $\mathfrak{A}$ aus der 0 allein besteht. (Dies bedeutet für hyperkomplexe Zahlen: es soll kein Ideal außer dem Nullideal geben, dessen Quadrat das Nullideal ist; für infinitesimale Gruppen aber: es soll keine eigentliche invariante kommutative Untergruppe existieren.)

Aber während die Bestimmung der halbeinfachen Systeme hyperkomplexer Zahlen heute dank den großen Fortschritten hauptsächlich von L. E. Dickson und J. H. Maclagan-Wedderburn eines der reizvollsten Kapitel der nicht-kommutativen abstrakten Algebra bildet, muß man leider den Weg zur Bestimmung der halbeinfachen infinitesimalen Gruppen trotz aller Verbesserungen, die E. Cartan und H. Weyl an den ursprünglich Killingschen Untersuchungen vorgenommen haben, als recht unschön bezeichnen. Es wäre sicher eine schöne Aufgabe, die

1) Unter Teilsystem ist eine Teilmenge zu verstehen, in der die drei genannten Operationen unbeschränkt ausführbar sind.

Bestimmung der halbeinfachen Gruppen im Geist der modernen abstrakten Algebra durchzuführen, zumal man von einer solchen Untersuchung auch weitere Ergebnisse erwarten dürfte. Das Killing-Cartansche Ergebnis lautet: Jede halbeinfache Gruppe ist das direkte Produkt von einfachen Gruppen; und diese sind leicht zu überblicken: Von 5 Ausnahmsgruppen abgesehen, gehört jede einfache kontinuierliche Gruppe einer der vier großen Klassen an: projektive Gruppe des $\mathfrak{R}_n$, Drehgruppe des $\mathfrak{R}_{2n}$, Drehgruppe des $\mathfrak{R}_{2n+1}$, und Gruppe der linearen Transformationen, die eine schiefsymmetrische Bilinearform invariant lassen.

Wir wenden uns jetzt zur Theorie der Darstellung kontinuierlicher Gruppen und Gruppenkeime durch Gruppen von linearen Transformationen. Eine Darstellung liegt vor, wenn jedem Element X der Gruppe (bzw. des Gruppenkeims) eine quadratische Matrix $A(X)$ gewisser Zeilenzahl in der Weise zugeordnet ist, daß für je zwei Elemente X, Y gilt $A(XY) = A(X)A(Y)$. Es wird dabei nicht gefordert, daß verschiedenen Elementen auch verschiedene Matrizen entsprechen. Man erhält also z. B. eine (triviale) Darstellung für jede Gruppe, wenn man jedem Element die Einheitsmatrix irgend eines Grades zuordnet. Deuten wir die Matrizen $A(X)$ als Matrizen von linearen Transformationen in einem linearen Vektorgebilde, so entspricht also jedem Gruppenelement eine lineare Transformation. Führen wir in unserem linearen Vektorgebilde neue Koordinaten ein, so tritt an Stelle von $A(X)$ die Matrix $A^*(X) = TA(X)T^{-1}$, wo T eine von X unabhängige, nicht-singuläre Matrix bedeutet. Natürlich bilden auch die Matrizen $A^*(X)$ wieder eine Darstellung der vorgelegten Gruppe und, da diese Darstellung geometrisch offenbar nichts Neues bedeutet, so heißt sie äquivalent mit der ursprünglichen Darstellung. Die Fragen, die in der Darstellungstheorie einer Gruppe besonders interessieren, sind etwa folgende: 1. Gibt es überhaupt nichttriviale Darstellungen der gegebenen Gruppe? 2. Aufstellung aller irreduziblen Darstellungen, d. h. der Darstellungen durch solche lineare Transformationen, die in ihrer Gesamtheit kein echtes Teilgebilde des zugrunde liegenden linearen Vektorgebildes invariant lassen. 3. Insbesondere die Bestimmung der Charakteristiken der irreduziblen Darstellungen, d. h. der Spuren $\chi(X)$ der Matrizen $A(X)$. 4. Die Frage nach der vollen Reduzibilität aller Darstellungen, d. h. die Frage, ob zu jeder reduziblen Darstellung das gegebene Vektorgebilde in solche invariante Teilgebilde aufgespalten werden kann, daß in jedem eine irreduzible Darstellung induziert wird. 5. Die Zusammenhänge mit der Invariantentheorie.

Während nun über die Darstellung einer beliebigen kontinuierlichen Gruppe noch so gut wie nichts bekannt ist, lassen sich alle genannten

Fragen für die halbeinfachen Gruppen in weitem Maß beantworten. Wenn wir nur auf die differenzierbaren Darstellungen aus sind, so können wir von den Darstellungen der infinitesimalen Gruppe ausgehen. Es handelt sich dann also darum, jeder infinitesimalen Operation v unserer halbeinfachen Gruppe eine Matrix $A(v)$ zuzuordnen in der Weise, daß 1. $A(v)$ linear von v abhängt und 2. $A([uv]) = A(u)A(v) - A(v)A(u)$. Die durch die Matrizen $A(v)$ repräsentierten linearen infinitesimalen Operationen erzeugen dann eine Darstellung des durch die v erzeugten Gruppenkeims. Die so entstehende kontinuierliche Gruppe linearer Transformationen wird dann allerdings nicht notwendig eine eindeutige Darstellung der Gesamtgruppe ergeben, vielmehr kann die Darstellung mehrdeutig ausfallen; unter allen Umständen aber wird sich die neue Gruppe über der gegebenen unverzweigt ausbreiten. Cartans Hauptergebnisse sind nun folgende: Man wähle in der darzustellenden Gruppe eine möglichst umfassende kommutative Untergruppe aus. Ihre infinitesimalen Operationen seien $h = \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + \cdots + \lambda_n h_n$. Liegt nun eine irreduzible Darstellung in N Dimensionen vor, wobei der infinitesimalen Operation h die Matrix $A(h)$ entspricht, so zeigt es sich, daß man stets N linear unabhängige Vektoren $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_N$ finden kann, die durch die linearen Operationen $A(h)$ in ihrer Richtung ungeändert bleiben. Es gelten also Gleichungen $A(h)\mathfrak{x}_k = \Lambda_k(h) \cdot \mathfrak{x}_k$, wo $\Lambda_k(h)$ eine von h abhängige Zahl ist. Da $A(h)$ linear von h abhängt, gilt dasselbe für die Größen $\Lambda_k(h)$; es sind also Linearformen der λ, die Cartan als Gewichte der Darstellung bezeichnet. Über die Gewichte gelten nun zwei sehr wichtige Sätze: I. Bei geeigneter lexikographischer Anordnung kommt das höchste Gewicht nur einmal unter den $\Lambda_k(h)$ vor und zwei irreduzible Darstellungen mit dem gleichen höchsten Gewicht sind äquivalent. II. Aus dem höchsten Gewicht lassen sich alle übrigen Gewichte durch einen bestimmten Prozeß gewinnen. Diesen Prozeß kann man nach Weyl übrigens viel übersichtlicher als bei Cartan darstellen, indem man noch eine gewisse endliche Gruppe von linearen Transformationen im λ-Raum einführt, die der halbeinfachen Gruppe in bestimmter Weise zugeordnet ist und die Eigenschaft hat, das System der Gewichte nur zu permutieren, es also in seiner Gesamtheit ungeändert läßt. — Endlich hat Cartan auch ein Verfahren angegeben, die sämtlichen irreduziblen Darstellungen einer halbeinfachen Gruppe aufzubauen. Weiter ist man bisher mit Hilfe dieser Untersuchung im kleinen noch nicht gekommen. Insbesondere ist es bisher noch nicht gelungen, die volle Irreduzibilität aller Darstellungen nachzuweisen.

Hier tritt nun ein Verfahren in die Bresche, das Hurwitz für invariantentheoretische Zwecke ersonnen hat und das J. Schur neuerdings

für die Zwecke der Darstellungstheorie ausgebaut und verwertet hat.[1]) Es handelt sich um die Integrationsmethode. Wir betrachten also von jetzt an wirkliche Gruppen, nicht bloß Gruppenkeime. Die Elemente der Gruppe fassen wir als Punkte auf, so daß uns eine $r$gliedrige Gruppe durch eine zusammenhängende unberandete $r$dimensionale Mannigfaltigkeit, die „Gruppenmannigfaltigkeit“, repräsentiert wird. Hurwitz hat nun bemerkt, daß man auf jeder solchen Gruppenmannigfaltigkeit eine natürliche Volumsmessung einführen kann. Man fordere nämlich, daß das Volumen der Punktmenge $\mathfrak{M}$ ungeändert bleiben soll, wenn man ihre sämtlichen Punkte, d. h. Gruppenelemente, mit einem (beliebigen) festen Element von vorn multipliziert: $\mu(\mathfrak{M}) = \mu(T\mathfrak{M})$. Nimmt man dazu noch die selbstverständlichen Forderungen, daß das Volumen nicht negativ und additiv sein soll, so erkennt man, daß $\mu(\mathfrak{M})$ bis auf einen konstanten Eichfaktor im wesentlichen festgelegt ist. Auf Grund dieser Volumsmessung können nun auch Integrale über Teilmengen endlichen Volumens eingeführt werden. Hat insbesondere die ganze Gruppenmannigfaltigkeit endliches Volumen, so kann man über die ganze Gruppe integrieren, und für solche Gruppen liefert Hurwitz mit Leichtigkeit durch sein Verfahren den Nachweis der Endlichkeit des Invariantensystems. Schur hat aber am Beispiel der Gruppe der reellen Drehungen gezeigt, daß die Hurwitzsche Methode viel weiter trägt. Sie gestattet nämlich, einen großen Teil der Frobeniusschen Charakterentheorie auf kontinuierliche Gruppen zu übertragen. Man muß nur immer, anstatt über alle Elemente einer endlichen Gruppe zu summieren, über die kontinuierliche Gruppe integrieren. Insbesondere ergibt sich so auch der Satz von der vollen Reduzibilität.

Weyl ist ez nun gelungen, diese Schurschen Betrachtungen auf alle halbeinfachen Gruppen auszudehnen.[2]) Dabei waren aber einige große Schwierigkeiten zu überwinden. Weyl geht von der sogenannten adjungierten Gruppe aus: Transformieren wir alle Elemente unserer Gruppe mit einem festen Element, $S \to TST^{-1}$, so induziert diese Abbildung, wie man leicht verifiziert, eine lineare Transformation im Raum der infinitesimalen Operationen. Läßt man nun T die Gruppe durchlaufen, so erhält man auf diese Weise eine Darstellung der Gruppe durch lineare

1) Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie. Berl. Ber. 1924, S. 189 ff., 297 ff. u. 346 ff.

2) Das gruppentheoretische Fundament der Tensorrechnung. Gött. Nachr. 1924, S. 218 ff. — Zur Theorie der Darstellung der einfachen kontinuierlichen Gruppen. Berl. Ber. 1924, S. 338 ff. — Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen. Math. Zeitschr. 23 (1925), S. 271 ff.; 24 (1926), S. 328 ff., S. 377 ff. u. S. 789 ff.

Transformationen im Raum der infinitesimalen Operationen. Diese Gruppe heißt nach Lie die adjungierte Gruppe. Sie erweist sich im Fall der halbeinfachen Gruppen als eine im kleinen, also z. B. in der Umgebung des Einheitselements eineindeutige Darstellung der vorgelegten Gruppe $\mathfrak{G}$. Das Problem, alle Darstellungen von $\mathfrak{G}$ zu finden, ist folglich äquivalent mit dem, alle Darstellungen der adjungierten Gruppe $\mathfrak{A}$ zu bestimmen. Die Hurwitzsche Integrationsmethode ist aber zunächst nicht anwendbar, denn $\mathfrak{A}$ hat nicht endliches Volumen. In ähnlicher Lage hatte sich Hurwitz selbst befunden, als er seine Methode auf die Gruppe aller unimodularen linearen Transformationen anwenden wollte: auch diese hat unendliches Volumen. Hurwitz fand folgenden Ausweg: er betrachtete bloß die unitären Transformationen, die linearen Transformationen also, welche die Hermitesche Einheitsform $\sum x_i \bar{x}_i$ in sich transformieren. Diese Gruppe hat endliches Volumen, und für sie ist daher die Integrationsmethode brauchbar. Die so gewonnenen Sätze aber gelten dann, wie Hurwitz zeigt, auch für die ganze Gruppe der unimodularen Transformationen. Durch eine außerordentlich kunstvolle Normierung gelingt es Weyl, einen analogen Ausweg auch bei allen halbeinfachen Gruppen zu finden. Aus der adjungierten Gruppe $\mathfrak{A}$, die dargestellt werden soll und die von r komplexen Parametern abhängt, wird eine Untergruppe $\bar{\mathfrak{A}}$ ausgesondert, die bloß von r reellen Parametern abhängt und endliches Volumen hat.[1]) Andrerseits kann man dann doch die Sätze wieder auf ganz $\mathfrak{A}$ ausdehnen, da $\bar{\mathfrak{A}}$ bloß durch Realitätsbeschränkungen aus $\mathfrak{A}$ hervorgeht. Damit war die Hauptschwierigkeit überwunden.

Nun haben wir uns aber zuvor überlegt, daß wir möglicherweise auch mit mehrdeutigen unverzweigten Darstellungen zu rechnen haben. Sollte es etwa eine unendlichvieldeutige Darstellung von $\bar{\mathfrak{A}}$ geben, so hätte die Gruppenmannigfaltigkeit dieser Darstellung unendliches Volumen, und wir hätten durch die Konstruktion von $\bar{\mathfrak{A}}$ nichts gewonnen. Aber durch eine topologische Untersuchung erhärtet Weyl, daß $\bar{\mathfrak{A}}$ höchstens endlichvieldeutige Darstellungen besitzt. Offenbar kann ja ein unverzweigtes Überlagerungsgebilde über $\bar{\mathfrak{A}}$ höchstens so viele Blätter besitzen, wie die Ordnung der Poincaréschen Fundamentalgruppe von $\bar{\mathfrak{A}}$ beträgt. Und in der Tat kann man auf Grund der Gestalt der Elemente von $\bar{\mathfrak{A}}$ schließen, daß die Fundamentalgruppe von $\bar{\mathfrak{A}}$ endlich ist. Damit ist nun die Anwendbarkeit der Integrationsmethode sichergestellt.

Will man aber explizite Formeln für die Charakteristiken erhalten,

1) Genau genommen ist bloß gezeigt, daß $\bar{\mathfrak{A}}$ eine definite quadratische Form invariant läßt. Daß daraus in der Tat die Endlichkeit des Volumens folgt, bedarf noch eines Beweises.

so braucht man noch den expliziten Ausdruck für das Hurwitzsche Volumselement. Für die Drehgruppe hat Schur diesen Ausdruck durch eine scharfsinnige und komplizierte Rechnung gewonnen. Weyl kommt zu der analog gebauten Formel für beliebige halbeinfache Gruppen durch eine kühne differentielle Überlegung.

Nunmehr möchte ich noch die Hauptergebnisse dieser Untersuchungen angeben und kurz auf den Zusammenhang mit der Invariantentheorie eingehen. Jede Darstellung einer halbeinfachen Gruppe ist voll reduzibel. Die Dimensionszahlen und Charakteristiken der irreduziblen Darstellungen können explizit angegeben werden. Sind $\chi(S)$ und $\chi^*(S)$ Charakteristiken von irreduziblen Darstellungen, so ist

$$\int_{\overline{\mathfrak{A}}} \chi(S)\overline{\chi^*(S)}\,dS = \Omega \text{ oder } 0,$$

je nachdem die beiden Darstellungen äquivalent sind oder nicht. (Ω ist das Gesamtvolumen von $\overline{\mathfrak{A}}$, dS das Hurwitzsche Volumselement.) Ferner bildet die Gesamtheit der Charakteristiken $\chi(S)$ der irreduziblen Darstellungen ein vollständiges Orthogonalsystem in folgendem Sinn[1]): Offenbar ist $\chi(S) = \chi(TST^{-1})$, weil ja die Spur einer Matrix gegen Transformation invariant ist. Ist nun $f(S)$ eine Funktion, die stetig von S abhängt und für die ebenfalls $f(S) = f(TST^{-1})$, so kann man aus den Gleichungen

$$\int_{\overline{\mathfrak{A}}} f(S)\overline{\chi(S)}\,dS = 0 \quad (\text{für alle } \chi)$$

schließen, daß $f(S)$ identisch verschwindet.

Der Zusammenhang mit der Invariantentheorie ergibt sich folgendermaßen: Sei $f(a, x)$ die allgemeine Form $k$ten Grades in n Variablen x. Unterwerfen wir nun die x den Transformationen einer halbeinfachen Gruppe von linearen Transformationen, so erfahren auch die Koeffizienten a lineare Transformationen, die eine Darstellung D_1 der halbeinfachen Gruppe bilden. Ebenso erfahren die Potenzprodukte νten Grades der a eine Darstellung D_ν. Will man nun wissen, wieviel lineare unabhängige Invarianten νten Grades unsere Form gegenüber der zugrunde gelegten Gruppe besitzt, so hat man einfach zu bestimmen, wie oft in der Darstellung D_ν die identische Darstellung auftritt. Das gibt für die gewünschte Anzahl den Ausdruck

$$\frac{1}{\Omega}\int_{\overline{\mathfrak{A}}} \zeta_\nu(S)\,dS,$$

wo $\zeta_\nu(S)$ die Charakteristik von D_ν ist.

1) F. Peter-H. Weyl, Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe. Math. Ann. 97 (1927), S. 737.

Ein besonders übersichtliches Resultat ergibt sich für die Darstellungen der Gruppe der volumstreuen zentrierten Affinitäten des $\mathfrak{R}_n$. Betrachten wir nämlich die Tensoren dieses Raumes von irgendwelcher Stufenzahl und irgendwelchen Symmetrieeigenschaften! Diese Tensoren bilden ihrerseits einen linearen Raum $\mathfrak{R}^*$. Die Affinitäten im $\mathfrak{R}_n$ induzieren nun in $\mathfrak{R}^*$ lineare Transformationen, die eine Darstellung der affinen Gruppe bilden. Es zeigt sich, daß man auf diese Weise alle Darstellungen der vorgelegten Gruppe erhält.

Ich möchte an dieser Stelle erwähnen, daß Herr R. Brauer die Darstellungstheorie der reellen Drehgruppe ungefähr zugleich mit Weyl in seiner Inaugural-Dissertation[1]) entwickelt hat; und zwar ist seine Untersuchung algebraisch in dem Sinn, daß weder infinitesimale Operationen noch die Integrationsmethode herangezogen werden.

Nun möchte ich zum Schluß noch auf eine Fragestellung eingehen. Wir haben hier teils von Gruppenkeimen, teils von Gruppen gesprochen. Da drängt sich doch die Frage auf: In welcher Beziehung stehen denn zwei Gruppen zueinander, die den gleichen Gruppenkeim besitzen, also in einer Umgebung des Einheitselements isomorph sind? Die Frage läßt sich ohne irgendwelche Differenzierbarkeitsannahmen auf rein topologisch-algebraischem Wege beantworten.[2]) Mein Ergebnis lautet: Unter den Gruppen, die zu einem Gruppenkeim gehören, gibt es eine, $\mathfrak{K}$, von folgender Beschaffenheit: Jede Gruppe $\mathfrak{K}^*$ mit dem gleichen Gruppenkeim ist mit einer Faktorgruppe $\mathfrak{K}/\mathfrak{D}$ einstufig isomorph, wobei $\mathfrak{D}$ einen Normalteiler von $\mathfrak{K}$ bedeutet, der in $\mathfrak{K}$ diskret liegt. Jeder solche Normalteiler von $\mathfrak{K}$ besteht aus lauter invarianten Elementen von $\mathfrak{K}$, ist also kommutativ. $\mathfrak{D}$ ist einstufig isomorph mit der Poincaréschen Fundamentalgruppe von $\mathfrak{K}^*$. Es ergibt sich hieraus die Folgerung: Jede Gruppenmannigfaltigkeit besitzt eine kommutative Fundamentalgruppe. Doch ist diese Bedingung nicht hinreichend, damit eine Mannigfaltigkeit als Gruppenmannigfaltigkeit auftreten könne. Für geschlossene Gruppenmannigfaltigkeiten ergibt sich aus einem Fixpunktsatz von Herrn H. Hopf[3]) noch folgende Bedingung: Jede geschlossene Gruppenmannigfaltigkeit besitzt die Eulersche Charakteristik Null. Welchen Bedingungen eine Gruppenmannigfaltigkeit etwa noch unterworfen ist, ist noch nicht entschieden.

1) Über die Darstellung der Drehungsgruppe durch Gruppen linearer Substitutionen. (1925.)

2) O. Schreier, Abstrakte kontinuierliche Gruppen. Hamb. Abh. 4 (1926), S. 15 ff. — Die Verwandtschaft stetiger Gruppen im großen. Hamb. Abh. 5 (1927), S. 233 ff.

3) Vektorfelder in n dimensionalen Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 96 (1926), S. 225 ff., insbesondere S. 244, Satz IIa.

(Eingegangen am 14. 1. 28.)

Die arithmetischen Grundlagen der projektiven Geometrie.

Von Gerhard Schollmeyer in Magdeburg.

Verfolgt man die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten, so ist es unverkennbar, daß ihre reiche Entfaltung nicht möglich gewesen wäre, wenn man nicht seit der Zeit des Descartes die Geometrie und Arithmetik in enge Verbindung gebracht und so ein Gebilde geschaffen hätte, das dem Inhalte nach geometrisch, der Form nach arithmetisch ist, und das seither den Namen analytische Geometrie oder Koordinaten-Geometrie führt.

Diese Methode gestattet es, verwickelte geometrische Beziehungen dadurch bequemer zugänglich zu machen, daß man ihre arithmetischen Äquivalente der rechnerischen Behandlung unterwirft. Andererseits gestattet sie, arithmetische Beziehungen sich geometrisch zu verdeutlichen.

Das 19. Jahrhundert brachte eine Verallgemeinerung des Cartesischen Koordinatenbegriffes, die in innigstem Zusammenhange mit dem Aufkommen der projektiven Geometrie steht. Um nämlich in die geometrischen Sätze gewisse Ausnahmefälle einbeziehen zu können, war man dahin gekommen, den Begriff des Punktes so zu erweitern, daß es auch uneigentliche Punkte gibt, d. h. solche, die sich in der Anschauung nicht mehr als bestimmte Stellen im Raume, sondern als Richtungen darbieten. Das führte dann dazu, an Stelle der Cartesischen Bezugsgrößen für die Koordinaten, nämlich einen eigentlichen Punkt und drei Richtungen, in allgemeinerer Weise vier beliebige (aber nicht in einer Ebene liegende) Punkte zu setzen. So ergab sich das, was man heute homogene Koordinaten im allgemeinsten Sinne des Wortes nennt.

Von ihnen unterscheiden sich die Cartesischen Koordinaten nicht bloß dadurch, daß drei von den Bezugspunkten uneigentlich sind, sondern auch dadurch, daß die vierte Koordinate, also diejenige in bezug auf den eigentlichen Punkt, stets gleich 1 gesetzt wird, so daß ein einzelner Punkt bereits durch Angabe von drei Koordinaten bestimmt ist.

Die Einführung der homogenen Koordinaten geschah, wenn auch unter anderem Namen, durch Möbius, der die charakteristisch projektiven Begriffe verwendete, ohne allerdings die seither üblich gewordene Nomenklatur zu haben.

Im Zusammenhange mit der Entwicklung der homogenen Koordinaten kam Möbius auch auf den Gedanken, die analytische Geometrie des Cartesius dadurch zu vereinfachen, daß mit den geometrischen

Objekten unmittelbar, nicht bloß ihren Koordinaten, gerechnet wird. Das Wesentliche dieser Methode läßt sich in neuerer Bezeichnungsweise kurz so angeben:

Es seien x_0, x_1, x_2, x_3 die homogenen Koordinaten eines Punktes. Erteilt man diesen Koordinaten alle möglichen Zahlenwerte, so bekommt man alle Punkte des Raumes. Bezeichnet man nun diejenigen vier Punkte, bei denen je drei der Koordinaten verschwinden, durch besondere Buchstaben, d. h. ist etwa

$\mathfrak{n}_0$ der Punkt mit den Koordinaten 1, 0, 0, 0,
$\mathfrak{n}_1$ „ „ „ „ „ 0, 1, 0, 0,
$\mathfrak{n}_2$ „ „ „ „ „ 0, 0, 1, 0,
$\mathfrak{n}_3$ „ „ „ „ „ 0, 0, 0, 1,

so bekommt man jeden anderen Punkt $\mathfrak{x}$ in der Form

$$\mathfrak{x} = x_0 \mathfrak{n}_0 + x_1 \mathfrak{n}_1 + x_2 \mathfrak{n}_2 + x_3 \mathfrak{n}_3.$$

Dieser Ausdruck reduziert sich, wenn man die obigen speziellen Koordinatenwerte einsetzt, der Reihe nach auf $\mathfrak{n}_0$ bis $\mathfrak{n}_3$. Als Koeffizienten, mittels derer $\mathfrak{x}$ aus $\mathfrak{n}_0$ bis $\mathfrak{n}_3$ linear abgeleitet ist, dienen die Koordinaten x_0 bis x_3 von $\mathfrak{x}$, und zwar sind $\mathfrak{n}_0$ bis $\mathfrak{n}_3$ diejenigen Punkte, in bezug auf die die Koordinaten genommen sind.

Wenn man z. B. als $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$, $\mathfrak{n}_3$ uneigentliche Punkte nimmt, so werden x_0 bis x_3 homogen-cartesische Koordinaten in bezug auf $\mathfrak{n}_0$ als Ursprung und $\mathfrak{n}_1$ bis $\mathfrak{n}_3$ als Koordinatenrichtungen. Aus diesen würde man die nicht-homogenen bekommen, indem man $x_0 = 1$ setzt.

Das Wichtige an der ganzen Sache ist nun, daß das so entstandene Symbol eines Punktes invariant gegenüber allen Koordinatenumwandlungen ist. Denn führt man an Stelle der für die Koordinaten zugrunde gelegten Bezugspunkte $\mathfrak{n}_0$ bis $\mathfrak{n}_3$ irgendwelche neue Bezugspunkte $\mathfrak{n}_0'$ bis $\mathfrak{n}_3'$ ein, indem etwa gesetzt wird

$$\mathfrak{n}_i = a_{0i}\mathfrak{n}_0' + \cdots + a_{3i}\mathfrak{n}_3' \qquad (i = 0, \ldots, 3),$$

so erhält man durch Einsetzen dieser Werte

$$\mathfrak{x} = x_0'\mathfrak{n}_0' + \cdots + x_3'\mathfrak{n}_3',$$

wobei

$$x_i' = a_{i0}x_0 + \cdots + a_{i3}x_3 \qquad (i = 0, \ldots, 3).$$

Diese x_i' sind aber nichts anderes als die Koordinaten von $\mathfrak{x}$ in bezug auf die neuen Punkte $\mathfrak{n}_0'$ bis $\mathfrak{n}_3'$, so daß die Beziehung erhalten bleibt, daß bei der Entwicklung von $\mathfrak{x}$ nach irgend welchen Bezugspunkten deren Koeffizienten gleichbedeutend mit den Koordinaten sind, die $\mathfrak{x}$ in bezug auf diese Punkte hat.

Sagt man, eine Größe sei aus mehreren anderen linear abgeleitet,

wenn sie aus diesen dadurch entsteht, daß sie mit gewissen Zahlen (den sogenannten Ableitzahlen) multipliziert und dann addiert werden, so sind also die Punkte des Raumes linear aus vier unter ihnen ableitbar, die beliebig, aber nicht so gewählt werden dürfen, daß sie in ein und derselben Ebene liegen.

Die letztere Bedingung kann man nun auch mit der obigen Bezeichnungsweise einfach ausdrücken, wenn man noch die Bezeichnung linear unabhängig für solche Größen benutzt, von denen keine aus den übrigen linear ableitbar ist. Es stellt sich nämlich heraus, daß der Inbegriff aller Punkte, die sich aus zwei Punkten linear ableiten lassen, gleichbedeutend ist mit dem Inbegriff der Punkte derjenigen Geraden, die durch diese zwei Punkte geht; ferner daß der Inbegriff aller Punkte, die sich aus drei linear voneinander unabhängigen ableiten lassen, gleichbedeutend ist mit dem Inbegriff der Punkte derjenigen Ebene, die durch jene drei Punkte geht. Daraufhin kann man sagen, daß die vier Bezugspunkte, aus denen alle übrigen Punkte linear abgeleitet sind, nur der Bedingung zu genügen haben, daß sie linear unabhängig voneinander sind.

Bezeichnet man den Inbegriff aller Größen, die sich aus n linear voneinander unabhängigen Größen ableiten lassen, als ein n fach ausgedehntes Gebiet, so läßt sich also die projektive Geometrie indentifizieren mit der Theorie eines vierfach (bzw. allgemeiner n fach) ausgedehnten Gebietes, in der die Untergebiete als Geraden und Ebenen gedeutet werden.[1])

Bis hierher führte Möbius[2]) die Entwicklung dieser Auffassung.

Da nun aber die lineare Ableitung als einzige Rechenoperation nicht ausreicht, um alle geometrischen Beziehungen rein analytisch auszudrücken, so bestand der nächste Fortschritt in der Feststellung, daß die Kollineationen und andere wichtige Operationsarten, die zwischen geometrischen Größen möglich sind, eine gewisse Eigentümlichkeit aufweisen. Diese besteht darin, daß wenn z. B. $F(\mathfrak{x})$ eine solche Operation

1) Ob man dann im Einzelfalle mit den Größen des Gebietes unmittelbar rechnet oder statt dessen mit denjenigen Zahlen, durch die sie aus vier Größen des Gebietes linear abgeleitet sind, d. h. mit ihren homogenen Koordinaten, das ist eine Frage für sich. Jedenfalls werden beim Rechnen mit Einzelkoordinaten die Gleichungen der analytischen Geometrie weitläufiger oder zerfallen sogar in Systeme von vier Gleichungen für die Einzelkoordinaten, eine schon oft beklagte Unbequemlichkeit der Geometrie des Descartes, die im Verein mit dem Umstande, daß auch gewisse projektive Zusammenhänge durch den Gebrauch der Einzelkoordinaten verdunkelt werden, zeitweilig dazu führen konnte, überhaupt auf jede analytische Einkleidung zu verzichten.

2) Ges. Werke, Leipzig 1885 ff., insbes. Bd. I (Baryc. Kalkül 1827) und Bd. IV (Mechanik des Himmels 1843).

ist, die jedem Punkte $\mathfrak{x}$ eine gewisse andere Größe zuordnet, mag diese nun wiederum ein Punkt oder eine Zahl oder sonst etwas sein, und man diese Operation auf einen Punkt ausführt, der aus anderen Punkten linear abgeleitet ist, etwa auf

$$\mathfrak{x} = l\mathfrak{y} + m\mathfrak{z},$$

daß dann

$$F(\mathfrak{x}) = lF(\mathfrak{y}) + mF(\mathfrak{z})$$

wird. Man kann jede Operation, die diese Eigenschaft hat, eine distributive nennen, weil das dieselbe Eigenschaft ist, die im Gebiete der Arithmetik in dem distributiven Gesetz der Multiplikation zum Ausdruck kommt. Graßmann[1]), der diese Eigenschaft im Bereiche der Geometrie entdeckte, faßte deshalb die distributiven Operationen als Multiplikationsarten auf. Da nun jedoch diese Operationen eben nur das gemeinsam haben, daß sie sich gegenüber der Addition distributiv verhalten, im übrigen aber jede ihre eigenen Rechengesetze hat, so bedingte die Graßmannsche Einführung eines besonderen Operationszeichens für jede dieser Verknüpfungen eine gewisse Kompliziertheit seiner Ausdehnungslehre, so daß selbst heutzutage, wo eine derartige Methode durch die Vektoranalysis[2]) geläufiger geworden ist, es doch nicht ganz leicht ist, sich da hineinzufinden.

Anders ist es jedoch, wenn man die distributiven Operationen daraufhin untersucht, ob sie sich nicht in einfachere Operationen auflösen lassen, aus denen sie zusammengesetzt gedacht werden können. Daß dies in der Tat der Fall ist, und daß es insbesondere vollkommen ausreicht, eine einzige distributive Operation als grundlegend zu benutzen, während sich die übrigen durch sie und die Addition ausdrücken lassen, dies zu

1) Ges. Werke, herausgegeben und mit Anmerkungen versehen von F. Engel, Leipzig 1896 ff., insbesondere Band I_1 (Ausdehnungslehre von 1844 und Geometrische Analyse) und Band I_2 (Ausdehnungslehre von 1862). — Eine elementar gehaltene Darstellung der Ausdehnungslehre ist: R. Mehmke, Vorlesungen über Punkt- und Vektorenrechnung, Leipzig 1913 (dort ist auch die Literatur über die Ausdehnungslehre vollständig angeführt). — Eine aus den Graßmannschen Operationen zusammengesetzte Operation, die die Beziehungen zur Invariantentheorie aufdeckt, ist eingehend untersucht in: E. Müller (Wien), Eine Weiterbildung der Graßmannschen Ausdehnungslehre (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1914, S. 98; vgl. auch Sitzungsberichte der Wiener Akademie IIa, Bd. 131, Heft 8, 1922 und Bd. 133, 1924).

2) Die Vektoranalysis, die ungefähr gleichzeitig mit Graßmann, aber unabhängig von ihm, von Hamilton begründet wurde (Lectures on quaternions, Dublin 1853), bildet einen Teil der Graßmannschen Ausdehnungslehre. Da sie infolgedessen leichter zu übersehen ist, hat sie eher allgemeine Verwendung gefunden und in der Physik die Cartesische Geometrie schon fast verdrängt (Literaturangaben über die Vektoranalysis findet man in der Enzykl. d. math. Wissensch., III AB 11, Nr. 2).

zeigen, ist der Zweck der vorliegenden Abhandlung. Da also hier als Rechenoperationen nur die Addition und diese besondere distributive Operation benutzt werden, so sei die letztere (entgegen Graßmann) ausschließlich mit dem Namen Multiplikation belegt. Sie genügt übrigens dem assoziativen Gesetze der Multiplikation.

Man kann zu diesem Ergebnis auch noch von einem anderen Standpunkte her kommen, nämlich von dem Prinzip der Permanenz der formalen Rechengesetze, das sich auf die allmähliche Erweiterung des Geltungsbereichs der arithmetischen Operationen bezieht.[1]) Vom System der Zahlen ausgehend, kann man dieses, da es in sich abgeschlossen ist, nur dadurch erweitern, daß das eine oder andere der formalen Rechengesetze außer Kraft gesetzt wird. Man kommt da zunächst zu den hyperkomplexen Zahlen, d. h. denjenigen Größen, die sich geometrisch als lineare homogene Transformationen deuten lassen.[2]) Die Erweiterung geschieht dadurch, daß das kommutative Gesetz der Multiplikation in Wegfall kommt, d. h. es wird nicht mehr verlangt, daß die Faktoren eines Produktes miteinander vertauschbar sind. Wie Weierstraß[3]) gezeigt hat, verliert dadurch von selbst auch der Satz seine Gültigkeit, daß ein Produkt nur verschwindet, wenn ein Faktor verschwindet, indem er nur einerseits für die Zahlen gilt und andererseits für eine gewisse andere Gruppe der hyperkomplexen Zahlen.[4]) Es bleibt jedoch das assoziative Gesetz der Multiplikation bestehen, das die beliebige Zusammenfaßbarkeit der Faktoren ausdrückt, und schließlich auch das kollineare Gesetz, das besagt, daß jedes Produkt aus denselben Größen linear ableitbar ist, aus denen die einzelnen Faktoren es sind.

Will man nun aus dem Gebiete der linearen homogenen Trans-

1) Hankel, Theorie der komplexen Zahlensysteme, Leipzig 1867.

2) Die in der Matrix einer linearen homogenen Transformation stehenden Zahlen zu einer Größe zusammenzufassen und diese Größe als solche den Operationen des Addierens und Multiplizierens zu unterwerfen, diese Methode ist durch Cayley (Phil. Trans. of the Roy. Soc. of London, 1858) bekannt geworden, wenn sie sich auch schon als Bestandteil der Graßmannschen Ausdehnungslehre findet. Nachdem dann Hankel den Begriff eines hyperkomplexen Zahlensystems aufgestellt hatte, ergab sich, daß jedes hyperkomplexe Zahlensystem eine aus Cayleyschen Matrizen gebildete Untergruppe der Gruppe der linearen homogenen Transformationen ist. — Über das Rechnen mit Matrizen vgl. Frobenius, Über lineare Substitutionen, Journ. f. Math. 84, 1, 1878, und die systematische Darstellung in Pascal-Epstein, Rep. d. höh. Analysis I, 1910, § 6—12. — Die Theorie der Gruppen hyperkomplexer Zahlen findet man in: Lie und Scheffers, Vorl. über kontinuierliche Gruppen, Leipzig 1893, und in der Enzykl. der math. Wiss., Bd. I, S. 148 ff. (Study, Theorie der gemeinen und höheren komplexen Größen).

3) In seinen Vorl. 1863 (Kossak, Progr. d. Werderschen Gymn. 1872).

4) Frobenius, Journ. f. Math. 84, 59, 1878.

formationen herauskommen, so ist eine nochmalige Erweiterung des Größensystems erforderlich, indem wiederum eins der bestehenden Gesetze aufgegeben wird. Das distributive Gesetz kommt hierbei wohl kaum in Frage. Es bleibt also nur die Wahl zwischen dem assoziativen und dem kollinearen Gesetz.

Man ist da zunächst geneigt, das kollineare Gesetz als das wesentlichere zu halten und hat es z. B. bereits Graßmann zum Vorwurf gemacht, daß er dies nicht tat. Mir scheint, dieser Vorwurf ist zu Unrecht erhoben worden. Zeigt doch bereits diejenige distributive Verknüpfung, die Graßmann als die kombinatorische bezeichnet hat, daß gewisse geometrische Zusammenhänge in der arithmetischen Fassung verloren gehen würden, wenn die Geltung des kollinearen Gesetzes verlangt würde.

Aber schließlich, ob man nun die Erweiterung nach dieser oder jener Seite hin vornimmt, jedesmal erhält man einen gewissen Bereich arithmetischer Größen, und es handelt sich nur um die Frage, ob dieser Bereich dieselbe Struktur zeigt, wie der Bereich der geometrischen Größen, d. h. ob das arithmetisch Mögliche auch hier geometrisch deutbar ist. Nach dem Obigen muß dies der Fall sein, wenn man das assoziative Gesetz beibehält, dagegen das kollineare nicht mehr voraussetzt. Bemerkenswert ist hierbei jedoch von vornherein, daß man dabei auch bei den arithmetischen Größen auf das Prinzip der Dualität stößt, das ja die ganze projektive Geometrie beherrscht.

Es handelt sich für uns also, kurz gesagt, um das letzte noch fehlende Verbindungsstück zwischen Arithmetik und projektiver Geometrie.

I. Permutationssummen.

Die Anwendung der arithmetischen Operationen auf geometrische Objekte sei also dadurch definiert, daß die Gesetze, die für die Addition von Zahlen gelten, bestehen bleiben, während für die Multiplikation außer dem distributiven Gesetze auch das assoziative weiter gelten soll, d. h. die Faktoren eines Produktes sollen (ohne daß jedoch ihre Reihenfolge geändert werde) in beliebiger Weise zusammengefaßt werden können.

Dabei wird nicht die Eigenschaft vorausgesetzt, daß jedes Produkt durch diejenigen Größen linear ausdrückbar sei, aus denen die Faktoren linear abgeleitet sind.

Ferner wird auch das kommutative Gesetz der Multiplikation nicht vorausgesetzt; nur soll jeder Faktor eines Produktes, der in einer Zahl besteht, mit dem folgenden bzw. vorangehenden Faktor des Produktes vertauschbar sein. Da also die Reihenfolge der Faktoren nicht beliebig ist, so sei bei dem Produkte $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ gesagt, daß $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{a}$ vorweg oder vor-

greifend multipliziert ist; von $\mathfrak{a}$ sei dagegen in demselben Produkte nur gesagt, daß es mit $\mathfrak{b}$ multipliziert ist. Nur wenn der Gegensatz zu der anderen Reihenfolge der Faktoren besonders betont werden soll, sei gesagt, daß $\mathfrak{a}$ **folgerecht** mit $\mathfrak{b}$ multipliziert ist.

Von den Ausdrücken, die durch Addition und Multiplikation aus irgendwelchen Größen entstehen, interessieren zunächst solche, die identisch verschwinden würden, wenn das kommutative Gesetz in Geltung wäre, d. h. die Differenzen von Produkten, die sich nur durch die Reihenfolge der Faktoren unterscheiden. Da wir derartige Ausdrücke viel benutzen werden, sei eine besondere Bezeichnung eingeführt, indem z. B. bei zwei Faktoren gesetzt wird

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b} - \mathfrak{b}\mathfrak{a}.$$

Besteht ein Produkt aus drei Faktoren, so gibt es sechs verschiedene Möglichkeiten für deren Reihenfolge. Wir bilden folgenden Ausdruck, in dem alle diese sechs Produkte vorkommen:

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c} - \mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{b} - \mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{c} + \mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{a} + \mathfrak{c}\mathfrak{a}\mathfrak{b} - \mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{a}.$$

Allgemein sei definiert:

(1) Sind n Größen $\mathfrak{a}_i$ $(i=1,\ldots,n)$ gegeben, so kann man aus dem Produkte $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\ldots\mathfrak{a}_n$ durch Umstellung der Faktoren im Ganzen $n!$ verschiedene Produkte bilden, nämlich so viele, als es Permutationen der Indizes 1 bis n gibt. Addiert man alle diese Produkte, und zwar mit positivem oder negativem Vorzeichen, je nachdem in dem betreffenden Produkt die Indizes eine gerade oder ungerade Permutation der Zahlen 1 bis n bilden, so sei die so entstandene Summe mit $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ bezeichnet und die **Permutationssumme** von $\mathfrak{a}_1$ bis $\mathfrak{a}_n$ genannt.[1])

Sie ist eine Funktion der Größen $\mathfrak{a}_1$ bis $\mathfrak{a}_n$, bei der wir wegen ihrer häufigen Verwendung das Funktionszeichen weglassen und nur die Argumente in Klammern angeben, eine Bezeichnungsweise, die den in der Theorie der Transformationsgruppen vorkommenden Lieschen Klammerausdrücken entlehnt ist. Eine Permutationssumme, deren Argumente aus lauter Zahlen bestehen, verschwindet identisch.

Für diese Funktion gelten folgende Sätze, die sich auf Grund der Definition leicht verifizieren lassen, und denen sogleich einige Beispiele angefügt seien:

1) Da, wie bereits bemerkt, hier nur diejenige Operation den Namen Multiplikation führen soll, aus der im Verein mit der Addition sich die anderen distributiven Operationen zusammensetzen lassen, so konnte die Graßmannsche Bezeichnung kombinatorisches Produkt nicht mehr benutzt werden. Die neue Bezeichnung Permutationssumme ist so gewählt, daß sie andeutet, wie diese zusammengesetzte Operation entsteht.

(2) *Die Permutationssumme wechselt das Vorzeichen, wenn man zwei ihrer Argumente miteinander vertauscht.*

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = -(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}),$$

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = -(\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{b}) = -(\mathfrak{c}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = -(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{c})$$

(3) *Die Permutationssumme ändert sich nicht, wenn ihre Argumente einer geraden Permutation unterworfen werden; sie wechselt das Vorzeichen (und bleibt sonst ungeändert), wenn sie einer ungeraden Permutation unterworfen werden; insbesondere verschwindet die Permutationssumme, sobald zwei ihrer Argumente einander gleich werden.*

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = (\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{a}) = (\mathfrak{c}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$$

(4) *Die Permutationssumme verhält sich in bezug auf jedes ihrer Argumente distributiv.*

$$(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_i + \mathfrak{b}, \ldots, \mathfrak{a}_n) = (\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n) + (\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{i-1}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{a}_n)$$

(5) *Ein Zahlenfaktor, der in irgendeinem Argumente einer Permutationssumme enthalten ist, kann als Faktor statt dessen mit der ganzen Permutationssumme verknüpft werden.*

(6) *Die Permutationssumme verschwindet, sobald ihre Argumente nicht linear voneinander unabhängig sind.*

Ferner läßt sich für die Permutationssummen eine Reihe von Identitäten herleiten, die ein Analogon des Laplaceschen Determinantensatzes bilden. Faßt man nämlich in einer Permutationssumme von n Argumenten alle diejenigen Glieder zusammen, deren erster Faktor derselbe ist, so erscheint dieser Faktor mit einem Ausdrucke multipliziert, der selbst eine Permutationssumme ist, und zwar von $n-1$ Argumenten. Z. B. ist

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}(\mathfrak{b}, \mathfrak{c}) - \mathfrak{b}(\mathfrak{a}, \mathfrak{c}) + \mathfrak{c}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}),$$

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}) = \mathfrak{a}(\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}) - \mathfrak{b}(\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}) + \mathfrak{c}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}) - \mathfrak{d}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$$

oder allgemein

$$(7)\quad (\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n) = \mathfrak{a}_1(\mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n) + \cdots + (-1)^{i-1}\mathfrak{a}_i(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{i-1}, \mathfrak{a}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{a}_n) + \cdots + (-1)^{n-1}\mathfrak{a}_n(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{n-1}).$$

Ebenso kann man auch alle Glieder zusammenfassen, die denselben letzten Faktor haben:

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = (\mathfrak{b}, \mathfrak{c})\mathfrak{a} - (\mathfrak{a}, \mathfrak{c})\mathfrak{b} + (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})\mathfrak{c},$$

$$(8)\quad (\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n) = (\mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n)\mathfrak{a}_1 + \cdots (-1)^{i-1}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{i-1}, \mathfrak{a}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{a}_n)\mathfrak{a}_i + \cdots + (-1)^{n-1}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{n-1})\mathfrak{a}_n.$$

Schließlich läßt sich die Permutationssumme von n Argumenten auch derartig umgestalten, daß jedes Glied m Faktoren enthält, von

denen der erste eine Permutationssumme von n_1 Argumenten, der zweite eine solche von n_2 usw. und der letzte eine von n_m Argumenten ist, wobei $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$. Hierfür sei das Beispiel gegeben, das für Permutationssummen von höchstens vier Argumenten außer den bereits erwähnten Spezialfällen noch in Betracht kommt:

$$(9) \quad (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}) = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})(\mathfrak{c}, \mathfrak{d}) + (\mathfrak{c}, \mathfrak{d})(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) - (\mathfrak{a}, \mathfrak{c})(\mathfrak{b}, \mathfrak{d}) - (\mathfrak{b}, \mathfrak{d})(\mathfrak{a}, \mathfrak{c}) + (\mathfrak{a}, \mathfrak{d})(\mathfrak{b}, \mathfrak{c}) + (\mathfrak{b}, \mathfrak{c})(\mathfrak{a}, \mathfrak{d}).$$

II. Dualität.

Es seien n Größen $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \ldots, \mathfrak{n}_n$ gegeben, die linear voneinander unabhängig sind. Den Inbegriff der ∞^n aus ihnen linear abgeleiteten Größen

$$\mathfrak{x} = x_1 \mathfrak{n}_1 + \cdots + x_n \mathfrak{n}_n$$

nennen wir ein $n$fach ausgedehntes **Gebiet.** Die lineare Unabhängigkeit der $\mathfrak{n}_i$ bringt es mit sich, daß $\mathfrak{x} = 0$ gleichbedeutend mit den n Gleichungen $x_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ ist, und daß infolgedessen für $\mathfrak{y} = y_1 \mathfrak{n}_1 + \cdots + y_n \mathfrak{n}_n$ die Beziehung $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$ dann und nur dann statt hat, wenn $x_i = y_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ ist.

Die $\mathfrak{n}_i$ seien die **unabhängigen Größen** des Gebietes genannt. Statt deren können auch n beliebige andere Größen, sofern sie dem Gebiete angehören und linear voneinander unabhängig sind, als die unabhängigen Größen des Gebietes benutzt werden. Die Zahlen x_1 bis x_n, durch die $\mathfrak{x}$ linear aus $\mathfrak{n}_1$ bis $\mathfrak{n}_n$ abgeleitet ist, heißen die **Ableitzahlen** (Koordinaten) von $\mathfrak{x}$ in bezug auf $\mathfrak{n}_1$ bis $\mathfrak{n}_n$.

Unter den möglichen Gebieten gibt es zwei Arten, die für die Geometrie von besonderer Wichtigkeit sind. Die eine Art hat die Eigenschaft, daß die Produkte der Größen des Gebietes wiederum diesem Gebiete angehören. Das sind die kollinearen Gebiete, die im Zusammenhange mit der Gruppentheorie bereits seit längerer Zeit den Gegenstand des Interesses bilden.

Zu der anderen Art werden wir geführt, wenn wir noch einmal auf das kommutative Gesetz der Multiplikation zurückgreifen, das sich auf die beliebige Vertauschbarkeit der Faktoren eines Produktes bezieht. Da beim Rechnen mit Zahlen diese Eigenschaft im Verein mit dem assoziativen Verhalten der Faktoren eine große Rolle spielt, so könnte es zunächst scheinen, als ob durch das Nicht-Weiterbestehen des kommutativen Gesetzes die Möglichkeiten der formalen Umgestaltung wesentlich eingeschränkt wären. Daß dies jedoch nicht der Fall ist, geht aus folgender Überlegung hervor.

Jeder Faktor eines Produktes, der in einer Zahl besteht, kann, wie vorausgesetzt, mit jedem benachbarten Faktor vertauscht werden, und

zwar auch dann, wenn der letztere keine Zahl, sondern eine andere Größe ist. Folglich lassen sich auch in dem Falle, daß zwei aufeinanderfolgende Faktoren eines Produktes die Eigenschaft haben, daß sie miteinander multipliziert eine Zahl ergeben, diese beiden Faktoren an eine beliebige Stelle innerhalb des Produktes bringen, ohne jedoch voneinander getrennt werden zu dürfen. Man braucht dazu nur die Zahl einzusetzen, der ihr Produkt gleich sein soll, dann diese Zahl an die gewünschte Stelle innerhalb des ganzen Produktes zu bringen und nun wiederum durch die beiden Faktoren zu ersetzen, aus denen sie hervorgegangen ist.

Um daher, trotzdem das kommutative Gesetz der Multiplikation nicht gilt, dennoch die auf diese Weise unter bestimmten Bedingungen gegebene Umstellungsmöglichkeit der Faktoren möglichst auszunutzen, suchen wir die Größen auf, die so beschaffen sind, daß ihr Produkt mit jeder Größe des Gebietes $\mathfrak{n}_1$ bis $\mathfrak{n}_n$ eine Zahl liefert, die nicht immer dieselbe zu sein braucht.

Es sind also zunächst diejenigen Größen v zu bestimmen, deren Produkt mit der Größe $\mathfrak{x} = x_1 \mathfrak{n}_1 + \cdots + x_n \mathfrak{n}_n$ eine Zahl ist, welche Lage auch $\mathfrak{x}$ innerhalb des Gebietes haben möge, d. h. für beliebige Werte der Ableitzahlen x_1 bis x_n. Dann muß dies auch insbesondere für $\mathfrak{x} = \mathfrak{n}_1$ bis $\mathfrak{x} = \mathfrak{n}_n$ selbst zutreffen. Es ist also $v \mathfrak{n}_i = a_i$ für $i = 1, \ldots, n$, unter a_i eine Zahl verstanden. Da die Multiplikation gliedweise ausgeführt werden kann, so haben wir $v \mathfrak{x} = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n$. Die rechte Seite dieser Gleichung ist eine Zahl. Infolgedessen ist die gestellte Forderung bei beliebiger Wahl der Zahlen a_1 bis a_n befriedigt. Die Größe v ist in dem Gebiete $\mathfrak{n}_1$ bis $\mathfrak{n}_n$ nicht notwendig enthalten, da wir von dem letzteren nicht voraussetzen, daß es kollinear ist.

Wir nennen v eine zu dem Gebiet $\mathfrak{n}_1$ bis $\mathfrak{n}_n$ duale Größe, sofern a_1 bis a_n für $v \neq 0$ nicht gleichzeitig verschwinden.

Es fragt sich nun, wie viele duale Größen ein Gebiet haben kann.

Hat man $m \leqq n$ voneinander unabhängige duale Größen, so ist jede aus ihnen linear abgeleitete Größe wiederum eine duale Größe, wie sich aus der Definition folgern läßt.

Sind andererseits bereits gerade n voneinander unabhängige duale Größen v_1 bis v_n bekannt, so läßt sich jede weitere duale Größe aus ihnen linear ableiten. Denn wenn v_1 bis v_n zu dem Gebiet $\mathfrak{n}_1$ bis $\mathfrak{n}_n$ dual sein sollen, so bestehen jedenfalls Beziehungen von der Form

$$v_i \mathfrak{n}_k = b_{ik} \qquad (i, k = 1, \ldots, n),$$

wobei die Determinante der Zahlen b_{ik} nicht verschwinden darf, wenn v_1 bis v_n linear voneinander unabhängig sein sollen. Ist nun eine duale

Größe ν dadurch gegeben, daß die Zahlen bekannt sind, die sie bei der Multiplikation mit den Größen des Gebietes $\mathfrak{n}_1$ bis $\mathfrak{n}_n$ ergibt, indem z. B. $\nu\mathfrak{n}_k = a_k$ für $k = 1, \ldots, n$ ist, so führt die Aufgabe, n Zahlen c_k so zu bestimmen, daß

$$\nu = c_1\nu_1 + \cdots + c_n\nu_n$$

wird, auf ein System von n linearen Zahlengleichungen mit n Unbekannten, dessen Koeffizientendeterminante nicht verschwindet. Die Ableitzahlen c_1 bis c_n von ν lassen sich also stets angeben, d. h.

(10) *Unter den Größen, die zu einem gegebenen Gebiet von n facher Ausgedehntheit dual sind, gibt es höchstens n linear voneinander unabhängige.*

Wir sagen nun:

(11) Ein $n$fach ausgedehntes Gebiet ist ein **auf Dualität abgestelltes Gebiet,** wenn die Höchstzahl von n unabhängigen dualen Größen existiert. Den Inbegriff der aus ihnen linear abgeleiteten dualen Größen nennen wir das zu dem ursprünglichen **duale Gebiet.**

Gibt es zu dem dualen Gebiete wiederum ein duales Gebiet? Diese Frage wäre zu verneinen, wenn wir den Begriff der Dualität durch die Forderung einschränkten, daß in den Produkten, die Zahlen gleich sein sollen, die duale Größe den ersten Faktor und die aus dem ursprünglichen Gebiet entnommene Größe den zweiten Faktor bildet.[1]) Es sei deshalb definiert:

(12) Zu einem gegebenen Gebiete wird eine ihm nicht notwendig angehörige Größe **dual** genannt, wenn ihr (folgerecht oder vorgreifend genommenes) Produkt mit jeder der unabhängigen Größen des Gebietes einer Zahl gleich ist, sofern diese Zahlen nur für die duale Größe 0 gleichzeitig verschwinden.

Die erweiterte Definition liefert für das Gebiet $\mathfrak{n}_1$ bis $\mathfrak{n}_n$ keine neuen dualen Größen. Andererseits zeigt sich bei dem Gebiet ν_1 bis ν_n in derselben Weise wie oben, daß es für dasselbe höchstens n voneinander unabhängige Größen $\mathfrak{p}$ von der Art gibt, daß $\nu_1\mathfrak{p}$ bis $\nu_n\mathfrak{p}$ Zahlen sind, die nur für $\mathfrak{p} = 0$ gleichzeitig verschwinden. Nun kennen wir bereits derartige Größen, nämlich $\mathfrak{p} = \mathfrak{n}_1$ bis $\mathfrak{p} = \mathfrak{n}_n$. Da deren Anzahl gerade n

---

1) Denn bezeichnet man in der Determinante der b_{ik} die zu b_{ik} algebraisch Adjungierte, dividiert durch die Determinante selbst, mit b'_{ik} und setzt $b'_{r1}\mathfrak{n}_1 + \cdots + b'_{rn}\mathfrak{n}_n = \mathfrak{n}'_r$, so folgt aus der Annahme einer Größe μ, für die jedes Produkt $\mu\nu_i = d_i$ eine Zahl ergibt, durch Multiplikation dieser Gleichung mit $\mathfrak{n}'_k$ die Beziehung $0 = d_i\mathfrak{n}'_k$ $(k \neq i)$, so daß wegen der linearen Unabhängigkeit der $\mathfrak{n}'_r$ sämtliche d_i verschwinden. Multipliziert man andrerseits die angenommene Gleichung mit $\mathfrak{n}'_i$, so folgt $\mu = d_i\mathfrak{n}'_i$, also $\mu = 0$. (Anmerkung der Schriftleitung.)

beträgt, so folgt, daß außer ihnen keine weitere unabhängige Größe existiert, die zu ν_1 bis ν_n dual wäre, d. h.:

(13) *Ist ein auf Dualität abgestelltes Gebiet gegeben, so ist das zu ihm duale Gebiet wiederum auf Dualität abgestellt, und zwar werden die zu ihm dualen Größen von den Größen des ursprünglichen Gebietes gebildet.*

Wir sagen deshalb, die beiden Gebiete seien **zueinander dual** und unterscheiden sie als primäres und sekundäres dadurch, daß das Produkt einer Größe des sekundären Gebietes mit einer Größe des primären Gebietes (in dieser Reihenfolge der Faktoren) eine Zahl ist.

In dem sekundären Gebiete können an Stelle von ν_1 bis ν_n durch eine lineare Substitution n aus ihnen abgeleitete andere Größen als unabhängige eingeführt werden. Notwendige und hinreichende Bedingung für deren Unabhängigkeit ist das Nicht-Verschwinden der Substitutionsdeterminante. Zu besonders einfachen Beziehungen führt die Substitution

$$\nu_i = b_{i1}\nu'_1 + \cdots + b_{in}\nu'_n \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

bei der die Koeffizienten durch $\nu_i \mathfrak{n}_k = b_{ik}$ definiert seien. Die Ausrechnung ergibt nämlich, daß $\nu'_i \mathfrak{n}_k = 1$, sobald $i = k$, und daß $\nu'_i \mathfrak{n}_k = 0$, sobald $i \neq k$.

Wir sagen, die zueinander dualen Gebiete haben die Normalform, wenn die Beziehungen, die zwischen ihren Größen bestehen, auf diese Form gebracht sind. Dann gilt also folgendes:

(14) *Zueinander duale Gebiete können stets auf die Normalform gebracht werden, indem die unabhängigen Größen entweder des primären Gebietes* $\mathfrak{n}_1$ *bis* $\mathfrak{n}_n$ *oder diejenigen des sekundären Gebietes* ν_1 *bis* ν_n *durch eine geeignete Substitution in solche neue unabhängige Größen übergeführt werden, daß*

$$\begin{array}{lllll}
\nu_1\mathfrak{n}_1 = 1, & \nu_1\mathfrak{n}_2 = 0, & \nu_1\mathfrak{n}_3 = 0 & \cdots & \nu_1\mathfrak{n}_n = 0, \\
\nu_2\mathfrak{n}_1 = 0, & \nu_2\mathfrak{n}_2 = 1, & \nu_2\mathfrak{n}_3 = 0 & \cdots & \nu_2\mathfrak{n}_n = 0, \\
\nu_3\mathfrak{n}_1 = 0, & \nu_3\mathfrak{n}_2 = 0, & \nu_3\mathfrak{n}_3 = 1 & \cdots & \nu_3\mathfrak{n}_n = 0, \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\nu_n\mathfrak{n}_1 = 0, & \nu_n\mathfrak{n}_2 = 0, & \nu_n\mathfrak{n}_3 = 0 & \cdots & \nu_n\mathfrak{n}_n = 1.
\end{array}$$

Es verschwinden also alle Produkte $\nu_i \mathfrak{n}_k$ *mit Ausnahme derer, die gleiche Indizes haben.*

Diese Gleichungen können übrigens dazu benutzt werden, die Ableitzahlen einer Größe eines auf Dualität abgestellten Gebietes in der Form eines Produktes anzugeben, dessen einer Faktor die betreffende Größe selbst, und dessen anderer Faktor die entsprechende Größe des dualen Gebietes ist:

(15) *Liegen duale Gebiete in der Normalform vor, so wird jede Größe* $\mathfrak{x} = x_1 \mathfrak{n}_1 + \cdots + x_n \mathfrak{n}_n$ *des einen Gebietes durch die Ableitzahlen* $x_i = \nu_i \mathfrak{x}$ *aus den unabhängigen Größen* $\mathfrak{n}_1$ *bis* $\mathfrak{n}_n$ *und jede Größe* $\xi = u_1 \nu_1 + \cdots + u_n \nu_n$ *des anderen Gebietes durch die Ableitzahlen* $u_k = \xi \mathfrak{n}_k$ *aus den unabhängigen Größen* ν_1 *bis* ν_n *linear abgeleitet.*

Aus den Beziehungen (14) läßt sich noch folgern: Eine nicht verschwindende Größe kann niemals zwei zueinander dualen Gebieten gleichzeitig angehören, sofern es sich nicht gerade um das Gebiet der Zahlen handelt, das zu sich selbst dual ist.

III. Geometrische Deutung.

Nach **Möbius** läßt sich jedes aus vier unabhängigen Größen abgeleitete Gebiet als Inbegriff der Punkte des projektiven Raumes[1]) deuten. Sind $\mathfrak{n}_0$ bis $\mathfrak{n}_3$ die unabhängigen Größen, so bekommt man also alle Punkte $\mathfrak{x}$ dadurch, daß in dem Ausdrucke $\mathfrak{x} = x_0 \mathfrak{n}_0 + \cdots + x_3 \mathfrak{n}_3$ den Koordinaten x_0 bis x_3 alle möglichen Zahlenwerte erteilt werden.

Wir nehmen insbesondere ein auf Dualität abgestelltes Gebiet und fragen uns, welche geometrische Bedeutung dann den Größen des dualen Gebietes zukommt. Da das Gebiet auf Dualität abgestellt sein soll, so existieren nach (14) gewisse Größen ν_0 bis ν_3 von der Beschaffenheit, daß

(16) $$\nu_i \mathfrak{n}_i = 1, \qquad \nu_i \mathfrak{n}_k = 0 \qquad (i, k = 0, \ldots, 3) \quad (i \neq k).$$

Wir denken uns nun eine Ebene; der Inbegriff der auf ihr liegenden Punkte $\mathfrak{x}$ ist bekanntlich dadurch bestimmt, daß zwischen den zu $\mathfrak{x}$ gehörigen Koordinaten x_0 bis x_3 eine Gleichung von der Form

$$u_0 x_0 + \cdots + u_3 x_3 = 0 \qquad \text{besteht.}$$

Wird zur Abkürzung $\xi = u_0 \nu_0 + \cdots + u_3 \nu_3$ gesetzt, so geht die Gleichung der Ebene vermöge (15) über in $\xi \mathfrak{x} = 0$. Hierbei ist ξ für die betreffende Ebene konstant; $\mathfrak{x}$ durchläuft dagegen alle Punkte, die auf ihr liegen.

---

1) Im gewöhnlichen Raume ist ein Punkt bereits durch die Angabe der Verhältnisse der Koordinaten, also durch die Quotienten $x_1 : x_0$ bis $x_3 : x_0$ bestimmt. Nach dem Vorgange von **Möbius** fassen wir den projektiven Raum als eine Erweiterung des gewöhnlichen auf, indem in ihm eine jede Wertekombination der Zahlen x_0 bis x_3 einen besonderen Punkt bestimmt, nur daß die ∞^1 Punkte, die auseinander durch Multiplikation mit Zahlen hervorgehen, dieselbe Lage haben. Der gewöhnliche Raum enthält also ∞^3 Punkte, der projektive ∞^4 Punkte. Diese Unterscheidung hat den Vorteil, daß im projektiven Raum, wo es nur auf die Lage, nicht auf Zahlenwerte ankommt, die überflüssige Bezeichnung einer Größe als Vielfachen eines Punktes vermieden wird, während im gewöhnlichen Raume es sich erübrigt, bei einem Punkte anzugeben, er habe den Zahlenwert 1, da ja dort ein Vielfaches eines Punktes nicht selbst ein Punkt ist.

Um nun zu entscheiden, ob $\mathfrak{\xi}$, wie es den Anschein hat, diese Ebene eindeutig bestimmt, nehmen wir eine zweite Ebene hinzu, für die die Gleichung $v_0 x_0 + \cdots + v_3 x_3 = 0$ oder mit der Abkürzung $\eta = v_0 \nu_0 + \cdots + v_3 \nu_3$ die Gleichung $\eta \mathfrak{x} = 0$ bestehen möge. Soll $\xi = \eta$ sein, so wird auch $\xi \mathfrak{n}_k = \eta \mathfrak{n}_k$, also nach (15) $u_k = v_k$ für $k = 0, \ldots, 3$, d. h. die einander entsprechenden Koeffizienten in den Gleichungen beider Ebenen sind gleich. Dann fallen bekanntlich die Ebenen zusammen. Für das Zusammenfallen ist es jedoch andererseits bereits hinreichend, daß die Koeffizienten einander proportional sind, indem etwa $v_k = c u_k$. In diesem Falle wird $\eta = c\xi$; also ξ und η unterscheiden sich dann nur durch einen Zahlenfaktor voneinander.

Entsprechend der Tatsache, daß ein Punkt, dessen Koordinaten sämtlich mit derselben Zahl multipliziert werden, in einen von ihm verschiedenen Punkt übergeht, der nur die gleiche Lage hat, wollen wir auch die ∞^1 Ebenen, die auseinander dadurch hervorgehen, daß in der Gleichung einer von ihnen die Koeffizienten mit ein- und derselben beliebigen Zahl multipliziert werden, als lauter verschiedene Ebenen auffassen, die nur alle dieselbe Lage haben, so daß der Inbegriff aller Ebenen des projektiven Raumes ein vierfach ausgedehntes Gebiet bildet. Demnach ist die Ebene $\xi \mathfrak{x} = 0$ dann und nur dann dieselbe wie die Ebene $\eta \mathfrak{x} = 0$, wenn $\xi = \eta$ ist, d. h.

(17) *Sind zwei zueinander duale Gebiete gegeben, von denen das eine (folglich auch das andere) vierfach ausgedehnt ist, und deutet man die Größen des einen als die Punkte des Raumes, so kann man jede Größe des anderen Gebietes in umkehrbar eindeutiger Weise den Ebenen des Raumes zuordnen.*

Dies berechtigt uns dazu, die aus ν_0 bis ν_3 abgeleiteten Ausdrücke

$$\xi = u_0 \nu_0 + \cdots + u_3 \nu_3$$

als Ebenen zu deuten, und zwar bekommt man alle Ebenen des projektiven Raumes, indem man u_0 bis u_3 alle möglichen Zahlenwerte erteilt. Diese Ableitzahlen u_i nennen wir die Koordinaten der Ebene in bezug auf ν_0 bis ν_3.

Die Größen ν_i selbst haben dann auch die Bedeutung von Ebenen. Welche das sind, geht daraus hervor, durch welche Punkte die Gleichung $\nu_i \mathfrak{x} = 0$ befriedigt wird. Für $i = 0$ sind das die Punkte $\mathfrak{x} = \mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{x} = \mathfrak{n}_2$ und $\mathfrak{x} = \mathfrak{n}_3$. Aus demselben Grunde geht die Ebene ν_1 durch die Punkte $\mathfrak{n}_0$, $\mathfrak{n}_2$ und $\mathfrak{n}_3$ und überhaupt jede der Ebenen ν_i durch drei von den Punkten $\mathfrak{n}_i$.

Werden an Stelle der $\mathfrak{n}_i$ vier andere Punkte als unabhängige gewählt, so lassen sich an Stelle der ν_i stets vier aus ihnen abgeleitete

und voneinander unabhängige Größen angeben, derart, daß die Beziehungen $\nu_i \mathfrak{n}_i = 1$, $\nu_i \mathfrak{n}_k = 0$ $(k \neq i)$ erhalten bleiben. Geometrisch würde dies darauf hinauslaufen, daß als neue ν die Verbindungsebenen je dreier der neuen Punkte $\mathfrak{n}$ gewählt werden.

Die Deutung der aus den ν_i abgeleiteten Größen als Ebenen gestattet es, die als Gleichung der Ebene bezeichnete Zahlenbeziehung auch so auszudrücken:

(18) *Ist* $\mathfrak{x}$ *ein Punkt,* ξ *eine Ebene, so besteht die Beziehung* $\xi \mathfrak{x} = 0$ *dann und nur dann, wenn* $\mathfrak{x}$ *auf* ξ *liegt.*

Die vereinte Lage einer Ebene und eines Punktes drückt sich also analytisch dadurch aus, daß ihr Produkt verschwindet.

Liegen der Punkt und die Ebene nicht miteinander vereint, so ist also ihr Produkt von Null verschieden, jedoch vermöge (16) stets eine Zahl.[1])

Was hat es nun für eine Bewandtnis mit dem in umgekehrter Reihenfolge der Faktoren genommenen Produkte $\mathfrak{x}\xi$? Wird die Multiplikation gliedweise ausgeführt, so entsteht ein Ausdruck, der aus den 16 Produkten $\mathfrak{n}_i \nu_k$ linear abgeleitet ist.

Der allgemeinste Ausdruck dieser Art ist

$$T = c_{00}\mathfrak{n}_0\nu_0 + \cdots + c_{ik}\mathfrak{n}_i\nu_k + \cdots + c_{33}\mathfrak{n}_3\nu_3.$$

Er hat die Eigenschaft, daß sein Produkt mit einem beliebigen Punkte $\mathfrak{x}$ eine Größe, die aus $\mathfrak{n}_0$ bis $\mathfrak{n}_3$ linear abgeleitet ist, also jedenfalls einen Punkt $\mathfrak{y} = T\mathfrak{x}$ ergibt, und zwar gehen dabei je drei in gerader Linie liegende Punkte in solche über, die auch in gerader Linie liegen. T bezeichnet also eine Kollineation von Punkten.

Gleichzeitig bezeichnet T auch eine Kollineation von Ebenen. Multipliziert man nämlich T vorgreifend mit einer beliebigen Ebene ξ, so entsteht eine aus ν_0 bis ν_3 linear abgeleitete Größe, also eine Ebene $\eta = \xi T$, wobei je drei durch eine Gerade gehende Ebenen in solche übergeführt werden, die ebenfalls eine Gerade gemein haben. Es ist leicht einzusehen, daß alle Kollineationen von Punkten bzw. Ebenen erhalten werden, wenn man den Ableitzahlen c_{ik} von T alle möglichen Werte erteilt, und daß ferner folgendes gilt:

(19) *Diejenige Kollineation, die die Aufeinanderfolge zweier Kollineationen ersetzt, ist gleich deren Produkt, und zwar bildet bei dem Produkte der Punktkollineationen die zuerst ausgeführte Kollineation den ersten Faktor, bei den Ebenenkollineationen dagegen den zweiten Faktor, entsprechend der Tatsache, daß das Ergebnis einer Punktkollineation erhalten*

1) Im gewöhnlichen Raume ist diese Zahl gleich dem Abstande des Punktes von der Ebene.

wird, indem man das Kollineationssymbol folgerecht mit dem Punkt multipliziert, dagegen das Ergebnis einer Ebenenkollineation, indem man das Kollineationssymbol vorgreifend mit der Ebene multipliziert.

Die Ausrechnung des Produktes zweier Kollineationen erfordert das Bilden der Produkte aus je zweien der unabhängigen Größen $N_{ik} = \mathfrak{n}_i \nu_k$, aus denen die Kollineationen abgeleitet sind. Dazu sind jedoch keine besonderen Formeln nötig; man braucht vielmehr nur die Beziehungen (16) anzuwenden, die die Dualität zum Ausdrucke bringen, und die darin bestehen, daß $\nu_i \mathfrak{n}_k$ bei gleichem Index i und k den Wert 1, bei ungleichem den Wert 0 hat.

Fragen wir uns nun noch, welcher Zusammenhang zwischen T als Punktkollineation und T als Ebenenkollineation besteht, so gibt uns darüber die Identität

(20) $$(\xi T)\mathfrak{x} = \xi(T\mathfrak{x})$$

Aufschluß. Setzen wir hierin $\xi T = \eta$ und $T\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$, so wird daraus die Relation $\eta\mathfrak{x} = \xi\mathfrak{y}$, die u. a. besagt:

(21) *Wird der Ebene ξ eine bestimmte Lage erteilt und ist ihr durch eine Kollineation T die Ebene η zugeordnet, so haben alle auf η liegenden Punkte die Eigenschaft, durch die Kollineation in Punkte der ursprünglichen Ebene ξ übergeführt zu werden. Erteilt man andererseits dem Punkte $\mathfrak{x}$ eine bestimmte Lage, der durch die Kollineation in einen Punkt $\mathfrak{y}$ übergehen möge, so haben alle Ebenen, die durch $\mathfrak{y}$ gehen, die Eigenschaft, daß sie durch die Kollineation in solche Ebenen übergeführt werden, die durch den ursprünglichen Punkt $\mathfrak{x}$ gehen.*

IV. Kennzeichnung der Gebiete durch Permutationssummen.

Wir hatten im ersten Abschnitt die Gesetze kennengelernt, denen die Permutationssummen unterworfen sind. Dabei waren deren Argumente beliebige Größen gewesen.

Wir wollen nun insbesondere das Verhalten der Permutationssummen innerhalb solcher Gebiete verfolgen, die auf Dualität abgestellt sind.

Es seien also zwei zueinander duale Gebiete $\mathfrak{E}$ und E gegeben, von denen das eine, also auch das andere, $n$fach ausgedehnt sei. Die Größen von $\mathfrak{E}$ seien aus $\mathfrak{n}_1$ bis $\mathfrak{n}_n$ linear ableitbar, die von E aus ν_1 bis ν_n. Die Zahlenbeziehungen, die die Dualität ausdrücken, mögen in der Normalform vorliegen:

(14) $$\nu_i \mathfrak{n}_i = 1, \quad \nu_i \mathfrak{n}_k = 0 \qquad (i, k = 1, \ldots, n) \quad (k \neq i).$$

Ebenso, wie aus einer Gleichung von der Form $x_1\mathfrak{n}_1 + \cdots + x_n\mathfrak{n}_n = 0$ bzw. $u_1\nu_1 + \cdots + u_n\nu_n = 0$ durch vorgreifende Multiplikation mit ν_i bzw. folgerechte Multiplikation mit $\mathfrak{n}_i$ folgt, daß $x_k = 0$ bzw. $u_k = 0$ für

$k = 1, \ldots, n$, so können wir auch jede lineare Beziehung zwischen Permutationssummen von r Argumenten in eine Reihe von Zahlengleichungen auflösen.

Man braucht nämlich nur zu berücksichtigen, daß das Produkt einer Permutationssumme aus E und einer Permutationssumme aus $\mathfrak{E}$, sofern die Anzahl der Argumente dieselbe ist, stets eine Zahl ergibt. Denn multiplizieren wir zunächst zwei Ausdrücke miteinander, von denen der eine $\Xi = \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_r$ ein Produkt von lauter Größen aus E, der andere $\mathfrak{X} = \mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_r$ ein Produkt von lauter Größen aus $\mathfrak{E}$ ist, so können wir das Multiplikationsergebnis $\Xi\mathfrak{X}$ in der Weise ermitteln, daß wir zunächst die beiden mittelsten Faktoren ξ_r und $\mathfrak{x}_1$ miteinander multiplizieren und die dadurch entstandene Zahl als Faktor vor das Produkt setzen. Dadurch sind die Faktoren ξ_{r-1} und $\mathfrak{x}_2$ benachbart geworden. Diese ergeben zusammengefaßt wiederum eine gewisse Zahl, die als solche ebenfalls mit den übrigen Faktoren vertauscht werden kann usw. Es wird also immer davon Gebrauch gemacht, daß das Produkt von zueinander dualen Größen ξ und $\mathfrak{x}$ gleichbedeutend mit einer Zahl ist. Man erhält so schließlich

(22) $$\xi_1 \ldots \xi_r \mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_r = \xi_r \mathfrak{x}_1 \, \xi_{r-1} \mathfrak{x}_2 \ldots \xi_1 \mathfrak{x}_r .$$

Hieraus folgt:

(23) *Jeder der Ausdrücke*

$$(\xi_1, \ldots, \xi_r)\, \mathfrak{x}_r \ldots \mathfrak{x}_1 = \frac{1}{r!} (\xi_1, \ldots, \xi_r)\, (\mathfrak{x}_r, \ldots, \mathfrak{x}_1) = \xi_1 \ldots \xi_r (\mathfrak{x}_r, \ldots, \mathfrak{x}_1)$$

ist einer Determinante gleich, in deren i ter Zeile und k ter Spalte das einer Zahl gleichwertige Produkt $\xi_i \mathfrak{x}_k$ steht.[1])

Bilden wir alle Permutationssummen zu r Argumenten aus den linear unabhängigen Größen entweder von $\mathfrak{E}$ oder von E, so verschwinden nach (6) nur diejenigen nicht, die lauter verschiedene Argumente haben. Unter diesen sind nach (3) auch noch diejenigen mit positivem oder negativem Vorzeichen gleich, die sich nur durch die Reihenfolge der Argumente unterscheiden. Es bleiben also $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ voneinander verschiedene übrig.

Wir denken uns nun zwischen diesen voneinander verschiedenen Permutationssummen eine lineare Gleichung und multiplizieren diese, wenn es sich um Permutationssummen aus $\mathfrak{E}$ handelt, vorgreifend mit

1) Setzt man insbesondere $\xi_i = \nu_i$ und bezeichnet den konstanten Faktor $(\nu_1, \ldots, \nu_r)$ mit Δ, so ist $\Delta \mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_r$ oder $\Delta (\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r) : r!$ die Determinante aus den Koordinaten der Größen $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r$. Aus dieser Beziehung läßt sich, wie dies bereits Graßmann in der Ausdehnungslehre getan hat, die Theorie der Determinanten entwickeln.

den Permutationssummen von gleichvielen Argumenten aus E. Handelt es sich dagegen um Permutationssummen aus E, so multiplizieren wir folgerecht mit den Permutationssummen aus 𝔈. In beiden Fällen finden wir so, daß sämtliche Koeffizienten der Gleichung verschwinden, d. h.

(24) *Bildet man aus den unabhängigen Größen eines auf Dualität abgestellten Gebietes die Permutationssummen von r Argumenten (r eine beliebige Anzahl), so gibt es unter ihnen im Ganzen* $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ *voneinander und von Null verschiedene. Sie sind linear voneinander unabhängig. Der Inbegriff der aus ihnen linear abgeleiteten Größen bildet ein Gebiet, das wiederum auf Dualität abgestellt ist.*

Nehmen wir irgendein in 𝔈 oder E enthaltenes Gebiet, das aus r unabhängigen Größen linear abgeleitet sei. Die aus diesen unabhängigen Größen gebildete Permutationssumme bleibt längs des Gebietes ungeändert, wie aus Satz (4) und (5) folgt, höchstens daß sie mit einem anderen Zahlenkoeffizienten versehen erscheint. Gehen wir dagegen zu einem von ihm verschiedenen Gebiete über, so ändert sich nach (24) die Permutationssumme sofort. Zur eindeutigen Bezeichnung eines Gebietes ist es daher ausreichend, wenn die Permutationssumme angegeben wird, die zu Argumenten die unabhängigen Größen des Gebietes hat.[1])

Es ist also der Inbegriff derjenigen Größen aus 𝔈, die aus $\mathfrak{a}_1$ bis $\mathfrak{a}_r$ linear ableitbar sind, durch die Permutationssumme $\mathfrak{A} = (\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r)$ bestimmt, so daß wir dieses Gebiet das Gebiet $\mathfrak{A}$ nennen können. Entsprechend ist mit $\mathsf{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_r)$ der Inbegriff derjenigen Größen aus E gemeint, die aus β_1 bis β_r linear ableitbar sind. Demnach können wir z. B. setzen:

$$(25) \qquad \mathfrak{E} = (\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_n), \qquad \mathsf{E} = (\nu_1, \ldots, \nu_n).$$

V. Vereinte und gleiche Lage von Gebieten.

Die gegenseitigen Beziehungen zwischen Untergebieten von 𝔈 und E müssen sich nach dem Ergebnis von Abschnitt IV in den Permutationssummen widerspiegeln, durch die sie bezeichnet werden. Als solche Beziehungen kommen zunächst die Begriffe der vereinten bzw. gleichen Lage in Betracht:

(26) Von einer in 𝔈 enthaltenen Größe $\mathfrak{x}$ und einer in E enthaltenen Größe ξ sagen wir mit Rücksicht auf (18) die **vereinte Lage** aus, wenn $\xi\mathfrak{x}$ verschwindet.

1) Hier tritt wiederum der Unterschied des kollinearen und des auf Dualität abgestellten Gebietes zutage. Sind A_1 bis A_r Größen eines kollinearen Gebietes, so ist $(A_1, \ldots, A_r)$ aus A_1 bis A_r linear ableitbar; die Permutationssumme genügt dann also nicht zur Bezeichnung eines Gebietes.

(27) Wenn ein in $\mathfrak{E}$ enthaltenes Gebiet $\mathfrak{A}$ und ein in E enthaltenes Gebiet B in der Beziehung stehen, daß jede Größe von $\mathfrak{A}$ mit jeder Größe von B vereint liegt, so sagen wir, B habe dieselbe Lage in E, wie sie $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{E}$ hat, sofern B bei gegebenem $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{A}$ bei gegebenem B das umfassendste derartige Gebiet in E bzw. $\mathfrak{E}$ ist. Von $\mathfrak{A}$ und B sagen wir in diesem Falle auch, sie seien **gleichliegend** in $\mathfrak{E}$ und E.

Unter Zugrundelegung dieser Begriffsbestimmung lassen sich die nachstehenden Sätze der Reihe nach beweisen:

(28) *Eine Größe* ξ *aus* E *liegt dann und nur dann mit allen Größen eines Gebietes* $(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r)$ *aus* $\mathfrak{E}$ *vereint, wenn sie mit jeder der unabhängigen Größen dieses Gebietes vereint liegt, d. h. wenn* $\xi\mathfrak{a}_i = 0$ *ist für* $i = 1, \ldots, r$.

(29) *Das Gleichungensystem* $\xi\mathfrak{a}_i = 0$ $(i = 1, \ldots, r)$ *ist gleichbedeutend mit der einen Beziehung* $\xi(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r) = 0$.

(30) *Eine Größe* ξ *aus* E *liegt dann und nur dann mit allen Größen eines in* $\mathfrak{E}$ *enthaltenen Gebietes* $\mathfrak{A}$ *vereint, wenn das Produkt* $\xi\mathfrak{A}$ *verschwindet.*

(31) *Ist* $\mathfrak{A}$ *ein Gebiet aus* $\mathfrak{E}$ *und* B *ein Gebiet aus* E, *so verschwindet das Produkt* $\mathsf{B}\mathfrak{A}$, *sobald* $\mathfrak{A}$ *und* B *dieselbe Lage in* $\mathfrak{E}$ *und* E *haben.*

(32) *Ist* $\mathfrak{A}$ *ein rfach ausgedehntes Gebiet aus* $\mathfrak{E}$ *und* B *ein mfach ausgedehntes Gebiet aus* E, *so gibt es, wenn* $m > r$ *ist, in* B *mindestens* $m - r$ *voneinander unabhängige Größen, die mit jeder Größe von* $\mathfrak{A}$ *vereint liegen; ist andererseits* $m < r$, *so gibt es in* $\mathfrak{A}$ *mindestens* $r - m$ *voneinander unabhängige Größen, die mit jeder Größe von* B *vereint liegen.*

Der Begriff der vereinten Lage war bisher nur für einzelne Größen definiert; mit Rücksicht auf (32) sei gesagt:

(33) Gebiete liegen **vereint**, wenn die in (32) angegebene Mindestzahl von unabhängigen vereint liegenden Größen überschritten wird.

(34) *Ist* $\mathfrak{A}$ *ein Gebiet aus* $\mathfrak{E}$ *und* B *ein Gebiet aus* E, *so verschwindet das Produkt* $\mathsf{B}\mathfrak{A}$ *dann und nur dann, wenn* B *mit* $\mathfrak{A}$ *vereint liegt.*

(35) *Das Produkt* $\mathsf{B}\mathfrak{A}$ *eines mfach ausgedehnten Gebietes* B *aus* E *und eines rfach ausgedehnten Gebietes* $\mathfrak{A}$ *aus* $\mathfrak{E}$ *bedeutet, wenn* $m > r$ *ist, das umfassendste Gebiet aus* B, *von dem jede Größe mit jeder Größe von* $\mathfrak{A}$ *vereint liegt. Es ist* $m - r$*fach ausgedehnt. — Ist dagegen* $m < r$, *so bedeutet das Produkt* $\mathsf{B}\mathfrak{A}$ *das umfassendste Gebiet aus* $\mathfrak{A}$, *von dem jede Größe mit jeder Größe von* B *vereint liegt. Es ist* $r - m$*fach ausgedehnt.*

(36) *Ist* $\mathfrak{A}$ *ein beliebiges Gebiet aus* $\mathfrak{E}$, *so bedeutet* $\mathsf{E}\mathfrak{A}$ *dasjenige Gebiet, das in* E *dieselbe Lage hat wie* $\mathfrak{A}$ *in* E.

(37) *Ist* B *ein beliebiges Gebiet aus* E, *so bedeutet* $\mathsf{B}\mathfrak{E}$ *dasjenige Gebiet, das in* $\mathfrak{E}$ *dieselbe Lage hat wie* B *in* E.

Damit ist die Bestimmung des einen von zwei gleichliegenden Gebieten aus dem anderen geleistet.

VI. Beispiele aus der Geometrie.

Für den projektiven Raum liefern die Sätze (35) bis (37) folgende Bedeutung der Permutationssummen und ihrer Produkte.

Wir bezeichnen jedes zweifach ausgedehnte Gebiet als **Büschel**, jedes dreifach ausgedehnte Gebiet als **Bündel.** Die aus Punkten oder Ebenen gebildeten Büschel und Bündel kann man einerseits durch Größen ausdrücken, die in ihnen enthalten sind:

(38)
- $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ = Punktbüschel, der die Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ enthält (d. h. Gerade durch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$),
- (α, β) = Ebenenbüschel, der die Ebenen α und β enthält,
- $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ = Punktbündel, der die Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ enthält,
- (α, β, γ) = Ebenenbündel, der die Ebenen α, β, γ enthält.

Mit der Abkürzung

$$(39)\quad \begin{cases} \mathfrak{J} = (\mathfrak{n}_0, \mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \mathfrak{n}_3), \\ \mathsf{I} = (\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3) \end{cases}$$

ist ferner für beliebige Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ und beliebige Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

$$(40)\quad \begin{cases} (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}) = p\mathfrak{J} & (p = \mathsf{I}\,\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}), \\ (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = q\,\mathsf{I} & (q = \alpha\beta\gamma\delta\mathfrak{J}), \end{cases}$$

wobei p und q bloße Zahlen sind, nämlich die Determinanten aus den Ableitungszahlen von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ in bezug auf $\mathfrak{n}_0$ bis $\mathfrak{n}_3$ bzw. aus den Ableitungszahlen von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in bezug auf ν_0 bis ν_3.

$\mathfrak{J}$ bezeichnet den Punktraum, I (Jota) den Ebenenraum.

Andererseits kann man nach (36) und (37) diese Gebiete auch durch die mit ihnen gleichliegenden Gebiete ausdrücken und bekommt so als Ebenengebiete durch Verbinden von Punkten:

(41)
- $\mathsf{I}\,\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ = Ebene, die durch die Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ geht,
- $\mathsf{I}\,\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ = Ebenenbüschel, dessen Achse durch die Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ geht,
- $\mathsf{I}\,\mathfrak{a}$ = Ebenenbündel, dessen Zentrum der Punkt $\mathfrak{a}$ ist;

ferner als Punktgebiete durch Schneiden von Ebenen:

(42)
- $\alpha\beta\gamma\mathfrak{J}$ = Punkt, der auf den Ebenen α, β und γ liegt,
- $\alpha\beta\mathfrak{J}$ = Punktbüschel, der auf den Ebenen α und β liegt,
- $\alpha\mathfrak{J}$ = Punktbündel, dessen Punkte in der Ebene α liegen.

Schließlich zerfällt hier Satz (35) in die folgenden Beziehungen:

(43)
$\Gamma\mathfrak{a}$ = Ebenenbüschel, der in dem Bündel Γ enthalten ist, und dessen Achse durch den Punkt $\mathfrak{a}$ geht,
$\Gamma\mathfrak{B}$ = Ebene des Bündels Γ, die durch den Punktbüschel $\mathfrak{B}$ geht,
$\mathsf{B}\mathfrak{a}$ = Ebene des Büschels B, die durch den Punkt $\mathfrak{a}$ geht,
$\mathsf{B}\mathfrak{C}$ = Punkt des Bündels $\mathfrak{C}$, der auf der Achse des Ebenenbüschels B liegt,
$\alpha\mathfrak{B}$ = Punkt des Büschels $\mathfrak{B}$, der auf der Ebene α liegt,
$\alpha\mathfrak{C}$ = Punktbüschel, der in dem Bündel $\mathfrak{C}$ enthalten ist, und dessen Achse auf der Ebene α liegt.

VII. Artbestimmung der Größen.

Jeder Ausdruck, der aus den Größen zweier zueinander dualer Gebiete $\mathfrak{E}$ und E durch wiederholte Anwendung der Addition und Multiplikation gebildet ist, ergibt, wenn man sich dabei nach dem distributiven Gesetze alle Klammern aufgelöst denkt, jedenfalls eine Summe von Produkten, deren Faktoren Größen teils aus $\mathfrak{E}$, teils aus E sind.

Beachten wir nun, daß jedesmal, wenn von zwei benachbarten Faktoren eines Produktes der erste eine Größe aus E, der zweite eine Größe aus $\mathfrak{E}$ ist, diese beiden Faktoren ausmultipliziert eine Zahl ergeben, die wir an eine beliebige Stelle innerhalb des ganzen Produktes bringen können, so läßt sich dieses so lange vereinfachen, bis die übrig bleibenden Faktoren, abgesehen von einem Zahlenkoeffizienten, aus einer Anzahl Größen aus $\mathfrak{E}$ und einer darauf folgenden Anzahl Größen aus E bestehen, d. h.

(44) *Jede ganze rationale Funktion von Größen aus dualen Gebieten läßt sich als Summe von Produkten angeben, deren jedes die Form*

$$a\mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_l \gamma_1 \ldots \gamma_m$$

hat, wobei a eine Zahl, die darauf folgenden l Faktoren aus den unabhängigen Größen des primären Gebietes und die letzten m Faktoren aus denen des sekundären Gebietes linear abgeleitet sind.

Von einem Produkte, das auf diese Form gebracht ist, sagen wir, es sei **irreduzibel**, und zwar von der **Art** l, m. Ferner wollen wir eine Summe, bei der jeder Summand ein irreduzibles Produkt dieser Art ist, eine Größe der Art l, m nennen.[1])

1) Werden die Größen dualer vierfach ausgedehnter Gebiete als Punkte und Ebenen des projektiven Raumes gedeutet, so sind also die

Punkte	Größen der Art 1, 0,	Ebenen	Größen der Art 0, 1,
Punktbüschel	„ „ „ 2, 0,	Ebenenbüschel	„ „ „ 0, 2,
Punktbündel	„ „ „ 3, 0,	Ebenenbündel	„ „ „ 0, 3.

Schließlich ist der Punktraum eine Größe der Art 4, 0, der Ebenenraum eine Größe

Sind die Größen der Art 1, 0 aus den unabhängigen Größen $\mathfrak{n}_1$ bis $\mathfrak{n}_n$ und andererseits die Größen der Art 0, 1 aus den unabhängigen Größen ν_1 bis ν_n linear abgeleitet, so läßt sich nach (44) jede andere Größe aus gewissen Bezugsgrößen linear ableiten, d. h. aus Produkten derselben Art, deren Faktoren aus den $\mathfrak{n}$ und ν ausgewählt sind. Aus der Annahme einer linearen Gleichung zwischen diesen Bezugsgrößen folgt vermöge (23) das Verschwinden aller ihrer Koeffizienten, d. h.

(45) *Die n^{l+m} Produkte*

$$\mathfrak{n}_{r_1} \dots \mathfrak{n}_{r_l} \nu_{s_1} \dots \nu_{s_m},$$

aus denen jede Größe der Art l, m linear ableitbar ist, sind linear voneinander unabhängig.

Hieraus folgt:

(46) *Ein irreduzibles Produkt kann nur dadurch verschwinden, daß mindestens ein Faktor verschwindet.*

Werden Größen gegebener Art miteinander multipliziert, so gilt folgendes:

(47) *Gehört der erste Faktor der Größenart l_1, m_1 an, der zweite der Größenart l_2, m_2, so ist ihr Produkt, wenn $m_1 \leqq l_2$ ist, von der Art $l_1 + l_2 - m_1, m_2$. Ist dagegen $m_1 \geqq l_2$, so ist es von der Art $l_1, m_1 + m_2 - l_2$.*

Die Differenz $l - m$ bezeichnet man als **Stufenzahl** der betreffenden Größe:

(48) *Die Stufenzahl eines Produktes ist gleich der Summe der Stufenzahlen der einzelnen Faktoren.*

Die Zahl 0 kann als Spezialfall der Größen jeder beliebigen Art aufgefaßt werden (d. h. sie bezeichnet eine Größe unbestimmter Art). Die übrigen Zahlen bilden, seien sie nun reell oder komplex, die Größen von der Art 0, 0.

Will man die einzelnen Größenarten auch in der Schrift als solche kennzeichnen, so kann man etwa für die Größen nullter Stufe lateinische Buchstaben verwenden (und zwar insbesondere für die Zahlen kleine lateinische Buchstaben), ferner für die Größen positiver Stufenzahl

---

der Art 0, 4. Die Kollineationen von Punkten oder Ebenen sind Größen von der Art 1, 1.

Die übrigen Größen sind ebenfalls sämtlich einer entsprechenden geometrischen Deutung fähig. Z. B. lassen sich die symmetrischen Größen der Art 0, m als Flächen $m$ter Ordnung auffassen, die symmetrischen Größen der Art l, 0 als Flächen $l$ter Klasse.

Verschwindet weder l noch m, so kann man die betreffende Größe, wenn $l = m$, als Transformation deuten, sonst als Korrelation, d. h. als Beziehung zwischen ungleichartigen Größen.

deutsche Buchstaben (insbesondere für die Größen der Art 1, 0 kleine deutsche Buchstaben) und schließlich für die Größen negativer Stufenzahl griechische Buchstaben (insbesondere für die Größen der Art 0, 1 kleine griechische Buchstaben).

VIII. Kollineare Gebiete.

Die Größen nullter Stufe werden uns zu einer aus Addition und Multiplikation zusammengesetzten Operation führen.

Eine beliebige Größe nullter Stufe, bei der also die beiden Zahlen, die die Art bestimmen, einander gleich sind, und die etwa der Art k, k angehöre, ist aus den n^{2k} Produkten

$$\mathfrak{n}_{r_1} \ldots \mathfrak{n}_{r_k} \nu_{s_1} \ldots \nu_{s_k}$$

als Bezugsgrößen linear ableitbar. Das Produkt je zweier der Bezugsgrößen ist vermöge der die Dualität ausdrückenden Beziehungen (14) wiederum eine dieser Bezugsgrößen. Denken wir uns daher für ein bestimmtes k den Inbegriff aller Größen nullter Stufe, so ist das Produkt je zweier von ihnen aus denselben unabhängigen Größen linear ableitbar wie sie selbst.

Wir sagen nun, ein Gebiet sei **kollinear**[1]), wenn für alle seine Größen das kollineare Gesetz der Multiplikation gilt, d. h. wenn das Produkt je zweier wieder dem Gebiete angehört.[2]) Dann besteht der Satz:

(49) *Enthält ein Gebiet nur alle Größen nullter Stufe derselben Art, so ist es ein kollineares Gebiet.*

Wir bezeichnen deshalb jede Größe nullter Stufe als kollineare Größe. Sind die Zahlen, die die Art bestimmen, gleich k, so nennen wir sie eine **kollineare Größe** $k$ter Art. Das Produkt zweier kollinearer Größen $k$ter Art ist hiernach wieder eine kollineare Größe $k$ter Art.

Wir nennen ferner den Inbegriff aller kollinearen Größen $k$ter Art das vollständige kollineare Gebiet $k$ter Art. Jede aus kollinearen Größen $k$ter Art gebildete Gruppe ist ein Untergebiet von ihm und sei ein kollineares Gebiet $k$ter Art genannt. Mit Rücksicht auf die Anzahl der Bezugsgrößen gilt folgendes:

---

1) Die von einem Gebiete gebrauchten Aussagen kollinear und auf Dualität abgestellt, schließen sich gegenseitig aus (wenn man von dem Gebiet der Zahlen absieht, von dem beide Aussagen zugleich gelten). Es ist jedoch denkbar, daß es Gebiete gibt, die weder das eine noch das andere sind.

2) Ein kollineares Gebiet hat also doppelte Gruppeneigenschaft, da es bereits als Gebiet die Eigenschaft besitzt, daß die Summe je zweier seiner Größen ihm angehört.

(50) *Sind zwei zueinander duale Gebiete nfach ausgedehnt, so ist das von ihnen erzeugte vollständige kollineare Gebiet kter Art n^{2k}fach ausgedehnt* $(k = 0, \ldots, \infty)$.

Das vollständige kollineare Gebiet nullter (bzw. erster) Art ist der Inbegriff der Zahlen (bzw. Kollineationen).

Ist S eine kollineare Größe $k$ter Art und A eine beliebige Größe, die etwa zur Art l, m gehöre, so ist nach (47) für $k \leqq l$ das Produkt SA und für $m \geqq k$ das Produkt AS wiederum eine Größe der Art l, m, d. h.

(51) *Liegt der Inbegriff aller Größen der Art l, m vor, so werden dessen Größen dadurch untereinander transformiert, daß man jede vorgreifend mit einer beliebigen Größe des vollständigen kollinearen Gebietes $k$ter Art* $(k = 1, \ldots, l)$ *multipliziert. Andererseits werden sie auch dadurch untereinander transformiert, daß man eine jede von ihnen mit einer beliebigen Größe des vollständigen kollinearen Gebietes $i$ter Art* $(i = 1, \ldots, m)$ *folgerecht multipliziert.*

Insbesondere existiert unter den Größen jedes vollständigen kollinearen Gebietes eine, die das Transformationsobjekt ungeändert läßt. Um die zu bestimmen, gehen wir von demjenigen Untergebiete des vollständigen kollinearen Gebietes $k$ter Art aus, das von dem vollständigen kollinearen Gebiete erster Art erzeugt wird.

Eine beliebige kollineare Größe erster Art (also eine Kollineation) T führt, wie wir sahen, die Größen eines Gebietes $(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r)$ einzeln in die Größen des Gebietes

$$(T\mathfrak{x}_1, \ldots, T\mathfrak{x}_r) = U(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r)$$

über. Will man nun angeben, wie das Gebiet als solches transformiert wird, so handelt es sich darum, U als Funktion von T zu bestimmen.

Diese Aufgabe läßt sich darauf zurückführen, zu einer gegebenen kollinearen Größe T eine andere V so zu bestimmen, daß die Gleichung $\mathfrak{x}T = V\mathfrak{x}$ die zur Art 1; 0 gehörige Größe $\mathfrak{x}$ beliebig läßt. Wir bekommen als Lösung $V = T^*$, wobei gesetzt ist

$$T^* = \mathfrak{n}_1 T \nu_1 + \cdots + \mathfrak{n}_n T \nu_n,$$

und können dieses Ergebnis sogleich dahin verallgemeinern:

(52) *Ist A eine Größe beliebiger Art und setzt man*

$$A^* = \mathfrak{n}_1 A \nu_1 + \cdots + \mathfrak{n}_n A \nu_n,$$

so ist für jede Größe $\mathfrak{x}$ der Art 1; 0 *und für jede Größe ξ der Art* 0; 1

$$\mathfrak{x}A = A^*\mathfrak{x}, \quad A\xi = \xi A^*.$$

Indem wir die Operation, durch die A^* aus A entstanden ist, wiederholt anwenden und

(53) $$A^{*^{r+1}} = (A^{*^r})^*$$

definieren, kommen wir zu dem Ergebnis:

(54) *Für jede Größe* $\mathfrak{X}$ *der Art* $r, 0$ *und für jede Größe* Ξ *der Art* $0, r$ *ist*

$$A^{*^r}\mathfrak{X} = \mathfrak{X}A, \quad \Xi A^{*^r} = A\Xi.$$

Hierbei ist nichts darüber vorausgesetzt, welcher Größenart A *angehört.*

Für die Operation, die durch das Symbol $*$ angedeutet ist, bestehen vermöge der Definitionsgleichung (52) folgende Rechengesetze[1]):

(55) *Sind* A *und* B *Größen beliebiger Art,* c *dagegen eine Zahl, so ist*

$$(cA)^* = cA^*,$$
$$(A+B)^* = A^* + B^*,$$
$$(AB)^* = A^*B^*.$$

A^* war durch (52) als Funktion von A und den unabhängigen Größen der Art $1; 0$ sowie denen der Art $0; 1$ definiert. Denkt man sich dieselbe Funktion von A und irgendwelchen neuen unabhängigen Größen gebildet, so ergibt die Ausrechnung:

(56) *Die durch das Symbol* $*$ *bezeichnete Operation ist unabhängig davon, welche Lage die unabhängigen Größen* $\mathfrak{n}_1$ *bis* $\mathfrak{n}_n$ *bzw.* ν_1 *bis* ν_n *der zueinander dualen Gebiete haben, sofern nur die Beziehungen* $\nu_i\mathfrak{n}_i = 1$ *und* $\nu_i\mathfrak{n}_k = 0$ $(k \neq i)$ *erhalten bleiben.*

Um nun auf den vorliegenden Fall zurückzukommen, so wird

$$(T\mathfrak{x}, T\mathfrak{y}) = TT^*(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$$

und ebenso zur Bezeichnung dafür, wie die aus Größen der Art $0; 1$ gebildeten Gebiete als solche ineinander transformiert werden,

$$(\xi T, \eta T) = (\xi, \eta)T^*T.$$

Die zunächst anscheinend verschieden zusammengesetzten Transformationen TT^* und T^*T sind einander gleich; denn es läßt sich zeigen:

(57) *Ist* T *eine kollineare Größe erster Art, so sind die Ausdrücke* $R = T^{*^r}$ *und* $S = T^{*^s}$ *bei beliebigen Anzahlen* r *und* s *miteinander vertauschbar, indem* $RS = SR$.

Infolgedessen kann man T^* als eine Potenz mit der Grundzahl T und dem Exponenten $*$ betrachten. Wir setzen demnach

(58) $$T^{*^r}T^{*^s} = T^{*^r + *^s}.$$

1) Die Sätze, die Hurwitz (Math. Ann. 45, 388, 1894) für die Produkttransformation von A und B angegeben hat, lassen sich auf (55) zurückführen, da diese Produkttransformation den Ausdruck AB^* bedeutet.

Führen wir noch die Abkürzungen ein

(59) $$1 + * + *^2 + \cdots + *^{r-1} = *_r,$$

so ist z. B. $TT^* = T^*T = T^{*_2}$ usw., so daß

(60) $$\begin{cases} (T\mathfrak{x}_1, \ldots, T\mathfrak{x}_r) = T^{*_r}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r), \\ (\xi_1 T, \ldots, \xi_r T) = (\xi_1, \ldots, \xi_r)\, T^{*_r}, \end{cases}$$

und zwar für beliebige der Art 1, 0 angehörige Größen $\mathfrak{x}_1$ bis $\mathfrak{x}_r$ und beliebige der Art 0, 1 angehörige Größen ξ_1 bis ξ_r, d. h.

(61) *Wird eine Kollineation T auf alle Größen zweier zueinander dualen $n$fach ausgedehnten Gebiete ausgeführt, so gehen dabei die $r$fach ausgedehnten Untergebiete durch die Transformation T^{*_r} ineinander über, die eine kollineare Größe $r$ter Art ist.*

Nimmt man für T insbesondere die identische Kollineation

(62) $$1^* = \mathfrak{n}_1 \nu_1 + \cdots + \mathfrak{n}_n \nu_n,$$

so gilt folgendes:

(63) *Unter den Transformationen, deren Inbegriff das vollständige kollineare Gebiet $k$ter Art ausmacht, ist $(1^*)^{*_k} = 1^{*^k}$ die identische Transformation. Sie hat außerdem die Eigenschaft, jede Größe $\mathfrak{A}$ von der Art l, m, bei der m beliebig und $l \geq k$ ist, ungeändert zu lassen, indem $1^{*^k}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$, ferner auch jede Größe A von der Art r, s, bei der r beliebig und $s \geq k$ ist, indem $\mathsf{A}\,1^{*^k} = \mathsf{A}$.* — Insbesondere läßt die identische Transformation nullter Art (also die Zahl 1) sowohl bei vorgreifender als auch bei folgerechter Multiplikation jede Größe ungeändert.

(Eingegangen am 25. 9. 26.)

Zur Geschichte der Infinitesimalrechnung bis Leibniz und Newton.

Von EDMUND HOPPE in Göttingen.

Mit 2 Figuren im Text.

In dem letzten Jahrzehnt ist die Entstehungsgeschichte der höheren Analysis in vielen Punkten so aufgeklärt worden, daß man heute mit völliger Klarheit die Verdienste der Einzelnen nachweisen kann. Wir verdanken diesen großen Fortschritt den Arbeiten zweier Gelehrter, während die sowohl in englischer als auch in deutscher Sprache veröffentlichten Geschichten dieser Periode teils zu oberflächlich, teils zu tendenziös gehalten sind. Professor R. P. H. Bosmans in Brüssel hat durch eine lange Reihe wertvoller Arbeiten die Geschichte der Infinitesimalrechnung in der Zeit von 1600 bis zum Eintreten von Leibniz wesentlich aufgehellt, besonders ist es die Klarstellung über das Verdienst

Pascals, sein Verhältnis zu Fermat, Roberval, Descartes und damit die Bewertung seines Einflusses auf Leibniz, der ja von Leibniz selbst mehrfach betont ist. Wir werden Einzelheiten unten angeben. Der andere Gelehrte ist Professor Dr. Mahnke in Greifswald, der in den Abhandlungen der Berliner Akademie zur Feier des 250 jährigen Bestehens der Differentialrechnung eine große Arbeit unter dem Titel: Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte der Höheren Analysis veröffentlicht hat.[1]) Bisher ist wohl allgemein angenommen, daß der Herausgeber der Mathematischen Schriften und des Briefwechsels von Leibniz mit verschiedenen Mathematikern, C. J. Gerhardt, den Nachlaß von Leibniz so gründlich durchgearbeitet hätte, daß daraus kaum noch etwas zu verwenden wäre. Mahnke zeigt uns in seiner Arbeit, wo er jeden Satz durch Zitate sichert, daß Gerhardt über sehr vieles hinweggesehen und einiges garnicht beachtet hat, was für die zeitliche Feststellung der einzelnen Schritte zur höheren Analysis von ausschlaggebender Bedeutung war. Durch diese Arbeit Mahnkes ist nun unzweideutig nachgewiesen, daß die von Leibniz wiederholt ausgesprochene Behauptung, er habe nur Pascal, Huygens und Gregorius v. Vincentio vor seinen ersten Entdeckungen auf diesem Gebiet gekannt, durchaus auf Wahrheit beruht. Denn es zeigt sich nun, daß die wichtigsten Entdeckungen Leibnizens bis in den Anfang des Jahres 1673 zurückgehen, wo er die Arbeiten der Engländer noch nicht studiert hatte. Hoffentlich wird nun endlich auch in der englisch schreibenden Gelehrtenwelt die Methode niedriger Verdächtigungen aufgegeben werden, und hoffentlich ermannen sich die Herren Child, Smith und Sullivan zur öffentlichen Zurücknahme ihrer abfälligen Äußerungen über Leibniz. Man soll auch die Ehre eines Toten achten! Es ist mir nun schon seit langer Zeit aufgefallen, daß die Herren, welche zu dem Streit Newton — Leibniz öffentlich Stellung genommen haben, so wenig Wert darauf legen, daß Leibniz bei seiner Verteidigung immer wieder auf das „charakteristische Dreieck“ hinweist. Soll das nur ein äußeres Merkmal sein, oder will Leibniz damit etwas wertvolles sagen? Ich glaube das letztere und will im folgenden beweisen, daß tatsächlich hier ein Moment gegeben ist, welches Leibniz vor jedem Verdacht, von Newton oder seinen Vorgängern abgeschrieben zu haben, prinzipiell sichert. Es gibt eben zwei Wege zum Ziel, die Infinitesimalrechnung zu begründen, und die sind grundverschieden, das will Leibniz sagen. Der eine Weg ist von Newton und seinen Vorgängern, der andere von Leibniz und seinen Nachfolgern gegangen. Diese beiden Wege möchte ich historisch verfolgen.

1) Auch als Einzelabhandlung bei Walter de Gruyter 1926 erschienen.

Leibniz sowohl als Newton nennen beide Archimedes als einen Vorläufer und doch in verschiedenem Sinne. Wir sind heute nun imstande, noch über Archimedes hinauszugehen, um die Anfänge der Infinitesimalrechnung zu finden. Der außerordentlich wertvollen Arbeit Kuglers[1]) über die Babylonische Mondrechnung verdanken wir die Kenntnis von Tontafeln, welche uns Darstellungen geben, die wir heute als Differentialquotient bezeichnen. Da das Kuglersche Werk nicht allgemein zugänglich sein dürfte, verweise ich auf meine Darstellung[2]), die sich eng an die Kuglers anschließt. Es geht aus diesen Tafeln hervor, daß die Babylonier um das Jahr 200 v. Chr. eine variabele Größe als Funktion einer anderen darstellten, daß sie den Zuwachs oder die Abnahme des Funktionswertes an einzelnen Stellen feststellten. Da es sich bei diesen Tafeln um periodische Funktionen handelte, wo in gleichen Zeitabständen die wirklichen Werte beobachtet wurden, mußte natürlich der maximale Wert der Funktion nicht gerade mit einem beobachteten zusammenfallen, da fanden diese Astronomen eine Methode, aus den vor und nach dem Maximum oder Minimum beobachteten Werten die Lage des Maximum angenähert zu berechnen. Hervorgegangen sind diese Tabellen und Berechnungen aus den in früherer Zeit nur mit Angaben, ob die beobachteten Werte größer oder kleiner als die Nullage waren, versehenen Tafeln, d. h. es war auf den älteren Tafeln angegeben, ob die Breite des Mondes nördlich oder südlich war. Etwas später wird dann die Angabe nördlich durch ein *u* = + und südlich durch ein *lal* = — ersetzt. In den jüngsten Tafeln aber wird für die gemessenen Punkte noch hinzugesetzt, ob die Änderung der Breite + oder — ist. Wenn also für eine vollständige Periode vom aufsteigenden Knoten bis zum nächsten Aufstieg die beobachteten Breiten in eine Tabelle geordnet sind, so ist in dem ersten Viertel des Umlaufs die Breite positiv und wächst, also bekamen die beobachteten Zahlenwerte die Bezeichnung *uu*, im folgenden Viertel ist die Breite auch noch positiv aber sie nimmt ab, folglich bezeichnet man die Zahlen mit *ulal*; im dritten Viertel nach dem absteigenden Knoten ist die Breite negativ und nimmt weiter ab, die Bezeichnung ist daher *lal lal*, endlich im vierten haben die Zahlen die Anmerkung *lal u*. Da die Babylonier aber auch beobachtet hatten, daß die Geschwindigkeit der Mondbewegung auf seiner Bahn sehr verschieden ist, und sie auch die Änderung der Geschwindigkeit, also die Beschleunigung und Verzögerung messen wollten, hatten sie ein großes Interesse daran, die Lage des Maximum und Minimum genau zu bestimmen. Dazu haben sie mit einer Art Differenzrechnung eine Approxi-

1) Kugler, Die Babylonische Mondrechnung. 1900.
2) Archiv der Mathematik und Physik. III. Bd. XXVIII, p. 100.

mation ausgeführt. Wenn (Fig. 1) A, B, C, D, E die in gleichen Zeitabständen auf der Ekliptik gewählten Ausgangspunkte für die Breitenmessungen sind, so ergeben die Messungen die Punkte B', C', D', E' auf der Bahn mit den Abständen BB', CC' usw. Wenn nun das Maximum der Breite MF zwischen C' und D' liegt, so setzen sie die Ähnlichkeit der Dreiecke $C'OM$ und $D'PM$ voraus, es war ihnen bekannt, $MO - MP = D'D - C'C$ und $C'O + D'P = CD$. Wenn nun angenommen wird, daß das Verhältnis der Breitenzunahme in der Nähe von C' konstant ist, so konnten sie M bestimmen, und bei der Annahme, daß die Breitenabnahme bei D' ebenfalls konstant blieb, so erhielten sie einen zweiten Wert für M und damit eine Approximation an den wahren Wert, die um so genauer wurde, je näher C' und D' aneinander lagen. Eine solche Figur wie oben ist in den Tontafeln natürlich nicht gegeben, sondern es sind die Tabellen mit den entsprechenden Zeichen *uu*, *u lal* usw. eingetragen und die Berechnung des Maximalwertes oder Minimalwertes. Leider ist mit dem Eindringen der Römerherrschaft dieser Anfang funktionalen Denkens an der Weiterentwicklung gehindert worden und in Vergessenheit geraten.

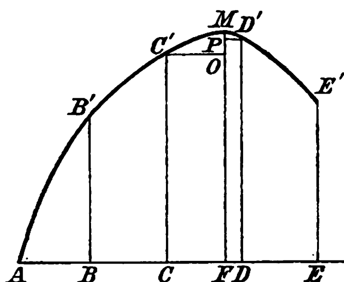


Fig. 1.

In der griechischen Wissenschaft taucht das Problem des Unendlichen schon früh auf. Die Pythagoreer meinten, durch fortgesetztes Hinzufügen von Einheiten gelange man schließlich zum ἄπειρον, dem Unendlichen. Demokrit meinte, durch fortgesetztes Halbieren schließlich zum unendlich Kleinen durchzudringen. Gegen beide Versuche kämpfte Platon.[1]) Durch Hinzufügen von Zahlen kann man wohl zu sehr großen Zahlen aber niemals zu unendlich kommen, und durch fortgesetztes Halbieren kann man zu sehr kleinen Zahlen kommen, aber nie zum unendlich Kleinen. Platon beklagte es schmerzlich[2]), daß es Gelehrte gibt, die ohne weiteres von der Einheit zum Unbegrenzten übergehen wollen. Die Idee der Einheit und Vielheit, welche dem Messen zugrunde liegt, ist etwas durchaus anderes als die Idee der Unbegrenztheit. Alles, was sich wie Zahl zu Zahl oder Maß zu Maß verhält, hat mit ἄπειρον nichts zu tun. Bei diesem Begriff muß man alle Gedanken an Messen und Zählen fortlassen und vollständig trennen: τὸ μὲν ἄπειρον, τὸ δὲ πέρας ἔχον. Um eine Vorstellung zu geben, wie er sich die Ausschaltung alles Begrenzten vorstellt, erinnert er an die Beziehung:

1) Platon: Philebos 17 ff.
2) Philebos 17 A.

wärmer — kälter. Da gibt es keine Grenze, sondern in stetiger Fortbewegung geht das Wärmere in das Kältere über und gerade diese stetige Bewegung gibt eine Idee von der Bedeutung des *ἄπειρον*; denn durch die stetige Bewegung des Unbegrenzten erzeugt man die begrenzten Dinge. So wird der Satz verständlich, den Proklos als einen Satz Platons noch besonders hervorhebt[1]): *σημεῖον ἀρχὴ γραμμῆς* (der Punkt erzeugt die Linie). So kann man sagen, alles Sein ist hervorgegangen aus dem Unbegrenzten, welches zwischen den Grenzen durch stetige Bewegung das Sein erzeugt.[2]) Hier ist also zum erstenmal eine klare Erfassung des Infinitesimalbegriffes. Freilich haben nicht nur die Nachfolger Platons, der große Philosoph Aristoteles und andere, diesen Begriff nicht erfaßt, sondern auch noch in der Gegenwart gibt es Schriftsteller, welche Platon nicht verstehen können, sondern immer wieder auf den alten Aristotelischen Fehler hineinfallen, daß sie meinen, das Unendlichkleine sei durch Teilen zu erreichen. Das war auch der Fehler Demokrits, dessen Vorgehen offenbar Platon mit dem oben zitierten Satz kritisieren wollte. Der erste, welcher Platon vollständig verstanden hat, war Archimedes.

Archimedes hat zunächst die Pythagoreer widerlegt in seinem *ψαμμίτης* (Sandrechner). Dies Buch wird noch immer von einigen so aufgefaßt, als ob Archimedes sich die Aufgabe gestellt hätte, das griechische Zahlsystem zu erweitern, während er Gelon, wie er ausdrücklich sagt[3]), begreiflich machen will, daß das *ἄπειρον* nicht durch die Häufung von Sandkörnern erreichbar sei. Die Erweiterung der griechischen Zahlzeichen ist nur Mittel zu dem Zweck; denn er zeigt, daß man diese Erweiterung ganz beliebig fortsetzen kann, ohne jemals zum Unendlichen zu kommen.

Dann erfahren wir aber auch durch Archimedes, wie die Platonische Schule in Erfüllung der im Philebos gegebenen Vorschriften zu

---

1) Proklos, Comm. in Euklid. I, p. 88.

2) Ich mache besonders auf folgende Stellen aufmerksam: Philebos 17 A *οἱ δὲ νῦν τῶν ἀνθρώπων σοφοὶ ἓν μέν, ὅπως ἂν τύχωσι, τὰ πολλὰ θᾶττον καὶ βραδύτερον ποιοῦσι τοῦ δέοντος, μετὰ δὲ ἓν ἄπειρα εὐθύς . . .*; 18 A *ὥσπερ γὰρ ἓν ὁτιοῦν εἴ τίς ποτε λάβοι τοῦτο, ὥς φαμεν, οὐκ ἐπ' ἀπείρου φύσιν δεῖ βλέπειν εὐθὺς ἀλλ' ἐπί τινα ἀριθμόν, οὕτω καὶ τὸ ἐναντίον . . .*; 24 A *λέγω τοίνυν τὰ δύο, ἃ προτίθεμαι, ταῦτ' εἶναι, ἅπερ νῦν δή, τὸ μὲν ἄπειρον, τὸ δὲ πέρας ἔχον . . .* 25 B *πᾶν ὅ τί περ ἂν πρὸς ἀριθμὸν ἀριθμὸς ἢ μέτρον ᾖ πρὸς μέτρον, ταῦτα ξύμπαντα εἰς τὸ πέρας ἀπολογιζόμενοι καλῶς ἂν δοκοῖμεν δρᾶν τοῦτο . . .* 24 D *προχωρεῖ γὰρ καὶ οὐ μένει τό τε θερμότερον ἀεὶ καὶ τὸ ψυχρότερον ὡσαύτως . . .* 25 D *συμμίγνυ . . . τὸ μετὰ ταῦτα τὴν αὐτοῦ πέρατος γένναν . . .*; 27 D *ξυμπάντων τῶν ἀπείρων ὑπὸ τοῦ πέρατος δεδεμένων.*

3) Archimedes, Opera (Heiberg) II, p. 216. 1913.

einer Behandlung des Unendlichkleinen durchgedrungen ist. Die Männer, welche diese Arbeit leisteten, sind Eudoxos und Archimedes. Archimedes spricht in seinem Buche über die Kugel und den Zylinder von dem Satze, daß die Pyramide der dritte Teil eines Prismas von gleicher Grundfläche und Höhe, der Kegel der dritte Teil des Zylinders von gleicher Grundfläche und Höhe ist, und sagt, der einzige, der dies erkannt habe unter den vielen namhaften Geometern sei Eudoxos.[1]) Aber in der ἔφοδος sagt er, Demokrit habe das Verdienst, zuerst dies Verhältnis ohne Beweis ausgesprochen zu haben.[2]) Diesen scheinbaren Widerspruch haben verschiedene so aufzuhellen versucht[3]), daß Demokrit das Verhältnis mit dem Verfahren des Cavalieri entdeckt habe, „daß das Volumen das Integral ist, d. h. die Summe der unzählig vielen, unendlich kleinen Prismen, deren Grundflächen die veränderlichen Querschnitte sind (Simon). Dagegen habe Eudoxos den Exhaustionsbeweis erfunden und damit den Beweis (ἀπόδειξις) des Satzes geliefert. Daß Eudoxos diese Beweisform, welche in der griechischen Mathematik von außerordentlicher Bedeutung ist, erfunden hat, ist auch durch andere Zitate leicht zu belegen. Aber wie steht es um die Cavalierische Methode bei Demokrit? Simon geht in seiner Behauptung so weit, daß er erklärt, das Demokritische Atom ist das Differential der Masse. Das ist natürlich nicht richtig, denn in jedem Körper ist die Anzahl der Atome (auch im Demokritischen Sinne) stets eine endliche. Wir sind sogar imstande zu beweisen, daß Demokrit den Limesbegriff nicht gehabt hat und eine Integration nicht hat ausführen können. Plutarch berichtet uns[4]), welche Schwierigkeit Demokrit nicht hat überwinden können. Er legt durch den Kegel eine große Anzahl zur Grundfläche paralleler Schnitte und denkt sich über jeder der Schnittflächen einen kleinen Zylinder bis zur nächsten Schnittebene, dann wird die Begrenzung eine treppenförmige, wenn die Schnittebenen untereinander ungleich sind. Sind diese aber untereinander gleich, dann entsteht der Zylinder und nicht der Kegel. Da sich Demokrit nicht zu helfen weiß, sagt er: „Die Schnittflächen sind weder gleich noch ungleich". — Wir sehen also, daß dem Demokrit gerade das fehlt, was Archimedes neu hinzu gebracht hat, nämlich der nach Platons Vorschrift gefaßte Infinitesimalbegriff.

Es ist nun interessant, bei Archimedes den Weg aufzeigen zu

1) Archimedes, Opera I, p. 4. 1900.

2) Ib. II, p. 430. 1913.

3) Simon, Geschichte der Mathematik im Altertum 1909, p. 181 und Heiberg, Hermes 42, p. 300. 1907.

4) Plutarch, De comm. not. adversus Stoicos c. 39. 1079 E.

können, wie er zur Infinitesimalrechnung gekommen ist. In den Büchern über die Kugel und den Zylinder, über Konoide und Sphäroide und über die Spiralen, hat Archimedes Rektifikationen und Quadraturen ausgeführt, indem er die zu messende Kurve oder das zu bestimmende Volumen zwischen die Grenzen eingeschriebener und umschriebener Flächen- oder Volumenstücke einschließt, aus den Grenzwerten den wahren Wert erschließt und dann beweist, daß das gesuchte Volumen nicht größer und nicht kleiner sein kann. Er steht hier also wesentlich noch ganz auf dem Standpunkt des Eudoxos. Die Behandlung des Schwerpunktes (wahrscheinlich schon in dem verlorenen *περὶ ζυγῶν*) in den beiden Büchern über das Gleichgewicht von Ebenen und in den Büchern über schwimmende Körper führt schon dazu, daß er bei Zerlegung der Ebenen die Teile so klein denkt, daß sie zusammen die ganze Figur vollständig ausfüllen und eine Summation zum Ziele führt; aber er hat doch immer noch das Bedürfnis, nachzuweisen, daß der Unterschied zwischen der Summation und der gegebenen Fläche kleiner wird als eine beliebige gegebene Größe. Erst bei der Parabelquadratur kann man in den Sätzen 14 und 15 mit Recht von einer Integration reden, Archimedes nennt die Methode da eine mechanische, aber auch hier ist er noch nicht zu der Freiheit durchgedrungen, die durch die Platonische Vorschrift gegeben war. Diesen Gipfel erstieg Archimedes in der *ἔφοδος*.

Gleich der erste Satz, daß die Fläche des Parabelsegments gleich $^3/_4$ der Fläche des eingeschriebenen Dreiecks über der Sehne mit gleicher Höhe des Segments ist, zeigt den großen Fortschritt gegenüber der Behandlung desselben Satzes in der Arbeit über die Parabelquadratur. Hier setzt er das Segment gleich der Summe aller zur Achse möglichen Parallelen zwischen der Sehne und dem Parabelbogen und ebenso das Dreieck als Summe aller Parallelen in der Dreiecksfläche. Nun zeigt er, daß für alle diese Parallelen das gleiche Verhältnis zwischen dem Abschnitt im Parabelsegment zu dem Abschnitt im Dreieck in bezug auf das Gleichgewicht an einen Hebelarm besteht, darum kann er für die Summe der Abschnitte, d. h. für die Flächen, die gleiche Beziehung setzen. Er summiert aber nicht über eine Anzahl solcher Linien, sondern über die Kontinuität der Linien, d. h. er macht es so, wie Platon im Philebos auseinandergesetzt hat, daß die Kontinuität der Bewegung des *ἄπειρον* die begrenzten Dinge liefert, hier also das Parabelsegment einerseits und die Dreiecksfläche andererseits. Da ist also wirkliche Infinitesimalbetrachtung vorhanden. Daß es sich hier wirklich um die Kontinuität, nicht um eine Anzahl Stücke handelt, hat Archimedes in den 11 Lemmen ausführlich erklärt und damit die

Berechtigung dieses Verfahrens begründet. Aber Archimedes sieht diese Ableitung nicht als einen Beweis an, er gebraucht das Wort *θεωρεῖν*, während die *ἀπόδειξις*, der Beweis, erst durch das Verfahren des Eudoxos geliefert ist. Dann wendet er das gleiche Verfahren auch auf 8 weitere Sätze an, die er schon anderweit bewiesen hat, deren Ableitung durch diese infinitesimale Methode außerordentlich erleichtert wird. Das Werk wird dann gekrönt durch die auf dieselbe Weise gefundenen neuen Sätze über den Zylinderhuf und das Kreuzgewölbe. Wir haben hier also ein ganz ähnliches Verhalten vor uns, wie wir es bei Newton in seiner Mechanik (1687) finden. Auch Newton hat die Sätze wesentlich durch seine Infinitesimalmethode gefunden, aber er sagt, weil diese für viele Leser zu schwer (durior) sei, so wolle er für die Sätze geometrische Beweise beibringen. Aber während Newton seine Methode uns nicht vollständig entwickelt, hat Archimedes sie ausführlich dargestellt, um auch anderen damit einen Weg zu zeigen, wie man neue Tatsachen entdecken kann. Leider brach aber bald nach Archimedes die griechische Kultur zusammen, so daß diese freundliche Absicht des Erfinders nicht erreicht wurde. Der einzige, welcher die *ἔφοδος* noch genau kannte und die beiden neuen Sätze derselben zitierte, war Heron. Nach diesem hat kein Mathematiker des Altertums dies Werk mehr benutzt. Nur in einer literarischen Notiz bei Suidas wird das Werk als *ἐφόδιον* erwähnt. Da der Palimpsest, dem wir die Kenntnis der *ἔφοδος* verdanken, im 10. Jahrh. geschrieben ist, müssen sich doch hier und da wohl noch Handschriften bis zu dieser Zeit erhalten haben. Man könnte daher auf die Idee kommen, daß Luca Valerio bei Abfassung seines Buches de centro gravitatis 1604 noch eine solche Handschrift gehabt habe, da er darin das statische Moment, welches von Archimedes in der *ἔφοδος* zuerst ausführlich benutzt ist, in seine Betrachtungen einführt. Allein es ist auch möglich, daß er die Kenntnis dieses Begriffes durch Heron bekommen hat, denn dieser hat die Archimedessche Methode des statischen Momentes, ohne diese Bezeichnung zu gebrauchen, als einziger aus dem Altertum wiederholt angewandt.

Haben wir durch die *ἔφοδος* des Archimedes den Beweis erhalten, daß die griechische Mathematik zu wirklicher Integration vorgedrungen ist, so wird nun zu fragen sein, ob nicht auch die von den Babyloniern angebahnte Methode durch die Behandlung der Maximum- und Minimumaufgaben in Griechenland eine Weiterbildung oder auch nur ein Analogon gefunden habe. Maximumaufgaben kommen freilich vor. Schon bei Euklid im VI. Buche wird nachgewiesen, daß ein Rechteck aus den Abschnitten einer geraden Linie dann ein Maximum wird, wenn die beiden Abschnitte gleich groß sind (Satz 27). Allein die Ableitung

dieses Satzes hat mit der infinitesimalen Betrachtung gar nichts zu tun. Auch die Betrachtungen über Maximum und Minimum, welche gelegentlich bei Archimedes vorkommen[1]), sind nicht mit infinitesimalen Vorstellungen verbunden. Es handelt sich da stets um eine Determination (διορισμός) der Aufgabe, und es wird festgestellt, wann eine Gleichung eine reelle positive Lösung gibt. Bei Apollonius dagegen finden wir im V. Buche der Kegelschnitte Aufgaben, die über diesen rein konstruktiven Zweck weit hinausgehen. Er sagt selbst, daß, während solche Fragen früher nur für die praktischen Konstruktionen behandelt seien, er diese Maximum- und Minimumfragen um ihrer selbst willen behandeln wolle, denn sie führten zu neuer Erkenntnis. Sehen wir nun aber die einzelnen Sätze und ihre Beweise an, so sind letztere durchaus ohne infinitesimale Vorstellungen gemacht, außerordentlich künstlich und nicht nach einer offensichtlichen Methode, sondern ganz mit solchen Hilfsmitteln durchgeführt, wie sie die damalige griechische Geometrie darbot. Dies Buch des Apollonios macht ganz den Eindruck, als ob er ebenso verfahren wäre wie später Newton, daß er nämlich die Sätze mit einer über die bisherigen Methoden hinausgehenden Betrachtung gefunden habe, aber dann die Beweise nachträglich mit vieler Mühe rein synthetisch aufgebaut habe. Würden wir z. B. annehmen, daß er seine Koordinatenbetrachtungen schon zu einer analytischen Methode erweitert hätte und dann mit einer Art Differenzrechnung die Linienlängen bestimmt hätte, so wäre die Auffindung der Sätze dieses V. Buches nicht mehr wunderbar. Allein eine solche Hypothese steht einstweilen noch ganz in der Luft, und da wir aus dem Altertum keinerlei Belege für eine solche Behandlung haben, darf man nach meiner Überzeugung eine solche Annahme nicht machen. Ebensowenig fallen die isoperimetrischen Aufgaben des Zenodoros, worin Maxima von Flächen gesucht werden, mit der Betrachtung der Babylonier zusammen. Wir müssen also konstatieren, daß in der griechischen Mathematik die infinitesimale Betrachtung wohl für bestimmte Integrale ausgearbeitet war, aber von einer Differentialbetrachtung nicht geredet werden kann. Da begnügt man sich mit dem Exhaustionsverfahren, daß man stets die Differenz zwischen einem zu großen und einem zu kleinen Wert kleiner machen kann als eine beliebige angegebene Größe. Darin liegt freilich der Anfang zum Limes-Begriff, aber es fehlt dabei der Funktionsbegriff, und nur, wenn dieser mit der Übergangsüberlegung verbunden wäre, hätte man von dem Differentialbegriff zu reden das Recht. Aber das mußten wir feststellen, daß, solange man noch von griechischer Mathematik, abgesehen

---

1) Archimedes, Opera I, p. 186ff. (Heiberg 1910).

von Kommentatoren, reden kann, die Integrationsmethode nicht ganz vergessen ist; das beweist Pappos z. B. (Opera II, p. 682) auch bei dem Satz, daß das Volumen eines Rotationskörpers gleich dem Produkt aus rotierender Fläche in den Schwerpunktskreis ist. Es ist mir übrigens nicht sicher, daß der Satz von Pappos selbst gefunden ist, da bei ihm die Ableitung fehlt.

Wir können also von Archimedes um etwa 1400 Jahre weitergehen, ehe wir wieder auf eine Beschäftigung mit Infinitesimalbegriffen stoßen. Zunächst sind es philosophische Bestrebungen, die die unendliche Teilbarkeit im Demokritischen Sinne wieder einführen wollten, das zeigt sich z. B. bei Thomas von Aquino, der auch meint wie Demokrit, durch fortgesetzte Teilung schließlich zu einem unendlich Kleinen, einem Indivisibile kommen zu müssen, was dann als das Element des Aufbaus für die Linie, Fläche oder Körper betrachtet wird. Es ist in der Tat sehr auffallend, daß es Historiker gibt, welche diese Summation als eine Originalleistung von Thomas buchen und erklären, diese Auffassung scheine bei keinem griechischen Mathematiker ausgesprochen zu sein. Nun hat Thomas von Aquino freilich keine mathematische Anwendung von seiner Betrachtung gemacht. Aber ein anderer Thomas, nämlich Bradvardinus (1290—1349), hat wenige Jahre später diese Betrachtung mathematisch zu verwerten gesucht. Gewöhnlich wird sein Name Bradvardinus geschrieben, aber in der Inkunabel, worin seine Geometria speculativa veröffentlicht ist, lautet die Unterschrift Th. Bravardinus. Über diese Arbeiten herrscht noch viel Dunkel. Nach Poggendorffs, wahrscheinlich Chasles entnommenen Angaben, soll er vier Werke geschrieben haben: Arithmetica speculativa, Geometria speculativa, Tractatus de proportionalibus und De quadratura circuli, welche alle vier im Jahre 1495 in Paris gedruckt erschienen sein sollen. Diese Drucke müssen außerordentlich selten sein. Nach vielen Bemühungen ist mir die Geometria speculativa von der Berliner Bibliothek zugänglich gemacht. Versuche, auch die anderen drei Bücher aufzutreiben, sind fehlgeschlagen. Aber es zeigt sich nun, daß diese Geometrie als 3. Abschnitt einen Tractatus de proportionibus et proportionalibus enthält. Es scheint mir daher möglich, da auch der Tractatus de quadratura circuli am Schlusse vorkommt, daß die beiden zuletzt genannten Tractatus nur Abteilungen der Geometria speculativa waren.

Da Cantor nur nach einem Auszuge berichten muß[1]), der offenbar nicht sehr vollständig war, benutze ich diese Gelegenheit, seine An-

1) Cantor, Vorl. über Geschichte der Mathematik II, p. 103.

gaben etwas zu ergänzen, auch wenn es nicht mit dem gegenwärtig behandelten Thema direkt zusammenhängt. Die Geometria speculativa zerfällt in vier Tractatus und einen, scheinbar ursprünglich selbständigen, Anhang, den tractatus de quadratura circuli. Tractatus I zerfällt in fünf Abschnitte, welche die Titel haben: a) de principiis incomplexis, b) de principiis complexis, c) de principiis complexis communibus, d) de lineis, e) de figuris egredientium angulorum, d. h. die Sternpolygone. Cantor erwähnt nur den letzten Abschnitt. Aber gerade die ersten sind von prinzipieller Wichtigkeit. Er will darin den Unterschied des Platonischen ἄπειρον von den begrenzten Dingen festlegen und den Begriff des indivisibile erfassen. Dieser Begriff gehört zu den komplexen Prinzipien, d. h. solchen, die durchaus festgelegt sind, so zählt er zu den Indivisibeln unter anderen den rechten Winkel: est enim forma recti anguli posita in indivisibili et ideo variari non potest. Wir sehen, für Bradvardinus ist das Indivisibile hier nicht identisch mit dem Unendlichklein des Thomas von Aquino. So sind festgelegte Maßeinheiten indivisibel in bezug auf die zu messenden Größen.[1]) Wie sehr ihm hier die Möglichkeit der Messung das wichtigste ist, geht aus dem 4. Kapitel des 2. Tractatus de figuris planis hervor, da bespricht er die Contingenz von Linien und Kreisen und von Kreisen mit Kreisen. Er sagt: angulus contingentiae est omni angulo rectilineo minor, tamen est divisibilis in infinitum. Also weil ein Winkel nur meßbar ist zwischen zwei geraden Linien, so kann der Kontingenzwinkel überhaupt nicht gemessen werden, trotzdem sind diese Winkel, wie er an Figuren zeigt, verschieden groß und daher unendlich teilbar. Aber die verschiedenen Grade der Kontingenz, von denen er redet, zu bestimmen, gelingt ihm nicht. Im 3. Tractatus von den Proportionen ist die Einführung des Begriffes irrational von Bedeutung: Proportio autem irrationalis non denominatur sic immediate ab aliquo numero vel ab aliqua proportione numerali. Aber Größen, die kein gemeinsames Maß haben, die inkommensurabel sind, haben zueinander ein irrationales Verhältnis, z. B. Seite und Diagonale des Quadrats.

Im 4. Tractatus de figuris solidis kommt Bradvardinus im zweiten Kapitel wieder auf die Indivisibeln zurück, wo er von den Linien im Verhältnis zu den Körpern handelt. Da fragt er sich, wenn eine gerade Linie senkrecht auf einer Ebene steht, hat sie dann einen Teil mit der Ebene gemeinsam? Das kann sie nicht, da sie sonst in der Ebene liegen müßte; trotzdem ist etwas von der Linie in der Ebene, das ist nur möglich, wenn es nicht ein Teil der Linie, sondern ein indivisibile ist. Hier

1) Indivisibile est quod nunquam dividi potest.

dringt er also zu dem Unendlichen vor, aber aus dem Unendlichklein kann die Linie nicht aufgebaut werden, denn es ist kein Teil der Linie. Damit ist Bradvardinus also gegenüber Demokrit und Aristoteles wesentlich fortgeschritten. Das Indivisibile ist nicht durch fortgesetzte Teilung zu erreichen und ein Kontinuum kann nicht aus Indivisibeln aufgebaut werden. Darum schneiden sich zwei gerade Linien nur in einem Punkt, der nicht ein Teil der Linien ist, sondern indivisibel.

Der Inkunabel-Druck schließt mit dem Tractatus de quadratura circuli, in dem er nicht über Archimedes hinauskommt, vielmehr meint $\pi = {}^{22}/_{7}$ sei der genaue Wert. Der Band schließt mit den Worten: Et sic explicit Geometria Thomae bravardino (sic!) cum tractatulo de quadratura circuli bene revicta (?) a Petro sanchez ceruelo. Auf dem Titelblatt war kein Name verzeichnet, aber der Druckort Parisiis und das Jahr 1495. Daß dieser Anhang wahrscheinlich unecht sei, hat Chasles nachzuweisen[1]) versucht, weil die Handschriften, welche aus dem 14. Jahrh. stammen, diesen Zusatz nicht haben.[2]) Nun hat M. Curtze in der soeben zitierten Arbeit aus der Handschrift noch einen Tractatus de continuo von Bradvardinus seinem wesentlichen Inhalt nach bekannt gemacht, worin der Verfasser seine Ansichten über das Unendliche weiter entwickelt. Leider ist nicht der ganze Text veröffentlicht, aber die einzelnen Sätze sind zum großen Teil wörtlich zitiert. Daraus geht hervor, daß Bradvardinus in bezug auf die Indivisibilien nicht wesentlich weiter gekommen ist. Er bekämpft darin in erster Linie die Demokritische Ansicht, daß das Kontinuum, welches nach Aristoteles definiert wird, aus Atomen bzw. Indivisibilien aufgebaut werden kann. Der Satz wird in zahlreichen Variationen immer wiederholt, wobei in Satz 137 wohl zum erstenmal das Wort integrari gebraucht wird.[3]) Wenn er dabei behauptet (p. 165), daß auch Platon gelehrt habe, daß das Kontinuum aus einer endlichen Anzahl von Indivisibilien zusammengesetzt sei, so beweist er damit, daß er Platons Philebos nicht gelesen hat. Er meint, jedes Kontinuum könne nur aus wesensgleichen Teilen aufgebaut werden, ja er leugnet, daß ein Kontinuum durch Indivisibile begrenzt werden könne (Satz 150): Continuum non continuari nec finitari per talia (indivisibilia) sed ex ipso!

Über den Abschnitt vom Unendlichen geht M. Curtze leider sehr kurz hinweg, so daß man nicht erkennen kann, ob seine Deutung und dementsprechend die Deutung, welche Cantor gibt, zutreffend ist. Er unterscheidet kathetisch und synkathetisch unendlich. Das erste ist ein-

1) Chasles, Aperçu historique. Deutsche Ausgabe, p. 614.

2) M. Curtze, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 13, Suppl. p. 81.

3) Nullum continuum ex indivisibilibus infinitis integrari vel componi.

fach eine Größe ohne Ende (quantum sine fine), das zweite soll entstehen, indem von einer endlichen Größe ausgehend durch Hinzufügen endlicher Größen ohne Aufhören ein Unendlich entsteht. Mir scheint diese zweite Art identisch zu sein mit dem Pythagoräischen Begriff des Unendlichen. Man würde erst durch Beispiele, die er gegeben hat, die aber Curtze nicht anführt, erkennen können, wie der Unterschied wirklich gedacht ist.

Es ist außerordentlich schwer, festzustellen, welchen Einfluß die Arbeiten Bradvardinus' auf die Entwicklung der Mathematik gehabt haben, da in der zunächst folgenden Zeitperiode keinerlei Anknüpfungspunkte aufzufinden sind. Jedenfalls haben die Gelehrten, welche die Behandlung der Infinitesimalrechnung zunächst wieder in Angriff nahmen, von Bradvardinus keine Kenntnis gehabt. Es sind das Simon Stevin (1548—1620) und Joh. Kepler (1571—1630). Stevin hat 1586 schon in seinem ersten physikalischen Werk[1]) bei Aufsuchung des Schwerpunktes eine infinitesimale Betrachtung benutzt, die an Archimedes anknüpft, aber darüber hinausgeht insofern, daß er eine Grenzbetrachtung einführt und dadurch die Notwendigkeit des formalen Exhaustionsbeweises vermeidet.[2]) Er beschreibt in ein Dreieck eine Anzahl von Parallelogrammen, dann unterscheidet sich die Summe derselben von dem Flächeninhalt des Dreiecks durch die Summe von kleinen Dreiecken. Je größer die Anzahl der Parallelogramme wird, umso kleiner die Summe der Ergänzungsdreiecke, dann schließt er so: Wenn die Anzahl der Parallelogramme verdoppelt wird, reduziert sich der Unterschied zwischen der Summe der Parallelogramme und der Dreiecksfläche auf die Hälfte des vorigen Unterschieds, folglich kann man (nach Archimedes) durch fortgesetzte Verdoppelung der Anzahl der Parallelogramme die Differenz kleiner machen als jede noch so kleine angegebene Größe. Eine ganze Reihe solcher Grenzbetrachtungen hat Bosmans zusammengestellt.[3])

Es ist nicht unmöglich, daß Kepler die Arbeit von Stevin gekannt hat, aber er geht ganz andere Wege. Das erste Beispiel einer unendlichen Summation gibt Kepler in der astronomia nova, wo er die Summe aller Sinus von 0 bis 90^0 bilden will, und das macht er experimentell.[4]) Er hat die Sinus von 1^0, 2^0 usw. bis zu verschiedenen Endwerten tatsächlich zusammengezählt und findet diese Summe, wie er es schon in einem langen Brief an Fabricius 1605 auseinandergesetzt

1) De Beghinselen der Weegkonst. 1586.

2) Darauf hat wohl zuerst Bosmans in seinem Artikel über S. Stevin aufmerksam gemacht: Periodico di Matematiche, S. 4, Bd. 6, S. 231. 1926.

3) Annales de la Soc. Scient. de Bruxelles 37, p. 171. 1913.

4) Opera 3, p. 390.

hatte[1]), von 0^0 bis φ^0 nahezu gleich dem sin vers φ; da die Abweichungen nur gering sind, glaubt er, daß die Summation über alle φ den Wert sin vers φ genau ergeben muß. Der Herausgeber der Opera, Ch. Frisch, macht bereits in den Anmerkungen darauf aufmerksam, daß sich die Ableitung der Werte ganz an Archimedes anschließt, wobei jedoch die Archimedesschen Proportionen durch die trigonometrischen Bezeichnungen ersetzt sind. Noch enger schließt sich Kepler an Archimedes an in der Stereometria Doliorum[2]) von 1616, deren ersten Teil er Stereometria Archimedea nennt, weil er sich in diesem Teil nur der Methoden bedient, welche Archimedes angewandt hatte. Darüber hinaus geht er in dem Supplementum. Da auch dieser Teil allgemein bekannt sein dürfte, genügt es, auf einige Bemerkungen hinzuweisen, die, soviel ich sehe, nicht hinreichend beachtet sind. Bei der Ableitung der nach Guldin benannten Regel ist sich Kepler wohl bewußt, daß die Summation über die Schnitte nicht ohne weiteres zulässig ist, darum bemüht er sich, nachzuweisen, daß er für den Schwerpunkt doch den Mittelpunkt des rotierenden Kreises setzen darf. Aber es fehlt ihm hier der Grenzübergang, der aber auch von Guldin[3]) nicht erbracht ist. Erst durch Pfleiderer[4]) ist die volle Rechtfertigung des Verfahrens gegeben. Da Guldin Keplers Arbeiten gekannt hat, ist die Bezeichnung Guldinsche Regel so unberechtigt, wie viele Namen berühmter Lehrsätze.

Durch diese Methode der Summation ist Kepler der Lehrmeister für zahllose Quadraturen und Kubaturen der nachfolgenden Dezennien. Auf eine wichtigere Bemerkung Keplers werde ich unten aufmerksam machen. Sie gehört nicht in diesen historischen Zusammenhang, wo es sich immer um Summation handelt.

Bei Bonaventura Cavalieri (1591—1647) tauchen nun wieder Indivisibilien auf; aber nicht als ob er eine neue Erfindung damit gemacht hätte, auch nicht unter Berufung auf Bradvardinus, sondern als eine Beziehung, die allgemein bekannt ist. Und aus dem Briefwechsel mit Galilei[5]) und Torricelli[6]) geht hervor, daß in Italien um diese Zeit die Bezeichnung wenigstens nicht unbekannt war. Aber die Indivisibilien-Methode steht jetzt in schärfstem Gegensatz gegen Bradvardinus. Während bei Bradvardinus der 4. Satz seines Tractatus de continuo lautet: Omnes scientias veras esse, ubi non supponitur con-

1) l. c. p. 105.
2) Opera 4, p. 555.
3) Guldin, Centrobarica III, c. 6. Prop. 20. 1641.
4) Pfleiderer, Kepleri methodus. 1795.
5) Venturi, Memorie e lettere ... Galilei II, 96. 1819.
6) Opere di Ev. Torricelli III, p. 170. 1919.

tinuum ex indivisibilibus componi, wird hier das Gegenteil angenommen. Das erste Buch, in welchem Cavalieri seine Methode darlegt, trägt den Titel: Geometria indivisibilibus continuorum.[1]) Aber was diese Indivisibilien sind, erfährt man nicht in den Definitionen. Cavalieri sagt in der Vorrede, daß nach Archimedes nur Kepler sich mit solchen Problemen der Quadratur und Kubatur beschäftigt habe, mit diesen Problemen wolle er sich auch befassen, aber eine allgemein anwendbare Methode angeben. Diese allgemeine Methode setzt er so auseinander: Er geht von einer geraden Linie, welche die Figur, oder von einer Ebene, welche den Körper berührt, aus, denkt sich eine große Zahl paralleler Linien oder Ebenen zu dieser als Regula bezeichneten Linie (Ebene) bis zu der, welche die Figur (Körper) auf der entgegengesetzten Seite berührt, diese Berührung nennt er vertex. Dann denkt er sich die Figur oder den Körper als Summe der Linien oder Flächen. Zunächst ist nicht von ihm gesagt, daß die Linien oder Ebenen unendlich dünn, also ihre Anzahl unendlich sein müßte, im Gegenteil sind mehrere Ableitungen so, als ob er diesen Parallelen eine gewisse Dicke zuschreiben wollte. Aber im Appendix des zweiten Buches dringt er dazu durch, daß er die Figur oder den Körper nur dann auf diese Weise entstanden denken könne, wenn die Linie oder Ebene mit sich parallel vom vertex bis zur Regula bewegt werde oder fließe (fluens).[2]) Mit dieser Vorstellung kommt er dann zu dem Satz, daß man das Verhältnis zweier Figuren oder Körper finde, wenn man das Verhältnis der Schnittlinien oder Schnittflächen kenne. Das hält er für das wesentlichste Fundament (maximum fundamentum) seiner neuen Geometrie.[3])

Eine Inhaltsangabe des Buches erübrigt sich, nur sei bemerkt, daß er sein bekanntes Prinzip als 1. Theorem des 7. Buches ausspricht und in der Vorbemerkung ausdrücklich hinzufügt, daß unendlich viele Parallelen gedacht werden müßten.

Durch die Kritik Guldins[4]) und eines Anonymus ist Cavalieri dann zur Einsicht gekommen, daß seine Methode unvollkommen sei, und sieht sich genötigt, in einem zweiten Buche die Methode zu verbessern. Er zeichnet[5]) auf einer als Regula gedachten Ebene GH (Fig. 2) zwei sich in JK schneidende Ebenen gleicher Breite, von denen die eine $JKLM$ auf GH senkrecht steht, die andere $JKNO$ geneigt ist. Wenn er jetzt

1) Die 1. Auflage ist 1635 erschienen, die 2., welche mir allein zur Verfügung steht, ist nach dem Tode des Autors 1653 erschienen.

2) l. c. p. 104.

3) Ib. p. 115.

4) Centrobaryca IV 1641.

5) Exercitationes geometricae sex, p. 15. 1647.

eine Ebene parallel zu GH verschiebt, schneidet dieselbe jene beiden Ebenen in gleichen Linien, und darum würde man nach seiner Definition schließen dürfen, daß die beiden Ebenen $JKLM$ und $JKNO$ einander gleich sein müßten. Daß das nicht richtig ist, kommt daher, daß die Schnittlinien in den beiden Ebenen verschiedene Dichte (spissitudo) haben. Man muß also hinzufügen, daß die Abstände der Schnittlinien gleich groß sein müssen (semper eundem in omnibus lineis spissitudinis, vel raritatis gradum), oder wenn man die kontinuierliche Bewegung (fluxus) der parallelen Schnittebene voraussetzt, muß für die zu vergleichenden Ebenen die gleiche Geschwindigkeit (transitus) vorausgesetzt werden (p. 17). Freilich verfällt Cavalieri bei der Zurückweisung eines Einwurfs jenes Anonymus (p. 238) wieder auf die Vorstellung, daß er sich die Schnitte wie die Fäden eines Gewebes vorstellen will. Wenn man in einem schiefwinkligen Dreieck eine Höhe zieht und in den beiden Teilen, die ungleich sind, Parallelen zu der Höhe, so entspricht jeder dieser Parallelen in dem einen Teile eine gleichgroße in dem anderen, es müßten also die beiden Teile gleich sein. Wenn er sich aber seine Gewebe mit gleich weitem Abstand der Fäden denkt, so werden auf den einen Teil etwa 100, auf den anderen etwa 200 kommen. Es fallen also bei der Vergleichung im zweiten Teile 100 Fäden aus, die im ersten kein Pendant haben, die 100 Vergleichsfäden haben also im zweiten Teile einen größeren Abstand als im ersten. Daher kann die Methode der Indivisibilien hier nicht angewandt werden.

K J H M O L N G

Fig. 2.

Cavalieri zeigt aber in diesen Exercitationes auch, wie sehr durch die neue Methode die Beweise früherer Ableitungen abgekürzt werden. Das interessanteste Beispiel ist wohl das des Beweises, daß die Summe aller Quadrate der zu einer Parallelogrammseite gezogenen Parallelen sich zur Summe aller Quadrate der durch die Diagonale gegebenen Abschnitte dieser Parallelen wie 3 : 1 verhält, das hatte er in der Geometrie[1]) außerordentlich mühsam mit zahlreichen Hilfssätzen bewiesen, hier[2]) zeigt er: die Summe der Quadrate im Parallelogramm liefert ein Prisma, die Summe der Quadrate in dem Dreieck liefert eine Pyramide über derselben Basis, und er fügt mit berechtigtem Stolz hinzu: hoc autem magnam vim et energiam horum indivisibilium sane demon-

1) l. c. p. 159.
2) Exercitationes, p. 53.

strat. Diese Entdeckung führt dann zu dem Inhalt der 4. Exercitatio, welche die Übertragung der bisher nur geometrischen Betrachtung auf die Algebra (in potestatibus cossicis) liefert. Durch eine Aufgabe Keplers ist er, wie er in der Vorrede sagt, darauf geführt, die Summe der 4. Potenzen jener Parallelen zu vergleichen. Er findet nun, daß die Summe der Linien sich wie 2 : 1, der Quadrate wie 3 : 1, der 3. Potenz wie 4 : 1, der 4. Potenz wie 5 : 1 verhält. Um das nun allgemein algebraisch zu beweisen, stützt er sich auch auf den binomischen Lehrsatz[1]), den er natürlich nicht allgemein beweist, aber hervorhebt, daß das Verfahren unbegrenzt fortgesetzt werden könne. Den algebraischen Beweis hat Cavalieri, wie er in dem Vorwort selbst sagt (p. 245) von Beaugrand durch einen Pater Niceronius erhalten, woraus denn allgemein geschlossen wird $\sum_0^a x^m = \frac{a^{m+1}}{m+1}$, wo m eine positive ganze Zahl bedeutet. Es kann wohl nicht bezweifelt werden, daß nicht Beaugrand der Erfinder dieses Beweises ist, sondern Fermat. Dieser sagt 1644 (Œuvres I, p. 195): „Reliquas in infinitum quadravimus in quibus abscissae a diametro sunt inter se ut quaevis applicatarum potestates. Hanc scientiam, primis jam olim a nobis adinventam, Domino de Beaugrand aliisque communicavimus.“ Damit stimmt auch, daß sich Exercitationes IV, Prop. 29, p. 294 mit dem von Fermat (p. 197 unterster Absatz) Gegebenen deckt. Beaugrand scheint nicht zu den zuverlässigen Forschern zu gehören. Cavalieri schreibt am 23. November 1641 an Mersenne, Beaugrand habe ihm auch die Messung der hyperbolischen Spindel mit Quadraturen von Parabeln verschiedenen Grades übersandt, aber Cavalieri sei nach der Beaugrandschen Anweisung die Lösung der hyperbolischen Spindel nicht gelungen, darum fragt er Mersenne, ob die Lösung Beaugrands richtig sei (letzterer war 1640 gestorben). Andere Beispiele für diese Unzuverlässigkeit finden sich in Œuvres de Fermat, Supplément aux T. 1—4. 1922, p. 33, 98ff. 144. Barlotti hat, wie ich aus einem Referat von Bosmans[2]) ersehen, bereits 1924 den Nachweis geliefert, daß die Weiterführung dieses Problems in der Reihenfolge geschehen ist, daß Fermat für m auch gebrochene, rationale, positive Zahlen setzt und Torricelli für m auch negative Werte mit Ausnahme von $m = -1$ einführt.

Das Cavalierische Werk hat mit Recht einen großen Einfluß gehabt, wenn auch von mancher Seite die Methode der Indivisibilia abgelehnt wurde. Zunächst ist ein Buch von A. Tacquet von Bedeutung.[3])

1) l. c. p. 268ff.

2) Revue des Questions scientifiques 1926, p. 14.

3) Andreas Tacquet, Cylindricorum et Annulorum Lib. IV, Antwerpen 1651.

Das Buch ist auch dadurch interessant, daß es sich in den beiden ersten Büchern mit dem Zylinderhuf beschäftigt, der bekanntlich zum ersten Male bei Archimedes in der ἔφοδος erscheint. Sollte Tacquet noch eine Handschrift der Archimedesschen Arbeit besessen haben? Die Art, wie er diesen Zylinderhuf behandelt, ist in den ersten Sätzen der Archimedesschen auffallend ähnlich. Er schließt den Körper ein zwischen einen ein- und einen umgeschriebenen berechenbaren Körper und zeigt, daß man die Differenz der beiden Grenzen kleiner machen kann als eine vorgegebene Größe. Dann behandelt er die Frage nach der Zulässigkeit der Methode der Indivisibilien, er nennt sie heterogenea (p. 23). Daß Cavalieri von Linien zu Flächen, von Flächen zu Körpern übergehe und Proportionen zwischen Linien ohne weiteres auf Flächen und Körper übertrage, sei unzulässig. Die Proportionen müßten auf homogene Elemente zurückgeführt werden: So besteht der Zylinderhuf nicht aus Dreiecken und die Kugel nicht aus Kreisen. Wohl dürfe man sagen: Die Linie werde durch den Fluß (fluxus) eines Punktes, die Oberfläche aus einer fließenden Linie erzeugt. Aber es sei ein gewaltiger Unterschied, ob man sage, eine Quantität werde durch den Fluß von Indivisibilien erzeugt, oder ob man sage, sie sei aus solchen zusammengesetzt. Wollte man also die Methode anwenden, so müsse man die Heterogenen auf Homogene zurückführen, das sei dann das gleiche wie die Methode der Alten: nachzuweisen, daß die zu messende Größe durch eingeschriebene homogene ausgefüllt werde (exhauriri). Das zeigt er dann an seinem Zylinderhuf und der Kugel. Man sieht, Tacquet läßt sowohl den Platonischen Gedanken von der kontinuierlichen Bewegung des ἄπειρον zur Erzeugung der begrenzten Größen, so wie das Exhaustionsverfahren als einwandfrei zu, aber er verwirft die Demokritische Vorstellung des Aufbaues aus kleinen Teilen ohne Exhaustionsbeweis.

In sehr überzeugender Weise hat Bosmans nachgewiesen, wie das Tacquetsche Buch auf Pascal eingewirkt hat.[1] Bei Pascal kommt die Infinitesimalmethode wohl zum ersten Male vor in der Arbeit: Potestatum numericarum summa[2]), welche mit dem Canon generalis schließt: Die Summe gleicher Potenzen aller Zahlen verhält sich zur Größten mit dem um 1 höheren Exponenten wie die Einheit zu diesem höheren Exponenten, also derselbe Satz, wie wir ihn eben bei Cavalieri kennen lernten. Nun hat Bosmans die Frage aufgeworfen, ob Pascal die Exercitationes gekannt habe (l. c. p. 166). Ich glaube, man muß sie

1) Bosmans, Archivio di storia della scienza IV, p. 369, 1923, vgl. Sur l'Œuvre Mathématique de Blaise Pascal. Revue des Questions scient. 1924, p. 130 ff.

2) Œuvres V, p. 112, 1779.

bejahen. Denn er sagt am Eingang dieser Conclusio: Wie wertvoll diese Sätze für die Anwendung krummlinig begrenzter Flächen sind, ist denen, die in der Lehre von den Indivisibilien bewandert sind, bekannt. Denn es werden alle Arten von Parabeln auf diese Weise quadriert, und ungezählte andere werden damit am leichtesten gemessen. Das war ja aber gerade der Inhalt der Exercitationes, und da Pascal vor dieser Schrift die Methode der Indivisibilien noch nicht angewandt hatte, so kann sich der Satz nur auf Cavalieris Werk beziehen. Seine Vorschrift in dieser Abhandlung, wie man mit dieser Methode arbeiten solle, geht auch in keiner Beziehung über Cavalieri hinaus.[1]) So fügen Punkte nichts zu Linien, Linien nichts zu Flächen, Flächen nichts zu Körpern hinzu, und ebenso für Zahlen; Wurzeln nichts zu Quadraten, Quadrate nichts zu den Kuben usw.

Pascal blieb aber nicht auf diesem naiven Standpunkt stehen. In seiner Behandlung der Zykloide 1659 hat er sich auf die Vorschrift von Tacquet eingestellt. Da sagt er[2]) freilich: Ich trage kein Bedenken, in der Folge zu sagen: Die Summe der Linien, oder die Summe der Ebenen, oder die Summe der Ordinaten, aber das soll nichts anderes bedeuten als die Summe einer unbegrenzten Anzahl von Rechtecken, die gebildet sind aus jeder Ordinate mit kleinen gleichgroßen Abschnitten des Durchmessers, deren Summe sicher eine Ebene bildet, die sich von der Fläche des Halbkreises nur um eine Größe unterscheidet, die kleiner ist als irgendeine gegebene. Besonders macht er darauf aufmerksam (p. 249), daß die Summe der Sinus DE bedeuten soll die Summe der Rechtecke, wo jeder Sinus DE mit dem kleinen Bogenelement DO, betrachtet als eine gerade Linie, multipliziert ist. Und diese Definition wiederholt er noch einmal ganz ausführlich. Hier ist also ein wesentlicher Fortschritt über Cavalieri hinaus, und er weist ausdrücklich auf Tacquet hin (p. 220), aber er zeigt in den einzelnen Abhandlungen, welche er zur Lösung des Zykloidenproblems veröffentlicht, die große Fruchtbarkeit der Methode, und darin geht er weit über Tacquet hinaus.

Die Bezeichnung Indivisibilien kommt meines Wissens bei Fermat nicht vor, aber er hat bei Quadraturen und Rektifikationen die Methode in geeigneter Weise auch angewandt, jedoch im engen Anschluß an Archimedes. Ein besonders wertvolles Werk für die infinitesimale Rechnung ist die 1660 veröffentlichte Arbeit: De linearum curvarum cum lineis rectis comparatione.[3]) Er schließt auch hier die Kurvenlänge

---

1) In continua quantitate, quotlibet quantitates cujusvis generis quantitati superioris generis additas, nihil ei superaddere.

2) Méthode générale pour les centres de gravité usw. Œuvres V, p. 246. 1779.

3) Varia opera, p. 89. 1679.

in zwei aus geradlinigen Stücken bestehende Grenzen ein wie Archimedes, aber nicht aus Seiten ein- und umgeschriebener Polygone, sondern aus Tangentenabschnitten, deren eine Summe größer, deren andere Summe kleiner als die Kurve ist, und zeigt, daß man bei hinreichender Vermehrung der Anzahl der Abschnitte den Unterschied kleiner machen kann als eine gegebene Strecke. Aber bei den Anwendungen benutzt er dann immer nur die eine Grenze, setzt also voraus, daß, wenn sich zwei Größen nur durch eine unendlich kleine unterscheiden, sie einander gleich sind. Auf seine Theorie der Maxima und Minima komme ich unten.

Der Zeitfolge entsprechend ist nun Barrow zu erwähnen, der, wie ich unten zeigen werde, auf Newtons erste Arbeiten einen unverkennbaren Einfluß gehabt hat. Barrow ist in jüngster Zeit für die Geschichte der Entstehung der Infinitesimalrechnung von Bedeutung geworden, weil einige englische Schriftsteller, nachdem anerkannt ist, daß Leibniz von Newton nicht beeinflußt ist, die Behauptung aufgestellt haben, er habe von Barrow den Anstoß und speziell das charakteristische Dreieck erhalten, so daß für Leibniz eigentlich nur die Einführung der Zeichen übrig bliebe. Der hauptsächlichste Vertreter dieser Behauptung ist Child, der auch eine neue englische Übersetzung von Barrows Lectiones geometricae herausgegeben hat[1]), die sich von der ersten englischen Übersetzung von Edmund Stone[2]) wesentlich dadurch unterscheidet, daß sie nicht so genau dem lateinischen Original entspricht und besonders in den Figuren häufige Abweichungen zeigt. Dann hat Child aber in einer umfangreichen Einleitung und zahlreichen Noten moderne Fassungen der Sätze Barrows hinzugefügt, die zum größten Teil weit über das hinausgehen, was Barrow bewiesen hat und was er in den Sätzen hat ausdrücken wollen, ja nach dem damaligen Stande der Wissenschaft hat ausdrücken können. Man kann in einen alten Schriftsteller mit moderner Auffassung außerordentlich viel hineinlesen, woran der Autor niemals gedacht hat. Ich halte das für eine sehr bedenkliche Methode historischer Arbeit. Sehr auffallend ist, daß Child bei der Aufzählung der Barrowschen Werke nur die Lectiones mathematicae aus dem Jahre 1683 angibt und die folgenden Jahrgänge offenbar gar nicht kennt. Die 1683 erschienenen Vorlesungen sind 1664 gehalten und bringen nichts Neues, dagegen die Vorlesungen von 1665 und 1666, die 1684/85 in London erschienen, beschäftigen sich gerade mit den Indivisibilien, und sie würden Child gezeigt haben, daß er Barrow Gedanken imputiert, die derselbe nicht gehabt hat. Ich komme bei New-

1) Child, The geometrical Lectures of Isaac Barrow. 1916.

2) Edm. Stone, Geometrical Lectures by Isaac Barrow. 1735.

tons erster Arbeit darauf zurück. Daß die Behauptung Childs, Leibniz habe für sein charakteristisches Dreieck bei Barrow eine Anleihe gemacht, völlig unhaltbar ist, hat Mahnke in so gründlicher Weise nachgewiesen, daß jedes weitere Wort unnötig ist. Aber ich möchte auf einen anderen Punkt aufmerksam machen. Es ist ja in den lectiones geometricae ein auffallender Unterschied zwischen den ersten zehn Lektionen und den folgenden drei; während die ersten nichts enthalten, was nicht schon in Frankreich und Italien, was nicht auch in Wallis' Arbeiten bekannt gemacht worden war, geht Barrow in den folgenden zu neuen Aufgaben über. Dazwischen liegen in einem Anhang zu X fünf Beispiele, die er mit dem „charakteristischen Dreieck" behandelt. Aber wunderbarerweise übersieht Child in der dazu gegebenen Note die Bemerkung, daß Barrow selbst sagt, daß er diese Methode nicht selber erdacht habe (facio saltem ex amici consilio eoque lubentius, quod prae caeteris, quas tractavi, compendiosa videtur ac generalis. In hunc procedo modum). Wer ist der Freund, der ihm das Dreieck gezeigt hat? In Frage können meiner Meinung nach nur Wallis oder Wren kommen. Beide waren seit 1659 mit Pascals Untersuchung über die Sinus bekannt aus dem Wettbewerb um die Zykloide, hatten also doch dasselbe Dreieck gesehen, welches für Leibniz die Anregung gab. Aber wie wenig hat Barrow aus diesem Hinweis gemacht! Nach wie vor arbeitet er nur geometrisch mit Proportionen von Strecken, und von einer Weiterbildung ist garnicht die Rede. Vielleicht kann man auch an Wallis' Behandlung der Spirale oder seinen berühmten Brief an Huygens denken.[1]) Jedenfalls ist Barrow hier nicht original!

In dem Werke, in welchem Newton zum ersten Male seine Theorie allgemein bekannt gibt, dem Tractatus de quadratura curvarum[2]), sagt er in der Einleitung: „Es ist in Übereinstimmung mit der Geometrie der Alten, die Analysis auf begrenzte Größen aufzubauen und die ersten und letzten Verhältnisse entstehender oder verschwindender Verhältnisse zu untersuchen, und ich wollte zeigen, daß es nicht nötig ist, bei der Methode der Fluxionen unendlich kleine Figuren in die Geometrie einzuführen.[3]) Jedoch kann die Analysis in allerlei Figuren, endlichen und unendlich kleinen, welche den verschwindenden Figuren ähnlich gebildet werden, fortgeführt werden, wie z. B. in Figuren, welche nach der Methode der Indivisibilien für unendlich klein gehalten werden; doch

1) Wallis, Opera Mathematica 1699, p. 781 u. 542ff.

2) Opuscula I, p. 203. 1744. Zuerst veröffentlicht bei der lateinischen Ausgabe der Optik. 1706.

3) Volui ostendere quod in Methodo Fluxionum non opus sit Figuras infinite parvas in Geometriam introducere. Ein Satz, der sich speziell gegen Leibniz wendet.

gehe vorsichtig zu Werke!" Dementsprechend erklärt er hier, er betrachte die Größen als in gleichen Zeitabschnitten wachsend und die Geschwindigkeiten dieser Inkremente nenne er Fluxionen und die erzeugten Größen Fluenten. So seien die Fluxionen aufzufassen als Augmente der Fluenten, welche in kleinsten gleichen Zeitteilen erzeugt werden, aber sie können dargestellt werden als irgendwelche Linien, die ihnen selbst proportional sind.

Er sagt weiter, daß er allmählich (paulatim) 1665/6 zu dieser Methode gekommen sei, und zum Schluß der Einleitung sagt er, er habe diese Arbeit früher (olim) geschrieben. Aber die Form, in welcher wir diese Arbeit 1706 bekommen haben, ist jedenfalls nicht aus der Zeit, als Newton die ersten Ideen zu der Methode fand. Denn in den Prinzipien[1]) führt er die Methode ganz anders ein. Die Fluente nennt er genita, statt von Fluxionen spricht er von Momenten. Aber es sind nicht die Namen, welche die Verschiedenheit bedingen, sondern der Inhalt. Auch hier betrachtet er die genitae als durch stetigen Fluß wachsende oder abnehmende Größen, und das Maß dieses Wachsens oder Abnehmens ist das Moment. Dann sagt er: „Hüte Dich, das Du diese Momente als endliche Größen auffaßt.[2]) Endliche Partikeln sind keine Momente, sondern Größen, die selbst aus Momenten entstanden sind. Momente sind zu betrachten als die eben entstehenden Anfänge begrenzter Größen." Also haben wir hier das direkte Gegenteil von dem, was in der Quadratur definiert war. Man hat sich den Kopf darüber zerbrochen, wie Newton wohl auf diese auffallende Bezeichnung „Moment" gekommen ist; ich glaube, es klärt sich ganz einfach auf. So viel ich sehe, hat Galilei zuerst die Bezeichnung Moment für die in einem Punkte der Fallstrecke erlangte Geschwindigkeit eingeführt[3]), und in der geometrischen Darstellung stellen sich diese Momente als die kleinen Linienstücke dar, um welche die Ordinate beim Fortschreiten bei der Abszisse um die Länge 1 wächst oder abnimmt. Die gleiche Bezeichnung hat Barrow, der Lehrer Newtons, in seinen Vorlesungen 1664 unter ausdrücklicher Berufung auf Galilei gebraucht.[4]) Es ist doch wohl anzunehmen, daß Newton, wenn er 1664 auch vielleicht nicht mehr regelmäßiger Hörer Barrows war, doch die Vorlesungen gekannt hat, denn

1) Philosophiae naturalis principia mathematica. 2. Aufl. 1713 (1. Aufl. 1687), p. 224.

2) Cave tamen intellexeris particulas finitas! Intelligenda sunt principia jamjam nascentia finitarum magnitudinum.

3) Discorsi e dimostrazioni matem. 1638. Deutsch von Oettingen 1891. 3. Tag, p. 28 u. 29.

4) Lectiones mathematicae XXIII 1664. London 1685, p. 123.

erst 1665 wurde er Baccalaureus. Außerdem sind diese Vorlesungen Barrows 1685, also zwei Jahre vor Newtons Principia gedruckt. Wenn man diesen Zusammenhang kennt und bedenkt, daß Newton seine erste Arbeit über diesen Gegenstand: De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas 1669 seinem Lehrer Barrow übergab, der sie an Collins weitersandte, aus dessen Nachlaß sie dann 1711 gedruckt wurde, so begreift man, daß Newton hier den Begriff Moment nicht definiert, sondern als bekannt voraussetzt, denn er benutzt denselben, wie Tischer überzeugend nachweist[1]), als die Zunahme der variabelen Fläche bei unendlich kleiner Verrückung der Ordinate. Damit aber, daß Newton diese unendlich kleine Verrückung gleich 0 setzt und sich dabei auf die Methode der Indivisibilien, d. h. auf Cavalieri beruft[2]), trat er in Gegensatz gegen Barrow. Dieser hatte in den Vorlesungen 1665, welche 1684 gedruckt[3]) sind, sich mit Cavalieri (er nennt ihn Cavalerius) auseinandergesetzt und betont, daß diese Betrachtung nur zulässig sei, wenn man nach dem Vorbilde von Euklid, Archimedes, Apollonius usw. den Exhaustionsbeweis hinzufüge. Er beruft sich dabei wiederholt auf den oben zitierten Tacquet. Dagegen erklärt Newton (l. c.): das Moment für einen Körper sei eine Fläche, für eine Fläche eine Linie, für eine Linie ein Punkt! Daß letzteres ihm etwas unbequem ist, da der Punkt dann in Proportionen als eine Größe auftreten muß, ersieht man aus dem Zusatz: „Nec vereor loqui de unitate in Punctis, sive lineis infinito parvis, siquidem proportiones ibi jam contemplantur Geometrae, dum utuntur methodis Indivisibilium." — Newton gebrauchte in seinen Principia die Momente in gleichem Sinne. Das zeigt aber sehr deutlich, daß er 1687 noch nicht im Besitz der Fluxionsrechnung war, wie wir sie 1706 vor uns sehen. Auch der berühmte Tangentenbrief Newtons von 1672 hat nichts von Fluxionen enthalten. Dagegen macht Tischer (l. c. p. 42/43) mit Recht auf eine „auffällige Annäherung" an die Leibnizsche Grundauffassung in der Demonstratio zu Problem II der Methodus Fluxionum aufmerksam. Auf die Ungereimtheiten der Newtonschen Ableitung hat Tischer in der zitierten Abhandlung eingehend hingewiesen.

1) Tischer, Über die Begründung der Infinitesimalrechnung durch Newton und Leibniz. Leipzig 1896.

2) Opuscula I 1744, p. 19.

3) Barrow, Lectiones 1665. London 1684, p. 17, 24, 51, 96 usw. Wie Child in seiner englischen Übersetzung der Lectiones Geometricae in der Introduction sagen kann (S. 7), diese Lectiones mathematicae hätten zum Infinitesimalkalkül keine Beziehung, ist mir unverständlich. Er hat wohl nur die aus dem Jahre 1664 gesehen, aber nicht die von 1665, welche sich von der ersten bis zur letzten Seite ausschließlich mit dem Problem der infinitesimalen Methode beschäftigen.

Es ist ein großer Teil der berechtigten Einwände gegen diese Art der Ableitung schon bei Barrow in den Lectiones von 1665 enthalten. Ich sagte schon, er berufe sich auf Tacquet, aber er hat dessen Forderung, daß nur homogene und nicht heterogene Elemente zum Aufbau einer Größe verwandt werden dürfen, wesentlich weiter begründet und ausgebaut. Er geht von den Proportionen aus und fordert da, daß nur homogene Größen miteinander verglichen werden können, das Verhältnis dürfe wohl irrational sein, aber nicht heterogen. So kann man sagen, der Weg von 1000 Schritten verhält sich zu einem Wege von einem Stadium wie 1 Stunde zu 8 Stunden, aber eine Proportion folgender Art: ein Stadium verhalte sich zu 8 Stunden wie 1000 Schritt zu 1 Stunde, sei unzulässig. Ebenso sei es unmöglich, zu sagen, eine Linie verhalte sich zu einem Punkt wie ein Körper zu einer Oberfläche, ebensowenig ist ein Verhältnis einer endlichen Größe zu einer unendlich kleinen zulässig; denn alle jene Verhältnisse setzen immer voraus, daß es sich um Zahlengrößen handele, die durch Messung sich ergeben, aber für ein Indivisibel gebe es kein Maß, und aus diesen Indivisibilien kann keine endliche Größe aufgebaut werden. Wohl gibt er zu, wie Tacquet, daß man durch eine kontinuierliche Bewegung eines Punktes eine Linie erzeugen könne usw., aber das sei auch ganz etwas anderes als aus Punkten eine Strecke aufbauen, da fehle gerade die Kontinuität.

Es scheint mir nun nicht zweifelhaft, daß gerade diese Barrowschen Gedanken wesentlich eingewirkt haben auf die Methodus fluxionum, so daß wir hier ein ähnliches Verhältnis zwischen Barrow und Newton finden, wie wir oben zwischen Tacquet und Pascal feststellen konnten. In den ersten Arbeiten, die ich oben kurz charakterisiert habe, ist Newton noch nicht zu der Behandlung der Infinitesimalrechnung durchgedrungen, wie wir sie bei Pascals Arbeiten von 1658/59 kennen lernten. Hier, besonders in der Aufgabe[1]: eine von der Abszisse x und der Ordinate y und dem Bogen einer Kurve begrenzte Fläche zu berechnen, bzw. mit einem Rechteck über derselben Abszisse und der Seite 1 zu vergleichen, setzt er das Moment dieses Rechtecks $= 1$, da er dessen eine Seite $= 1$ gesetzt hatte und behandelt so eine endliche Linie als den Zuwachs einer Fläche, und in der dann folgenden Rektifikation des Kreises setzt er den Radius $= 1$ und der Zuwachs der Abszisse auch $= 1$. Ebenso macht er es mit den Bogenlängen, die er ohne weiteres als gerade Linien ansieht. Er steht hier also noch ganz auf dem Boden der Cavalierischen Indivisibilien und unterscheidet sich von Cavalieri nur dadurch, daß er die inzwischen

1) Opuscula I 1744, p. 18.

entdeckten Fortschritte im Gebiet der Reihenentwicklung, Gleichungsauflösung usw. benutzt. Auch die beiden an die Spitze der Analysis gestellten Regeln waren nicht neu, die erste Regel folgt sofort aus dem in Cavalieris Exercitationes IV, prop. 29 gegebenen Satz, dessen Beweis von Fermat herrührt (s. oben), und die 2. Regel hat Cavalieri schon in den Indivisibilien angewandt. Die Unklarheit, welche Newton noch in dem Unendlichkeitsbegriff hat, zeigt sich auch darin, daß er seine nur für Quadraturen abgeleitete Beziehung ohne weiteres auf Volumenberechnungen und höhere Dimensionen übertragen will und auch auf Rektifikationen. In der Beziehung ist ihm Pascal weit überlegen, der in der Einführung des vierdimensionalen Raumes und den daran anschließenden Betrachtungen zu erkennen gibt[1]), daß man nicht so ohne weiteres mit einem Analogieschluß in bestimmten Dimensionen gefundene Relationen ausdehnen darf auf andere Dimensionen.

In der „Fluxionentheorie" ist Newton nun wirklich weiter gekommen und, wenn auch die Definitionen noch nicht die Präzision haben, wie wir es wünschen müßten, so ist der Infinitesimalbegriff doch ganz anders anfgefaßt als vorher. Ich habe schon darauf hingewiesen, daß Newton selbst sagt, er sei paulatim seit 1665/66 auf diese Methode gekommen[2]), das wird oft so ausgelegt, daß er die Methode schon etwa 1670 fertig gehabt habe, das ist aber ganz unmöglich; denn dann hätte er weder die Analysis per aequationes noch die Principia so schreiben können, wie er sie geschrieben hat. Wir müssen das paulatim zweifellos über einen sehr viel größeren Zeitraum ausdehnen. Er spricht von den Fluxionen und Fluenten in derselben Bedeutung, wie sie in dem Tractatus de quadratura curvarum (1706) und in der Methodus fluxionum (1736) gegeben sind, schon in dem Brief an Joh. Wallis[3]) vom 27. 8. und 17. 9. 1692. Damals hat er also die Methode vollständig besessen, und ich vermute, daß die Quadratur früher geschrieben ist als die Methode; denn 1. gebraucht er in der Quadratur noch ähnliche Vorstellungen wie in den Principia, die aber in der Methode nicht vorkommen (z. B. die genitae) und 2. ist nicht einzusehen, warum er bei der historischen Bemerkung in der Introductio zu der Quadratur nicht auf die Methode hätte hinweisen sollen, wenn sie damals schon druckfertig gewesen wäre. Es ist ja auch zweifellos, daß die Methode sehr viel umfassender ist als die Quadratur.

In der Methodus fluxionum et serierum infinitarum[4]) geht er nun ganz offensichtlich von Vorstellungen aus, die an Galilei anknüpfen.[5])

1) Œuvres V, p. 285. 1779.
2) Opuscula I, p. 204. 1744.
3) Ib. p. 361.
4) Opuscula I, p. 31. 1744.
5) Ib. p. 53, vgl. das oben von Barrow erwähnte Verfahren.

Wenn er Galilei nicht nennt, so ist wohl durch Barrow die Vermittlung gegeben. Er sagt: Was in den folgenden Untersuchungen schwierig sei, komme auf zwei Probleme hinaus, nämlich 1. In einem Zeitmoment bei gegebener Länge des durchlaufenen Weges die Geschwindigkeit der Bewegung in diesem Zeitmoment zu finden, und 2. bei gegebener Geschwindigkeit der Bewegung die Länge des in der gegebenen Zeit durchlaufenen Weges zu finden. Dann aber fügt er hinzu, er meine mit tempus nicht die gewöhnliche Zeit, sondern er setze voraus, daß eine vorgegebenen Größen homogene Größe mit den anderen in gleichförmigem Fluß wachse, auf welche die anderen, gleichsam wie auf eine Zeit, bezogen werden. Diese Größen, die er als schrittweise unmeßbar (indefinite) wachsend vorstellt, nennt er Fluenten und die Geschwindigkeiten, mit welcher die Fluenten wachsen, Fluxionen. Damit knüpft Newton an die oben erwähnte Vorstellung Platons an, daß eine Größe durch die kontinuierliche Bewegung eines *ἄπειρον* entstehe. Wenn man nun erwartet, daß Newton aus diesen beiden Problemen heraus die weitere Entwicklung der Fluxionsrechnung logisch abgeleitet haben wird, so sieht man sich völlig getäuscht; sie tauchen überhaupt nicht wieder auf! Sie können also nur ein historisches Interesse haben, indem sie uns den Weg verraten, auf welchem Newton zu seiner Methode gekommen ist. Er gibt in der Folge nun die Auflösung von 12 Problemen, an denen er seine Methode auseinandersetzt. Da es sich für uns nur um die Bedeutung der Infinitesimalrechnung handelt, ist nicht nötig, die einzelnen ganz zu verfolgen, sondern nur das herauszuholen, was für diese Frage von Bedeutung ist, und das ist in allen Aufgaben dasselbe.

Das erste Problem heißt[1]): Aus der für die Fluenten gegebenen Gleichung die Relation zwischen den Fluxionen abzuleiten. Die dazu gegebene kurze Lösung ist so unbestimmt ausgedrückt, daß jemand, der nach dem Wortlaut dieser Vorschrift handeln wollte, die verschiedenartigsten Resultate bekommen könnte. Er soll nämlich die gegebene Gleichung nach Potenzen einer der Fluenten ordnen und diese Glieder nach irgendeiner arithmetischen Proportion multiplizieren usw. Tatsächlich tut Newton das aber nicht, sondern er multipliziert mit der Proportion, die durch die Exponenten der Variabeln gegeben ist. Man kann die Solutio also nur richtig verstehen, wenn man die später gegebene „Demonstratio“ beachtet. Bei dieser Demonstratio solutionis ist nun höchst wunderbar, daß sie auf die Solutio nicht die geringste Rücksicht nimmt, sondern ganz andere Wege geht, die an Fermat (oder Leibniz, s. unten) erinnern.[2]) Ferner ist auffallend, daß in dieser De-

1) Opuscula I, p. 55ff. 1744.

2) Varia opera 1679, p. 63ff.

monstratio gar nicht von Fluxionen die Rede ist, sondern wieder Momente auftreten, die nun hier definiert werden als die unmeßbar kleinen Stücke, um welche die Fluenten in unmeßbar kleinen Zeiträumen wachsen. Hatte Newton 5 Seiten vorher die Fluxionen definiert als die Geschwindigkeiten, um welche die Fluenten durch die Bewegung vermehrt werden, so unterscheiden sich die beiden dadurch, daß bei den Momenten unmeßbar kleine Zeitteile vorausgesetzt werden. Daher erhält man die Momente, wenn man z. B. bei einer Fluente x die Fluxion $\dot{x}$ mit dem Zeitmoment 0 multipliziert, ebenso bei y. Folglich sind x und y nach der unmeßbar kleinen Zeit angewachsen zu $x + \dot{x}0$ und $y + \dot{y}0$. Da die Gleichung der Kurve aber für alle Zeiten gilt, so können diese Werte anstelle von x und y eingesetzt werden. Dann sind die von 0 freien Glieder nach der ursprünglich gegebenen Gleichung $= 0$, die übrigbleibenden werden durch 0 dividiert, dann entstehen wieder eine Reihe von Gliedern, die 0 nicht, aber $\dot{x}$ und $\dot{y}$ enthalten. Nun fährt er fort[1]), da wir 0 als eine unendlich kleine Größe angenommen haben, so können wir die mit 0 multiplizierten Terme im Vergleich mit den anderen für nichts setzen, d. h. vernachlässigen. So entsteht die Relation zwischen $\dot{x}$ und $\dot{y}$: Zum Beispiel gewinnt er aus der Gleichung $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ die Gleichung der Fluxionen: $3xx\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} - 3yy\dot{y} + ax\dot{y} = 0$. Man muß also stets im Auge behalten, daß $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ und $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ nach unserer Schreibweise bedeutet. Besonders wichtig ist das, wenn bei Newton in einer Gleichung mehr als zwei Variabele vorkommen, dann behandelt er nicht den Ausdruck als eine Funktion mehrerer variabeler Argumente, sondern als eine Relation zwischen mehreren Funktionen einer Variabeln, also die x, y, z usw. sind selbst Funktionen der einen Variabeln t.

Aber wo bleibt nun die stolze Behauptung[2]), daß bei der Methode der Fluxion nicht nötig sei, unendlich kleine Größen in die Geometrie einzuführen? Von vielen Erklärern dieser Newtonschen Methode ist getadelt worden, daß er den Zuwachs von vornherein gleich Null setzt, und man hat sich gewundert über die Unklarheit, daß er in der Ableitung $\frac{0}{0}$ 1 = setzt. Ich glaube, daß dies Verfahren nicht von Newton erfunden ist. Es kommt genau so vor in einer Arbeit, welche Beaugrand im Herbst 1638 an Thomas Hobbes nach London sandte, und die von Hobbes selbst abgeschrieben im British Museum[3]) aufbewahrt

1) Cum autem finxerimus Quantitatem infinite parvam, ut exponere posset Quantitatum Momenta, Termini in eam ducti pro nihilo haberi possunt cum aliis collati; eos igitur negligo.

2) Opuscula I, p. 207. 1744.

3) Ms. 6796 art. 18 fol. 155—161.

ist. Die Arbeit hat Beaugrand mit kleinen Abänderungen von der Fermatschen Abhandlung über Maxima und Minima[1]), die im Frühjahr 1638 dem Kreise um Mersenne, zu dem auch Beaugrand gehörte, bekannt gemacht war, abgeschrieben ohne Nennung von Fermat. Die wesentlichste Abänderung in dieser Abschrift war die, daß Beaugrand die Variabeln nicht wie Fermat um eine endliche Größe E wachsen läßt, wo E dann gegen 0 konvergiert, sondern ohne weiteres $x + 0$ an die Stelle von x setzt und demgemäß in der Ableitung auch $\frac{0}{0} = 1$ setzen muß. Sogar das von Fermat gegebene Zitat aus Apollonios I, 34 hat Beaugrand mitabgeschrieben. Während also bei Fermat der Grenzbegriff vorhanden ist, fehlt er bei Beaugrand wie bei Newton!

Wie wenig aber Newton die Infinitesimalrechnung auch in der Methodus fluxionum logisch durchdrungen hat, zeigt sich darin, daß er Probl. IX[2]) denselben Fehler macht, wie wir ihn oben aus der Analysis per aequationes aufzeigten, daß er das Rechteck aus der Abszisse x und der Höhe 1 gleich x setzt und nun diese Höhe als $\dot{x}$ behandelt, so daß die Fluxion der Fläche eine Linie wird, während es hätte heißen müssen: Die Fluxionen der verglichenen Flächen verhalten sich wie zwei Linien.

Der Weg, auf welchem Newton zu seiner Fluxionsrechnung gekommen ist, wird also durch die Namen: Platon, Archimedes, Cavalieri, Galilei und Barrow fixiert, soweit es sich um die Behandlung infinite kleiner Größen handelt. Daß Newton in der Rechnung dann die großen Fortschritte besonders in der Reihenentwicklung seiner Zeit, die zum großen Teil von ihm selbst herrührten, benutzte, ist selbstverständlich, hat aber für das hier vorliegende Thema keine Bedeutung.

Der Weg, auf welchem Leibniz seine Infinitesimalrechnung fand, ist ein durchaus anderer, wenn er auch an Archimedes anknüpft und sich sehr oft auf ihn beruft, so doch in anderer Weise als es bei Newton der Fall ist. Leider hat Leibniz erst sehr spät und recht spärlich seine Entdeckungen im Druck veröffentlicht, so daß man bei ihm mehr als bei anderen seiner Zeitepoche auf die Manuskripte und Briefe zurückgreifen muß. Das hat Mahnke in der oben zitierten Arbeit getan und daraus ergibt sich, daß der Titel der ersten nur sechs Seiten langen Mitteilung von Leibniz über seine Methode[3]) mit Recht lautet: Nova Methodus pro Maximis et Minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus. Er geht nicht von Quadraturen und Rektifikationen aus,

1) Fermat, Œuvres I, p. 145.
2) Opuscula p. 138. 1744.
3) Acta eruditorum 1684, p. 467.

sondern vom Funktionsbegriff und der Methode, die Maxima und Minima dieser Funktionen zu bestimmen. Wären damals schon Tontafeln ausgegraben, wie ich sie im Eingang dieser Arbeit erwähnt habe, so könnte man sagen: Leibniz setzt die Arbeit der babylonischen Astronomen fort und begründet dieselbe durch die Differentialmethode. Suchen wir aber den Weg zu dieser Lösung auf, so haben wir natürlich von jenen babylonischen Leistungen abzusehen.

In der griechischen Mathematik kommt, wie oben erwähnt, eine Maximumaufgabe zuerst bei Euklid vor[1]), daß eine Strecke a halbiert werden muß, wenn das Rechteck aus den Abschnitten ein Maximum werden soll. Dieselbe Aufgabe ist auch das erste Beispiel, welches Fermat in seiner Arbeit über Maxima und Minima behandelt.[2]) Eine Erweiterung der Maximumaufgaben finden wir bei Zenodoros, der bald nach Archimedes[3]) seine isoperimetrischen Untersuchungen schrieb und darin die Maxima der Flächen bei konstantem Umfang bestimmte. Aber die Beweismethode ist dieselbe, wie wir sie bei Archimedes und Euklid finden. Wiederum wenige Jahre später erscheinen Apollonius' acht Bücher über die Kegelschnitte, von diesen behandelt das fünfte Buch fast ausschließlich Maximumaufgaben. Es handelt sich da um kürzeste Linien, die von einem gegebenen Punkt an Kegelschnitte gezogen werden sollen. Die Ableitung dieser Sätze unterscheidet sich in der Form wohl von den Methoden des Archimedes und Zenodoros, aber nicht in den benutzten Hilfsmitteln. Obwohl Apollonius Punkte der Kurven durch Abstände von festliegenden Geraden, z. B. der Achse des Kegelschnittes und der Scheiteltangente, häufiger bestimmt und mit Proportionen der Strecken rechnet, ist seine Beweismethode doch eine rein geometrische und benutzt auch nur Hilfsmittel, wie sie aus Euklid abgeleitet werden konnten. Mit Apollonius schließt für die griechische Mathematik die Beschäftigung mit Maximum- und Minimumaufgaben ab. Die späteren Jahrhunderte fanden kein Interesse an diesen Fragen, so wenig, daß uns die letzten vier Bücher des Apollonios im griechischen Text nicht erhalten sind.

Aus dem Mittelalter ist in dieser Entwicklung nur Nicolaus Oresme zu nennen, der in seinem Tractatus de latitudinibus formarum in der Tat einen wesentlichen Schritt voranging. Diese Abhandlung, welche wahrscheinlich vor 1361 geschrieben ist, weil in diesem Jahre Oresmes umfangreiche politische und besonders kirchenpolitische Arbeit beginnt, während er bis dahin als Lehrer der Mathematik im Collège

1) Euklid, Elementa. B. VI, Satz 27.
2) Fermat, Œuvres I, p. 134.
3) Pappi Collect. III, p. 1190. 1878.

de Navarra tätig war, ist wieder bekannt geworden durch die Inhaltsangabe und Beschreibung der in der Thorner Gymnasialbibliothek vorhandenen Handschrift.[1]) Gedruckt ist dieselbe am Ausgang des 15. und Beginn des 16. Jahrhunderts verschiedentlich, aber trotzdem sehr selten. In Preußen existiert nur ein Exemplar in der Staatsbibliothek in Berlin. Es ist die Ausgabe, welche Matheus Cerdonis in Padua 1486 „diligenti cura" besorgte. Leider hat M. Curtze nur eine ausführliche Inhaltsangabe des Manuskripts mit einigen Zitaten veröffentlicht und nicht den ganzen Text, so daß ich nicht feststellen kann, ob überall die Thorner Handschrift mit der dem gedruckten Buche zugrunde liegenden übereinstimmt. In einigen Punkten scheint das nicht der Fall zu sein.

Zunächst, was heißt latitudo formarum? Oresme geht von einer festliegenden geraden Linie aus und errichtet darauf in verschiedenen Abständen von einem festen Punkt Lote, deren Länge bis zu der Kurve, welche die forma darstellt, er latitudo nennt, während er den Abstand auf der grundlegenden Linie longitudo nennt. Man hat sich verschiedentlich gefragt, woher Oresme diese Bezeichnungen hat und hat nach dem Erfinder gesucht. Ich glaube, daß die Bezeichnung ganz einfach aus der griechischen Geographie entnommen ist. Bekanntlich hat Hipparch die Orte auf der Erde durch Länge und Breite zu bestimmen gelehrt, indem er auf dem durch die Säulen des Herkules gehenden Kreise die Länge bestimmt und den senkrechten Abstand von diesem Kreise die Breite nennt. Das hat ja Strabo und nach ihm Ptolemaios übernommen. Auf den gezeichneten Karten stellte sich diese Ortsbestimmung natürlich genau so dar, wie Oresme es benutzte. Daß diese Länge und Breite aus Babylon stammt, darf heute als gesichert betrachtet werden. Oresme will nun die forma nicht nur auf geometrische Gebiete beziehen, sondern auch auf physikalische Erscheinungen, z. B. Bewegungen, Veränderungen (alterationes), Farben usw., aber diese lassen eine solche Betrachtung nur zu, wenn sie durch eine Figur dargestellt werden können, dann haben die latitudines sehr verschiedene Maßeinheiten. Die Anzahl dieser Einheiten nennt er gradus. Hier muß zwischen dem gedruckten Text und der Curtzeschen Handschrift eine Abweichung vorhanden sein; denn Curtze sagt (S. 93), gradus sei der Unterschied zweier aufeinanderfolgender Ordinaten, dieser heißt in dem gedruckten Buche excessus gradus, und daß letztere Bezeichnung die von Oresme wirklich gemeinte ist, geht daraus hervor, daß beide Quellen identisch sagen, daß die zur Grundlinie parallele Gerade stets denselben Grad habe (est eiusdem gradus) und also die latitudines ein Rechteck bilden.

1) Maximilian Curtze, Zeitschr. für Math. u. Phys. 1868, Suppl. p. 92.

Man hat auch hervorgehoben, das Oresme den Begriff irrational eingeführt habe. Freilich gebraucht er das Wort, aber doch in einem anderen Sinne als dem mathematischen. Er spricht in dem sexto et ultimo notandum über die Möglichkeit der Anwendung zur Vergleichung zweier Formen und unterscheidet da rationale und irrationale Proportionen. Zu letzteren zählt er de duobus motibus, de duobus alterationibus, de duobus coloribus, endlich auch zwei Figuren, deren eine geradlinig, deren andere krummlinig ist. In den Korollarien 3 und 4 am Schlusse des Buches zählt er jedoch eine ganze Reihe von Bewegungen auf, die ein rationales Verhältnis haben sollen.

Von größter Bedeutung ist aber, daß Curtze nach der Handschrift sagt[1]), Oresme habe bereits gefunden, „daß der Zuwachs der Ordinaten in der unmittelbaren Nähe eines Maximums oder Minimums gleich 0 ist, und zwar in ganz allgemeiner Form.“ Das soll in den Anmerkungen zum letzten Lehrsatz stehen. In Frage kommen nur die Notanda 2—4, ich gebe dieselben hier wörtlich wieder:

2. quod in qualibet tali figura quae est medietas circuli intensio terminatur ad summum gradum tarditatis et remissio incipit a summo gradu tarditatis scilicet in puncto ubi terminatur intensio, ibi incipit remissio.

3. quod in qualibet tali figura intenditur latitudo usque ad medietatem et remittitur a medietate usque ad finem, ita quod a principio usque ad medietatem continue est latitudo major et major, ita a medietate usque ad finem continue est latitudo brevior et brevior.

4. quod in quolibet semicirculo incipit intensio latitudinis a summo gradu velocitatis et terminatur (ad summum gradum latitudinis terminatur)[2]) ad summum gradum tarditatis scilicet in medio puncto arcus, remissio vero quae incipit ab eodem medio incipit a summo gradu tarditatis et terminatur ad summum gradum velocitatis.

Es ist also nur von einem Halbkreise die Rede, eventuell von solchen Formen, die sich durch die Figur eines Halbkreises darstellen lassen, also garnicht von allgemeinen Formen, und zweitens ist nicht davon die Rede, daß der excessus gradus in der Nähe des Maximums „unmerklich“ sei oder gar gleich 0. Es ist demnach auch die Bemerkung von Brocard in Œuvres de Fermat T. IV, p. 145, 1912 irrtümlich, daß Oresme diese wichtige Entdeckung gemacht habe und nicht Kepler. Ich glaube, man muß sehr vorsichtig sein, in die Aussagen der alten Forscher ohne weiteres Gedanken hineinzutragen, die uns geläufig sind.

1) l. c. p. 97.

2) Die von mir in ( ) gesetzten Worte sind wahrscheinlich irrtümlich in der Ausgabe gedruckt.

Es ist doch durch Braunmühl[1]) nachgewiesen, daß Atelhart von Bath um 1120 die astronomischen Tafeln Alchwarzismis in das Lateinische übersetzt hat und damit zuerst die Sinustafeln den abendländischen Gelehrten bekannt machte. Daß Oresme diese nicht gekannt haben sollte, darf man von einem Lehrer der Mathematik in Paris um 1360 doch wohl nicht annehmen. Dann aber brauchte er nur einen Blick in diese Tafeln zu werfen, um das ohne weiteres abzulesen, was er in dem mitgeteilten Text sagte; denn in der behandelten Figur des Halbkreises stellten seine latitudines ja nichts anderes als die Sinus dar Ich bin überzeugt, daß Oresme auch nicht andeutungsweise an Maximum und Minimum im allgemeinen gedacht hat.

Es ist nun sehr interessant, daß in dem gedruckten Buche auch ein Anhang beigegeben ist, der den Titel hat: Incipiunt quaestiones super tractatum de latitudinibus formarum determinatae per venerandum doctorum magistrum Blasium. Dieser Herr weist nun darauf hin, daß die Betrachtungen Oresmes nur richtig sind und Anwendungen zuließen, wenn man die Indivisibilien einführt und die latitudines in unendlich nahen Punkten errichtet, und die excessus gradus dementsprechend für benachbarte latitudines bestimmt. Eine Weiterführung der Gedanken liegt sonst nicht vor in diesem Anhang. Aber es ist von Wert, daß Blasius, der offenbar diesen Anhang zur Zeit des Druckes geschrieben hat (es kann sich die Bemerkung „eodem anno" ja auch nur auf den Druck beziehen), die Indivisibilien kennt und gebraucht. Er ist also in dieser Beziehung ein Vorläufer von Cavalieri, von dem ihn 148 Jahre trennen. Von diesem Blasius ist sonst nichts bekannt.

Wir haben oben (S. 160ff.) schon gesehen, wie Kepler für Quadraturen und Kubaturen durch seine Summation ein Bahnbrecher geworden ist und Cavalieri und dessen Nachfolger beeinflußt hat. Aber in dem zweiten Teil der Stereometria doliorum hat er neue Wege gebahnt und sich nicht mehr an die Methode des Archimedes gebunden, wie bei jenen Summationen. — Schon im Theorem 3 der Stereometria Dolii Austriaci[2]) beweist er den Satz: „Die Volumina gerader Zylinder mit Achsenschnitten gleicher Diagonalen haben nicht das gleiche Verhältnis wie die Achsenschnitte, und der Körper mit dem größten Achsenschnitte ist nicht der größeste", indem er die Tatsache benutzt, daß der Sinus zwischen 45^0 und 90^0 langsamer wächst als unter 45^0. Er rechnet nun für eingeschriebene Zylinder eine Tabelle aus für verschiedene Verhältnisse der Höhe des Zylinders zum Durchmesser des Grundkreises und findet so, daß das Maximum dann eintritt,

1) Vorlesungen über die Geschichte der Trigonometrie I, p. 49, Note.
2) Opera IV, p. 605.

wenn dies Verhältnis gleich $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ist. Daraus ergibt sich, daß der Würfel das größeste Volumen aller einer Kugel eingeschriebenen Parallelepipeda hat. Hierbei macht er nun schon eine interessante Überlegung. Er schreibt in einen größten Kugelkreis den Achsenschnitt des Würfels durch die Diagonale der Grundfläche ein und verschiebt nun den Scheitelpunkt des rechten Winkels auf der Peripherie nach rechts und links, da zeigt sich, daß das Dekrement der Höhe bei Verschiebung nach der einen Seite schneller abfällt als das Inkrement des Quadrates der Diagonale, und bei Verschieben nach der anderen Seite das Inkrement der Höhe langsamer als das Dekrement des Quadrates der Diagonale, so folgt, daß das Maximum eben erreicht wird, wenn das Verhältnis $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ist.[1]) In dem Corollarium II zu diesem Satz spricht er es nun aus, daß die Änderung des Volumens bei unendlich kleiner Verschiebung des Scheitelpunktes nach rechts oder links vom Maximum nahezu unmerklich ist: Nam figurae aliae, terminatae ad puncta ipsi G proxima cis et ultra, minimum variant capacitatem, quia capacitas figurae AGC maxima est; circa maximam vero utrinque circumstantes decrementa habent initio insensibilia. Da die österreichischen Weinfässer diesen Maximalbedingungen sehr nahe kommen, fügt er die Bemerkung an[2]): Quis negat, naturam instinctu solo, sine etiam ratiocinatione docere geometriam? In den folgenden Sätzen untersucht er das Verhältnis der eingeschriebenen Zylinder zu dem Maximalzylinder genauer. In anderer Bezeichnung können wir das so ausdrücken: Sei x die Höhe, y das Quadrat des Durchmessers des Grundkreises bei einem solchen Zylinder, so ist das Volumen $x \cdot y \cdot a$, für einen zweiten ist es $x' \cdot y' \cdot a$. Sollen beide gleich sein (konjugiert), so muß $x : x' = y' : y$ sein (Satz 16). Dann erkennt er, daß die Differenz $x_1 - x_2$ nicht gleichmäßig bleibt, sondern schneller abnimmt, wenn man sich von der Maximumhöhe entfernt zu kleinen Werten, und umgekehrt wird die Zunahme von $y_1 - y_2$ langsamer. Endlich spricht er in Nr. 27 den oft zitierten Satz aus: An den Stellen, wo die Veränderung von geringen Werten zum Maximum und wieder zu geringen übergeht, ist jene Differenz bis zu einem gewissen Grade unmerklich: In iis vero articulis, in quibus a minoris (sic!) ad maximum iterumque ad minus fit mutatio, lege aliqua circuli, semper est aliquousque insensibilis illa differentia.

Es ist auffallend, daß man in manchen historischen Darstellungen diese Entdeckung von der unmerklichen Veränderung der Differenz (dem Verschwinden des Differentialquotienten) in dem Punkte des Maximums als eine zufällige Bemerkung bezeichnet sieht. Andere haben sich den Kopf

1) Ib. p. 610. 2) Ib. p. 612.

darüber zerbrochen, welches Gesetz des Kreises Kepler wohl meinen könne, nach welchem die Unmerklichkeit sich ergebe. Die Sache ist natürlich sehr einfach, das lege aliqua circuli bezieht sich nicht auf das Folgende, sondern auf die vorhergehenden Worte, d. h. die Mutatio soll in einer Verschiebung auf einer Kreisperipherie bestehen, Kepler bleibt in der ganzen Arbeit bei dem vorliegenden Problem stehen und hütet sich, allgemeine Sätze auszusprechen, die er nicht beweisen kann, und seine Beweise sind durchaus geometrisch. Wohl sind die Gedanken analytisch, aber dafür fehlt ihm die Form, so bleibt er bei den Beweismitteln stehen, welche die alte Mathematik darbot, die er aber mit größter Sorgfalt anwendet.

Ein weiterer Schritt auf der Bahn, die zu Leibniz führt, ist von Willebrod Snellius getan. Freilich handelt es sich da nicht um Maxi mum und Minimum, sondern um das erste Auftreten des so viel genannten charakteristischen Dreieckes, wenn auch nicht in der Form, wie es von Leibniz angewandt wurde. Snellius behandelt die Loxodrome und vergleicht sie mit einer Spirale.[1]) Er bildet aus den kleinsten Abschnitten der Loxodrome (minimum segmentum) als Hypotenuse (basis) und dem Segment des Meridians als Kathete ein rechtwinkliges Dreieck nach Anleitung der Methode, wie Pappos[2]) die Zylinderspirale behandelte. Je kleiner man diese Segmente macht, umso mehr nähert man sich ebenen Dreiecken (vel si etiam minora segmenta concipias, tanto faciliorem habebis explicationem et cum planis triangulis affinitatem) und in diesen kleinsten Dreiecken sind die einzelnen Katheten und die Hypotenusen als Abschnitte der Loxodrome gleich (atque ita in his minutissimis triangulis singula crura cruribus et bases, quae sunt loxodromiae istius segmenta, basibus aequabuntur).

Im Januar 1638 schickte Fermat durch Mersennes Vermittlung an Descartes seine Methodus ad disquirendam Maximam et minimam.[3]) Da diese ganz allgemein bekannt ist, kann ich die Darstellung hier übergehen. Aber ich weise auf den historischen Zusammenhang hin. Das erste Beispiel, an welchem er seine nicht gerade leicht verständliche Anweisung des Verfahrens vorführt, ist das schon von Euklid behandelte Problem (s. oben). Dem Einwand Descartes' gegenüber, daß seine Methode „fortuitam" die richtigen Werte liefere, ist Fermat in einer späteren Ableitung, die in der neuen Ausgabe der Werke abgedruckt ist[4]), dadurch entgegengetreten, daß er unter Berufung auf

1) W. Snellius, Tiphys Batavus. Leyden 1624, p. 22. Prop. XVII u. XVIII.
2) Pappi, Alexandrini, Collectiones (Hultsch) III, p. 1110. 1878.
3) Œuvres I, p. 133. 1891.
4) Œuvres I, p. 147. 1891.

Vieta seine Beispiele so behandelt, daß die alte Euklidische Methode in Vietascher Form angewandt wird, daß nämlich der Maximalwert einer als Wurzel einer quadratischen Gleichung dargestellten Variabeln erhalten wird, wenn die Quadratwurzel verschwindet. Man hat gemeint, daß durch diese Arbeit der Weg angezeigt wäre, auf welchem Fermat zu seiner Methode der Maxima gekommen sei, daß er also von algebraischen Betrachtungen ausgegangen sei. Allein, seine Anwendungen sind wesentlich geometrisch, und da er diese Beispiele für Maxima nur als Einleitung für seine Tangentenmethode gebraucht, scheint mir der Gedankengang durchaus vorgezeichnet zu sein, daß er nämlich von dem damals im Vordergrund des Interesses stehenden Tangentenproblem seinen Ausgang nahm. Wie ja aus den Briefen von 1636 hervorgeht, hat Fermat sich in dieser Zeit wesentlich mit geometrischen Fragen beschäftigt, besonders weise ich auf den Schluß des Briefes vom 23. August 1636 hin.[1])

Schon Duhamel hat[2]) auf die Abhängigkeit der Fermatschen Methode der Maxima und Minima von Kepler hingewiesen. Inwiefern Keplers Satz über die Änderung des Inkrements und Dekrements in der Nähe der Maxima weit über Oresmes Bemerkung hinausging, habe ich oben auseinandergesetzt. Noch in einer anderen Beziehung geht Fermat mit Kepler den gleichen Weg. Kepler behandelt den Zuwachs als eine reelle Größe, die in bezug auf die anderen Größen der Gleichung so klein ist, daß sie vernachlässigt werden kann, er setzt sie nicht gleich 0, wie das bei Newton und Barrow geschieht, ist sich also der Approximation voll bewußt. Das gleiche Verfahren hat Fermat. Bei ihm ist das E auch eine reelle Größe, aber er setzt Größen, die sich nur um einen so kleinen Wert unterscheiden, einander gleich, das drückt er durch das „adaequentur" aus.

Da Fermat nicht angegeben hatte, wie er zu seiner Methode gekommen sei, auch keinen Beweis für die Richtigkeit und Zulässigkeit derselben geliefert hatte, sondern nur an einer großen Zahl von Beispielen die Rechnung durchgeführt hat, legte sich Huygens die Frage vor[3]), wie Fermat sich die Ableitung wohl gedacht habe. Huygens geht von einer Aufgabe aus: Gegeben eine gerade Linie L und zwei Punkte A und B außerhalb der Linie, es soll auf der Linie ein Punkt C gefunden werden, dessen Entfernungen von A und B die kleinste Summe haben. Wenn der Punkt schon gefunden wäre, so müßten von da aus

1) Varia opera, p. 132. 1679.

2) Mém. de l'acad. des sciences. Paris 1864. T. 32, p. 269.

3) Huygens, Demonstratio regulae de maximis et minimis. Divers Ouvrages de Math. et de Phys. par Messieurs de l'Academie. Paris 1693, p. 326.

nach beiden Seiten 2 Punkte G und F auf der Linie liegen, deren Entfernungen von A und B zwar größer als $CA + CB$, aber unter sich gleich sind. Nimmt man zwei solche Punkte und bezeichnet die Distanz der beiden mit e, den Abstand des Punktes G von dem Fußpunkt E des von A auf L gefällten Lotes mit x, dann ist $FE = x + e$. Für beide rechnet er die Summe der Entfernungen von A und B aus. Wenn nun $e = 0$ wird, so müssen diese Punkte identisch werden und den Punkt C von beiden Seiten erreichen. In unserer Schreibweise würde das heißen: $F(x) = F(x + e)$, das aber ist die Ausgangsgleichung bei Fermat, jedoch ist das wohl sicher nicht der Gedankengang bei Fermat; denn bei Fermat wird x für den Wert im Maximum selbst gebraucht, und er will mit e den sehr kleinen Abstand eines benachbarten Punktes der Kurve von dem x bezeichnen, während Huygens sich dem Maximum oder Minimum von zwei Seiten nähert, indem er das e klein und kleiner werden läßt, aber dauernd $F(x) = F(x + e)$ beibehält. Seit 1919 wissen wir durch die Veröffentlichung von Giovannozzi[1]), wie Fermat tatsächlich seine Methode begründet und ausgeführt hat durch den Brief, den er 1643 für P. Brûlart an Mersenne schickte. Fermat setzt dort die Werte $F(x + e)$ und $F(x - e)$ fast gleich $F(x)$ und also auch fast gleich untereinander. Aber da Huygens offenbar diesen Brief nicht gekannt hat, wird er noch weniger Leibniz bekannt geworden sein, so daß er auf Leibniz' Methode keinen Einfluß hat haben können. Da der Brief selbst in dem Supplement zu den Œuvres de Fermat (p. 120) veröffentlicht ist und Bosmans[2]) eine ausführliche Besprechung des Briefes geliefert hat, kann ich hier darüber schweigen. Ich glaube, es ist notwendig, auf diese Huygenssche exakte Methode, die in der weiteren Ausrechnung natürlich mit Fermat übereinstimmte, hinzuweisen, weil Leibniz auf Huygens und Pascal die Anregungen zu seiner Methode zurückführt, aber niemals Fermat dabei erwähnt. Wann Huygens diese Arbeit geschrieben hat, ist aus derselben nicht zu ersehen, es scheint sicher, daß sie vor dem Erscheinen der varia opera 1679 geschrieben ist, da er keine der von Fermat benutzten Kurven heranzieht, was doch wichtig gewesen wäre, um seine Begründung Fermat gegenüber in das Licht zu stellen. Er sagt auch in der Einleitung, daß er sich nach der Fermatschen Begründung erkundigt habe (cum exquirerem) und in der Vorrede dieses Sammelbandes, worin neben Huygens' kleinen Arbeiten eine Reihe anderer Mathematiker Aufnahme gefunden haben, wird ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die Traktate meist vor sehr langer

1) Archivio di storia della scienza I, p. 137. 1919.
2) Annal. d. l. Soc. scient. de Bruxelles, 1921, p. 135.

Zeit geschrieben waren. Fest steht, daß Huygens eine solche Arbeit 1668 der Akademie in Paris vorgelesen hat.[1])

Bekanntlich kam einige Jahre später (1672) Leibniz nach Paris und schloß sich, damals in mathematischen Fragen noch ganz ununterrichtet, wesentlich an Huygens an, der ihn auf Pascal hinwies. Wohl hatte Leibniz die Cavalierischen Indivisibilien gelesen, ohne daß sie einen großen Eindruck bei ihm hinterlassen hätten, und von Pascals Arbeiten hat er wesentlich die unter dem Namen Dettonville publizierten studiert, welche die Fehler Cavalieris und die der ersten Pascalschen Arbeiten vermieden. Doch sind die Einflüsse, welche von diesem Studium auf Leibniz' Entwicklung ausgeübt wurden, in so mustergültiger Gründlichkeit von Mahnke dargelegt, daß ich darauf nicht einzugehen brauche. Ich hebe nur nochmals hervor, daß Leibniz aus Pascals Traité des Sinus du Quart de cercle[2]) das charakteristische Dreieck kennenlernte und alsbald die außerordentliche Verwendbarkeit dieses aus dem Bogenelement und den zugehörigen Inkrementen der Abszisse und Ordinate bestehenden Dreiecks erkannte, so daß er bereits 1673 im Besitz der Grundlage seiner Differentialmethode war, ehe er mit den englischen Gelehrten in Berührung trat.

Daß er das Dreieck nun anwandte auf die Maxima und Minima, also das, was er bei Pascal gesehen, mit dem von Huygens Gelernten kombinierte und damit die Tangentenmethode fundierte, war seine Genialität. Daß er ferner schon 1673 die Summation (Integration) als die inverse Operation der Differenzrechnung (Differentialrechnung) erkannte, war die zweite und wohl noch bedeutendere Großtat des 27 jährigen Leibniz. Damit hängt natürlich auch zusammen, daß er die Methode der Indivisibilien als wenig fruchtbar und vor allem als unexakt erkannte. Er lehnt darum auch den Gebrauch des Wortes Indivisibilien ab (vel accuratius loquendo infinita parva)[3]) und macht auf den Fehler aufmerksam, der von den Vertretern der Indivisibilienmethode häufiger gemacht wurde — auch bei Newton kommt er vor —, daß das dx einfach gleich 0 gesetzt wird. Leibniz ist also sehr viel tiefer und akkurater in die Infinitesimalrechnung eingedrungen als Newton und die mit der Fluxionsrechnung arbeitenden Nachfolger. Wenn man häufiger lesen muß, daß zwar Leibniz für die Infinitesimalrechnung eine allgemeine brauchbare Form geschaffen habe, aber Newton habe „von seiner Fluxionsmethode zweifellos glänzendere und weittragendere Anwendungen gemacht", oder wenn von Leibniz gesagt wird, er sei mathematisch ein

1) Œuvres de Fermat, Suppl. p. X. 1922.
2) Œuvres de Blaise Pascal V, p. 331. 1779.
3) Acta eruditorum 1686, p. 298.

großes formales Genie gewesen, so fehlen dafür jegliche Nachweisungen. Der logische Aufbau der Leibnizschen Differential- und Integralrechnung ist von 1673 bis 1716 ohne jede Inkonsequenz durchgeführt, er lehnt bei seinem Pariser Aufenthalt schon alle die Unklarheiten der Indivisibilienmethode ab und findet mit genialer Sicherheit die Elemente aus den ihm dort gebotenen Anregungen heraus, die eine einwandfreie Behandlung des „Unendlichkleinen“ gestatten. Man vergleiche damit die schwankende Entwicklung bei Newton, wie ich sie oben geschildert habe.

Und nun gar die weittragenden Anwendungen? Freilich hat Leibniz leider sehr gezögert, seine großen Entdeckungen öffentlich bekannt zu machen; einmal fehlte bis 1682 in Deutschland überhaupt ein Organ für Veröffentlichung solcher Arbeiten, und dann war Leibniz in Paris ja darauf hingewiesen, daß auch durch Briefe eine Veröffentlichung oder ein Prioritätsrecht gesichert sei. Und an brieflicher Belehrung hat es Leibniz doch wahrlich nicht fehlen lassen. Und die Anwendungen, welche von dieser Belehrung in Deutschland, Frankreich, Holland, ja selbst England angeregt waren, müßten doch wohl auch auf Leibniz' Verdienstkonto gesetzt werden. Denn in seinen Briefen spielte er nicht Verstecken, sondern gab vollständige Klarheit über seine Erfindungen, „er wollte sich nicht nur an den Früchten seines eigenen Gartens erfreuen, sondern auch an den Blumen, die sein Same in fremden Gärten hervorbrächte“. Man hat, um die Fruchtbarkeit der Fluxionsrechnung zu erweisen, oft auf den Taylorschen Lehrsatz Bezug genommen.[1]) Allein Mahnke hat jetzt den zweifellosen Nachweis erbracht[2]), daß Leibniz diese Reihe schon 1694 in der Form, wie sie noch heute gebraucht wird, Joh. Bernoulli mitgeteilt hat, daß aber die Anfänge dazu bereits 1673 im August von Leibniz gefunden sind, und daß er auch zuerst den Zusammenhang der Bernoullischen Reihe mit der Taylorschen 1694 erkannt hat, so daß Joh. Bernoulli 1716 ausdrücklich Taylor des Plagiats beschuldigte.

Aus der dargestellten Entwicklung der beiden Wege, die von Archimedes ausgehend zu Newton einerseits, zu Leibniz andererseits führen, ist nun deutlich, daß nicht nur ein formaler Gegensatz zwischen den beiden Methoden besteht, sondern ein sachlicher. Der Infinitesimalbegriff bei Newton ist ein wesentlich anderer als bei Leibniz; während Newton die Indivisibilienmethode übernimmt und nur dem Tacquetschen Bedenken Rechnung zu tragen bemüht ist, ohne jedoch die Unklarheit (s. Momenta und Fluxionen) wirklich zu beseitigen, hat Leibniz wohl unendlich kleine Größen, aber die sich der 0 nähern und die also

1) Brook Taylor, Methodus incrementorum 1715, p. 5.
2) l. c. p. 55—58.

dem Limesbegriff Raum schaffen. Wenn selbst Leibniz die ganze Fluxionsrechnung gekannt hätte, wäre seine Differentialrechnung und Integralrechnung nicht nur nicht überflüssig gewesen, sondern eine Großtat allerersten Ranges. Der Ausgangspunkt bei Newton ist die Summation von Elementen niederer Ordnung, so daß eine höhere Ordnung entsteht, also aus Punkten Linien, aus Linien Flächen usw. Da nennt er die Größen niederer Ordnung Momente. Das ist die erste Methode, die er noch 1687 in den Prinzipien verwendet. Daraus ist dann die Erweiterung zur Fluxions- und Fluentenrechnung entstanden, wie oben geschildert ist.

Ganz anders ist der Gedankengang bei Leibniz. Er geht aus von dem Begriff der Funktion, den er freilich zunächst (Ausgang 1673) noch alterierend officium oder ratio nennt, aber doch schon Ende 1673 oder Anfang 74 ganz klar definiert, und fragt sich, was wird aus der Funktion, wenn das Argument sich ändert? Es ist das also eine Weiterentwicklung des Gedankens, dem wir zuerst bei Kepler begegnet sind, wo er das Volumen des eingeschriebenen Zylinders als Funktion der Höhe x und der Grundfläche y durch Verschieben des Eckpunktes auf der Peripherie sich ändern läßt. Es entspricht das der Frage nach dem Additionstheorem einer Funktion, wie sie bei den trigonometrischen Funktionen und bei den Potenzen im binomischen Lehrsatz schon lange vorher behandelt war. Nur daß jetzt das Inkrement oder Dekrement als eine Größe niederer Ordnung, d. h. die im Verhältnis zu der gegebenen Größe als unendlich klein betrachtet werden muß, auftritt. Hierin hat Leibniz das Recht, sich auf Archimedes zu berufen, wie er es wiederholt getan hat. Ich sage ausdrücklich unendlich klein; denn Leibniz ist sich stets bewußt, daß diese unendlich kleinen Größen unter sich sehr verschiedene Verhältnisse haben können, aber im Verhältnis zu den endlichen Größen verschwinden, während, wie wir oben gesehen haben, Newton kein Bedenken trägt, $\frac{0}{0} = 1$ zu setzen. Darum ist bei Leibniz das Inkrement einer Fläche nicht eine Linie, sondern eine Fläche, aber von verschwindender Größe im Verhältnis zur ganzen Fläche, und wenn er bisweilen eine 0 schreibt, so ist dies nichts anderes als was wir meinen, wenn wir $\lim_{a=\infty} \frac{1}{a} = 0$ setzen. Leibniz hat also den Tacquetschen Gedanken in eine präzise Form gebracht, womit nicht gesagt sein soll, daß er Tacquets Buch gekannt hat. Soviel ich sehe, ist in den bisherigen Veröffentlichungen aus Leibniz' Nachlaß niemals der Name Tacquets genannt, was sicher der Fall gewesen wäre, wenn Leibniz das Buch gekannt hätte. In dem Gesetz der homogenen Größenordnungen (lex nova homogeneorum) sagt Leibniz, daß Größen einer Ordnung nur

mit Größen der gleichen Ordnung vergleichbar oder meßbar sind, und irgendein Kontinuum kann nur durch Teile des Kontinuums selbst gemessen werden. So ist bei Leibniz nicht die Summation sondern die Differentialrechnung das Fundament der Infinitesimalrechnung, und die Integration ist nur die inverse Aufgabe, die wesentlich darauf hinausläuft, zu einer nach Variabeln geordneten Reihe eine zweite Reihe zu finden, von der die erste der Differentialquotient ist. Damit glaube ich den fundamentalen Unterschied zwischen der Methode der Indivisibilien und der Leibnizschen Infinitesimalrechnung festgestellt zu haben; es ist nicht ein formaler sondern ein logischer, und daraus erklärt sich die Fruchtbarkeit der Leibnizschen Gedanken.

(Eingegangen am 25. 5. 27.)

Erfahrungen über die mathematische Vorbildung der Mathematikstudierenden des ersten Semesters.[1])

Von Georg Feigl in Berlin.

Meine Damen und Herren! Der freundlichen und ehrenvollen Aufforderung Ihres Herrn Vorsitzenden, in diesem Kreise von meinen Erfahrungen über die mathematische Vorbildung zu berichten, die dem angehenden Studierenden der Mathematik von der Schule mitgegeben wird, komme ich sehr gern nach.

Die Formulierung meines Vortragsthemas soll gewiss nicht bedeuten, daß die Vorbereitung der Schüler auf das Studium der Mathematik als die wesentliche Aufgabe des mathematischen Schulunterrichts anzusehen ist, ganz im Gegenteil: Ich glaube, mich mit Ihnen allen darin einig zu wissen, daß der mathematische Schulunterricht sich gerade an diejenigen zu wenden hat, die die Mathematik nach dem Verlassen der Schule nicht mehr systematisch betreiben werden. Der mathematische Schulunterricht soll versuchen, die Gesamtheit der Schüler zu exaktem und kritischem Denken zu erziehen und ihr einen Einblick in das Wesen der Mathematik, eine Vorstellung von ihrer Arbeitsweise, eine Einführung in ihre beherrschenden Begriffe, Probleme und Methoden zu geben. Meine heutigen Ausführungen werden sich demnach mit der Frage beschäftigen, wie weit der Schulunterricht in der Mathematik diesen Aufgaben gerecht wird.

An der Universität lassen sich eingehendere Beobachtungen über das mathematische Wissen und Können nur an solchen Studierenden

1) Vortrag, gehalten im Berliner „Verein zur Förderung des mathematischen Unterrichts“ am 30. 8. 1927.

anstellen, die Mathematik als Haupt- oder Nebenfach betreiben, so daß die Resultate dieser Beobachtungen günstiger ausfallen werden, als wenn alle Abiturienten und nicht nur die mathematisch Interessierten zur Verfügung ständen. Wenn man sich aber davor hütet, besonders gute oder schlechte Einzelleistungen übertrieben zu betonen, und wenn man bestrebt ist, von den Unterschieden in der Anlage des Schulunterrichts, der Schulgattung usw. möglichst zu abstrahieren, dann wird man jenen Beobachtungen einen gewissen Wert nicht aberkennen können, einen Wert vor allem bei der Beantwortung der Hauptfrage, ob die augenblickliche Stoffauswahl des mathematischen Schulunterrichts für die Erreichung der soeben ausgesprochenen Unterrichtsziele wirklich die günstigste ist. Eine etwaige Kritik wird sich also, das bitte ich hier betonen zu dürfen, nicht gegen die Unterrichtstätigkeit des einzelnen Lehrers oder der Lehrerschaft, sondern höchstens gegen die Auswahl des Lehrstoffes richten, auf die der einzelne Lehrer bei der Bindung durch die Lehrpläne doch nur einen geringen Einfluß hat.

Bevor ich mich nun meinem eigentlichen Thema zuwende, muß ich Ihnen kurz berichten, wie an unserer Universität der mathematische Anfängerunterricht organisiert ist und welche Anforderungen an die Studierenden gestellt werden: Um den Übergang von der Schule zur Universität zu erleichtern, findet zunächst in jedem Semester eine besondere fünfstündige Einführungsvorlesung statt, deren Besuch im allgemeinen jedem Studierenden des ersten Semesters angeraten wird. (Es besteht im mathematischen Seminar eine von einigen älteren Studierenden der Mathematik im Einvernehmen mit der Dozentenschaft geleitete Auskunftstelle, auf die jeder Studierende der Mathematik und Naturwissenschaften bei der Inskription durch ein Merkblatt hingewiesen wird.) In der Einführungsvorlesung, die für die weiteren Vorlesungen ein einheitliches Niveau bereiten soll, werden in der Hauptsache behandelt: 1. Der Aufbau der Menge der reellen Zahlen bis zur Theorie des Limes und bis zum Rechnen mit den irrationalen Zahlen einschließlich; dieser Aufbau wird in der Vorlesung über Differential- und Integralrechnung nicht gebracht, weil er dort dem eigentlichen Stoff der Vorlesung zuviel Zeit entziehen würde. 2. Die Grundbegriffe der Zahlentheorie und das Rechnen mit Polynomen. 3. Die Theorie der Determinanten, Matrizen und linearen Gleichungen, wie sie in den Vorlesungen über analytische Geometrie gebraucht wird, also vor allem die Auflösung von Systemen linearer Gleichungen mit beliebigem Rang und die Hauptregeln des Matrizenkalküls. 4. Der Gruppenbegriff, für den wichtige Beispiele, die Permutationen und die linearen Substitutionen, durch die Determinantentheorie vorbereitet sind. 5. Die Grundregeln der Vektorrechnung und

der analytischen Geometrie. 6. Einiges aus den Grundlagen der Geometrie in axiomatischer Behandlung. Zu dieser in jedem Semester stattfindenden Einführung, in der Vorkenntnisse nicht vorausgesetzt werden, kommen die beiden wichtigsten Grundvorlesungen, deren eine im Sommer, deren andere im Winter beginnt und die sich beide über zwei Semester mit je vier oder fünf Wochenstunden erstrecken: Differential- und Integralrechnung einerseits, analytische Geometrie andererseits. Die Infinitesimalrechnung, für die ebenfalls Vorkenntnisse nicht gefordert werden, wird seit einigen Jahren so gehalten, daß im ersten Semester alles auf eine Variable bezügliche, also auch der Kalkül der unbestimmten Integrale, die Theorie des einfachen Riemannschen Integrals sowie die Bogenlänge, gebracht wird, während im zweiten Semester alles auf mehrere Variable bezügliche vorgetragen wird: die Stetigkeit einer Abbildung des n dimensionalen Zahlenraumes auf den m dimensionalen, die partielle Differentiation, die implizit gegebenen Funktionen, der Jordansche Inhalt, das mehrfache bestimmte Integral bis zur Transformation und der Bestimmung der Oberfläche einschließlich. Den prinzipiellen Ausgangspunkt dieser Vorlesung bildet die als fertig vorliegend und dem Dedekindschen Stetigkeitsaxiom genügend angenommene Menge der reellen Zahlen. In der Vorlesung über analytische Geometrie wird nur der vorherige oder gleichzeitige Besuch der Einführung vorausgesetzt. Die früher übliche Trennung in analytische Geometrie der Ebene und in analytische Geometrie des Raumes ist aufgegeben und durch ein gruppentheoretisches Einteilungsprinzip ersetzt worden. Ebene und Raum werden nebeneinander, und zwar vielfach als Spezialfälle des n dimensionalen Raumes, behandelt; das erste Semester bringt im wesentlichen metrische und affine, das zweite projektive Geometrie. Zu diesen Vorlesungen, deren jede seit einiger Zeit in der Hand desselben Dozenten liegt, so daß Gleichmäßigkeit in den Anforderungen und in dem vorgetragenen Stoff gewährleistet wird, werden in jedem Semester wöchentlich je zwei Stunden Übungen abgehalten, so daß ein Studierender des ersten Semesters sowohl im Sommer als auch im Winter zwei große mathematische Vorlesungen mit je zwei Stunden Übungen hören kann. In den Übungen werden in jeder Woche Aufgaben zur häuslichen Bearbeitung gestellt, die an den in der Vorlesung behandelten Stoff anschließen, zur Korrektur abgegeben und in der nächsten Woche ausführlich durchgesprochen werden. Trotz der großen Anzahl der Teilnehmer ist so durchaus die Möglichkeit vorhanden, zu beurteilen, wie die Gesamtheit und auch jeder einzelne der Vorlesung zu folgen vermag. Weitere Gelegenheiten dazu ergeben sich in den von der Arbeitsgemeinschaft unserer Mathematikstudierenden, der „Mapha", im Semester und

in den Ferien veranstalteten Arbeitszirkeln, die in der Regel von einem Dozenten oder Assistenten oder von einem jungen Doktor im Anschluß an die Vorlesungen, und zwar unentgeltlich, abgehalten werden, und in denen jeder Teilnehmer immer wieder aufgefordert wird, Fragen zum Vorlesungsstoff zu stellen. Schließlich ermöglichen auch die Einrichtungen unseres mathematischen Seminars, den einzelnen Studierenden näher kennen zu lernen. Die Studierenden werden nämlich sofort beim Beginn des Studiums auf die Lese- und Arbeitsräume und auf die Präsenzbibliothek des mathematischen Seminars hingewiesen. Ein großer Teil der Studierenden benutzt in Befolgung dieses Ratschlages die Seminarbibliothek eifrig und wird daher sehr bald mit Dozenten, Assistenten oder älteren Studierenden persönlich bekannt.

Welches sind denn nun die Erfahrungen, die sich auf dieser Basis über die mathematische Vorbildung unserer Studierenden ergeben? Da ist zunächst eine sehr erfreuliche Erfahrung allgemeiner Art, die sich sofort feststellen läßt, der außerordentliche Eifer und eine unverkennbare Freude an mathematischen Dingen auch bei solchen, denen das Studium keineswegs leicht fällt. Die Teilnahme an den Übungen ist eine durchaus freiwillige; um jeden Zwang zu vermeiden, der leicht zu sinnlosem Abschreiben führen könnte, wird das Abtestat der Übungen von keiner Leistung abhängig gemacht. Dennoch bearbeiten in den Anfängerübungen im ganzen etwa 75% der Teilnehmer, wenn auch nicht jede Woche, die Übungsarbeiten, und derselbe große Fleiß ist vom ersten Semester an auch im Vorlesungsbesuch zu konstatieren.

Gehen wir aber nun mehr ins einzelne: Was die Schüler durchweg mitbringen, ist Fertigkeit im Rechnen. Demgemäß werden in den Übungen die rein rechnerischen Aufgaben stark bevorzugt und mit großer Freude bearbeitet, ob es sich nun um Übungen im Differenzieren oder um die Auswertung von unbestimmten Integralen oder um die Auflösung eines Systems linearer Gleichungen handelt. Auch kompliziertere Rechnungen werden nicht gescheut und fast immer gut durchgeführt, wenn der theoretische Gang bereits bekannt ist. So habe ich selten einen prinzipiellen Fehler gesehen, wenn im Anschluß an die Vorlesung etwa ein System von sieben linearen homogenen Gleichungen mit neun Unbekannten vom Range vier aufgelöst werden soll; ein Fundamentalsystem linear unabhängiger Lösungen und die allgemeine Lösung werden richtig angegeben. Im vorigen Semester ließ ich, da in der Vorlesung über Differential- und Integralrechnung nur kurz besprochen worden war, daß Integrale von der Form $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ (wobei R eine rationale Funktion von $\sin x$ und $\cos x$ bedeutet) durch Rationalisierung des Integranden mit Hilfe elementarer Funktionen aus-

gewertet werden können, in den zugehörigen Übungen die bekannten Rekursionsformeln für $\int \cos^m x \sin^n x\, dx$ (m und n ganze Zahlen) aufstellen; ich gab nur eine kurze Anweisung, wie die Rechnung anzulegen sei, und die Formeln wurden von vielen Teilnehmern und ausnahmslos fehlerfrei hergeleitet. Mit der rechnerischen Fertigkeit ist es also nach meinen Erfahrungen gut bestellt, allerdings mit einer doppelten, das numerische Rechnen betreffenden Einschränkung: Einerseits kann man immer wieder beobachten, daß Resultate von Zahlenrechnungen zu viele Dezimalen enthalten und so eine Genauigkeit vortäuschen, die in den Daten nicht enthalten ist. Andererseits fehlt häufig eine Vorstellung von dem Wesen der Zahl und das Verständnis für den Unterschied zwischen genauer und angenäherter Angabe einer Größe. Das Resultat einer ganz theoretischen, von allen numerischen Rechnungen freien Aufgabe, z. B. der Bestimmung eines Limes, wird sehr häufig nicht $\frac{1}{2}$, sondern 0,5, nicht $\frac{1}{3}$, sondern 0,333..., nicht $\frac{\pi}{2}$, sondern 1,57 geschrieben. Beide Unsitten sind offenbar auf das logarithmische Rechnen zurückzuführen. Auch der Unsitte, $1\frac{1}{3}$ statt $\frac{4}{3}$ zu schreiben, an der die Gepflogenheiten des praktischen Lebens schuld sind, begegnet man noch bei den jungen Studierenden.

Es fragt sich nun aber, ob diese (mit den genannten Einschränkungen festzustellende) durchaus erfreuliche rechnerische Fertigkeit das entscheidende Unterrichtsziel darstellt. Aus dem vorhin geschilderten Vorlesungsprogramm geht hervor, daß der junge Student an tatsächlichem Wissen in der Mathematik von der Schule nur sehr wenig mitzubringen braucht. Was von ihm in den Anfangsvorlesungen verlangt wird, ist eine Übung im exakten, kritischen Denken. Daß die Erziehung dazu weit schwieriger ist als die Erzielung einer rechnerischen Fertigkeit, ist wohl selbstverständlich. Daß sie aber vom allgemeinen kulturellen Standpunkt aus weit wichtiger ist, daß es sich dabei um eine fundamentale Aufgabe des Mathematikunterrichts überhaupt handelt, ist oft genug betont worden. Sieht man sich die Übungen unter dem Gesichtspunkt an, wie es mit der logischen Schulung der Abiturienten steht, so erhält man sofort ein anderes Bild. Die Resultate in den Übungen verschlechtern sich, wenn man statt Aufgaben, die nach bekannten Regeln zu rechnen sind, solche stellt, an denen selbständige Überlegungen durchzuführen sind, oder wenn man gar den Beweis von Sätzen fordert. Ich möchte Ihr Augenmerk auf einige charakteristische Punkte richten.

Zunächst zeigt sich, daß die jungen Studierenden von dem Wesen des Beweises keine klare Vorstellung haben: In der ersten Übungsstunde

zur Differentialrechnung ließ ich als häusliche Aufgaben, da die Vorlesung zunächst nur um zwei Stunden voraus war und daher noch keinen Übungsstoff bot, die Regeln für das Rechnen mit rationalen Exponenten herleiten, d. h.: Ist a eine positive und n eine positive ganze Zahl, so wird unter der Voraussetzung, daß es eine und nur eine positive Zahl x gibt, die der Gleichung $x^n = a$ genügt, diese Zahl $x = \sqrt[n]{a}$ gesetzt. Ist ferner p eine ganze und q eine positive ganze Zahl, so wird $\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$ gesetzt. Es werden für Potenzen mit ganzzahligen Exponenten die bekannten Rechenregeln vorausgesetzt, und es sollen die folgenden Formeln hergeleitet werden:

1. $\sqrt[n]{a^n} = a$, [nach Definition ist $(\sqrt[n]{a})^n = a$], 2. $(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}$,

3. $\sqrt[m]{a^{mn}} = a^n$, 4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$, 5. $\sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}$,

6. $a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$, 7. $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{pr}{qs}}$, 8. $a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}} = (ab)^{\frac{p}{q}}$.

Bei diesen Aufgaben wurden sehr viele Fehler gemacht. 123 Teilnehmer gaben die Aufgaben oder einen Teil derselben ab; 12 von diesen hatten alle Aufgaben einwandfrei behandelt, 25 weitere hatten nur einen Teil der Aufgaben, aber ebenfalls ohne Fehler, bearbeitet. Die Mehrzahl der Fehler läßt sich auf ein einheitliches Schema bringen, das ich etwa am Beispiel der Aufgabe 2 vorführen möchte: Es wird die behauptete Gleichung

$$(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}$$

zunächst als richtig angenommen und in die $m$te Potenz erhoben; dann ergibt sich

$$(\sqrt[m]{a^n})^m = a^n, \qquad \{(\sqrt[m]{a})^n\}^m = (\sqrt[m]{a})^{nm} = \{(\sqrt[m]{a})^m\}^n = a^n,$$

also die offenbar richtige Gleichung

$$a^n = a^n.$$

Weil nun, das ist die Schlußweise, aus der behaupteten Beziehung auf eine Weise eine als richtig bekannte Beziehung gefolgert werden kann, so muß die behauptete Beziehung selbst auch richtig sein. Es handelt sich also nicht um einen technischen, sondern um einen durchaus prinzipiellen und überdies sehr charakteristischen Fehler, und aus den Zahlen, die ich Ihnen nannte, geht hervor, daß mehr als 50% der Teilnehmer diesen Fehler begangen haben. Um die Absurdität einer Beziehung zu beweisen, genügt es gewiß, auf irgendeine Weise aus dieser eine andere herzuleiten, deren Absurdität bereits feststeht; das ist ja

das Schema des indirekten Beweises, mit dem hier offenbar eine Verwechselung geschehen ist. Um aber die Richtigkeit einer Beziehung zu beweisen, genügt es nicht, auf eine einzige Weise aus der fraglichen Beziehung eine andere herzuleiten, deren Richtigkeit bereits bekannt ist. Die Richtigkeit steht erst fest, nachdem man nachgewiesen hat, daß man aus der fraglichen Beziehung auf keine Weise zu einem Widerspruch gelangen kann.

Ich möchte an dieser Stelle darauf hinweisen, daß Bemerkungen von allgemeinerem, formal logischem Charakter über das Schema eines Beweises mir nicht nur als sehr nützlich, sondern geradezu als notwendig erscheinen, da nach dem obigen Schema von dem Schüler sehr leicht Antinomien konstruiert werden könnten. In der Anfängervorlesung pflege ich genau zu erörtern, was man unter einer notwendigen und was man unter einer hinreichenden Bedingung zu verstehen hat; ich habe aber nur äußerst selten einen Studierenden des ersten Semesters getroffen, dem diese Begriffe dem Namen oder dem Inhalt nach schon bekannt gewesen wären, obwohl sie mit Beispielen aus dem täglichen Leben leicht klar zu machen sind, und obwohl für die in manchen Schulen zum Pensum gehörende Behandlung der unendlichen Reihen eine Klarstellung dieser Begriffe unerläßlich ist.

Weiter zeigt sich, daß die Anfänger häufig nicht auseinanderzuhalten verstehen, was vorausgesetzt ist und was nicht, daß sie wesentliche Voraussetzungen hinzufügen oder fortlassen. Ein Kapitel, das diese Mängel in der logischen Schulung besonders deutlich hervortreten läßt, ist der Limeskalkül, der dem Anfänger viel Schwierigkeit bereitet und der daher bei uns außer in der Differentialrechnung auch in der Einführung vorgetragen und in den Übungen zur Differentialrechnung ausgiebig geübt wird.

Die Studenten lernen zunächst den Begriff des Häufungspunktes kennen; die konvergente Folge wird als eine Folge definiert, zu der sich eine reelle Zahl so angeben läßt, daß jede Umgebung dieser Zahl fast alle Elemente der Folge enthält. Sodann wird der Hauptsatz bewiesen: Eine Folge ist dann und nur dann konvergent, wenn sie beschränkt ist und einen einzigen Häufungspunkt besitzt. Eine besonders wichtige Klasse von Folgen sind die monotonen; bei ihnen folgt die Konvergenz aus der Beschränktheit allein. Einer der häufigst vorkommenden Fehler ist nun der, daß bei einer nicht notwendig monotonen Folge die Beschränktheit gezeigt und daraus ohne weiteres die Konvergenz erschlossen wird. Sehr viele Fehler werden auch bei der Anwendung der Gleichung $\lim x_n \cdot \lim y_n = \lim (x_n \cdot y_n)$ und bei den analogen für die übrigen Rechnungsarten gemacht, und zwar deshalb, weil diese Gleichung häufig

rein mechanisch angewendet wird. Der Sinn der Gleichung ist doch folgender: Wenn sowohl die Folge x_n als auch die Folge y_n konvergiert, dann konvergiert auch die Folge $x_n \cdot y_n$, und zwar ist ihr Limes gleich dem Produkt der beiden gegebenen Limites. Die Anwendung geschieht nun sehr oft, ohne daß der Student sich vorher überzeugt hat, ob $\lim x_n$ und $\lim y_n$ auch beide existieren. Dieser Fehler tritt deutlich bei der folgenden Aufgabe hervor: Es sei x_n eine Nullfolge (d. h. eine Folge, welche gegen Null konvergiert) und es sei y_n eine beschränkte Folge; es ist zu zeigen, daß auch $x_n \cdot y_n$ eine Nullfolge ist. Das wird fast immer mit der Gleichung $\lim x_n \cdot \lim y_n = \lim (x_n y_n)$ bewiesen, die aber gar nicht anwendbar ist, da y_n nicht konvergent zu sein braucht. Als ich diese Aufgabe im letzten Semester stellte, wurde der Fehler von über 70% der Bearbeiter begangen.

Die Limesrechnung ist deshalb für uns so instruktiv, weil es sich um Aufgaben handelt, die nicht nach einem einmal vorliegenden Schema, wie z. B. die Differentiationsaufgaben, gelöst werden können. Jede Aufgabe erfordert vielmehr eine genaue Überlegung darüber, was vorausgesetzt ist, welche Sätze angewendet werden dürfen usw., und eine solche Überlegung scheuen die Anfänger, da sie gewohnt sind, blindlings zu rechnen und die Rechnung für sich denken zu lassen.

Ähnlich steht es bei dem Rechnen mit Ungleichungen; ich möchte auch hier einen charakteristischen Fehler anführen. Es soll gezeigt werden, daß man eine reelle Zahl h_0 so bestimmen kann, daß ein gegebener Ausdruck $\varphi(h)$ an der Stelle h_0 größer wird als eine vorgeschriebene Zahl C: $\varphi(h_0) > C$. Der Ausdruck $\varphi(h)$ ist nun zu kompliziert gebaut; es ist aber von einem einfacheren Ausdruck $\psi(h)$ bekannt, daß die Ungleichung $\varphi(h) > \psi(h)$ für alle h erfüllt ist. Wenn man nun eine reelle Zahl h_0 so angeben kann, daß $\psi(h_0) > C$ ist, dann ist man fertig; denn aus $\varphi(h_0) > \psi(h_0)$ und $\psi(h_0) > C$ folgt wegen der Transitivität der Ordnung $\varphi(h_0) > C$. Der Anfänger macht, trotz vorheriger Warnung, sehr oft den folgenden Fehler: Er konstruiert zu der gegebenen Funktion $\varphi(h)$ eine einfachere $\chi(h)$, die für alle h der Ungleichung $\chi(h) > \varphi(h)$ genügt, und bestimmt h_1 so, daß $\chi(h_1) > C$ ist. Daß aus den beiden Beziehungen $\chi(h_1) > C$, $\chi(h_1) > \varphi(h_1)$ im allgemeinen kein weiterer Schluß gezogen werden kann, macht er sich aber nicht klar.

Daß der Anfänger an eine Aufgabe fast immer ohne die nötige Überlegung herangeht, mag seinen Grund zum Teil auch darin haben, daß er sich daran gewöhnt hat, daß jede Aufgabe, wenigstens jede Aufgabe ersten Grades, genau eine Lösung haben müsse. Er ist sehr erstaunt, wenn man ihm sagt, daß lineare Gleichungen mit mehreren Unbekannten

sehr wohl gar keine Lösung oder unendlich viele Lösungen besitzen können, und noch äußerst selten habe ich einen Studierenden des ersten Semesters getroffen, der ohne Anleitung ein System von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten hätte angeben können, welches keine Lösung besitzt. Man stelle frühzeitig auch solche Aufgaben, die entweder gar nicht oder identisch lösbar sind. In dieselbe Richtung scheint mir die Tatsache zu weisen, daß dem Anfänger die Erfassung des Begriffs der Identität und des Unterschiedes zwischen Gleichung und Identität recht schwer fällt.

Fast durchweg ist dem angehenden Studierenden der Mathematik unbekannt, daß mit der Null nicht dividiert werden darf. Ich habe das mehrmals sehr bald nach Semesterbeginn an dem folgenden Beispiel festgestellt: Die Einführungsvorlesung beginnt mit Rücksicht auf die gleichzeitige Vorlesung über analytische Geometrie mit der Determinantentheorie. Nach einer einleitenden, von der Auflösung zweier linearer Gleichungen mit zwei Unbekannten ausgehenden Behandlung der Determinanten zweiter Ordnung wird ein System von drei linearen Gleichungen mit drei Unbekannten gelöst, um aus der Lösung das Bildungsgesetz der Determinanten höherer Ordnung abzulesen. Bei dieser Rechnung werden, da die allgemeine, auf dem Rangbegriff basierende Theorie der linearen Gleichungen später ausführlich besprochen wird, die auftretenden Nenner als von Null verschieden vorausgesetzt. Stellt man nun schon auf diesem Niveau in den Übungen ein Zahlenbeispiel für ein System von drei Gleichungen mit drei Unbekannten, in dem die aus den Koeffizienten der Unbekannten gebildete Determinante dritter Ordnung den Wert Null hat, während die übrigen drei Determinanten dritter Ordnung nicht sämtlich gleich Null sind, so antworten nur wenige Bearbeiter richtig, daß das System keine Lösung besitzt. Ein großer Teil schreibt als Lösung z. B.: $x = \frac{5}{0} = \infty$. Überhaupt scheint mir die Schulmathematik das Wort „Unendlich" zu viel zu gebrauchen; das Symbol ∞ sollte sie gänzlich vermeiden.

Die angeführten Beispiele zeigen Ihnen mit Deutlichkeit, welche Mängel die logische Schulung unserer Anfänger aufweist. Wenn auch dem Schulunterricht in der Mathematik in der zur Verfügung stehenden Zeit und in der Auffassungsgabe der Schüler sehr enge Grenzen gezogen sind, so muß man doch die Frage stellen, ob sich innerhalb dieser Grenzen vielleicht bessere Ergebnisse erzielen lassen. Sieht man sich die Auswahl des Stoffes für den Unterricht in der Arithmetik und Analysis an, so gelangt man zu der Einsicht, daß sie zu einseitig darauf zugeschnitten ist, auf dem kürzesten Wege zu einem recht ergiebigen Aufgabenmaterial zu gelangen. Ich will die Bedeutung der Aufgaben

nicht herabsetzen; auch bei uns werden ja, wie Sie gesehen haben, intensiv Aufgaben behandelt; ein allzu sehr auf der Bearbeitung von Aufgaben basierender Unterricht vernachlässigt aber bestimmt die logische Schulung. In ihrer jetzigen Stoffauswahl erscheinen Arithmetik und Analysis dem Schüler lediglich als ein Kompendium von Rechenregeln; daß in diesen Zweigen der Mathematik auch Sätze bewiesen werden können wie in der Geometrie, kommt ihm nicht recht zum Bewußtsein. Die Formeln, die zwischen den trigonometrischen Funktionen bestehen, die Sätze der ebenen und sphärischen Trigonometrie treten dem Schüler ebenfalls als derartige Rechenregeln entgegen, die hergeleitet werden, um sofort zur Behandlung neuer Aufgabengruppen herangezogen zu werden. Wirkliche Sätze, die sich aus den Formeln der Trigonometrie mühelos ergeben und die sich in ihrer Struktur auch für den Schüler von dem sonstigen Formelapparat unterscheiden — z. B. der Satz, welcher besagt, daß $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ sich als rationale Funktionen von $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ darstellen lassen, oder derjenige, welcher besagt, daß der Tangens ein rationales, der Kosinus ein algebraisches Additionstheorem besitzt — sind dabei dem jungen Studierenden in dieser Form ganz unbekannt. Die Aufgaben aus der Trigonometrie sind mit dem logarithmischen Rechnen eng verknüpft. Da diese Aufgaben in den Oberklassen einen breiten Raum einnehmen, so beherrscht die Logarithmentafel tatsächlich einen großen Teil des höheren mathematischen Schulunterrichts. Wohl ist das logarithmische Rechnen von solcher Wichtigkeit für die Anwendungen, daß es auf der Schule gelehrt und geübt werden muß. Daß es aber den gesunden Zahlensinn verkümmern läßt, und daß die jahrelang geübte Anwendung eines derartig mechanischen Rechenhilfsmittels zur Gedankenlosigkeit erzieht, dürfte nicht von der Hand zu weisen sein. Die ausgiebige Behandlung der trigonometrischen Aufgaben hat noch einen weiteren Nachteil: Es handelt sich bei ihnen im wesentlichen um denselben Erkenntnisinhalt wie bei den den Geometrieunterricht der mittleren Klassen beherrschenden Dreieckskonstruktionen, so daß eine solche Stoffauswahl dem Schüler nur eine unvollkommene Vorstellung von der Vielgestaltigkeit und dem Ideenreichtum der Mathematik gibt.

Die Einfügung der Differential- und Integralrechnung in den Schulunterricht hat an diesem Übelstand in einer Beziehung etwas gebessert: Das Aufgabenmaterial kann sehr vielseitig gestaltet werden, so daß der Blick des Schülers in bezug auf die Anwendungsmöglichkeiten der Mathematik außerordentlich erweitert wird. Dagegen bleiben die die Infinitesimalrechnung beherrschenden Begriffe Limes und Stetigkeit, die

zu den allerwichtigsten Begriffen der Mathematik überhaupt gehören, im wesentlichen ungeklärt. Denn aus didaktischen Gründen muß der Schulunterricht auf eine exakte Behandlung des Limes und der Stetigkeit, die, meiner Ansicht nach durchaus zu Unrecht, vielfach selbst im Anfangsunterricht der Universität nur unter Konzessionen an die Exaktheit erfolgt, verzichten. Was der Schulunterricht aus der Differentialrechnung bringen kann, ist in erster Linie und fast ausschließlich der Kalkül. Der Formelapparat des Schülers wird um einige Formeln bereichert, deren Herleitung übrigens zum Teil nicht einwandfrei sein kann und daher das kritische Gefühl nur noch weiter einschläfert; eine Fülle von neuen, erfreulicherweise einen weiten Ausblick eröffnenden Aufgaben bietet sich — aber prinzipiell und logisch ist nichts gewonnen. Da das Fundament des Differentiationskalküls, die Limestheorie, nicht gesichert ist, so bleibt auch der Begriff der Differenzierbarkeit als solcher unklar. Die Folge ist, daß z. B. der Satz von der Differenzierbarkeit des Produkts zweier differenzierbarer Funktionen seinen logischen Gehalt verliert und, wie ich immer wieder feststellen kann, zu einer rein formalen, auswendig gelernten Rechenregel herabsinkt. Die logische Schulung wird also durch die Behandlung der Differentialrechnung nur weiter gefährdet. Gewiß ist gerade die Differentialrechnung in der prägnanten Formulierung ihrer Sätze und in der an einfachen Gegenbeispielen vorzunehmenden Erläuterung von der Notwendigkeit dieser Formulierungen außerordentlich reich an Mitteln für eine solche Schulung; deren Auswertung aber ist dem Schulunterricht aus didaktischen Gründen versagt.

Kann man nun, so müssen wir uns zum Schluß fragen, an den geschilderten Verhältnissen etwas bessern, um die gewaltige Arbeit, die gerade im Mathematikunterricht von der Lehrerschaft geleistet wird, durch Änderung der Stoffauswahl mit einem befriedigenderen Ergebnis belohnt zu sehen? Ganz verfehlt wäre es natürlich, das Pensum der Schule weiter zu belasten und hier und da neuen Lehrstoff einzuschieben, verfehlt umsomehr, als von anderen Seiten immer neue Ansprüche um Berücksichtigung im mathematischen Schulunterricht gestellt werden. Was wir fordern müssen, ist Vertiefung des Unterrichts, und diese kann nur durch Entlastung des Pensums bewirkt werden. Die Meinung vieler Universitäts- und Hochschullehrer geht dahin, daß die Differential- und Integralrechnung aus der Schule besser wieder verschwände. Ich persönlich halte es freilich im Augenblick nicht für opportun, diese Forderung zu stellen, da die Mathematik in den letzten Jahren um ihre Position an den höheren Schulen schwer zu kämpfen hatte, und da eine derartige Forderung sehr leicht von mathematikfeindlichen Kreisen falsch

ausgelegt werden könnte.[1]) Vor allem müßte der Aufgabenbetrieb sowohl in den Mittelklassen, in denen die Dreieckskonstruktionen immer noch einen zu breiten Raum einnehmen, als auch in den Oberklassen erheblich eingeschränkt werden. Sollte dadurch Zeit verfügbar gemacht werden, so ist in erster Linie die Zahlentheorie zu berücksichtigen. Ich habe bisher kaum einen Anfänger getroffen, der den Satz vom größten gemeinsamen Teiler von der Schule her gekannt oder überhaupt ein Gefühl dafür gehabt hätte, daß die Eigenschaften des größten gemeinsamen Teilers erst durch den Beweis eines Satzes gewonnen werden können. Die Begriffe Teilbarkeit, größter gemeinsamer Teiler, kleinstes gemeinsames Vielfaches, Primzahl sind dem Schüler im allgemeinen nur aus dem Rechenunterricht der Unterstufe bekannt. Warum aber werden diese grundlegenden Begriffe später im Mathematikunterricht nicht exakt formuliert und vertieft? An die Spitze wäre der durch den Euklidischen Algorithmus zu beweisende Satz vom größten gemeinsamen Teiler zu stellen; von da gelangt man Schritt für Schritt bis zum Fundamentalsatz der Zahlentheorie, dem Satz von der eindeutigen Zerlegbarkeit in Primfaktoren. An keiner anderen Stelle der Elementarmathematik bietet sich ein derartig konsequenter, von Satz zu Satz fortschreitender und dennoch stofflich äußerst einfacher Aufbau einer Theorie. Bis zum Fundamentalsatz einschließlich wird man selbst bei langsamstem Tempo nicht über zwölf Unterrichtsstunden gebrauchen. Sollte noch weitere Zeit zur Verfügung stehen, so bespreche man das Rechnen mit Polynomen und zeige, daß für deren Teilbarkeit dieselben Sätze gelten wie für die der ganzen Zahlen.

Was den Unterricht in der Geometrie betrifft, so scheint er mir unter den aufgestellten Gesichtspunkten weit weniger reformbedürftig. Eines seiner Hauptziele ist die Erziehung zur Raumanschauung, die unbedingt in den Vordergrund gestellt werden muß. Das räumliche Anschauungsvermögen des Anfängers läßt nämlich immer noch zu wünschen übrig; wie z. B. drei Ebenen, die keinen Punkt gemeinsam haben, gelegen sein können, ist ihm meistens unbekannt; er vermag sich nur den Fall dreier paralleler Ebenen vorzustellen. Man vermeide daher im Geometrieunterricht der Mittelklassen die früher übliche, durch verschiedene Namen besonders betonte Trennung von ebener und räumlicher Geometrie und beginne mit der letzteren früher als bisher. Ferner richte man sein Augenmerk auf Konstruierbarkeitsfragen. Der sphärischen Trigonometrie ließe sich bei Beschränkung des Aufgabenmaterials durch

---

1) Vgl. z. B. die vom Sächsischen Ministerium für Volksbildung 1926 herausgegebene Denkschrift „Zur Neuordnung des höheren Schulwesens in Sachsen" S. 125.

Behandlung der Geometrie auf der Kugel eine prinzipielle Bedeutung abgewinnen. Die Anfangsgründe der analytischen Geometrie müssen im Lehrplan erhalten bleiben, da ihre Behandlung zu grundsätzlichen Bedenken keinen Anlaß gibt und da der Einblick in die Zusammenhänge zwischen Analysis und Geometrie für den Schüler äußerst lehrreich und anregend ist. Schließlich versuche man, in das Chaos der in der Schule vorgebrachten geometrischen Einzeltatsachen vom gruppentheoretischen Standpunkt aus Ordnung zu bringen, indem man die Sätze danach einteilt, ob sie gegenüber Bewegung oder gegenüber Ähnlichkeitstransformation oder gegenüber Parallelprojektion oder gegenüber Zentralprojektion invariant sind, oder ob sie, wie der Eulersche Polyedersatz, den ich zu meinem größten Bedauern mehr und mehr aus dem Schulunterricht verschwinden sehe, einen noch allgemeineren Charakter haben. Ob man an einfachen Beispielen den Gruppenbegriff selbst erörtern soll, möchte ich dahingestellt sein lassen.

(Eingegangen am 2. 10. 27.)

Bericht über die Herausgabe des siebenten Bandes der Mathematischen Werke von Karl Weierstraß: Vorlesungen über Variationsrechnung.

Von Rudolf Rothe in Berlin.[1])

M. H.! Ich habe die Ehre, Ihnen hier das erste Exemplar des soeben fertiggestellten siebenten Bandes der Mathematischen Werke von Karl Weierstraß vorzulegen, der die Vorlesungen über Variationsrechnung enthält, und möchte mir erlauben, über die Entstehung und den Inhalt des Bandes kurz zu berichten.

In dem ursprünglichen Plane der Weierstraßschen Werke, der etwa 1892, noch zu Lebzeiten von Weierstraß, aufgestellt worden war, ist ein Band über Variationsrechnung überhaupt nicht enthalten gewesen. Die Gründe dafür lassen sich heute, wo von den unmittelbaren Schülern von Weierstraß, mit denen der damals fast Achtzigjährige die Herausgabe seiner Werke beraten hatte, nur noch wenige am Leben sind, nicht mehr genau feststellen. Aber es darf doch als ziemlich sicher gelten, daß H. A. Schwarz die Absicht hatte, die Weierstraßsche Theorie der Variationsrechnung in einem gesonderten Werke zu bearbeiten und herauszugeben. Das war wenigstens vor etwa 20 Jahren die allgemeine

1) Vortrag, gehalten auf der Deutschen Mathematikertagung in Bad Kissingen am 19. Sept. 1927.

Annahme, die gelegentlich auf Mathematikertagungen geäußert worden ist, und der auch H. A. Schwarz selbst niemals widersprochen hat. Als die Verwirklichung dieser Absicht nicht mehr in Frage kam, beschloß die von der Preußischen Akademie der Wissenschaften eingesetzte Kommission, unter deren Mitwirkung die Herausgabe der Weierstraßschen Werke von Anfang an erfolgt war, und der auch Schwarz angehörte, die Vorlesungen über Variationsrechnung in die mathematischen Werke aufzunehmen, und die Akademie der Wissenschaften als Inhaberin der Autorrechte stimmte dem zu. In bereitwilliger Weise hat Schwarz sogleich das gesamte Material, das er darüber bei der Hand hatte, mir übergeben. Dieses bestand leider nur aus einigen Vorlesungsnachschriften und -ausarbeitungen früherer Zuhörer von Weierstraß und einigen wenigen Bemerkungen, die Schwarz dazu notiert hatte, aber keinerlei Manuskript, das für den Druck hätte verwendet werden können, insbesondere keinerlei Manuskript von Weierstraß selbst.

Die vorliegende Bearbeitung der Weierstraßschen Theorie der Variationsrechnung gründet sich also lediglich auf eine Reihe von Vorlesungsheften und -nachschriften. Auf solche Nachschriften ist übrigens auch alles zurückzuführen, was in der Literatur über die Weierstraßsche Theorie der Variationsrechnung bisher veröffentlicht worden ist; ich verweise insbesondere auf Zermelos bekannte Dissertation, Hancocks Calculus of Variations, worauf ich noch nachher zurückkomme, A. Knesers verbreitetes Lehrbuch und seinen Enzyklopädieartikel, ferner Bolzas Lectures of the Calculus of Variations u. a.

Weierstraß selbst hat *nichts* über seine Theorie der Variationsrechnung veröffentlicht, und die wenigen Abhandlungen von ihm, die die Variationsrechnung betreffen, beziehen sich nur auf spezielle Probleme, z. B. die Delaunysche Aufgabe u. dgl.

Die erste Vorlesung über Variationsrechnung hat Weierstraß im Sommersemester 1865 vierstündig gehalten und dann in ziemlich regelmäßiger Wiederkehr alle zwei bis drei Jahre, zuletzt im Sommersemester 1884 fünfstündig. Ich habe von fast jeder dieser Vorlesungen mindestens eine Nachschrift einsehen können. Wenngleich, wie Kneser gelegentlich (Enzykl. d. math. Wiss. II A 8, Fußnote 121a) hinsichtlich solcher Vorlesungshefte mit Recht bemerkt, die handschriftliche Tradition sehr unsicher ist, so läßt sich doch aus diesen Nachschriften das eine ziemlich sicher feststellen, daß nämlich von einer Weierstraßschen Theorie der Variationsrechnung in dem Sinne, wie wir sie heute auffassen, wohl erst von der Vorlesung des S.-S. 1875 an die Rede sein kann. Es ist bekannt, daß Weierstraß, von der Steinerschen Behandlung geometrischer Aufgaben der Theorie der Maxima und Minima und des iso-

perimetrischen Problems zur Kritik angeregt, von diesen Problemen her sich mit der Variationsrechnung beschäftigt hat, und daher nehmen diese Fragen in den ersten Vorlesungen (bis 1872 einschl.) einen breiteren Raum ein, ohne daß jedoch die Betrachtungen über die Eulersche Differentialgleichung, allenfalls die Jacobischen konjugierten (damals korrespondierende genannten) Punkte hinausgingen. 1875 findet sich der Begriff des Extremalen-Feldes (in der heutigen Sprechweise), findet sich die genaue Unterscheidung der Variationen, die wir heute nach Kneser starke und schwache nennen, tritt schließlich erstmalig die $\mathcal{E}$-Funktion auf.

Ich habe mich daher für die Herausgabe des vorliegenden Bandes auf die Ausarbeitungen der Vorlesungen von 1875 an beschränkt und insbesondere folgende Vorlesungshefte benutzt:

Erstens und vorzugsweise eine von Heinrich Burkhardt angefertigte Ausarbeitung der Vorlesung vom S.-S. 1882, und zwar in einer von Schwarz selbst geschriebenen sorgfältigen Abschrift, die er mir für die Zwecke der Herausgabe des Bandes übergeben hatte. Diese Ausarbeitung, ein gebundenes Foliobuch, hat Schwarz für seine eigene Vorlesung über Variationsrechnung stets zur Hand gehabt; er hat darin am Rande und auf einigen eingelegten Zetteln kritische Bemerkungen und andere Notizen angebracht, in der ihm eigenen Art unterschiedlos Wichtiges und Nebensächliches mit demselben umständlichen Eifer behandelnd. Er hatte auch einige Stellen mit Burkhardt brieflich besprochen und sogar 1885, bei einem Besuch von Göttingen aus, in Berlin mit Weierstraß selbst eine längere Unterredung über Variationsrechnung gehabt, die sich großenteils auf diese Burkhardtsche Ausarbeitung bezog, und worüber er eine Art Protokoll[1]) aufgenommen hat, das sich in seinem Nachlaß aufgefunden hat. Offenbar hatte Schwarz die Absicht, diese Burkhardtsche Ausarbeitung zur Grundlage seiner geplanten Herausgabe zu machen; und dies war für mich auch der Grund, bei der Bearbeitung des vorliegenden Bandes in erster Linie auf dieser Ausarbeitung zu fußen.

Zweitens habe ich die in der Literatur mehrfach angeführte Ausarbeitung der Vorlesung des S.-S. 1879 benutzt, die auf Veranlassung des Mathematischen Vereins an der Universität Berlin angefertigt worden ist und sich in seinem Besitz befindet. Als Bearbeiter werden H. Maser, E. Husserl, H. Müller, F. Rudio und C. Runge angegeben, mit dem Zusatz: redigiert von H. Maser. Es ist dies die Ausarbeitung, aus der fast alle Berliner Mathematiker meiner Generation,

1) Datiert „Sonnabend, 28. März“, wodurch unter den in Frage kommenden Jahreszahlen 1885 bestimmt ist.

die bei Weierstraß selbst nicht mehr gehört hatten, ihre Kenntnisse der Weierstraßschen Variationstheorie gewonnen haben; auch Zermelo verweist auf diese Ausarbeitung, ebenso H. Hancock. Was dessen beide Bücher: Theory of maxima and minima (Ginn and Company, ohne Jahr) und Lectures on the Calculus of Variations (1904) anlangt, so habe ich sogar feststellen können, daß sie größtenteils eine wörtliche Übersetzung jener Ausarbeitung des Mathematischen Vereins darstellen. Ich muß Wert darauf legen, daß die Öffentlichkeit davon Kenntnis nimmt, sowohl aus anderen Gründen als auch besonders, weil ich mich bei der Bearbeitung des vorliegenden Bandes an manchen Stellen auch an den Text der Ausarbeitung des Mathematischen Vereins angeschlossen habe, und es also scheinen könnte, als sei der Text der Hancockschen Bücher von mir ins Deutsche übertragen worden.

Diese Ausarbeitung des Mathematischen Vereins enthält umfangreiche redaktionelle Verbesserungen von solcher Art, daß die Mitarbeit eines erfahrenen Sachverständigen dabei angenommen werden muß; möglicherweise ist sogar die Ausarbeitung Weierstraß selbst vorgelegt worden. Von dieser selben Vorlesung vom Jahre 1879 stand mir nämlich noch eine andere Bearbeitung zur Verfügung, die ganz unabhängig von jener von Jacob Haenlein, einem vor einigen Jahren in Berlin verstorbenen Studienrat, angefertigt und später dem Mathematischen Seminar der Universität auf Veranlassung von Schwarz geschenkt worden war. Hierin fehlt die Überarbeitung, und man kann leicht feststellen, daß jene redaktionelle Durchsicht sich nicht darauf beschränkt hat, etwaige Irrtümer der Bearbeiter richtig zu stellen, sondern daß auch das in der Vorlesung Vorgetragene selbst abgeändert und verbessert worden ist.

Schließlich habe ich noch die sorgfältige und fleißige Bearbeitung benutzt, die Georg Hettner von der Vorlesung des S.-S. 1875 angefertigt hat. Wie schon gesagt, ist dies die erste Vorlesung, in der die eigentliche „Weierstraßsche Theorie“ auftritt; es muß also zwischen 1872 und 1875 gewesen sein, wo Weierstraß jene grundlegenden Begriffe, Sätze und Formeln gefunden hat.

Gegenüber den genannten vier Ausarbeitungen konnten solche aus früheren Jahren nur gelegentlich in Frage kommen.

Ich möchte bei dieser Gelegenheit allen denen danken, die mir durch Überlassung von Vortragsheften die Herausgabe des Bandes ermöglicht haben, insbesondere Herrn Bieberbach, der mir die Hefte des Mathematischen Seminars der Universität sowie den der Akademie der Wissenschaften übergebenen Schwarzschen Nachlaß zugänglich gemacht hat, Herrn Gerhard Hettner für die Überlassung der Ausarbeitung seines Vaters, sowie dem Mathematischen Verein an der Universität Berlin.

Aus diesem Material habe ich nun versucht, ein abgeschlossenes Werk zu schaffen, das den wesentlichen Inhalt der Weierstraßschen Vorlesungen wiedergeben soll; was die stilistische Darstellung betrifft, so habe ich mich bemüht, sozusagen mit Weierstraßscher Feder zu schreiben, andererseits aber rein sachlich der Versuchung widerstehen müssen, von den Fortschritten der Variationsrechnung in der Nach-Weierstraßschen Zeit, von Zermelo, Kneser, Carathéodory, Hilbert angefangen bis zu Tonelli, Courant u. a. Gebrauch zu machen.

Was den Inhalt der Vorlesung anlangt, so darf ich wohl annehmen, daß er heute Allgemeingut der Fachgenossen geworden ist, und ich kann mich daher kurz fassen. Weierstraß pflegte der eigentlichen Variationsrechnung eine ziemlich eingehende Theorie der Maxima und Minima bei mehreren unabhängigen Variabeln vorauszuschicken, und so sind auch im vorliegenden Bande die ersten sechs Kapitel zu einem Abschnitt über diesen Gegenstand zusammengefaßt worden. Von dem Inhalt sind besonders hervorzuheben die ausführlich dargestellten Zusammenhänge mit der Theorie der quadratischen Formen von n Variablen sowie die uns heute freilich geläufigen funktionentheoretischen Existenzfragen über obere Grenze und Maximum in einem $n$fach ausgedehnten Bereiche. Als Beispiele werden u. a. behandelt: Größte und kleinste Krümmung einer Fläche in einem regulären Punkte, größte und kleinste Entfernung eines Raumpunktes von einer Fläche, und in besonders feiner Weise das isoperimetrische Problem beim ebenen n-Eck.

Der zweite und Hauptabschnitt behandelt die eigentliche Variationsrechnung. Mit Absicht ist hier die Aufgabenstellung auf den einfachsten Fall

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(x, y, x', y')\, dt = \text{Extr.} \qquad \left(x' = \frac{dx}{dt},\ y' = \frac{dy}{dt}\right)$$

beschränkt worden, wie dies Weierstraß in den Vorlesungen von 1875 ab fast ausschließlich getan hat; nur gelegentlich sind auch Bemerkungen über das Auftreten höherer Ableitungen, von mehr als zwei Funktionen von t oder über mehrfache Integrale eingeflochten worden. Der Aufbau der Theorie geschieht folgendermaßen: Nachdem die Homogenitätseigenschaften abgeleitet worden sind, die F besitzen muß, damit der Wert von J unabhängig von der Wahl des Parameters t sei, wird die Eulersche Differentialgleichung der Extremalen

$$G = 0$$

aufgestellt und die Eckenbedingung bewiesen, daß nämlich $\frac{\partial F}{\partial x'}$ und $\frac{\partial F}{\partial y'}$ selbst dann stetig bleiben, wenn die Extremale eine Ecke hat. Nunmehr

wird die zweite Variation betrachtet und die Funktion F_1 durch die Formeln

$$F_1 = \frac{1}{y'^2} \cdot F_{x'x'} = \frac{-1}{x'y'} \cdot F_{x'y'} = \frac{1}{x'^2} \cdot F_{y'y'}$$

eingeführt, die längs des extremalen Integrationsweges nicht das Zeichen wechseln darf, das über Maximum oder Minimum entscheidet. Danach werden die Jacobischen Untersuchungen über die konjugierten Punkte vorgetragen und ergänzt, insbesondere wird bewiesen, daß, wenn die Integration über den zum Anfangspunkt konjugierten Punkt hinaus erstreckt wird, gewiß kein Extremum eintreten kann. Schließlich wird gezeigt, daß die drei Bedingungen: 1. die Integrationsstrecke muß einer Extremalen angehören, 2. F_1 muß längs des Integrationsweges ein bestimmtes Vorzeichen behalten, 3. der Integrationsbereich darf sich nicht über zwei konjugierte Punkte hinaus erstrecken, auch hinreichend sind, falls es sich nur um „schwache" Variationen handelt.

Nachdem der zu A konjugierte Punkt als Grenzlage des Schnittpunktes zweier von A ausgehenden unendlich benachbarten Extremalen geometrisch erkannt ist, wird der *Satz von der Existenz eines „Feldes von Extremalen"* bewiesen, d. h. eines den extremalen Integrationsweg — falls er nur keinen zum Anfangspunkt A konjugierten Punkt enthält — umgebenden Flächenstreifens der Art, daß vom Anfangspunkte aus nach jedem Punkte im Innern genau eine Extremale gezogen werden kann.

Nunmehr wird an dem klassischen Beispiel des Drehkörpers mit kleinstem Luftwiderstand gezeigt, daß, wenn auch *„starke"* Variationen ins Spiel treten, jene drei Bedingungen *nicht* ausreichen. Und jetzt wird die *$\mathcal{E}$-Funktion* (von sechs Argumenten) eingeführt, und zwar durch die bekannte Definitionsgleichung

$$\mathcal{E}(x, y;\, p, q;\, \bar{p}, \bar{q}) = F(x, y, \bar{p}, \bar{q}) - \frac{\partial F}{\partial x'}(x, y, p, q) \cdot \bar{p} - \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y, p, q) \cdot \bar{q},$$

und sofort gezeigt, daß sie längs des extremalen Integrationsweges ein und dasselbe Vorzeichen behalten muß, und zwar für willkürliche Werte der Argumente $\bar{p}$, $\bar{q}$, während x, y die Koordinaten eines wandernden Punktes der Extremalen, p, q zwei den Richtungscosinus der zugehörigen Kurventangente proportionale Größen bedeuten. Für den Beweis, daß diese vierte Bedingung mit den drei früheren zusammen auch für starke Variationen *ausreichend* ist, wird der Zusammenhang zwischen der $\mathcal{E}$-Funktion und F_1 benutzt, und zwar durch die folgende Formel:

$$\mathcal{E}(x, y;\, \cos\chi,\, \sin\chi;\, \cos\bar{\chi},\, \sin\bar{\chi}) = \int_{\chi}^{\bar{\chi}} F_1(x, y,\, \cos\varphi,\, \sin\varphi) \cdot \sin(\bar{\chi} - \varphi)\, d\varphi.$$

In dem vor einigen Jahren erschienenen Buche von Tonelli, Fondamenti di Calcolo delle Variazioni I, S. 208, wird diese Formel unter

Hinweis auf Bolza, Lectures on the Calculus of Variations, S. 141, als „Schwarzsche Formel“ bezeichnet. Diese Bezeichnung ist jedoch nicht gerechtfertigt. Weierstraß hatte zuerst in der Vorlesung vom Jahre 1879 und auch noch zu Anfang der Vorlesung 1882 eine andere Formel benutzt:

$$\mathcal{E}(x, y; p, q; \bar{p}, \bar{q}) = (p\bar{q} - q\bar{p})^2 \cdot \int_0^1 F_1(x, y, p_\varepsilon, q_\varepsilon)(1-\varepsilon)\, d\varepsilon$$

mit

$$p_\varepsilon = (1-\varepsilon)p + \varepsilon\bar{p},$$
$$q_\varepsilon = (1-\varepsilon)q + \varepsilon\bar{q},$$

eine Formel, die sich z. B. auch in der Zermeloschen Dissertation findet — das Integral selbst ist Zermelos $\mathcal{E}_1$-Funktion —; diese Formel versagt nun, wenn p_ε, q_ε zugleich verschwinden, weil dann $p\bar{q} - q\bar{p} = 0$ und $F_1(x, y, p_\varepsilon, q_\varepsilon) = \infty$ wird. Im Verlauf der Vorlesung von 1882 hat das Weierstraß erkannt, und er verwendet sodann die erstgenannte Formel. In der Schwarzschen Abschrift der Burkhardtschen Ausarbeitung findet sich an der betreffenden Stelle die Randbemerkung: „Von Herrn P. W.[1]) selber verbessert.“ Schließlich hat sich in Schwarz' Nachlaß noch ein etwa drei Oktavseiten umfassendes Manuskript von Weierstraß gefunden, in dem der Beweis der ersten Formel gegeben ist. Diese Formel rührt also gewiß von Weierstraß her.

Den allgemeinen theoretischen Untersuchungen geht eine eingehende Anwendung der gefundenen Ergebnisse auf die klassischen Probleme der Variationsrechnung (Brachistochrone, Rotationsfläche kleinsten Flächeninhalts u. a.) parallel.

Die weiteren Kapitel beziehen sich auf das isoperimetrische Problem im allgemeinen Sinne: es soll

$$J^0 = \int_{t_0}^{t_1} F^0(x, y, x', y')\, dt$$

einen größten oder einen kleinsten Wert erhalten, während ein oder auch mehrere Integrale

$$J^\nu = \int_{t_0}^{t_1} F^\nu(x, y, x', y')\, dt \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m)$$

gegebene Werte annehmen, wobei alle Integrale über dasselbe Kurvenstück zu erstrecken sind. Das isoperimetrische Problem im engeren Sinne, worin J^0 den Flächeninhalt, J^1 den Umfang einer geschlossenen Kurve bedeutet, wird eingehend besprochen.

Schließlich werden in einem letzten Kapitel noch einige Sätze über die Variation der Endpunkte des Kurvenstückes und über unfreie Varia-

1) Soll heißen: Professor Weierstraß.

tionen mitgeteilt und als Beispiel insbesondere die folgende Aufgabe behandelt: In der Ebene seien drei nicht in gerader Linie liegende Punkte gegeben; durch sie soll der Reihe nach eine Linie gelegt werden, die einen gegebenen Flächenraum einschließt und dabei einen möglichst kurzen Umfang besitzt.

Das ist in knappen Umrissen der Inhalt des Bandes, dem zur Erleichterung seiner Benutzung ein alphabetisches Inhaltsverzeichnis angefügt worden ist.

Es ist erklärlich, wenn einzelne Teile des Werkes wesentlich historisches Interesse haben, weil manche Sätze heute anders formuliert, die Beweise stellenweise einfacher gegeben, die Voraussetzungen weiter gefaßt und verschärft werden können. Die heutige Theorie der reellen Funktionen, die Theorie der Funktionale, der Zusammenhang mit den Integralgleichungen u. a. erlauben gegenwärtig die Variationsrechnung mit viel weiterem Horizont zu betrachten. Aber diese wichtigen Hilfsmittel existierten vor fünfzig Jahren, als die Weierstraßschen Vorlesungen gehalten wurden, noch nicht. Und doch wird sich kein Leser des Eindruckes erwehren können, daß das Studium der Weierstraßschen Vorlesung weit mehr als geschichtliches Interesse bietet. Die großartige Einfachheit der Mittel, mit denen die wirklich schwierigen Fragen, die schon in dem einfachsten Problem der Variationsrechnung enthalten sind, erledigt werden, der geschlossene architektonische Aufbau der Theorie, die sorgfältige Behandlung der altbekannten klassischen Beispiele, als seien es Zierate an dem großen Bauwerke, das alles macht die ursprüngliche Weierstraßsche Theorie der Variationsrechnung zu einem stets bewundernswerten Kunstwerk, das ewig bestehen bleibt. Es wäre zu wünschen, daß jeder angehende Mathematiker es kennen lerne.

Es sind den Stellen, die die Herausgabe der Weierstraßschen Werke übernommen haben, wiederholt — zuletzt vor zwei Jahren in Münster auf der sogenannten Weierstraß-Woche — Vorwürfe darüber gemacht worden, daß noch jetzt, dreißig Jahre nach dem Tode des Meisters, seine Vorlesungen nicht vollständig gedruckt vorliegen. Bei früherer Gelegenheit ist sogar insbesondere über die Variationsrechnung behauptet worden, daß Aufzeichnungen von Weierstraß über seine Vorlesungen sich in Privatbesitz befänden und der Veröffentlichung vorenthalten würden. Diese Behauptung ist freilich später zurückgenommen worden; aber es scheint, als ob etwas von ihr hängen geblieben sei. Demgegenüber ist festzustellen, daß sich meines Wissens weder in dem Weierstraßschen Nachlaß, noch in dem Nachlaß von Johannes Knoblauch, dem ersten Herausgeber der Weierstraßschen Werke, auf den auch zunächst der Weierstraßsche Nachlaß überkommen war, noch in der Schwarzschen Hinter-

lassenschaft, überhaupt nicht in Deutschland irgendwelche nennenswerten Aufzeichnungen von Weierstraß' Hand gefunden haben, die nicht in den bereits vorliegenden Bänden seiner Werke abgedruckt worden wären. Was insbesondere seine Vorlesungen anbetrifft, so scheint Weierstraß hierfür überhaupt keinerlei Notizen aufbewahrt oder angefertigt zu haben. Das gilt im besondern für die Variationsrechnung. Man ist also hier auf die Nachschriften und Ausarbeitungen seiner Zuhörer angewiesen. In seinem in Münster 1925 gehaltenen Vortrage: „Persönliche Erinnerungen an Karl Weierstraß" (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **35**, S. 56, 1926) hat Herr Kiepert eine anschauliche Schilderung davon gegeben, wie schwer es war, den Darlegungen des Meisters in seinen Vorlesungen zu folgen und danach eine Ausarbeitung anzufertigen. Man muß nun ferner bedenken, daß es junge Studenten waren, die diese Hefte anfertigten, die bei allem Eifer und Fleiß, bei aller Liebe zur Sache, die Materie noch nicht beherrschten, sondern sie doch erst lernten. Dann wird man erklärlich finden, wenn diese Hefte trotz drei- bis viermal frisch gekochtem Kaffee, um Herrn Kiepert anzuführen, trotz aller Redaktion nicht wenige Mißverständnisse, Fehler und Unverständlichkeiten enthalten, denen nachzuspüren, die auszumerzen und aufzuklären eine der Hauptaufgaben des Herausgebers sein mußte. Aber damit nicht genug: es kommen auch nachweislich apokryphische Teile in solchen Ausarbeitungen vor, d. h. Überlegungen und Rechnungen, die gewiß nicht von Weierstraß vorgetragen worden sind, sondern den Bearbeiter selbst als Urheber haben. Für eine Stelle des Burkhardtschen Vorlesungsheftes, das übrigens für einen Studenten als eine Leistung ersten Ranges beurteilt werden muß, läßt sich dies aus dem Briefwechsel mit H. A. Schwarz unzweifelhaft nachweisen. Möglicherweise handelt es sich hier um die Ausführung einer von Weierstraß gegebenen Anregung. Aber ein simpler Vorzeichenfehler hatte die ganze Betrachtung hinfällig gemacht.

Es ist verständlich, daß bei dieser Sachlage trotz aller Aufmerksamkeit doch Fehler durchschlüpfen können, und daß daher eine schärfere Kontrolle erwünscht war. Ich bin den Herren Bieberbach und Carathéodory, die sämtliche Bogen einer kritischen Durchsicht unterzogen und mir mancherlei wertvolle Ratschläge gegeben haben, zu großem Dank verpflichtet; nicht minder den Herren J. Stein, jetzt in Altona, und G. Grüß, meinen Assistenten, die die Rechnungen kontrolliert und mich bei den Jagden nach Druck- und anderen Fehlern unterstützt haben.

Den Druck hat in gewohnter typographischer Vollendung die Dieterichsche Universitäts-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner) in Göttingen hergestellt. Die Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H. in Leipzig als

Geschäftsinhaberin des alten Berliner Verlags Mayer & Müller hat viel Geduld bewiesen, wenn der Druck aus mannigfachen Gründen manchmal stockte, und ist auf alle Wünsche des Herausgebers bereitwilligst eingegangen. Die äußere Ausstattung ist natürlich die gleiche wie bei den früheren Bänden. Nur Exemplare auf Büttenpapier konnten aus Ersparnisgründen diesmal nicht gedruckt werden.

Es sei mir zum Schluß noch verstattet, einige Bemerkungen über die übrigen Bände der Weierstraßschen Werke anzufügen. Erschienen sind bis jetzt:

Band I bis III: Abhandlungen, Band IV: Vorlesungen über Abelsche Funktionen, bearbeitet von Hettner und Knoblauch, Band V: Vorlesungen über Theorie der elliptischen Funktionen (von der Differentialgleichung ausgehend), bearbeitet von Knoblauch, Band VI: Vorlesungen über Anwendungen der elliptischen Funktionen, bearbeitet von mir, sowie der jetzt vorliegende Band VII: Vorlesungen über Variationsrechnung, ebenfalls von mir bearbeitet. Die sogenannte „alte" Rechtschreibung, in der Weierstraß schrieb, und die er bei der Herausgabe seiner Werke benutzt wissen wollte, ist auch im vorliegenden Bande beibehalten worden.

In dem ursprünglichen Plan war nun noch ein Band über die Theorie der hyperelliptischen Funktionen sowie ein Band über die allgemeine Theorie der elliptischen Transzendenten vom funktionentheoretischen Standpunkte mit dem algebraischen Additionstheorem als Ausgangspunkt vorgesehen. Wie ich schon vor Jahren mitteilte[1]), hatten die seinerzeit noch von Weierstraß selbst mit der Bearbeitung betrauten beiden Mathematiker völlig versagt. Jetzt wird es aus vielen Gründen nicht leicht sein, unter uns Epigonen jemanden zu finden, der die nun doppelt schwere Arbeit auf sich nimmt, zumal wenigstens für die hyperelliptischen Funktionen in der Gegenwart nur geringeres Interesse vorhanden zu sein scheint. Eher noch wäre es möglich, den Band der elliptischen Funktionen fertig zu stellen, weil diese Vorlesung einen großen Teil der allgemeinen Weierstraßschen Funktionentheorie umfaßt. Es sind Bemühungen im Gange, für die Bearbeitung dieses Bandes einen sachverständigen Fachgenossen zu gewinnen, dessen Zusage, wie zu hoffen steht, bald erfolgen wird.

Schließlich ist auch noch daran gedacht, Materialien für eine Biographie von Weierstraß zu sammeln und sie am Schluß der Werke zu veröffentlichen.

---

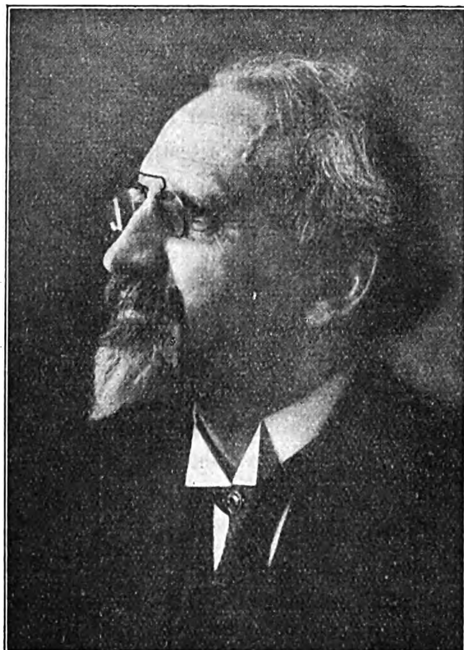
1) Bericht über den gegenwärtigen Stand der Herausgabe der Mathematischen Werke von Karl Weierstraß. Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft **15**, S. 59, 1915.

(Eingegangen am 15. 11. 1927.)

Zur Erinnerung an Karl Doehlemann.

Von Georg Faber in München.

Mit Bildnis nach einer Photographie des Ateliers Veritas in München.



Am 22. März 1926 wurde Karl Doehlemann auf der Münchener Staatsbibliothek mitten in der Arbeit von einem plötzlichen Tode ereilt.

Er war geboren am 20. September 1864 als Sohn eines Professors der Landwirtschaftlichen Schule Weihenstephan. Schon auf dem Gymnasium zeichnete er sich durch so hervorragende Leistungen aus, daß er während seiner Studienjahre (1882—86) in das „Maximilianeum" aufgenommen wurde, d. i. eine Stiftung mit dem Zweck, besonders begabten jungen Männern ein völlig sorgenfreies Studium zu ermöglichen. Nachdem er schon als Student einen mathematischen Aufsatz veröffentlicht hatte (Nr. 1 des unten folgenden Verzeichnisses), wurde er nach sehr gutem Bestehen der Lehramtsprüfung und nach Ablegung des Einjährigen-Freiwilligen Jahres 1888—91 Assistent seines früheren Lehrers Voss an der Technischen Hochschule München. Auch weiterhin blieb München der Ort seiner Tätigkeit als Lehrer und Gelehrter, die durch folgende Daten gekennzeichnet ist: 1891 Promotion, 1892 Habilitation an der Universität, 1902—13 planmäßiger a.o. Professor daselbst, 1913—26 o. Professor an der Technischen Hochschule.

Auf die wissenschaftliche Tätigkeit Doehlemanns, auf die Ergebnisse seiner Abhandlungen und auf die Wirkung seiner vielgelesenen Bücher über projektive Geometrie, über Perspektive, über geometrische Transformationen und über Algebra (nach den Vorlesungen seines Lehrers Gustav Bauer) kann hier im einzelnen nicht eingegangen werden; es sei statt dessen auf das schon erwähnte Schriftenverzeichnis hingewiesen.

Besonders groß war seine Lehrbegabung. Ich selbst erinnere mich mit Vergnügen von meinen ersten Semestern her an seine stets aufs gewissenhafteste vorbereiteten Vorlesungen und Übungen aus Darstellender Geometrie. Er war ein ausgezeichneter Lehrer und zugleich ein wahrer Freund seiner Schüler; zu diesen zählen die meisten der bayerischen Real- und Gymnasiallehrer der Mathematik, in deren Kreisen sich Doehlemann stets der größten Achtung und Beliebtheit erfreute. An der Technischen Hochschule war es seine vornehmliche Aufgabe, unsere werdenden Architekten für die Mathematik (Infinitesimalrechnung und Darstellende Geometrie) zu gewinnen; nur wer einen Begriff von der Schwierigkeit dieser Aufgabe hat, kann das Verdienst würdigen, das er sich mit der zur allseitigen Zufriedenheit geglückten Lösung erwarb. Ein Mathematiker, der wie er zur bildenden Kunst hingezogen wurde, war wie kein zweiter für diese Aufgabe geeignet.

Als ich Doehlemann vor 30 Jahren kennen lernte, schaute er mit einem gewissen Pessimismus ins Leben hinein. Nicht nur der vorzeitige Verlust beider Eltern mag seine Lebenszuversicht herabgesetzt haben, sondern auch das Gefühl, daß die Art seiner mathematischen Begabung, sein außergewöhnlich starkes geometrisches Vorstellungsvermögen sich in früheren Jahrzehnten erfolgreicher hätte auswirken können als in seinen Tagen, in denen auf der einen Seite die logisch abstrakte analytische Richtung vorherrschte, während auf der anderen die mathematische Physik in raschem Siegeslauf neue Felder gewann. Als später nach Jahren des Kämpfens und Zweifelns Doehlemanns Laufbahn emporführte und er in einer mehr nach der künstlerischen Seite hin gerichteten Tätigkeit Befriedigung fand, besonders aber nachdem er an der Seite einer geliebten Gattin ein Haus mit bald heranblühenden Kindern, zwei Töchtern und einem Sohn, gegründet hatte, da fühlte er ein früher ungehofftes und ungeahntes Glücksempfinden. In den Ferien zog er gern mit seiner gleich ihm kunstbegeisterten Gattin nach den klassischen Stätten und den Museen Italiens und Griechenlands, und allmählich erwarb er zu seinem mathematischen Wissen eine staunenswerte Kenntnis und Kennerschaft der Kunstgeschichte und der Kunstwerke hinzu. Am meisten am Herzen aber lag ihm die Ausbildung und das Gedeihen seiner Kinder; selbstlos und mit hohem Verantwortungsgefühl stellte er die eigenen Wünsche und Bedürfnisse hinter die der Seinen zurück.

Auf die Jahre des Glücks warf der Krieg, dessen Wechselfälle Doehlemann schwer mitempfand, seinen Schatten und bald nach dem Krieg traf ihn das Schlimmste, der Tod der Gattin. Auch nach diesem harten Schlage bewährte er die Festigkeit und das Gleichmaß seines

Charakters, aber körperlich hat er sich nicht mehr von ihm erholt. Zwar gerade in den letzten Wochen vor seinem Tode hoffte er noch einen Anlauf zu nehmen. Mit seiner älteren Tochter gedachte er im April 1926 nach Spanien zu fahren, um aus Natur und Kunst des ihm noch unbekannten Landes neues Leben zu schöpfen. Heimgekehrt aber wollte er auch anderen das Geschaute mitteilen und sie mitgenießen lassen, und das war ihm wie eine Entschuldigung dafür, daß er sich diese schöne Reise gönnen wollte. Das Schicksal hat ihm nicht erlaubt durch die Säulen des Herkules zu fahren; ein dunkleres Tor hat sich ihm aufgetan. Bei seinen Mitarbeitern, seinen Freunden und Schülern wird sein Gedächtnis lebendig bleiben.

Verzeichnis der Schriften Karl Doehlemanns.

1. Über einige Eigenschaften des Systems der Kegelschnitte, die drei feste Gerade berühren. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 32, 1887, 120–127.
2. Über eine synthetische Erzeugung der Cremonaschen Transformation 3. und 4. Ordnung. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 32, 1887, 315–320.
3. Zur synthetischen Erzeugung der Cremonaschen Transformation 4. Ordnung. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 33, 1888, 243–245.
4. Untersuchung der Flächen, welche sich durch eindeutig aufeinander bezogene Strahlenbündel erzeugen lassen. Diss. München 1889 (Ackermann).
5. Über Cremona-Transformationen in der Ebene, welche eine Kurve enthalten, die sich Punkt für Punkt selbst entspricht. Math. Ann. 39, 1891, 567–597.
6. Über die involutorischen Gebilde, welche eine ebene Cremona-Transformation, speziell die quadratische, enthalten kann. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 36, 1891, 356–378.
7. Über lineare Systeme in der Ebene und im Raum und über deren Jacobische Kurve bzw. Jacobische Fläche. Math. Ann. 41, 1893, 545–570.
8. Modell zur Diskussion der Gleichung 3. Grades. Dyckscher Nachtragskatalog math. Modelle, 1893, 28/29.
9. G. von Vega (1754–1802), Zeitschr. f. Math. u. Phys. 39, 1893, 204–211. Historisch-literarische Abteilung.
10. Zur Theorie des Nullsystems, Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. 3, 1894, 96–99.
11. Über eine einfache eindeutige Raumtransformation 3. Ordnung. Münch. Ber. 24, 1894, 41–50.
12. Zur Maßbestimmung in den einförmigen Grundgebilden. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 41, 1896, 265–271.
13. Projektive Geometrie, Sammlung Göschen Nr. 72. I. Aufl. 1898, II. Aufl. 1901, III. Aufl. 1905, IV. Aufl. 1918, V. Aufl. 1922 in 2 Teilbänden, Nr. 72 u. Nr. 876; 1908 ins Russische übertragen von Lagutynsky.
14. Ein Satz über hyperboloidisch gelegene Tetraeder. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 45, 1900, 166–170.
15. Über hyperboloidische Gerade, die sich aus einem Tetraeder und einer Fläche 2. Ordnung ableiten lassen. Arch. d. Math. u. Phys. 17, 1900, 166–174.
16. Geometrische Transformationen, Sammlung Schubert, 2 Bde. I. Teil Bd. 27, 1902, II. Teil Bd. 28, 1908.

17. Bauer, Vorlesungen über Algebra, herausgegeben im Auftrag des Math. Vereins München von Doehlemann. I. Aufl. Leipzig 1903, II. Aufl. 1910.
18. Raumkunst und Illusionsmalerei. Allg. Zeitung München (25. Juli 1904). Jahresbericht der Deutschen Math.-Ver. 14, 1904, 47—55.
19. Die Perspektive der Brüder van Eyck. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 52, 1905, 419—425.
20. Über Deckengemälde. Deutsche Bauzeitung 41. Jahrg. (1907), Nr. 91—95, Südd. Monatshefte, 4. Jahrg. (1907), Heft 5.
21. Vergleichende Gemäldestudien. Allg. Zeitung München (21. März 1907).
22. Deckengemälde. Die Umschau, 12. Jahrg. (1908), Nr. 4.
23. Anton von Braunmühl. Südd. Monatshefte 5. Jahrg. (1908), Heft 5.
24. Das Motiv der Verkündigung Mariä im Wandel der Zeiten. Die Christl. Kunst 4. Jahrg. (1908), Heft 11.
25. Die Komposition der künstlerischen Ausdrucksmittel. Die Kunst unserer Zeit, 20. Jahrg. (1909), Lieferung 6.
26. Die Entwicklung der Perspektive in der Altniederländischen Kunst. Rep. f. Kunstwissenschaft 34, 392—422. 500—535.
27. Nochmals die Perspektive bei den Brüdern van Eyck. Rep. f. Kunstwissenschaft 35, 262—267.
28. Die bildenden Künste, ihre Eigenart u. ihr Zusammenhang. Teubner 1913.
29. Über den Bildungswert der reinen Mathematik. Jahresbericht der Deutschen Math.-Ver. 22, 1913, 267—277. Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterr. 44, 1913, 446—454.
30. Über dekorative Malerei. Zeitschr. f. Ästhetik u. allg. Kunstwissenschaft 9, 387 bis 391.
31. Grundzüge der Perspektive nebst Anwendungen. „Aus Natur u. Geisteswelt", Nr. 510; I. Aufl. Leipzig 1916, II. Aufl. 1919.
32. Die Städteansichten im Antiquarium der kgl. Residenz in München. „Das Bayerland", 30. Jahrg. (1918), Nr. 7.
33. Nochmals die Hessesche Normalform. Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterr. 49, 1918, 293—299.
34. Über Architektur-Malerei. Neudeutsche Bauzeitung, 16. Jahrg. (1920), Heft 12/13 bis 16/17, 27/28, 30/31, 32.
35. Gibt es eine Geometrie als Wissenschaft vom Raum? Ann. d. Philosophie 4, 1924, 369—384.
36. Über die bildliche Darstellung einer Bewegung. Photogr. Rundschau 1925, Heft 3.
37. Geometrie und Anschauung, eine Auseinandersetzung mit der Relativitätstheorie. Unterrichtsblätter 1925, Heft 3.

(Eingegangen 15. 5. 27.)

Bemerkungen zu Grundlagenfragen.

Von KARL MENGER in Wien.

Eine Reihe kurzer Noten sei einigen einfachen Bemerkungen über Grundlagenfragen gewidmet. Die vier ersten Noten enthalten ein kurzes intuitionistisch-formalistisches Wörterbuch der Mengenlehre, eine neue Aufklärung der mengentheoretischen Paradoxien, einige Bemerkungen über Potenzmengen und eine Axiomatik der endlichen Mengen und der projektiven Verknüpfungsbeziehungen.

I. Über Verzweigungsmengen.

Im folgenden soll auf eine (in der Literatur verwunderlicherweise nirgends erwähnte) enge Beziehung zwischen dem der intuitionistischen Mengenlehre zugrunde liegenden *Brouwerschen Mengenbegriff*[1]) und dem für die formalistische Mengenlehre bedeutungsvollen Begriff der *analytischen Menge*[2]) hingewiesen werden. Als Ausgangspunkt dient dabei der folgende:

1. Begriff der Verzweigungsmenge. Es sei $\mathfrak{D}$ ein System von irgendwelchen Dingen, für welche eine Verknüpfung V definiert ist von der Art, daß jeder geordneten endlichen oder abzählbar unendlichen Folge von Dingen aus $\mathfrak{D}$ ein (jedoch nicht notwendig zu $\mathfrak{D}$ gehöriges) Ding zugeordnet ist. Das der Folge $D^{(1)}, D^{(2)}, \ldots, D^{(k)}, \ldots$ von Dingen aus $\mathfrak{D}$ zugeordnete Ding bezeichnen wir mit $V(D^{(1)}, D^{(2)}, \ldots, D^{(k)}, \ldots)$.

Es sei nun jedem endlichen Komplex von natürlichen Zahlen ein Ding des Systems $\mathfrak{D}$ zugeordnet; das dem Komplex der Zahlen $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ zugeordnete Ding heiße $D_{n_1 n_2 \ldots n_k}$. Ist $\nu = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$ eine vor-

1) Über den Brouwerschen Mengenbegriff vgl. Brouwer, Jahresber. d. D. M.-V. **23**, S. 79 (1914); **28**, S. 204 sq. (1920); Amsterdamer Verslagen **25**, S. 1419 sq. (1917); **29**, S. 798 sq. (1920); Nieuw Archief voor Wiskunde (2) **12**, S. 440 sq. (1918); Amsterdamer Verhandelingen (1) **12**, Nr. 5, S. 3 (1918); Math. Annalen **93**, S. 244 sq. (1924).

2) Über den Begriff der analytischen Menge (bisweilen auch kurz (A)-Menge oder Suslinsche Menge genannt) vgl. Suslin, Comptes Rendus **164**, S. 88 (1917), ferner die zusammenfassende Darstellung bei Lusin, Fund. Math. **10**, S. 1 (1926), wo sich auch Angaben über die zahlreichen Abhandlungen über analytische Mengen finden, sowie die zweite Auflage von Hausdorffs Mengenlehre. Aus diesem Buche, in welchem von den mengentheoretischen Errungenschaften des letzten Jahrzehntes gerade die analytischen Mengen (Suslinschen Mengen) eingehende Berücksichtigung finden, stammt übrigens der Begriff der *abstrakten* analytischen Menge, während sonst bloß analytische Punktmengen untersucht wurden.

gegebene unendliche Folge von natürlichen Zahlen, dann betrachten wir die Folge der Dinge $D_{n_1}, D_{n_1 n_2}, \ldots, D_{n_1 n_2 \cdots n_k}, \ldots$ und bezeichnen mit D_ν das Ding $V(D_{n_1}, D_{n_1 n_2}, \ldots, D_{n_1 \cdots n_k}, \ldots)$. Von jedem der Dinge $D_{n_1}, D_{n_1 n_2}, \ldots, D_{n_1 n_2 \cdots n_k}, \ldots$ sagen wir, daß es an der Bestimmung des Dinges D_ν *mitwirkt*. Die Menge aller Dinge D_ν, wo ν alle unendlichen Folgen natürlicher Zahlen durchläuft, bezeichnen wir als eine *Verzweigungsmenge* und, wofern es sich um ihre nähere Bestimmung handelt, als die *durch das System der Dinge* $\{D_{n_1 n_2 \cdots n_k}\}$ $(n_1, n_2, \ldots, n_k, k = 1, 2 \ldots \text{ ad inf.})$ *hinsichtlich der Verknüpfung V erzeugte Verzweigungsmenge*. Das System der Dinge $\{D_{n_1 n_2 \cdots n_k}\}$ nennen wir auch das die Verzweigungsmenge D vermöge der Verknüpfung *V erzeugende System*.

2. Analytische Mengen. Sind die Dinge des Systems $\mathfrak{D}$ Mengen und ist V die Durchschnittsbildung, dann ist die Verzweigungsmenge D die Menge aller Durchschnitte $D_\nu = D_{n_1}, D_{n_1 n_2}, \ldots, D_{n_1 n_2 \cdots n_k}, \ldots$, wo $\nu = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$ die unendlichen Folgen natürlicher Zahlen durchläuft. Die Summe aller Mengen D_ν (also die Summenmenge der Verzweigungsmenge D) ist identisch mit dem, was als die durch das System der Mengen $\{D_{n_1 n_2 \cdots nk}\}$ erzeugte *analytische Menge* bezeichnet wird.

Offenbar kann jede analytische Menge durch *verschiedene* Mengensysteme erzeugt werden. Wählen wir beispielsweise als D_1' eine D_1 als echten Teil enthaltende Menge derart, daß die Menge $D_1' - D_1$ zu allen Mengen $D_{1 n_2 \cdots n_k}$ $(n_2, \ldots, n_k, k = 1, 2, \ldots \text{ ad inf.})$ fremd ist, und setzen wir für jede natürliche Zahl $n_1 \neq 1$, $D_n' = D_{n_1}$ und für jeden Zahlenkomplex $n_1, n_2, \ldots, n_k$ $(k \geqq 1)$ $D'_{n_1 n_2 \cdots n_k} = D_{n_1 n_2 \cdots n_k}$, so wird durch die Systeme $\{D_{n_1 n_2 \cdots n_k}\}$ und $\{D'_{n_1 n_2 \cdots n_k}\}$ offenbar dieselbe Menge erzeugt, obwohl die beiden Systeme, wegen $D_1 \neq D_1'$, nicht identisch sind.

Oder setzt man

$$\left.\begin{aligned} D'_{2 n_1, n_2, \ldots, n_k} &= D_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \\ D'_{2 n_1 - 1, n_2, \ldots, n_k} &= D_{1, n_1, n_2, \ldots, n_k} \end{aligned}\right\} \quad (n_1, n_2, \ldots, n_k, k = 1, 2, \ldots \text{ ad inf.}),$$

so wird durch die beiden Systeme $\{D'_{n_1 n_2 \cdots n_k}\}$ und $\{D_{n_1 n_2 \cdots n_k}\}$, von denen bloß das zweite die Menge D_1 enthält, wie man leicht bestätigt, dieselbe analytische Menge erzeugt.

Setzt man

$$D'_{n_1} = D_{n_1} \; (n_1 = 1, 2, \ldots) \quad \text{und} \quad D'_{n_1 n_2 \cdots n_k} = D_{n_1} D_{n_1 n_2}, \ldots, D_{n_1 \cdots n_k},$$

so wird durch die beiden (nicht notwendig voneinander verschiedenen) Systeme $\{D_{n_1 n_2 \cdots n_k}\}$ und $\{D'_{n_1 n_2 \cdots n_k}\}$ dieselbe analytische Menge erzeugt. Das System der Mengen $D'_{n_1 n_2 \cdots n_k}$ erfüllt für jeden Zahlenkomplex $n_1, n_2, \ldots, n_k$ die Beziehung, daß $D'_{n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}, n_k}$ Teilmenge von $D_{n_1 n_2 \cdots n_{k-1}}$ ist. Ein solches erzeugendes System wollen wir ein *mono-*

tones System nennen, und wir sehen also: *Zu jeder analytischen Menge existiert ein sie erzeugendes monotones System.*

3. Analytische Punktmengen. Wir betrachten nun den Spezialfall, daß die Mengen $D_{n_1 \dots n_k}$ *abgeschlossene Intervalle* des R_n (des $n$dimensionalen euklidischen Raumes) sind, wobei die *leere Menge* zu den abgeschlossenen Intervallen gezählt wird. Eine durch ein System von abgeschlossenen Intervallen des R_n erzeugte analytische Menge heißt *analytische Punktmenge des* R_n. Es möge hier eine Bemerkung eingeschaltet werden, auf die wir (in § 6) zurückkommen werden.

Man kann in etwas weitläufiger, aber prinzipiell einfacher Weise[3]) *ohne Verwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten* einsehen, daß zu jeder analytischen Teilmenge des R_n ein sie erzeugendes System $\{W_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$ existiert von folgenden Eigenschaften:

1. *Jede Menge* $W_{n_1 n_2 \dots n_k}$ *ist ein* n*dimensionaler Würfel mit rationalen Eckpunkten. (Unter diese Würfel wird auch die leere Menge gezählt.)*

2. *Für jeden Zahlenkomplex* $n_1, n_2, \dots, n_{k-1}, n_k$ *ist der Würfel* $W_{n_1 n_2 \dots n_{k-1} n_k}$ *ganz im Innern des Würfels* $W_{n_1 n_2 \dots n_{k-1}}$ *enthalten.*

3. *Für jede unendliche Zahlenfolge* $\nu = (n_1, n_2, \dots, n_k, \dots)$ *ist die Menge* $W_\nu = W_{n_1} \cdot W_{n_1 n_2} \dots W_{n_1 n_2 \dots n_k} \dots$ *entweder leer oder sie enthält genau einen Punkt.*

Die durch das Würfelsystem erzeugte Verzweigungsmenge ist die Menge aller dieser höchstens je einen Punkt enthaltenden Mengen W_ν, wo ν alle Folgen natürlicher Zahlen durchläuft. Die durch das Würfelsystem erzeugte analytische Menge ist die Menge aller Punkte p, zu denen eine unendliche Folge natürlicher Zahlen $(n_1, n_2, \dots, n_k, \dots)$ existiert, so daß der Punkt p den Durchschnitt der Würfel $W_{n_1}, W_{n_1 n_2}, \dots, W_{n_1 n_2 \dots n_k}, \dots$ bildet.

4. Bemerkungen über Verzweigungsmengen. Wir wenden uns nun wieder den allgemeinen Verzweigungsmengen zu und geben zunächst ein Beispiel von Verzweigungsmengen, welche zu *nicht analytischen* Teilmengen des R_n führen. Es möge das erzeugende System $\{D_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$ ebenso wie bei den analytischen Punktmengen aus Intervallen des R_n bestehen; es sei aber die Verknüpfung V nicht die Durchschnitts-, sondern die Summenbildung. Die so erzeugte Verzweigungsmenge ist dann nach Definition identisch mit der Menge aller Mengen

3) Vgl. analoge Überlegungen z. B. in Hausdorffs Mengenlehre, 2. Aufl., S. 92. Die Bedingung 3) kann in einfachster Weise realisiert werden, indem man alle Würfel des erzeugenden Systems mit k Indizes von einer Kantenlänge $\frac{1}{k}$ wählt. Vgl. über die Durchführung dieser Umformung des erzeugenden Systems Brouwer, Verh. Akad. Amsterdam (1) 12, Nr. 7, S. 5sq.

$S_\nu = D_{n_1} + D_{n_1 n_2} + \cdots + D_{n_1 n_2 \ldots n_k} + \cdots$, wo $(\nu = n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$ alle unendlichen Folgen natürlicher Zahlen durchläuft. Der Durchschnitt aller dieser Mengen S_ν, also die zur erzeugten Verzweigungsmenge gehörige Durchschnittsmenge, ist dann eine zu einer analytischen Punktmenge komplementäre [also nach bekannten Sätzen[4]) im allgemeinen keine analytische] Punktmenge.

Sind die Dinge des erzeugenden Systems $\{D_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$ Mengen und ist die Verknüpfung V die Durchschnittsbildung, dann sind die Elemente der erzeugten Verzweigungsmenge D Mengen D_ν, welche Durchschnitte unendlicher Folgen von Mengen des erzeugenden Systems sind. Für manche Zwecke (beispielsweise wenn man von der erzeugten Verzweigungsmenge zu ihrer Summenmenge, d. i. zur erzeugten analytischen Menge, übergeht) sind jene Mengen D_ν, welche leer sind, ohne Interesse, und es empfiehlt sich daher bisweilen, diese leeren Elemente der Verzweigungsmenge einfach wegzulassen und von der Folge ν natürlicher Zahlen, für welche die entsprechende Menge D_ν leer ist, zu sagen, *sie liefere keinen Beitrag* zur erzeugten Verzweigungsmenge D. Wenn für einen gewissen Zahlenkomplex $n_1, n_2, \ldots, n_k$ die Menge $D_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ gleich der *leeren* Menge ist, dann liefert jede unendliche Zahlenfolge, welche mit den Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_k$ beginnt, im erwähnten Sinn keinen Beitrag zur erzeugten Verzweigungsmenge.

Auch bei allgemeinen Verzweigungsmengen, deren erzeugendes System aus Dingen eines Dingbereiches $\mathfrak{D}$ besteht, ist es bisweilen zweckmäßig, gewisse Elemente zu vernachlässigen und von den diesen Elementen entsprechenden Zahlenfolgen zu sagen, sie liefern keinen Beitrag zur erzeugten Verzweigungsmenge. Es kann dann sein, daß im Bereich $\mathfrak{D}$ ein Ding N existiert von folgender Eigenschaft: Ist für einen Zahlenkomplex $n_1, n_2, \ldots, n_k$ das Ding $D_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ gleich dem Ding N, dann liefert jede mit den Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_k$ beginnende Zahlenfolge keinen Beitrag zur erzeugten Verzweigungsmenge. Falls ein Ding N von dieser Art existiert, so wollen wir es als *Nullding* im erzeugenden System bezeichnen.

Besteht das erzeugende System aus abgeschlossenen Intervallen des R_n, ist das System im oben (§ 2) definierten Sinn monoton und ist die Verknüpfung V die Durchschnittsbildung, dann ist die *leere Menge* ein Nullding des Systems und, wegen der Monotonie des Systems mit Rücksicht auf den Cantorschen Durchschnittssatz, offenbar auch *das einzige Nullding* des Systems.

4) *Das Komplement einer analytischen Menge A ist dann und nur dann eine analytische Menge, wenn A eine Borelsche Menge ist. Es existieren analytische Mengen, welche nicht Borelsche Mengen sind.* Vgl. über diese beiden Sätze z. B. Hausdorffs Mengenlehre, 2. Aufl., S. 181–193.

Unter Verwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten kann man nun zeigen: *Aus jedem eine Verzweigungsmenge D erzeugenden System S kann (bloß dadurch, daß eventuell gewisse Elemente von S durch ein gewisses Nullding ersetzt werden) ein dieselbe Verzweigungsmenge D erzeugendes System S' hergeleitet werden, welches die Eigenschaft besitzt, daß jedes von dem erwähnten Nullding verschiedene Element von S' mitwirkt an der Bestimmung von einem zur Verzweigungsmenge D einen Beitrag liefernden Element.*

Sei nämlich zunächst $\{D_{n_1 n_2 \cdots n_k}\}$ irgendein die Verzweigungsmenge D erzeugendes System von Dingen. Für jeden Zahlenkomplex $n_1, n_2, \ldots, n_k$ steht nach dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten fest, daß das Ding $D_{n_1 n_2 \cdots n_k}$ entweder an der Bestimmung von einem zur Menge D einen Beitrag liefernden Element mitwirkt oder daß es an der Bestimmung von keinem zur Menge D einen Beitrag liefernden Element mitwirkt. Im ersten Falle setzen wir $D'_{n_1 n_2 \cdots n_k} = D_{n_1 n_2 \cdots n_k}$, im zweiten Falle setzen wir $D'_{n_1 n_2 \cdots n_k}$ gleich dem Nullding N. Das System der Dinge $\{D'_{n_1 n_2 \cdots n_k}\}$ ist dann offenbar ein die Menge D erzeugendes System von der geforderten Art, d. h. so, daß jedes vom Nullding N verschiedene Ding des Systems an der Bestimmung von einem zur Menge D einen Beitrag liefernden Element mitwirkt.

Insbesondere kann also zu jeder *analytischen Punktmenge* unter Verwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten die Existenz eines erzeugenden Systems bewiesen werden, welches die oben (§ 3) erwähnten Eigenschaften 1., 2., 3. besitzt und *überdies* die Eigenschaft 4. *Jeder nicht-leere Würfel $W_{n_1 n_2 \cdots n_k}$ enthält mindestens einen Punkt der analytischen Menge.* Man hat, um dies einzusehen, bloß auf ein System mit den Eigenschaften 1., 2., 3. das eben beschriebene Verfahren anzuwenden.

Man kann jedoch nach der bekannten Methode der Bezugnahme auf ein gegenwärtig ungelöstes Problem[4a]) analytische Mengen konstruieren, für welche die *Angabe* eines erzeugenden Systems mit der erwähnten Eigenschaft 4. erst durch die Lösung irgendeines Problems möglich wird, d. h. es existieren analytische Mengen, für welche die *Angabe* eines erzeugenden Systems mit der Eigenschaft 4. gegenwärtig unmöglich ist und vielleicht niemals möglich sein wird.

Beispielsweise wird eine solche analytische Punktmenge A erzeugt durch ein System $\{D_{n_1 n_2 \cdots n_k}\}$, welches den folgenden Bedingungen genügt: Jede Menge $D_{n_1 n_2 \cdots n_k}$, für welche einer der Indizes $n_i \neq 1$ ist, ist leer. Jene Menge des Systems, deren Indizes k Einsen sind, bezeichnen

4a) Vgl. Brouwer, Jahresber. d. D. M. V. 33, S. 242; Crelles Journal 154, S. 3, sowie Sierpiński, Fund. Math. 2, S. 114 f.

wir mit D_{1_k} und treffen nun über diese Menge die Festsetzungen: Die Menge D_{1_k} soll gleich dem abgeschlossenen Intervall aller reellen Zahlen zwischen $-\frac{1}{2^k}$ und $+\frac{1}{2^k}$ sein, wofern an der $k$ten Stelle der Dezimalbruchentwicklung der Zahl π keine Sequenz von zehn Siebnern beginnt; die Menge D_{1_k} soll hingegen leer sein, wofern an der $k$ten Stelle der Dezimalbruchentwicklung von π eine Siebnerdekade beginnt.

Die so erzeugte analytische Punktmenge A ist leer, falls in der Dezimalbruchentwicklung von π eine Siebnerdekade existiert; sie enthält den Nullpunkt des R_1, falls keine Siebnerdekade in der Dezimalbruchentwicklung von π existiert.[5])

Die Angabe eines erzeugenden Systems $\{D'_{n_1 n_2 \cdots n_k}\}$ dieser Menge A, welches die Eigenschaft 4. besitzt, ist (zum mindesten gegenwärtig) unmöglich. Schon die Mengen D'_n mit *einem* Index von einem derartigen System können ja nicht angegeben werden. Denn sie müssen durchweg leer sein, falls A leer ist, d. h. falls in der Dezimalbruchentwicklung von π eine Siebnerdekade existiert; es muß unter ihnen dagegen ein nicht-leeres Intervall auftreten, falls die Menge A nicht leer ist, d. h. falls in der Dezimalbruchentwicklung von π keine Siebnerdekade auftritt. Die Angabe der Mengen D'_n kann also erst nach Beantwortung der Frage nach der Existenz einer Siebnerdekade in der Dezimalbruchentwicklung von π erfolgen.

Es kann sich in einer Verzweigungsmenge auch ereignen, daß für eine gewisse Zahlenfolge $\nu = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$ von einem gewissen k angefangen alle Dinge $V(D_{n_1}, D_{n_1 n_2}, \ldots, D_{n_1 n_2 \cdots n_k}, D_{n_1 n_2 \cdots n_k \cdots n_{k+l}})$ $(l = 1, 2, \ldots$ ad inf.) und auch das Ding D_ν mit dem Ding $D_{n_1 n_2 \cdots n_k}$ identisch sind. In diesem Fall können wir sagen, daß das Element D_ν der Verzweigungsmenge bereits durch die endlich vielen Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_k$ bestimmt ist. Sind beispielsweise die Dinge des erzeugenden Systems Mengen, ist die Verknüpfung V die Durchschnittsbildung, und setzen wir voraus, daß das vorliegende System im oben definierten Sinn monoton ist, dann ist, falls für eine Zahlenfolge $\nu = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$ alle Dinge $D_{n_1}, D_{n_1 n_2}, \ldots, D_{n_1 n_2 \cdots n_k \cdots}$ von einem bestimmten, etwa dem $k$ten, angefangen, miteinander identisch sind, die Menge $D_\nu = D_{n_1 n_2 \cdots n_k}$; also ist die Menge D_ν bereits durch die Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_k$ bestimmt.

5) Der oben mit Hilfe des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten durchgeführte Beweis für die *Existenz* eines erzeugenden Systems mit der Eigenschaft 4. zeigt in den Fällen, wo die *Angabe* eines derartigen Systems (zum mindesten gegenwärtig) unmöglich ist, *daß* (unter Voraussetzung der Widerspruchsfreiheit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der formalistischen Mathematik) *die Annahme der Existenz eines derartigen erzeugenden Systems nicht zu einem Widerspruch führen kann.*

Sind überhaupt alle Mengen, deren Indizes mit den Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_k$ beginnen, mit der Menge $D_{n_1 n_2 \cdots n_k}$ identisch, dann wird für jede mit den Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_k$ beginnende Zahlenfolge ν die Menge D_ν bereits durch die Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_k$ bestimmt.

5. Der Brouwersche Mengenbegriff. Es liege eine unendliche Folge von Zeichenreihen vor (von Zeichenreihen, welche aus endlich vielen Zeichen kombiniert sind, so wie die im dekadischen System geschriebenen Zahlenzeichen aus den zehn Zeichen der Ziffern kombiniert sind). Es liege ferner[6]) „ein Gesetz vor, auf Grund dessen, wenn immer wieder eine willkürliche Nummer gewählt wird, jede dieser Wahlen entweder eine bestimmte Zeichenreihe mit oder ohne Beendigung des Prozesses erzeugt oder aber die Hemmung des Prozesses mitsamt der definitiven Vernichtung seines Resultates herbeiführt, wobei für jedes $n > 1$ nach jeder unbeendigten und ungehemmten Folge von $n - 1$ Wahlen wenigstens eine Nummer angegeben werden kann, die, wenn sie als $n$te Nummer gewählt wird, nicht die Hemmung des Prozesses herbeiführt". Jede in dieser Weise von einer unbegrenzten Wahlfolge erzeugte Folge von Zeichenreihen heiße ein „*Element* der Menge". Das vorliegende Gesetz und ebenso die gemeinsame Entstehungsart der Elemente einer Menge nennt Brouwer eine *Menge*.[6])

Es liege also m. a. W. ein Gesetz vor, welches jedem Zahlenkomplex eine gewisse Zeichenreihe zuordnet; die dem Zahlenkomplex $n_1, n_2, \ldots, n_k$ zugeordnete Zeichenreihe heiße $D_{n_1 n_2 \cdots n_k}$. Element der durch dieses Gesetz erzeugten Brouwerschen Menge ist jede in der beschriebenen Weise erzeugte unendliche Folge von Zeichenreihen; d. h. wenn $\nu = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$ irgendeine unendliche Folge natürlicher Zahlen ist, so ist die Folge von Zeichenreihen $D_\nu = (D_{n_1}, D_{n_1 n_2}, \ldots, D_{n_1 n_2 \cdots n_k}, \ldots)$ Element der Menge. Es ist also m. a. W. ein Ding dann und nur dann Element der durch das angeführte Gesetz gegebenen Brouwerschen Menge, wenn es in unserer obigen Terminologie Element ist von der durch das System der Dinge (Zeichenreihen $\{D_{n_1 n_2 \cdots n_k}\}$) erzeugten *Verzweigungsmenge*, wobei die Verknüpfung V der Dinge des erzeugenden Systems *im einfachen Aneinanderschreiben zu einer Folge von Dingen* (Folge von Zeichenreihen) besteht. Die „Hemmung des Prozesses mitsamt der definitiven Vernichtung seines Resultates" für den Zahlenkomplex $n_1, n_2, \ldots, n_k$ entspricht dem Auftreten des Nulldinges des erzeugenden Systems an der Stelle von $D_{n_1 n_2 \cdots n_k}$ in unserer obigen Terminologie. „Beendigung des Prozesses" für einen Zahlenkomplex $n_1, n_2, \ldots, n_k$ entspricht dem oben erwähnten Fall, daß für alle mit den Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_k$ be-

6) l. c. 1).

ginnenden Zahlenfolgen die Folge von Zeichenreihen v bereits durch Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_k$ bestimmt ist.

Nun sehen wir aus der angeführten Definition, daß Brouwer an ein Mengengesetz noch eine Forderung stellt: Ist die dem Zahlenkomplex $n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}$ entsprechende Zeichenreihe $D_{n_1 n_2 \cdots n_{k-1}}$ des erzeugenden Systems nicht das Nullding des erzeugenden Systems, dann soll das Gesetz mindestens eine Zahl n_k angeben, so daß auch die Zeichenreihe $D_{n_1 n_2 \cdots n_{k-1} n_k}$ nicht das Nullding des erzeugenden Systems ist. M. a. W. Brouwer fordert von einem Mengengesetz, daß es die Sicherheit gewähre, daß jede vom Nullding des erzeugenden Systems verschiedene Zeichenreihe mitwirkt an der Bestimmung von mindestens einem Element der Menge, welches einen Beitrag zur Menge liefert. Es soll nicht möglich sein, daß etwa, wenn D_1 eine vom Nullding verschiedene Zeichenreihe ist, an Stelle aller Zeichenreihen mit zwei Indizes, von denen der erste 1 ist, durchwegs Nulldinge stehen, so daß keine mit 1 beginnende Zahlenfolge v existiert, welche einen Beitrag zur erzeugten Menge liefert.

So viel zur Erläuterung von Brouwers Definition. Zugleich ergibt sich aus dem Gesagten ihre Beziehung zum Begriff der analytischen Mengen. Indem wir von einigen terminologischen Unterschieden absehen, können wir nämlich offenbar sagen: *Die Brouwerschen Mengen sind identisch mit Verzweigungsmengen, in deren erzeugendem System jedes vom Nullding verschiedene Ding an der Bestimmung von mindestens einem Element mitwirkt.*

Wir haben gesehen, daß unter wesentlicher Verwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten bewiesen werden kann, daß zu jeder Verzweigungsmenge ein sie erzeugendes System existiert, in welchem jedes vom Nullding verschiedene Ding mitwirkt an der Bestimmung eines zur Menge einen Beitrag liefernden Elementes. Indem wir wieder von terminologischen Unterschieden absehen, können wir also sagen: *Unter wesentlicher Verwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten kann bewiesen werden, daß jede Verzweigungsmenge eine Brouwersche Menge ist.*

Die erwähnten Unterschiede, von welchen man absehen muß, um die beiden letzten Behauptungen richtig zu verstehen, entspringen insbesondere dem Umstand, daß in der Brouwerschen Definition zunächst der Begriff „Element einer Menge" definiert wird, und zwar unter Berufung auf ein Gesetz der geschilderten Art. Da Brouwer den Mengenbegriff nicht voraussetzt, sondern erst durch elementeerzeugende Gesetze *einführen will* (den Mengenbegriff mit dem Begriff eines elementeerzeugenden Gesetzes identifiziert), kann Brouwer naturgemäß nicht von der „Menge aller durch ein Gesetz der geschilderten Art erzeugten Elemente" sprechen. Dem Wortlaut der Brouwerschen Definition entsprechend müßte

man also sagen: Ein Gesetz, welches mit einer Brouwerschen Menge identisch ist, ist zugleich ein Gesetz, welches eine Verzweigungsmenge liefert, nämlich eine Zuordnung von Dingen (Zeichenreihen) zu den Zahlenkomplexen, durch welche eine Verzweigungsmenge erzeugt wird, und zwar so erzeugt wird, daß jedes vom Nullding verschiedene Ding des erzeugenden Systems an der Bestimmung von mindestens einem Element mitwirkt, das zur Menge einen Beitrag liefert. Und umgekehrt: Jede Zuordnung von Dingen zu den Zahlenkomplexen, welche der erwähnten Zusatzbedingung genügt, d. h. jede der Zusatzbedingung genügende Erzeugungsvorschrift für eine Verzweigungsmenge ist ein Gesetz, welches mit einer Brouwerschen Menge identisch ist. Hierbei läßt sich unter Verwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten und nur unter Verwendung dieses Satzes aus jedem eine Verzweigungsmenge erzeugenden Gesetz ein dieselbe Verzweigungsmenge erzeugendes Gesetz herleiten, welches der erwähnten Zusatzbedingung genügt. Wie gesagt, scheinen mir die Unterschiede der letzterwähnten Behauptungen von den kürzeren oben angegebenen bloß terminologischer Natur.

Noch klarer wird das Letztgesagte, wenn man bedenkt, daß auch Brouwer sich einer Bezeichnungsweise für die Totalität der Elemente einer Menge in seinem Sinn, d. h. für die Totalität der durch ein Verzweigungssystem definierten Elemente bedient, für dieselbe allerdings, da er das Wort Menge für gewisse Gesetze reserviert, einen anderen Ausdruck wählen muß und so von der *Spezies* aller Elemente einer Menge spricht.

6. Die Brouwerschen Punktmengen. Wir betrachten nun speziell Punktmengen eines R_n. Eine *Brouwersche Punktmenge*[7]) *des* R_n ist eine Verzweigungsmenge, deren erzeugendes System die oben angeführten Eigenschaften 1., 2., 3., 4. besitzt, d. h. aus abgeschlossenen Würfeln mit rationalen Eckpunkten besteht, wobei die leere Menge (als „Hemmung des Prozesses mitsamt der definitiven Vernichtung seines Resultates") zu den Würfeln hinzugerechnet wird, wobei ferner die Würfel die Monotoniebedingungen 2. und 3. erfüllen und wobei endlich 4. jeder nicht-leere Würfel mindesten einen Punkt der Menge enthält. (Der Fall, daß ein Element einer Brouwerschen Punktmenge schon durch *endlich* viele Würfel des erzeugenden Systems bestimmt wird, kann wegen der Bedingung 3. nicht eintreten.) *Eine Brouwersche Punktmenge ist also eine analytische Punktmenge des* R_n. Umgekehrt ist jede durch ein System mit den Eigenschaften 1., 2., 3., 4. erzeugte analytische Menge

7) Vgl. Brouwer, Verh. Akad. Amsterdam (1) 12, Nr. 7, sowie die demnächst in den Mathem. Annalen erscheinende Abhandlung: „Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik. IV."

eine Brouwersche Punktmenge. Nun haben wir oben (§ 3) erwähnt, daß zu jeder beliebigen analytischen Punktmenge des R_n ein die betreffende Menge erzeugendes System, welches die Eigenschaften 1., 2., 3. besitzt, ohne Verwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten hergeleitet werden kann. Wir sahen ferner, daß unter wesentlicher Verwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten überdies zu jeder analytischen Menge die Existenz eines erzeugenden Systems, welches auch die Eigenschaft 4. besitzt, bewiesen werden kann. *Unter wesentlicher Verwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten ergibt sich also auch, daß jede analytische Punktmenge des R_n eine Brouwersche Punktmenge ist.*

Wir betrachten nun zwei spezielle Klassen von Brouwerschen Mengen, und zwar für den Fall der Punktmengen.

Brouwer nennt jene seiner Punktmengen *finit*[8]), für welche das erzeugende Würfelsystem nur endlich viele Würfel mit einem Index, nur endlich viele Würfel mit zwei Indizes und allgemein für jede natürliche Zahl k nur endlich viele Würfel mit k Indizes enthält. *Unter wesentlicher Verwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten kann man nun zeigen: Jede finite Brouwersche Punktmenge ist eine beschränkte abgeschlossene Punktmenge des R_n, und jede beschränkte abgeschlossene Punktmenge des R_n ist eine finite Brouwersche Punktmenge*

Sei nämlich *erstens* eine beschränkte abgeschlossene Punktmenge A im R_n gegeben. Wir können jedem Punkt von A für jede natürliche Zahl k einen Würfel mit rationalen Eckpunkten und einer Kantenlänge $\frac{1}{2^k}$ zuordnen. Nach dem Borelschen Theorem [zu dessen Beweis in der hier verwendeten Allgemeinheit der Satz vom ausgeschlossenen Dritten wesentlich verwendet wird[9])] ist für jedes k die Menge A bereits in der Summe von endlich vielen unter den zugeordneten Würfeln von einer Kantenlänge $\frac{1}{2^k}$ enthalten, etwa in der Summe von $W_1^k, W_2^k, \ldots, W_{n_k}^k$. Die Gesamtheit dieser sukzessive für $k = 1, 2, \ldots$ ad inf. bestimmten Systeme von je endlich vielen Würfeln bildet (nach einer einfachen Modifikation, damit der Bedingung 3. genügt werde) offenbar das erzeugende System einer finiten Brouwerschen Menge, und zwar ist die erzeugte finite Menge offenbar identisch mit der Menge A. — Es sei *zweitens* eine finite Brouwersche Menge A durch das Würfelsystem $S = \{W_{n_1 n_2 \cdots n_k}\}$ gegeben. Die Menge A ist offenbar beschränkt. Um

8) Vgl. Brouwer, Mathem. Annalen **93**, S. 245.

9) Vgl. Brouwer, Journal f. d. r. u. a. Mathem. **154**, S. 4sq. Über eine intuitionistische Form des Borelschen Theorems vgl. Brouwer, Proc. Ac. Amsterdam **29**, S. 866.

zu zeigen, daß sie auch abgeschlossen ist, geben wir irgendeinen Häufungspunkt p von A vor und zeigen, daß p auch Punkt von A ist. Nun liegt ja jeder Punkt von A in einem Würfel aus S mit einem Index. Wegen der Finitheit von A existieren nur endlich viele Würfel von S mit einem Index. Jede unendliche Teilmenge von A enthält also unendlich viele Punkte, welche in einem und demselben Würfel aus S mit einem Index liegen. Der Punkt p ist nach Voraussetzung Häufungspunkt von A; es liegen also in jeder Umgebung von p unendlich viele Punkte von A und daher nach dem eben Bemerkten unendlich viele Punkte, welche in einem bestimmten Würfel aus S mit einem Index, etwa in W_{n_1}, liegen. Folglich ist p selbst Punkt von W_{n_1}. In derselben Weise zeigt man, daß p Punkt von einem Würfel $W_{n_1 n_2}$ aus S mit zwei Indizes und allgemein, daß p für jede natürliche Zahl k Punkt von einem Würfel $W_{n_1 n_2 \cdots n_k}$ aus S mit k Indizes ist. Daraus folgt aber, daß p Punkt von A ist, wie behauptet.

Brouwer nennt jene seiner Punktmengen *individualisiert*[10]), welche die Eigenschaft haben, daß für je zwei nicht identische Folgen natürlicher Zahlen $\nu = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$ und $\nu' = (n_1', n_2', \ldots, n_k', \ldots)$, die beiden Punkte $p_\nu = W_{n_1} \cdot W_{n_1 n_2} \ldots W_{n_1 n_2 \cdots n_k} \ldots$ und $p_{\nu'} = W_{n_1'} \cdot W_{n_1' n_2'} \ldots W_{n_1' n_2' \cdots n_k'} \ldots$ verschieden sind. Nun sind unter den analytischen Mengen durch die Existenz eines erzeugenden Systems von der erwähnten Eigenschaft die Borelschen Mengen charakterisiert[11]), das sind jene Mengen, welche durch iterierte Summen- und Durchschnittsbildungen aus den abgeschlossenen und den offenen Mengen hervorgehen oder, wie sie auch definiert werden können, jene analytischen Mengen, deren Komplemente analytische Mengen sind. Unter Verwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten ergibt sich also *die Identität der individualisierten und der Borelschen Mengen.*

Es sei nun M eine beliebige Teilmenge eines euklidischen Raumes, $\bar{M}$ die abgeschlossene Hülle von M. Wir können ein die Menge $\bar{M}$ erzeugendes Verzweigungssystem $\{M_{n_1 n_2 \cdots n_k}\}$ bilden, etwa ein solches, welches aus Intervallen des euklidischen Raumes besteht. Jeder Punkt von $\bar{M}$ ist für eine gewisse Folge $\nu = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$ von natürlichen Zahlen Durchschnitt der Mengenfolge $M_{n_1}, M_{n_1 n_2}, \ldots, M_{n_1 n_2 \cdots n_k}, \ldots$, und umgekehrt ist für jede Zahlenfolge ν der Durchschnitt der entsprechenden Mengenfolge ein Punkt von $\bar{M}$. Betrachten wir das Verhältnis dieses ($\bar{M}$ erzeugenden) Verzweigungssystems zur Menge M; so sehen wir: Jeder Punkt von M ist für eine gewisse Folge ν von natürlichen Zahlen Durchschnitt der entsprechenden Folge von Mengen des Verzweigungssystems, und für jede Folge von natürlichen Zahlen ist

10) l. c. 8), S. 245. 11) l. c. 4).

der Durchschnitt der entsprechenden Folge von Mengen des Verzweigungssystems entweder Punkt oder Häufungspunkt von M. Ein Mengensystem dieser Art wollen wir ein Verzweigungs*schema* der Menge M nennen. Damit zur Menge M nicht nur Verzweigungsschemata, sondern ein aus abgeschlossenen Mengen bestehendes Verzweigungs*system* existiere, d. h. ein System von abgeschlossenen Mengen $A_{n_1 n_2 \cdots n_k}$ derart, daß jeder Punkt von M für eine gewisse Folge von natürlichen Zahlen Durchschnitt der entsprechenden Folge von Mengen des Verzweigungssystems sei und daß für jede Folge natürlicher Zahlen der Durchschnitt der entsprechenden Folge von Mengen des Verzweigungssystems (nicht nur Häufungspunkt, sondern) Punkt von M sei, ist notwendig und hinreichend, daß M eine *analytische* Menge sei. Ist M nicht-analytisch, so gibt es zu jedem Verzweigungsschema von M Zahlenfolgen, so daß der Durchschnitt der ihnen entsprechenden Folgen von Mengen des Verzweigungsschemas *nicht* Punkt der Menge M ist. Auf Grund des Cantorschen Durchschnittssatzes gilt offenbar die Aussage: Zu einem Verzweigungsschema $\{A_{n_1 n_2 \cdots n_k}\}$ der Menge M, welches kein Verzweigungssystem von M ist, existieren Zahlenfolgen $(n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$, so daß alle entsprechenden Mengen $A_{n_1}, A_{n_1 n_2}, \ldots, A_{n_1 n_2 \cdots n_k}, \ldots$ nicht-leer sind, der Durchschnitt dieser Mengen aber (der nach dem Cantorschen Durchschnittssatz nicht-leer ist) nicht zur Menge M gehört. In unserer obigen Terminologie können wir dies auch so ausdrücken: Die Verzweigungssysteme sind unter den Verzweigungsschemata dadurch charakterisiert, daß in ihnen die leere Menge ein Nullding bildet. Die analytischen Mengen sind unter den Teilmengen euklidischer Räume dadurch charakterisiert, daß unter ihren Verzweigungsschemata Verzweigungssysteme existieren.

Bekanntlich existiert nach dem verallgemeinerten Borelschen Theorem in jedem separabeln metrischen Raum ein System von abgeschlossenen Teilmengen $\{A_{n_1 n_2 \cdots n_k}\}$, so daß jeder Punkt des Raumes für eine gewisse Folge von natürlichen Zahlen Durchschnitt der entsprechenden Folge von Mengen des Systems ist und daß für jede Folge natürlicher Zahlen der Durchschnitt der entsprechenden Folge von Mengen des Systems höchstens einen Punkt enthält (d. h. entweder aus einem Punkt besteht oder leer ist). Wir wollen ein derartiges System ein *Verzweigungsschema* und einen separabeln Raum *analytisch* nennen, wenn in ihm ein *Verzweigungssystem* existiert, d. h. ein Verzweigungsschema mit der Eigenschaft, daß für jede Folge natürlicher Zahlen der Durchschnitt der entsprechenden Folge von Mengen des Verzweigungsschemas, wofern diese durchweg nicht-leer sind, wirklich einen Punkt des Raumes enthält. Auf diese Weise werden die analytischen Räume zwischen die kompakten

und die separabeln Räume eingeschaltet (zwischen die kompakten und analytischen Räume könnte man noch Borelsche Räume einschalten).

Es entsprechen einander also, wie wir in Wörterbuchform zusammenfassen können, hinsichtlich ihrer Verzweigungseigenschaften folgende

Teilmengen euklidischer Räume:	*Mengenklassen in der Brouwerschen Terminologie:*	*Räume:*
die beschränkten abgeschlossenen Mengen	die finiten Mengen	die kompakten Räume
die Borelschen Mengen	die individualisierten Mengen	
die analytischen Mengen	die Mengen	die analytischen Räume
die beliebigen Mengen	die Spezies	die separabeln Räume

7. Methodische Konsequenzen. Die erwähnte Beziehung zwischen den Brouwerschen und den analytischen Mengen scheint mir von einer gewissen methodischen Bedeutung. Die analytischen Mengen werden nämlich in der letzten Zeit nicht nur eingehend untersucht, sondern vielfach von formalistischen Mengentheoretikern als die in gewissem Sinn einzigen wirklich definierbaren Mengen aufgefaßt[12]), so daß hier also eine Annäherung des formalistischen Standpunktes an den Brouwer-

12) Zur Präzisierung dieser Auffassung schiene mir sehr interessant, wenn es gelänge, die Definition der analytischen Mengen aus gewissen Konstruktivitätsforderungen an den Mengenbegriff zwangsläufig herzuleiten oder wenigstens gewisse Konstruktivitätseigenschaften anzugeben, durch welche die analytischen Mengen gekennzeichnet sind. Eine solche Charakterisierbarkeit der analytischen Mengen halte ich für ziemlich wahrscheinlich.

Dabei möchte ich betonen, daß ich das Wort *„Konstruktivität"* für ein wenn überhaupt, so vermutlich *auf verschiedene Arten* und *in verschiedenen Abstufungen* präzisierbares (bisher noch nicht präzisiertes) Wort halte. Die separabeln Mengen und die zu analytischen Mengen komplementären Mengen sind weniger konstruktiv als die analytischen Mengen, aber doch konstruktiver als irgendwelche beliebige Mengen zu nennen, da sie immerhin gewisse Ansatzpunkte für konstruktive Behandlung bieten. Andererseits könnte man den endlichen Mengen, den abzählbaren Folgen von Elementen und den insichkompakten Mengen vielleicht in gewissem Sinn eine höhere Konstruktivität als den analytischen Mengen zuschreiben. Oder, um ein anderes Beispiel zu erwähnen, welches sich freilich formalistisch gar nicht recht präzisieren läßt: Auch jene (vorläufig durchwegs abzählbaren) Mengen reeller Zahlen, in denen jedes einzelne Element, so wie Borel dies zu wiederholten Malen forderte, durch ein Gesetz sich definieren läßt, sind vielleicht in gewissem Sinn konstruktiver als die analytischen Mengen reeller Zahlen, welche ja definiert sind als Mengen aller Elemente, die durch irgendwelche unendlich viele Auswahlakte bestimmter Art entstehen. Ebenso kann vielleicht auch für die analytische Menge aller Folgen von natürlichen Zahlen als ein konstruktiverer Kern die Menge aller gesetzmäßig definierten Folgen natürlicher Zahlen bezeichnet werden.

schen vorliegt. Zugleich ergibt sich, daß für einige der wichtigsten Teile der Mengenlehre (nämlich für die Lehre von den Teilmengen kompakter Mengen und für die Lehre von den Mengen reeller Zahlen) die Unterschiede zwischen intuitionistischer und formalistischer Behandlungsweise *nicht die spezifischen Begriffsbildungen*, sondern so wie in Arithmetik und Zahlentheorie bloß die *Bearbeitung der Begriffe mit dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten* betreffen.

(Eingegangen am 15. 6. 1927.)

Über Vollständigkeit und Entscheidbarkeit.[1]

Von H. Härlen in Stuttgart.

Die Feststellungen von Brouwer über den Satz vom ausgeschlossenen Dritten finden immer noch heftige Ablehnung. Das ist wenigstens z. T. auf die subjektive Stellungnahme von Brouwer zurückzuführen. Es dürfte deshalb nicht uninteressant sein, diese bzw. entsprechende Feststellungen zu machen, indem man von einem formalistischen Standpunkt ausgeht. — Wir wollen einen „empirischen“ und einen „allgemeinen“ Satz vom ausgeschlossenen Dritten unterscheiden.[2]) Der empirische Satz lautet: „Eine Eigenschaft kommt einem Ding entweder zu oder nicht“, wo unter Ding „empirisches Ding“, unter Eigenschaft „Eigenschaft, die mindestens einem empirischen Ding zukommt“ verstanden ist. Wenn wir den zu engen Begriff „Eigenschaft“ vermeiden wollen, können wir auch sagen: „Eine Aussage trifft auf ein Ding zu oder nicht“ oder auch: „Eine Satzfunktion wird mit einem Ding als Argument wahr oder falsch“. Daraus folgt unmittelbar die Fassung: „Jede Satzfunktion bestimmt eine Menge“, nämlich die Menge derjenigen Argumentwerte, die sie wahrmachen. — Wir verlassen nunmehr das Gebiet der Erfahrung und damit den empirischen Satz, indem wir die letzte Fassung allgemein aussprechen, d. h., indem wir die Beschränkung auf empirische Dinge und auf Satzfunktionen, die für empirische Dinge sinnvoll sind, fallen lassen. Betrachten wir ein Axiomensystem. Ein Axiom ist eine Satzfunktion[3]),

1) Vortrag, gehalten auf dem vierten deutschen Mathematikertag in Bad Kissingen.

2) Dieser bezieht sich nicht nur auf alle möglichen empirischen Sachverhalte (der „logische“ Satz vom ausgeschlossenen Dritten), sondern auf alle denkbaren Sachverhalte überhaupt. Das bedingt auch formal eine Erweiterung des empirischen Satzes, die im folgenden vorgenommen wird.

3) Das dürfte wohl nicht bezweifelt werden. Hingegen stößt auf Schwierigkeiten, auf die hier nicht eingegangen werden kann, die Angabe des Argumentbereiches eines Axioms. Wir entgehen diesen Schwierigkeiten, indem wir uns auf eine bestimmte Basis (Fußn. 4)) festlegen. Wir wollen uns die Angabe der Basis

also auch das System als logisches Produkt der Axiome. Nach unserem Satz müßte also jedes Axiomensystem eine Menge bestimmen, was sicher nicht der Fall ist. Denn sonst müßte jedes Axiomensystem vollständig im Sinne von Hilberts Vollständigkeitsaxiom sein, da die Menge aller Dinge, die einer Satzfunktion genügen, naturgemäß nicht erweiterbar ist. Aus der Unabhängigkeit des Vollständigkeitsaxioms, bzw. daraus, daß es in diesem Sinne unvollständige Axiomensysteme gibt, folgt, daß der Satz vom ausgeschlossenen Dritten nicht ohne weiteres verallgemeinert werden kann. Es liegt das offenbar daran, daß eine solche Verallgemeinerung nicht nur eine Aussage über Eigenschaften von Dingen, sondern auch über Beziehungen zwischen Dingen ist.[4]) — Die Tatsache, daß der Satz vom ausgeschlossenen Dritten nicht allgemeingültig im weitesten Sinne ist, erscheint paradox. Sie bietet überdies eine direkte Analogie zu der logischen Paradoxie der Mengenlehre. Diese besteht im wesentlichen darin, daß es zu jeder Menge von Dingen einer bestimmten Art ein in ihr nicht enthaltenes Ding dieser Art gibt, so daß keine Menge aller Dinge dieser Art existieren kann. Die Analogie ist offensichtlich. — Eine absolute Verallgemeinerung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten ist also unmöglich, was man so ausdrücken kann: „Es gibt unvollständige Begriffe.“ Eine weniger weitgehende Verallgemeinerung unseres Satzes können wir mit der — hypothetischen! — Behauptung aufstellen: „Jeder unvollständige Begriff kann vervollständigt werden.“ D. h. also, daß es zu jeder Wissenschaft ein vollständiges Axiomensystem gibt. — Hier hört die Analogie mit den Paradoxa auf, bei denen es sich tatsächlich um absolut unvollständige Begriffe handelt.[5])

Es gilt nun Bedingungen dafür aufzustellen, daß der Satz vom ausgeschlossenen Dritten in einer formalen Wissenschaft Geltung hat. Wir wollen dann das Axiomensystem dieser Wissenschaft entscheidbar nennen. Es kommt uns auf den transzendentalen Charakter des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten an, den man z. B. deutlich in dem vielgemachten Einwand gegen Brouwer feststellt: „Ein Ding muß eine Eigenschaft haben oder nicht, ob diese Eigenschaft nachweisbar ist oder nicht.“ Es

dem Axiomensystem hinzugefügt denken. — Wir betrachten also die Elemente einer bestimmten Deutung als Variable der Axiome, und nicht etwa die Deutungen.

4) Hierauf ist auch zurückzuführen, daß verschiedene Interpretationen eines Axiomensystems möglich sind, so daß in Wahrheit *jedes Axiomensystem die „Allmenge“ bestimmt.* Das ist hier jedoch unwesentlich, da selbstverständlich immer nur *eine* bestimmte Basis der Interpretationen in Betracht gezogen werden soll.

5) Man kann eine „Erklärung“ der Paradoxie darin sehen, daß der Satz vom ausgeschlossenen Dritten nicht unbeschränkt verallgemeinerungsfähig ist. während sie eine solche Verallgemeinerung voraussetzt.

handelt sich also unter dem, was wir hier Entscheidbarkeit nennen, nicht um den üblichen Begriff Entscheidbarkeit gleich Beweisbarkeit. Wir erfassen diesen transzendentalen Charakter, indem wir definieren: „Ein Axiomensystem heißt entscheidbar, wenn es für jeden in der axiomatisierten Wissenschaft möglichen Satz immer nur solche Interpretationen geben kann, in denen der Satz gilt, oder nur solche, in denen er nicht gilt.“ D. h. aber, daß jedes kategorische oder abgeschlossene System (Isomorphismus der Interpretationen) entscheidbar ist.[6]) — Wir betrachten nun die mathematischen Disziplinen Arithmetik, Analysis, Geometrie. Die Axiomensysteme von Peano und Hilbert, bzw. Veblen u. a. sind vollständig und kategorisch. Demnach gilt also der Satz vom ausgeschlossenen Dritten für die mathematischen Wissenschaften. Hiergegen ist aber bei der Kontinuumsmathematik (Analysis und Geometrie) sofort ein Einwand zu erheben. In der Axiomatik von Hilbert kommt ein Vollständigkeitsaxiom vor. Aus seiner Unabhängigkeit folgt, daß seine Annahme widerspruchsfrei ist — aber auch willkürlich. D. h. aber, daß Vollständigkeit und damit[6]) transfinite Entscheidbarkeit postuliert wird. Ein solches Axiom darf deshalb bei der Begründung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten nicht herangezogen werden. Versucht man das Vollständigkeitsaxiom durch ein äquivalentes, etwa durch das Dedekindsche oder das Cantorsche zu ersetzen, so ergeben sich gegen diese als transfinite Existentialaxiome neue Bedenken — die gleichen wie z. B. gegen das Auswahlaxiom.[7]) — Es ist noch zu bedenken, ob ein ähnlicher Einwand sich nicht auch im Fall der Arithmetik machen ließe, da ja in Peanos Axiomensystem das 5. Axiom der vollständigen Induktion die Rolle eines Vollständigkeitsaxioms spielt. Tatsächlich ist das betreffende Axiom aber kein Vollständigkeits-, sondern ein Beschränktheitsaxiom. Die Axiome 1 bis 4 sagen aus, daß es mindestens die Zahlen einer Folge vom Typus ω gibt; Axiom 5, daß es keine weiteren gibt. Es ist also ein Stetigkeits-(„Archimedisches“)Axiom und kann durch ein finites Axiom ersetzbar sein.

---

6) Ferner ist jedes vollständige System (Nichterweiterbarkeit der Interpretationen) entscheidbar, wenn in ihm die partikulären Aussagen entscheidbar sind. Bei vollständigen Systemen folgt also die transfinite Entscheidbarkeit aus der finiten (vgl. den Anhang).

7) Sie folgen aus dem Satz von Löwenheim und Skolem für jedes nichtabzählbare System. Dieser Satz besagt im wesentlichen, daß ein System von rein logischen Axiomen (das insbesondere keine transfiniten Existentialaussagen enthält) schon durch ein abzählbares System von Dingen erfüllt wird, wenn es überhaupt erfüllbar — widerspruchsfrei — ist. Es kann infolgedessen nur für Wissenschaften über abzählbar viele Elemente entscheidbare Systeme von rein logischen Axiomen geben.

Anhang.

Die Existenz minimaler Interpretationen eines Axiomensystems und die Entscheidbarkeit vollständiger Systeme.

Die Existenz minimaler Interpretationen ist gewährleistet, wenn das Axiomensystem keine transfiniten Existenzaussagen enthält, d. h. in den Fällen:

a) Das Axiomensystem enthält keine Existenzbehauptung; dann wird es durch die leere Menge erfüllt — der triviale Fall.

b) und c) Die Existenz von endlichvielen b) ausgezeichneten oder c) nicht ausgezeichneten Elementen wird durch *reine* Existentialaxiome gefordert. Alle weiteren Elemente werden durch endlich vielfache Anwendung von axiomatisch festgelegten logischen Operationen aus den ursprünglichen gewonnen. *Weitere Existenzforderungen kommen nicht vor.* Beispiele für den Fall b): Peanos Axiomensystem der Arithmetik; für den Fall c): Hilberts Axiomensystem der Geometrie *ohne* Vollständigkeitsaxiom (ev. durch ein Beschränktheitsaxiom ersetzt). Eine durch Konstruktion erhaltene Interpretation ist eine minimale im Sinn eines erweiterten Isomorphismus. Sie ist der Durchschnitt aller Interpretationen, wenn im weiteren Sinne isomorphe als gleich angesehen werden. Sie kann offenbar auf einen (echten oder unechten) Teil einer jeden anderen Interpretation abgebildet werden unter Aufrechterhaltung der axiomatisch geforderten Beziehungen — nicht aber allgemein unter Aufrechterhaltung aller für die betr. Wissenschaft wesentlichen Beziehungen. Beispiele: b) Das System der Axiome 1, 2, 3 und 5 von Peano hat als mögliche Interpretationen z. B. die natürliche Zahlenreihe oder das System (1) mit $1^+ = 1$. Dieses ist minimale Interpretation. — c) Ein Axiomensystem für den Typus $\omega^* + \omega$ (die Reihe der ganzen Zahlen) ist:

I. Für alle a, b von P gilt entweder $a \prec b$ oder $b \prec a$ $(a \succ b)$.

II. Aus $a \prec b$ und $b \prec c$ folgt $a \prec c$.

III. Für kein a von P gilt $a \prec a$.

IV. Wenn es ein $P \prec a$ gibt, so gibt es ein P — wir nennen es Fa — so daß $Fa \prec a$ und $x = Fa$ oder $x \prec Fa$, wenn $x \prec a$.

V. Wenn es ein $P \succ a$ gibt, so gibt es ein P — wir nennen es fa — so daß $fa \succ a$ und $x = fa$ oder $x \succ fa$, wenn $x \succ a$.

VI. Zu jedem a von P gibt es mindestens ein $b \prec a$ und ein $c \succ a$.

VII. Gilt eine Aussage für ein P und gilt sie für Fa und fa, wenn sie für a gilt, so gilt sie für jedes P.

VIII. Es gibt ein P.

Das System der Axiome I—V, VII, VIII hat als mögliche Interpretationen z. B. die Reihe der ganzen Zahlen oder das System (a). Letzteres ist minimale Interpretation. — Ein vollständiges Axiomensystem gestattet nur minimale Interpretationen.

Ein vollständiges Axiomensystem ist entscheidbar, wenn die *partikulären* Aussagen über die Elemente der minimalen Interpretation entscheidbar sind. Die partikulären Aussagen entstehen aus allgemeinen Sätzen mit scheinbaren Veränderlichen, indem man diese durch bestimmte Argumentwerte ersetzt. Es sind *finite* Aussagen, da in ihnen keine scheinbaren Veränderlichen mehr vorkommen. Bei vollständigen Systemen folgt also die Entscheidbarkeit allgemeiner Sätze (*transfinite* Entscheidbarkeit) aus der Entscheidbarkeit der Einzelaussagen (*finite* Entscheidbarkeit). — Wir wollen uns das an dem Beispiel der Arithmetik klarmachen. Sie ist entscheidbar; denn das Axiomensystem von Peano ist vollständig und alle partikulären arithmetischen Sätze sind entscheidbar. Z. B. ist der Ausdruck $a^{d+2} + b^{d+2} - c^{d+2}$ für ein bestimmtes System von natürlichen Zahlen (a, b, c, d) sicher entweder gleich oder nicht gleich 0. Entweder gibt es nun ein System von Zahlen, für das dieser Ausdruck verschwindet, oder es kann kein solches System geben, oder es gibt kein solches System, ohne daß diese Aussage entscheidbar wäre. In letzterem Falle müßte es eine Interpretation mit einem solchen System geben. Diese Interpretation müßte eine Erweiterung des Systems der natürlichen Zahlen sein, da es in diesem System keine vier Zahlen a, b, c, d der verlangten Art gibt. Eine Erweiterung des Systems der natürlichen Zahlen ist aber nicht möglich, da nach Peanos 5. Axiom jede Zahl Nachfolger einer natürlichen Zahl, nach dem 3. bzw. 4. Axiom also mit einer natürlichen Zahl identisch sein muß. Der große Fermatsche Satz ist also entscheidbar — wie jedes arithmetische Problem. — Offenbar kann man diese Behauptung über die Arithmetik erweitern in bezug auf die Mathematik jedes abzählbaren Systems. Die Entscheidbarkeit einer mathematischen Wissenschaft kann also nur dann nicht einwandfrei begründet werden, wenn es auch kein einwandfreies (d. h. rein logisches) Axiomensystem für diese Wissenschaft gibt (vgl. Fußn. 7)).

(Eingegangen am 12. 10. 27.)

Beweis einer Identität zwischen Binomialkoeffizienten.

Von E. Bessel-Hagen und H. Hasse in Halle a. d. S.

Auf Seite *94* des 36. Bandes dieses Jahresberichts hat Herr E. S. Allen eine von ihm empirisch gefundene kombinatorische Formel mitgeteilt und um die Aufsuchung eines Beweises gebeten. Seine Formel heißt

$$(1)\qquad \sum_{\substack{k+l=n-1\\ k\geqq 0,\ \text{ganz}\\ l\geqq 0,\ \text{ganz}}} \frac{(n-1)!}{k!\cdot l!}\,\frac{\prod\limits_{\varkappa=0}^{k-1}[(n-2p)(k+1)+(n+1)(k-2\varkappa)]}{(n-2p)(k+1)+(n+1)k}\cdot\frac{\prod\limits_{\lambda=0}^{l-1}[(n-2p)(l+1)+(n+1)(l-2\lambda)]}{(n-2p)(l+1)+(n+1)l}$$

$$=(-1)^{p+1}\frac{(n+1)^{n-2}}{2^{n-4}(n-2p)}\cdot\frac{(2n-2p-2)!\,(2p-3)!}{(n-p-1)!\,(p-2)!};$$

dabei sollen die leeren Produkte Eins bedeuten. Wir zeigen zunächst, daß (1) der Spezialfall $z=\frac{n-2p}{n+1}$ der folgenden Identität zwischen Binomialkoeffizienten ist:

$$(2)\qquad \sum_{k+l=n-1}\frac{z}{2}\,\frac{\binom{\frac{z+1}{2}k+\frac{z}{2}}{k}}{\frac{z+1}{2}k+\frac{z}{2}}\cdot\frac{z}{2}\,\frac{\binom{\frac{z+1}{2}l+\frac{z}{2}}{l}}{\frac{z+1}{2}l+\frac{z}{2}}=z\,\frac{\binom{\frac{z+1}{2}n+\frac{z-1}{2}}{n-1}}{\frac{z+1}{2}n+\frac{z-1}{2}}.$$

Diese ist wiederum, wenn der Symmetrie halber $n-1$ durch n ersetzt wird, offensichtlich der Spezialfall $a=b=\frac{z}{2}$, $c=\frac{z+1}{2}$ der Identität

$$(3)\qquad \sum_{k+l=n} a\,\frac{\binom{ck+a}{k}}{ck+a}\cdot b\,\frac{\binom{cl+b}{l}}{cl+b}=(a+b)\,\frac{\binom{cn+a+b}{n}}{cn+a+b},$$

deren Bestehen wir für beliebige komplexe a, b, c nachweisen werden. Hierzu werden wir zeigen: Die erzeugende Funktion

$$\sum_{k=0}^{\infty} a\,\frac{\binom{ck+a}{k}}{ck+a}\,x^k$$

hat die Gestalt $[\varphi(x,c)]^{-a}$, wo $\varphi(x,c)$ an der Stelle $x=0$ regulär ist; weiter gibt es einen Kreis K_c um den Nullpunkt der x-Ebene, dessen

Radius allein von c abhängt, derart, daß $\varphi(x, c)$ in K_c nur Werte annimmt, für die $|\varphi - 1| < 1$ ist, so daß für *jedes* komplexe a die Funktion $[\varphi(x, c)]^{-a}$ in K_c eindeutig und regulär ist und die Potenzreihendarstellung

$$(4) \qquad [\varphi(x, c)]^{-a} = \sum_{k=0}^{\infty} a \frac{\binom{ck+a}{k}}{ck+a} x^k$$

besitzt. Nunmehr ist (3) gleichbedeutend mit der in K_c gültigen Identität

$$(5) \qquad [\varphi(x, c)]^{-a} [\varphi(x, c)]^{-b} = [\varphi(x, c)]^{-(a+b)}.$$

Neben diese tritt

$$(6) \qquad ([\varphi(x, c)]^{-a})^b = [\varphi(x, c)]^{-ab},$$

d. h. für beliebige komplexe a, b, c und in K_c gelegenes x

$$(7) \qquad \left[\sum_{k=0}^{\infty} a \frac{\binom{ck+a}{k}}{ck+a} x^k\right]^b = \sum_{k=0}^{\infty} ab \frac{\binom{ck+ab}{k}}{ck+ab} x^k.$$

Nebenbei bemerken wir, daß aus der Identität (2) durch Vergleich der Koeffizienten der höchsten in den Polynomen rechts und links auftretenden Potenzen von z die merkwürdige Formel fließt

$$(8) \qquad \sum_{k+l=n-1} \frac{(k+1)^{k-1}}{k!} \frac{(l+1)^{l-1}}{l!} = 2 \frac{(n+1)^{n-2}}{(n-1)!}.$$

Übergang von (1) zu (2): Es ist, wenn $\frac{n-2p}{n+1} = z$ gesetzt wird,

$$\frac{1}{k!} \frac{\prod_{\varkappa=0}^{k-1} [(n-2p)(k+1) + (n+1)(k-2\varkappa)]}{(n-2p)(k+1) + (n+1)k} = 2^{k-1}(n+1)^{k-1} \frac{\binom{z\frac{k+1}{2} + \frac{k}{2}}{k}}{z\frac{k+1}{2} + \frac{k}{2}}$$

$$= 2^{k-1}(n+1)^{k-1} \frac{\binom{k\frac{z+1}{2} + \frac{z}{2}}{k}}{k\frac{z+1}{2} + \frac{z}{2}};$$

daher wird

Linke Seite von (1)

$$= 2^{n-3} \cdot (n+1)^{n-3} \cdot (n-1)! \cdot \frac{4}{z^2} \text{ mal Linke Seite von (2).}$$

Die rechte Seite von (1) schreiben wir gleich in der Form

$$\left(2^{n-3}(n+1)^{n-3}(n-1)!\frac{4}{z^2}\right)\left((-1)^{p+1} \cdot z \cdot 2^{5-2n} \cdot \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{(2n-2p-2)!\,(2p-3)!}{(n-p-1)!\,(p-2)!}\right)$$

und haben dann nur zu beweisen, daß der Ausdruck in der zweiten Klammer mit der rechten Seite von (2) übereinstimmt. In der Tat ist

$$\frac{(2n-2p-2)!}{(n-p-1)} = 2^{2n-2p-2}\left(n-p-\frac{3}{2}\right)\left(n-p-\frac{5}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2},$$

$$\frac{(2p-3)!}{(p-2)!} = 2^{2p-3}\left(p-\frac{3}{2}\right)\left(p-\frac{5}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= (-1)^{p-1}2^{2p-3}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2p-3}{2}\right),$$

somit

$$(-1)^{p+1}\cdot z\cdot 2^{5-2n}\cdot\frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{(2n-2p-2)!\,(2p-3)!}{(n-p-1)!\,(p-2)!}$$

$$= z\,\frac{\left(n-p-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(n-p-\frac{3}{2}-(n-3)\right)}{(n-1)!}$$

$$= z\,\frac{\binom{n-p-\frac{1}{2}}{n-1}}{n-p-\frac{1}{2}};$$

und dies stimmt wegen

$$z=\frac{n-2p}{n+1},\qquad p=\frac{n}{2}-\frac{n+1}{2}z,$$

$$n-p-\frac{1}{2}=\frac{n+1}{2}z+\frac{n-1}{2}=\frac{z+1}{2}n+\frac{z-1}{2}$$

mit der rechten Seite von (2) überein.

Beweis der Behauptungen über $\varphi(x, c)$: Es sei t eine komplexe Variable, dann ist für jedes komplexe c die Funktion

$$x(t)=t(1-t)^{c-1}=t\cdot e^{-(c-1)\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu}}$$

regulär im Kreise $|t|<1$ und hat im Punkte $t=0$ eine von Null verschiedene Ableitung. Daher läßt sich in einem Kreise $|x|<r$, $r=r(c)>0$ eine Umkehrfunktion $t=t(x)$ eindeutig erklären, die dort regulär ist und für $x=0$ verschwindet.

In einem passenden Kreise $|x|<r'$, $0<r'=r'(c)\leqq r(c)$ ist dann $|t|<1$. Wir definieren nun

$$\varphi(x, c)=1-t(x)$$

und wissen jetzt, daß für jedes komplexe a die Funktion

$$[\varphi(x, c)]^{-a}=(1-t(x))^{-a}=e^{a\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}}$$

im Kreise $|x| < r'$ regulär in x ist. Ihre Potenzreihe ergibt sich auf Grund der Lagrangeschen Umkehrungsformel zu

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \left\{ \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \left[a(1-t)^{-a-1} \left(\frac{t}{t(1-t)^{c-1}} \right)^k \right] \right\}_{t=0}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} a \cdot \left\{ \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} (1-t)^{-k(c-1)-a-1} \right\}_{t=0}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} a \cdot (-1)^{k-1} \binom{-k(c-1)-a-1}{k-1} (k-1)!$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} a \binom{kc+a-1}{k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a \frac{\binom{kc+a}{k}}{kc+a} x^k,$$

womit alles bewiesen ist.

Halle, den 14. November 1927.

(Eingegangen am 16. 11. 27.)

Über die Trennung der reellen Wurzeln von algebraischen Gleichungen.

Von NIKOLA OBRESCHKOFF in Sofia.

1. Es sei $f(x)$ ein Polynom $n$ten Grades, und es seien bei $h > 0$,

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x), \quad \Delta^2 f(x) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x), \ldots$$

die Differenzen desselben Polynoms. Nach einem Satz von C. Runge[1]) ist die Anzahl der Zeichenwechsel der Reihe

$$f(0), \quad \Delta f(0), \quad \Delta^2 f(0), \ldots, \Delta^n f(0)$$

mindestens gleich der Anzahl der Wurzeln der Gleichung

$$(1) \qquad f(x) = 0,$$

welche größer als $(n-1)h$ sind. Außerdem[2]), wenn $q - p = h$ ist, so ist die Anzahl der Zeichenwechsel der Reihe

$$(2) \qquad f(p), \quad \Delta f(p), \quad \Delta^2 f(p), \ldots, \Delta^n f(p)$$

mindestens gleich der Anzahl der Zeichenwechsel der Reihe

$$(3) \qquad f(q), \quad \Delta f(q), \quad \Delta^2 f(q), \ldots, \Delta^n f(q).$$

1) G. Pólya, Archiv f. Math. und Physik 23 (1915), S. 23—33.
2) C. Runge, Praxis der Gleichungen, 1900, S. 105—110.

Aus den Werten der Reihe (2) erhält man durch einfache Summationen die Werte der Reihe (3), da folgende Relationen gelten:

$$f(q)=f(p)+\Delta f(p),\quad \Delta f(q)=\Delta f(p)+\Delta^2 f(p),\ldots,\Delta^n f(q)=\Delta^n f(p).$$

In dieser Arbeit gebe ich eine Verallgemeinerung des Fourierschen Satzes und des erwähnten Satzes von Runge, durch welche man zu einer praktischeren Methode zur Trennung der Wurzeln gelangt als die Fouriersche. In einer früheren Arbeit[1]) habe ich den folgenden Hilfssatz bewiesen:

Hilfssatz I. *Es sei* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ $(\alpha_1 \neq 0)$ *eine Folge von beliebigen reellen Zahlen und* V *die Anzahl ihrer Zeichenwechsel. Es sei weiter*

$$\beta_q = a_{q,q-1}\alpha_{q-1} + a_{q,q}\alpha_q + a_{q,q+1}\alpha_{q+1} \qquad (q=1,2,\ldots,n)$$
$$(a_{q,q-1} \geqq 0, \quad a_{q-1,q} \geqq 0, \quad a_{1,0} = a_{n,n+1} = 0),$$
$$(a_{i,s} = 0, \quad |i-s|>1 \quad \text{und} \quad i,s=1,2,\ldots,\mu),$$

$\Delta_\mu = |a_{i,s}|$, *und* $(-1)^\mu \Delta_\mu > 0$ $(\mu=1,2,\ldots,n)$. *Dann ist die Anzahl der Zeichenwechsel der Folge* $\alpha_1, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ *mindestens gleich* $V+1$.

Indem man denselben Weg beibehält, gelangt man zum

Hilfssatz II. *Es sei* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ $(\alpha_1 \neq 0)$ *eine Folge von beliebigen reellen Zahlen und* V *die Anzahl ihrer Zeichenwechsel. Es sei weiter*

$$\beta_q = a_{q,q-1}\alpha_{q-1} + a_{q,q}\alpha_q + a_{q,q+1}\alpha_{q+1}, \qquad (q=1,2,\ldots,n)$$
$$(a_{q,q-1} \geqq 0, \quad a_{q-1,q} \geqq 0 \quad a_{1,0} = a_{n\,n+1} = 0),$$
$$(a_{i,s} = 0, \quad |i-s|>1, \quad i,s=1,2,\ldots,\mu),$$

$\Delta_\mu = |a_{i,s}|$, *und* $\Delta_\mu > 0$ $(\mu=1,2,\ldots,n)$. *Dann ist die Anzahl der Zeichenwechsel der Folge* $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \beta_n$ *höchstens gleich* V.

2. Satz. *Es sei* $f(x)=0$ *eine algebraische Gleichung* n*ten Grades mit reellen Koeffizienten, und* V_x *sei die Anzahl der Zeichenwechsel der Reihe*

$$f(x), \quad \Delta f(x), \quad \Delta^2 f(x), \;\ldots,\; \Delta^n f(x).$$

Dann ist die Anzahl der Wurzeln dieser Gleichung, welche sich im Intervall (p_1, q) *befinden, wo* $q-p_1$ *ein Vielfaches von* h *ist, nicht größer als* $V_p - V_q$, *wo* $p = p_1 - (n-1)h$.

Beweis. Für das Polynom $f(x)$ haben wir die Newtonsche Interpolationsformel

$$f(x)=f(0)+\frac{\Delta f(0)}{1!\,h}x+\frac{\Delta^2 f(0)}{2!\,h^2}x(x-h)+\cdots+\frac{\Delta^n f(0)}{n!\,h^n}x(x-h)\cdots(x-(n-1)h).$$

1) N. Obreschkoff, Jahresbericht d. Deutschen Math.-Ver. 33, 1924, S. 52—64.

Einfachheitshalber setzen wir

$$P_i = x(x-h)\ldots(x-(i-1)h), \quad \omega_i = (i-1)h,$$

und es seien die Polynome gegeben

$$\begin{aligned}
\varphi(x+p) &= a_0 + a_1 P_1 + a_2 P_2 + \cdots + a_k P_k,\\
\varphi(x+q) &= b_0 + b_1 P_1 + b_2 P_2 + \cdots + b_k P_k,\\
\psi(x) &= \varphi(x)(x-c), \qquad p + kh < c < q,\\
\psi(x+p) &= a_0' + a_1' P_1 + a_2' P_2 + \cdots + a_{k+1}' P_{k+1},\\
\psi(x+q) &= b_0' + b_1' P_1 + b_2' P_2 + \cdots + b_{k+1}' P_{k+1}.
\end{aligned}$$

Mit U_p bezeichnen wir die Anzahl der Zeichenwechsel der Reihe

$$(a) \qquad a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k,$$

und mit U_q die Anzahl der Zeichenwechsel der Reihe

$$(b) \qquad b_0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_k,$$

U_p' und U_q' sind die entsprechenden Anzahlen der Zeichenwechsel der Reihen (a') und (b'). Zuerst werden wir beweisen

$$(4) \qquad U_p' - U_q' = U_p - U_q + 2\mu + 1, \quad \mu \geqq 0.$$

Tatsächlich erhalten wir aus der Beziehung

$$\psi(x+p) = \varphi(x+p)(x+p-c)$$

die Gleichungen

$$\begin{aligned}
a_0' &= a_0(\omega_1 - c + p)\\
a_1' &= a_0 + a_1(\omega_2 - c + p)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_k' &= a_{k-1} + a_k(\omega_k - c + p)\\
a_{k+1}' &= a_k.
\end{aligned}$$

Demzufolge können wir den Hilfssatz I anwenden, da in diesem Fall $\Delta_r = (-1)^r P_r(c-p)$ ist, d. h. $(-1)^r \Delta_r > 0$ für $r = 1, 2, \ldots, k, k+1$. Folglich ist

$$U_p' = U_p + 2s + 1, \quad s \geqq 0.$$

Aus der Beziehung $\psi(x+q) = \varphi(x+q)(x+q-c)$ erhalten wir ähnliche lineare Gleichungen wie die obigen, jedoch mit dem Unterschied, daß an Stelle der Zahlen a die Zahlen b gesetzt sind und an Stelle von p die Zahl q gesetzt ist. Da in diesem Fall $\Delta_r = (-1)^r P_r(c-q) > 0$, $r = 1, 2, \ldots, k+1$, so folgt aus Hilfssatz II, daß $U_q' = U_q - 2\tau$, $\tau \geqq 0$. Damit ist (4) bewiesen. Nun seien $c_1, c_2, \ldots, c_s$ die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, welche im Intervall (p_1, q) sind, und wir setzen

$$\frac{f(x)}{x-c_1} = f_1(x), \quad \frac{f_1(x)}{x-c_2} = f_2(x), \ldots, \frac{f_{s-1}(x)}{x-c_s} = f_s(x).$$

Bezeichnen wir mit $V_x^{(\alpha)}$ die Anzahl der Zeichenwechsel der Reihe

$$f_\alpha(x),\quad \Delta f_\alpha(x),\quad \Delta^2 f_\alpha(x),\ \ldots,\ \Delta^{n-\alpha} f_\alpha(x),$$

so erhalten wir auf Grund von (4) die folgenden Beziehungen:

$$V_p^{(s-1)} - V_q^{(s-1)} \geqq V_p^{(s)} - V_q^{(s)} + 1,$$
$$V_p^{(s-2)} - V_q^{(s-2)} \geqq V_p^{(s-1)} - V_q^{(s-1)} + 1 \geqq V_p^{(s)} - V_q^{(s)} + 2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$V_p^{(0)} - V_q^{(0)} = V_p - V_q \geqq V_p^{(s)} - V_q^{(s)} + s.$$

Da nach der erwähnten Bemerkung von C. Runge, $V_p^{(s)} - V_q^{(s)} \geqq 0$, so ist $V_p - V_q \geqq s$, womit der Satz bewiesen ist.

Im Fall $h = 0$ erhalten wir den Satz von Fourier, und im Fall $q = \infty$ erhalten wir den Satz von Runge.

Die Anwendung des hier erhaltenen Satzes für die Trennung der Wurzeln zwischen den Zahlen $p_1,\ p_1 + h,\ p_1 + 2h, \ldots$ erfordert die Ausrechnung der Werte der Funktionen der Reihe

$$f(x),\quad \Delta f(x),\quad \Delta^2 f(x),\ \ldots,\ \Delta^n f(x) \tag{5}$$

für $x = p$, was am einfachsten durch Anwendung der Hornerschen Regel geschehen kann, und bloß durch Summation, wie schon am Anfang erwähnt wurde, erhalten wir die Werte derselben Funktionen für $x = p + h$, $p + 2h, \ldots$. Hingegen erfordert der Fouriersche Satz die Anwendung der Hornerschen Regel für alle Werte von x, welches zu viel umständlicheren Rechnungen führt.

(Eingegangen am 23. 7. 27.)

Neue Restgliedformen bei Funktionen mehrerer Variablen.[1])

Von WERNER PÜSCHEL in Göttingen.

Mit 6 Figuren im Text.

Nachdem lange Zeit die klassische Integralrestform bei der Entwicklung von Funktionen mehrerer Argumente die allein bekannte war (sie enthält für 2 Argumente $n+1$, für 3 Argumente $\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$ Glieder), hat vor einigen Jahren Herr Burnside[2]) auf direktem Wege

1) Die folgenden Betrachtungen sind im Anschluß an ein Referat im Seminar von Herrn Dr. A. Ostrowski entstanden, dem ich für die Anregung hierzu und viele wertvolle Ratschläge zu danken habe.

2) Mess. of math. 46 (1917), 172—175. Vgl. auch L. Neder, Math. Zeitschr. 1926, 776 ff., der für die entsprechende Zwischenwertform des Restgliedes beweist, daß

eine ganz anders gebaute, bei 2 Argumenten stets 3, bei 3 Argumenten stets nur 7 Glieder enthaltende Restform angegeben, die einer andern Wahl der Taylorschen Polynome entspricht. Der Unterschied zwischen der klassischen und der Burnsideschen Restform wird am besten klar, wenn man z. B. im Fall von 2 Variablen jeder Ableitung $\frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial x^\mu \partial y^\nu} f(x, y) = f^{(\mu,\nu)}(x, y)$ den Punkt $P_{\mu,\nu}$, mit den Koordinaten μ, ν, eines achsenparallelen quadratischen Gitters zuordnet. Die Terme der Taylorschen Polynome bei der klassischen Entwicklung entsprechen dann den Gitterpunkten eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks, während die von Herrn Burnside angegebene Entwicklung „rechteckig" ist. Diese Wahl der Taylorschen Polynome läßt sich nun in verschiedener Richtung verallgemeinern. Nach einigen Vorbereitungen in Nr. 1 beweise ich in Nr. 2 sehr kurz die Burnsidesche Formel und erweitere sie in Nr. 3 auf gezackte Bereiche, (vgl. etwa Fig. 1). Das Hauptresultat läßt sich dann so aussprechen: Unter sehr allgemeinen Voraussetzungen ist für alle x und y einer gewissen Umgebung des Punktes $x = y = 0$ die Summe der Terme $T^{(0,0)}_{\mu,\nu}$ des Taylorschen Polynoms, das der Gesamtheit $\mathfrak{Z}^*$ der nicht auf dem gezackten Teil der Berandung gelegenen Gitterpunkte entspricht, gleich der Summe gewisser zur Gesamtheit $\mathfrak{E}^*$ der Ecken P des Bereiches gehöriger von x und y abhängender Integrale $I^*_P(xy)$ vom Restgliedtypus, kurz $\sum_{\mathfrak{Z}^*} T^{(0,0)}_{\mu,\nu} = \sum_{P<\mathfrak{E}^*} I^*_P(xy)$. In der letzten Nummer werden dann dreieckige und andere polygonale Bereiche behandelt, wobei ich kurz auf den Zusammenhang mit der klassischen Formel eingehe.

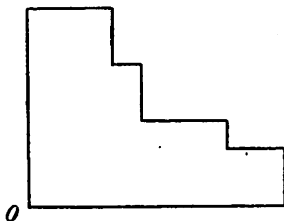


Fig. 1.

Wir dürfen uns im folgenden auf die MacLaurinsche Form beschränken; ferner genügt es, den Fall zweier Variablen zu betrachten.

---

der Zwischenwert ξ bzw. η in den Termen des Restgliedes den gleichen Wert hat. Hierbei scheinen mir die Ausführungen auf S. 779 der genannten Arbeit mit einer kleinen Unklarheit behaftet zu sein insofern, als in der 3. Zeile von unten in $R_{II}f$ ein von x abhängendes $\eta(x)$ auftritt; dann wäre bei Anwendung der Operation R_I auf $(f - R_{II}f)$ mit der Änderung von x anscheinend auch die von $\eta(x)$ in $R_{II}f$ zu berücksichtigen. Verstehen wir unter η_0 den zum Endwert x_0 gehörigen Wert, dann läßt sich die Schwierigkeit dadurch beheben, daß man R_I nicht auf $f - R_{II}f$, sondern auf die Differenz zwischen f und der bei festgehaltenem η_0 aus $R_{II}f$ entstehenden Funktion, etwa $R_{II}{}^*f$ anwendet.

1. Vorbereitungen.

Es mögen folgende Abkürzungen gelten:

a)
$$I_{m,n}\{f(x,y)\}=\begin{cases} f(x,y) \quad \text{falls} \quad m=n=0, \\ \int\limits_0^y \frac{(y-v)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(0,n)}(x,v)\,dv \quad \text{falls} \quad m=0,\ n\geqq 1, \\ \int\limits_0^x \frac{(x-u)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m,0)}(u,y)\,du \quad \text{falls} \quad m\geqq 1,\ n=0, \\ \int\limits_0^x \frac{(x-u)^{m-1}}{(m-1)!}\,du \int\limits_0^y \frac{(y-v)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(m,n)}(u,v)\,dv \quad \text{falls} \quad m\geqq 1,\ n\geqq 1; \end{cases}$$

b)
$$I_{m,n}\{f(x,0)\}=\begin{cases} \frac{y^n}{n!} f^{(0,n)}(x,0) \quad \text{für} \quad m=0,\ n\geqq 0, \\ \frac{y^n}{n!}\int\limits_0^x \frac{(x-n)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m,n)}(u,0)\,du \quad \text{für} \quad m\geqq 1, n\geqq 0; \end{cases}$$

$I_{m,n}\{f(0,y)\}$ werde entsprechend definiert.

c) Meist wird es genügen, kurz $I_{m,n}(x,y)$, $I_{m,n}(x,0)$ usf. zu schreiben für $I_{m,n}\{f(x,y)\}$, $I_{m,n}\{f(x,0)\}$ usf.

d) Der Term $\frac{x^\mu}{\mu!}\frac{y^\nu}{\nu!} f^{(\mu,\nu)}(0,0)$ des Taylorschen Polynoms sei mit $T_{\mu,\nu}\{f(0,0)\}$, kurz $T_{\mu,\nu}^{(0,0)}$, noch kürzer $T_{\mu,\nu}$ bezeichnet.

Endlich seien die im folgenden vorkommenden Funktionen mit ihren sämtlichen partiellen Ableitungen, soweit sie auftreten, stets als stetig vorausgesetzt.

Dann erhält man durch partielle Integration die folgenden Beziehungen:

$$f(x,y)=f(0,y)+\int\limits_0^x f^{(1,0)}(u,y)\,du,$$

und für $\mu\geqq 1$

$$\int\limits_0^x \frac{(x-u)^{\mu-1}}{(\mu-1)!} f^{(\mu,0)}(u,y)\,du=\frac{x^\mu}{\mu!} f^{(\mu,0)}(0,y)+\int\limits_0^x \frac{(x-u)^\mu}{\mu!} f^{(\mu+1,0)}(u,y)\,du,$$

d. h. für $\mu\geqq 0$

$$I_{\mu,0}(x,y)=I_{\mu,0}(0,y)+I_{\mu+1,0}(x,y);$$

durch wiederholte Anwendung dieser Gleichung erhält man (für $m\geqq 1$)

$$(\text{A}_1^*) \qquad I_{0,0}(x,y)=f(x,y)=\sum_{\mu=0}^{m-1} I_{\mu,0}(0,y)+I_{m,0}(x,y);$$

ebenso gewinnt man die Beziehung (für $n \geqq 1$)

(A₂*) $$I_{0,0}(x,y) = f(x,y) = \sum_{\nu=0}^{n-1} I_{0,\nu}(x,0) + I_{0,n}(x,y).$$

Ferner hat man nach der eindimensionalen Taylorformel für $n \geqq 1$, $m \geqq 0$

$$f^{(m,0)}(0,y) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{y^\nu}{\nu!} f^{(m,\nu)}(0,0) + \int_0^y \frac{(y-v)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(m,n)}(0,v)\,dv, \quad \text{d. h.}$$

(B₁*) $$I_{m,0}(0,y) = \sum_{\nu=0}^{n-1} T_{m,\nu} + I_{m,n}(0,y).$$

Genau so ergibt sich für $m \geqq 1$, $n \geqq 0$

(B₂*) $$I_{0,n}(x,0) = \sum_{\mu=0}^{m-1} T_{\mu,n} + I_{m,n}(x,0).$$

Setzt man ferner $I_{0,n}(x,y)$, d. h.

$$\int_0^y \frac{(y-v)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(0,n)}(x,v)\,dv = g(x,y),$$

entwickelt $g(x,y)$ nach Gl. (A₁*) und beachtet, daß die hierbei auftretenden Ausdrücke der Form

$$I_{\mu,0}\{g(x,y)\} = \frac{x^\mu}{\mu!} g^{(\mu,0)}(0,y) = I_{\mu,n}\{f(0,y)\}$$
$$(0 \leqq \mu \leqq m^{-1}),$$
$$\text{bzw. } I_{m,0}\{g(x,y)\} = I_{m,n}\{f(x,y)\}$$

sind, so erhält man für $m \geqq 1$, $n \geqq 0$ die Beziehung

$$I_{0,n}(x,y) = \sum_{\mu=0}^{m-1} I_{\mu,n}(0,y) + I_{m,n}(x,y).$$

Wendet man diese Gleichung je einmal mit p und m an $(1 \leqq p < m)$, so erhält man

$$\sum_{\mu=0}^{m-1} I_{\mu,n}(0,y) + I_{m,n}(x,y) = \sum_{\mu'=0}^{p-1} I_{\mu',n}(0,y) + I_{p,n}(x,y),$$

woraus sofort die für $n \geqq 0$, $0 \leqq p < m$ geltende und (A₁*) umfassende Gleichung folgt

(A₁) $$I_{p,n}(x,y) = \sum_{\mu=p}^{m-1} I_{\mu,n}(0,y) + I_{m,n}(x,y),$$

der man die auf analogem Wege zu gewinnende an die Seite stellen kann:

(A₂) $$I_{m,q}(x,y) = \sum_{\nu=q}^{n-1} I_{m,\nu}(x,0) + I_{m,n}(x,y)$$
$$(m \geqq 0,\ 0 \leqq q < n).$$

Die Operation (A) gestattet also, jedes zu einem beliebigen Gitterpunkte P gehörende Doppelintegral $IP(x,y)$ [insbesondere $I_{0,0}(x,y)=f(x,y)$] achsenparallel bis zu einem genau rechts oder genau darüber gelegenen, sonst beliebigen Gitterpunkt P^* vorzuschieben, wobei auf jedem hierbei durchlaufenen Gitterpunkt P' ein einfaches Integral $I_{P'}(0, y)$ bzw. $I_{P'}(x, 0)$ zurückgelassen wird. Auf ähnliche Weise bekommt man aus (B*) das für $m \geqq 0$, $0 \leqq q < n$ bzw. $n \geqq 0$, $0 \leqq p < m$ geltende Gleichungspaar

$$(B_1) \qquad I_{m,q}(0, y) = \sum_{\nu=q}^{n-1} T_{m,\nu} + I_{m,n}(0, y)$$

$$(B_2) \qquad I_{p,n}(x, 0) = \sum_{\mu=p}^{m-1} T_{\mu,n} + I_{m,n}(x, 0),$$

wobei sich das bei Operation (A) Gesagte sinngemäß auf (B) übertragen läßt. Im folgenden wird nur von den Gleichungen (A_1), (A_2), (B_1) und (B_2) Gebrauch gemacht.

2. Die Burnsidesche Formel.

Wir wollen unter $\mathfrak{R}_{m,n}$ (wo $m \geqq 1$, $n \geqq 1$ ist) die Gesamtheit aller Gitterpunkte eines im ersten Quadranten gelegenen achsenparallelen Rechtecks (einschließlich Rand) verstehen, das den Nullpunkt und den Punkt $P_{m,n}$ zu Ecken hat, während $\mathfrak{R}^*_{m,n}$ die Gesamtheit der Punkte $\mathfrak{R}_{m,n}$, jedoch ohne die auf den von $P_{m,n}$ ausgehenden Seiten (einschließlich Endpunkte) gelegenen Gitterpunkte bedeute.

Danach ist es klar, was unter einer Summe wie $\sum_{\mathfrak{R}^*_{m,n}} T_{\mu,\nu}$ usw. zu verstehen ist. Dann lautet die Formel von Burnside

$$f(x, y) = \sum_{\mathfrak{R}^*_{m,n}} T_{\mu,\nu} + I_{m,0}(x, y) + I_{0,n}(x, y) - I_{m,n}(x, y).$$

Beweis: a) Nach Gl. (A_1) hat man für $p = n = 0$

$$f(x, y) = \sum_{\mu=0}^{m-1} I_{\mu,0}(0, y) + I^{m,0}_{(x,y)}.$$

b) Schiebt man die zweiten Indizes des Summenausdrucks durch Anwendung von (B_1) mit $q = 0$, $m = \mu$, $n = n$ nach oben, so erhält man

$$f(x, y) = \sum_{\mathfrak{R}^*_{m,n}} T_{\mu,\nu} + \sum_{\mu=0}^{m-1} I_{\mu,n}(0, y) + I_{m,0}(x, y).$$

c) „Konzentriert" man die zweite Summe vermöge (A_1) mit $p = 0$ zu

$$I_{0,n}(x, y) - I_{m,n}(x, y),$$

so erhält man sofort die Burnsidesche Formel.

3. Gezackte Bereiche.

Es sei $\mathfrak{Z}_k$ $(k \geqq 1)$ die Gesamtheit der Gitterpunkte eines im ersten Quadranten gelegenen gezackten Bereiches (einschließlich Rand), der begrenzt wird einerseits von einem achsenparallelen Gitterstreckenzug, der von irgendeinem Gitterpunkt der Y-Achse nach einem Gitterpunkt der X-Achse führt, wobei er abwechselnd ein- und ausspringende Ecken (letztere $k$mal) bildet, — andererseits von den hierbei ausgeschnittenen Strecken der Y- und X-Achsen (Fig. 2). (Die äußeren Ecken auf den Achsen wollen wir dabei zu den einspringenden rechnen.)

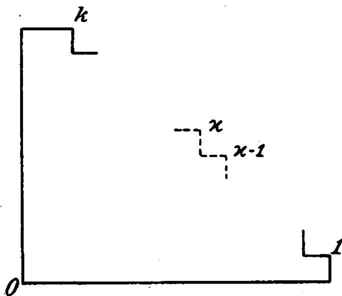


Fig. 2.

$\mathfrak{Z}_k^*$ sei die Gesamtheit aller zu diesem $\mathfrak{Z}_k$ gehörigen Gitterpunkte, jedoch ohne die auf dem verbindenden Streckenzug (einschließlich Endpunkte) gelegenen, und $\mathfrak{E}_k$ die Gesamtheit der Eck- und Endpunkte dieses verbindenden Streckenzuges.

Dann gilt der folgende

Satz 1: „Ist $f(x, y)$ für $|x| \leqq a$, $|y| \leqq b$ mit allen zu einem $\mathfrak{Z}_k$ gehörigen partiellen Ableitungen stetig, dann besteht für $|x| \leqq a$, $|y| \leqq b$ die Entwicklung

$$f(x, y) = \sum_{\mathfrak{Z}_k^*} T_{\mu,\nu}^{(0,0)} + \sum_{P < \mathfrak{E}_k} \varepsilon_P I_P(x, y),$$

wobei $\varepsilon_P = \begin{cases} -1 & \text{für die ausspringende Ecke von } \mathfrak{E}_k \\ +1 & \text{„ „ einspringende „ „ } \mathfrak{E}_k \text{ ist."} \end{cases}$

Zusatz: Zählen wir zu $\mathfrak{E}_k$ den Nullpunkt hinzu, schreiben für diese neue Gesamtheit $\mathfrak{E}_k^*$ und setzen

$$I_P^*(x,y) = \begin{cases} I_P(x, y) & \text{für jede ausspringende Ecke von } \mathfrak{E}_k^*, \\ -I_P(x, y) & \text{„ „ einspringende „ „ } \mathfrak{E}_k^*, \end{cases}$$

dann können wir Satz 1 auch in der Form schreiben

$$\sum_{\mathfrak{Z}_k^*} T_{\mu,\nu}^{(0,0)} = \sum_{P < \mathfrak{E}_k^*} I_P^*(x, y),$$

hierbei kommt dann kein Gitterpunkt gleichzeitig auf der linken und auf der rechten Seite vor, wenn wir, was keine Beschränkung der Allgemeinheit ist, annehmen, daß die Konstante $f(0, 0) = 0$ ist.

Beweis: Da der Satz für $k = 1$ mit der Burnsideschen Formel übereinstimmt, dürfen wir annehmen, daß die Behauptung für alle $k \leqq l - 1$

bereits richtig ist und haben dann nur zu zeigen, daß sie auch für $k = l$ gilt.

Hierzu denken wir uns den zu $\mathfrak{Z}_k^*$ gehörigen gezackten Bereich (Fig. 3) aus zwei derartigen, weniger Ecken aufweisenden entstanden, die ein gemeinsames „Burnsidesches" Rechteck enthalten, und fassen die zu ihnen gehörigen Gitterpunkte entsprechend unter

$\mathfrak{Z}^{(1)}, \mathfrak{Z}^{*(1)}, \mathfrak{E}^{(1)}; \quad \mathfrak{Z}^{(2)}, \mathfrak{Z}^{*(2)}, \mathfrak{E}^{(2)}; \quad \mathfrak{R}, \mathfrak{R}^*, \mathfrak{E}_{(\mathfrak{R})}$

zusammen.

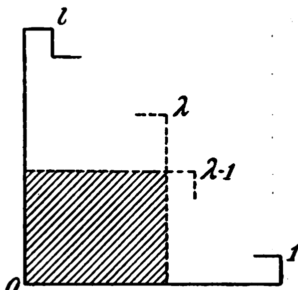


Fig. 3.

Da auf jeden dieser drei neuen Bereiche unser Satz anwendbar ist, gelten die Entwicklungen

$$f(x, y) = \sum_{\mathfrak{Z}^{*(1)}} T_{\mu,\nu} + \sum_{P < \mathfrak{E}^{(1)}} I_P(x, y),$$

$$f(x, y) = \sum_{\mathfrak{Z}^{*(2)}} T_{\mu,\nu} + \sum_{P < \mathfrak{E}^{(2)}} I_P(x, y),$$

$$-f(x, y) = -\sum_{\mathfrak{R}^*} T_{\mu,\nu} - \sum_{P < \mathfrak{E}_{(\mathfrak{R})}} I_P(x, y).$$

Beachtet man, daß $\mathfrak{Z}^{*(1)} + \mathfrak{Z}^{*(2)} - \mathfrak{R}^* = \mathfrak{Z}_k^*$ und $\mathfrak{E}^{(1)} + \mathfrak{E}^{(2)} - \mathfrak{E}_{(\mathfrak{R})} = \mathfrak{E}_k$ ist, wobei die ausspringende Ecke von $\mathfrak{E}_{(\mathfrak{R})}$ zu einer einspringenden von $\mathfrak{E}_k$ wird, so folgt durch Addition der obigen drei Gleichungen sofort die Behauptung.

4. Dreieckige und polygonale Bereiche.

Es sei (für $m \geqq 1$) $\mathfrak{D}_m$ die Gesamtheit aller Gitterpunkte des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks (einschließlich Berandung), dessen Katheten Strecken der X- und Y-Achse von der Länge m sind; $\mathfrak{D}_m^*$ die Gesamtheit der Punkte $\mathfrak{D}_m$, jedoch ohne die auf der Hypotenuse (einschließlich Endpunkte) liegenden, und $P^* = P_{m-n^*, n^*}$ ein beliebiger Gitterpunkt auf der Hypotenuse (einschließlich Endpunkte).

Dann besteht folgender

Satz 2: „Wenn $f(x, y)$ für $|x| \leqq a$, $|y| \leqq b$ mit allen zu $\mathfrak{D}_m$ gehörigen partiellen Ableitungen stetig ist, so gilt für $|x| \leqq a$, $|y| \leqq b$ die Entwicklung

$$f(x, y) = \sum_{\mathfrak{D}_m^*} T_{\mu,\nu} + \sum_{\nu=0}^{m} I_{m-\nu,\nu}^{**},$$

wobei
$$I_{m-\nu,\nu}^{**} = \begin{cases} I_{m-\nu,\nu}\,(x, 0): & \text{für } \nu < n^* \\ I_{m-n^*,n^*}(x, y): & \text{„} \quad \nu = n^* \\ I_{m-\nu,\nu}\,(0, y): & \text{„} \quad \nu > n^* \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqq n^* \leqq m \\ 0 \leqq \nu \leqq m \end{pmatrix}$$
bedeutet."

16*

$m - n = n$ gesetzt, fällen wir zum Beweise von P^* das Lot auf die X-Achse zum Fußpunkt $Q = Q_{m^*,n^*}$ und schieben $I_{0,0}^{(x,y)}$ auf dem so entstehenden Streckenzug OQP^* durch die Operation (A_1) und (A_2) nach P^* (Fig. 4), wodurch man die Gleichung erhält

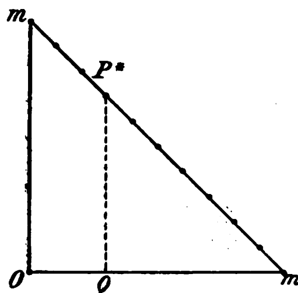


Fig. 4.

$$f(x, y) = \sum_{\mu=0}^{m^*-1} I_{\mu,0}(0, y) + \sum_{\nu=0}^{n^*-1} I_{m^*,\nu}(x, 0) + I_{m^*,n^*}^{(x,y)}.$$

Die hierbei auf den durchlaufenen Gitterpunkten zurückgelassenen $I_{\mu,0}(0, y)$ auf der X-Achse bzw. $I_{m^*,\nu}(x, 0)$ auf dem Lot schieben wir dann durch die Operationen (B_1) bzw. (B_2) senkrecht bzw. waagrecht bis an die dabei angetroffenen Randpunkte von $\mathfrak{D}_m$, wodurch jeder Gitterpunkt von $\mathfrak{D}_m^*$ mit dem zugehörigen $T_{\mu,\nu}$, dagegen jeder Hypotenusenpunkt $P^{m-\nu,\nu}$ von $\mathfrak{D}_m$ mit $I_{m-\nu,\nu}^{**}$ behaftet wird[3]), w. z. b. w.

Die eben bewiesene Formel ist ein Analogon zur klassischen[4]):

$$f(x, y) = \sum_{\mathfrak{D}_m^*} T_{\mu,\nu} + \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 (1-t)^{m-1} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(xt, yt)\, dt.$$

Um den Unterschied klarer erkennbar zu machen, bringen wir die beiden Restglieder auf die Zwischenwertformen. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung hat man

$$(*) \qquad \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 (1-t)^{m-1} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(xt, yt)\, dt$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m} \frac{x^{m-\nu}}{(m-\nu)!} \frac{y^\nu}{\nu!} f^{(m-\nu,\nu)}(\xi, \eta),$$

wobei $\xi = \vartheta x$, $\eta = \vartheta y$ gesetzt und ϑ eine Zahl mit $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ ist.

---

3) Wie man sieht, bleibt das Verfahren durch Kombination von (A_1) mit (A_2) für jeden achsenparallelen, im Nullpunkt beginnenden Gitterstreckenzug anwendbar, der abwechselnd nach oben und nach rechts gerichtet ist (vgl. den in Fig. 5 punktiert gezeichneten Weg).

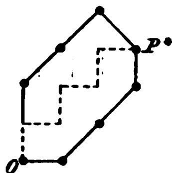


Fig. 5.

a) Schiebt man die hierbei auf den Gitterpunkten des Streckenzuges zurückgelassenen einfachen Integrale $I_{\mu,\nu}(x, 0)$ bzw. $I_{\mu',\nu'}(0, y)$ waagerecht bzw. senkrecht beliebig weit hinaus, so werden damit auch allgemeinere Bereiche zugänglich.

b) Schiebt man ferner $I_{0,0}(x, y)$ auf zwei verschiedenen solchen „Treppenwegen" zu einem gemeinsamen Endpunkt, so ergibt sich die vielleicht nicht uninteressante Beziehung: Die Summe der zu dem einen Treppenweg gehörigen (einfachen) Integrale ist gleich der Summe für den andern Weg.

4) Vgl. z. B. Jordan, C. d'A. 3. Aufl. I, 253.

Die Umformung des Restgliedes der Formel von Satz 2 gestaltet sich folgendermaßen:

Man hat zunächst für $\nu < n^*$

$$I^{**}_{m-\nu,\nu} = I_{m-\nu,\nu}(x, 0) = \frac{y^\nu}{\nu!}\int_0^x \frac{(x-u)^{m-\nu-1}}{(m-\nu-1)!} f^{(m-\nu,\nu)}(u, 0)\,du$$

$$= \frac{x^{m-\nu}}{(m-\nu)!}\frac{y^\nu}{\nu!} f^{(m-\nu,\nu)}(\xi_\nu, 0),$$

wobei $\xi_\nu = \vartheta_\nu x$ gesetzt, und ϑ_ν eine passende der Bedingung $0 \leqq \vartheta_\nu \leqq 1$ genügende Zahl ist.

Ebenso erhalten wir für $\nu > n^*$

$$I^{**}_{m-\nu,\nu} = I_{m-\nu,\nu}(0, y) = \frac{x^{m-\nu}}{(m-\nu)!}\frac{y^\nu}{\nu!} f^{(m-\nu,\nu)}(0, \eta_\nu),$$

wo $\eta_\nu = \Theta_\nu y$ gesetzt ist und $0 \leqq \Theta_\nu \leqq 1$ gilt.

Endlich erhält man

$$I^{**}_{m^*,n^*} = I_{m^*,n^*}(x, y) = \frac{x^{m^*}}{m^*!}\frac{y^{n^*}}{n^*!} f^{(m^*,n^*)}(\xi_{n^*}, \eta_{n^*})$$

$$(\xi_{n^*} = \vartheta_{n^*}x,\ \eta_{n^*} = \Theta_{n^*}y,\ 0 \leqq \vartheta_{n^*} \leqq 1,\ 0 \leqq \Theta_{n^*} \leqq 1).$$

Insgesamt läßt sich also $\sum\limits_{\nu=0}^{n} I^{**}_{m-\nu,\nu}$ in der Form schreiben

$$(**) \qquad \sum_{\nu=0}^{m} \frac{x^{m-\nu}}{(m-\nu)!}\frac{y^\nu}{\nu!} f^{(m-\nu,\nu)}(\xi_\nu, \eta_\nu),$$

wobei $\xi_\nu = \vartheta_\nu x$, $\eta_\nu = \Theta_\nu y$ und ϑ_ν, Θ_ν gewisse Zahlen mit

$$\begin{array}{llll} \vartheta_\nu = 0 & \text{und } 0 \leqq \Theta_\nu \leqq 1: & \text{für} & \nu > n^*, \\ 0 \leqq \vartheta_\nu \leqq 1 & \quad ,, \quad \Theta_\nu = 0: & ,, & \nu < n^*, \\ 0 \leqq \vartheta_\nu \leqq 1 & \quad ,, \quad 0 \leqq \Theta_\nu \leqq 1: & ,, & \nu = n^* \end{array}$$ sind.

Der Unterschied zwischen den beiden Restformen (*) und (**) besteht also im wesentlichen in der Lage der Zwischenwerte.

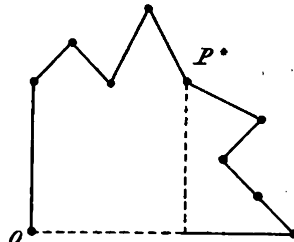


Fig. 6.

Bei (**) tritt nur in einem Term, bei dessen Auswahl man freie Hand hat, ein Wertepaar ξ_{n^*}, η_{n^*} mit $\xi_{n^*} \gtreqless 0$, $\eta_{n^*} \gtreqless 0$ auf, während in den andern Termen je ein Zwischenwert verschwindet. Bei (*) tritt in jedem Term dasselbe, der Bedingung $\frac{\xi}{\eta} = \frac{x}{y}$ genügende Paar von Zwischenwerten auf.

Im allgemeinen wird man also für beide Restformen Abschätzungen von gleicher Größenordnung erhalten.

Zum Schluß sei noch auf eine weitere Verallgemeinerung der in Fußnote 3) geschilderten Bereiche hingewiesen: Falls ein solcher Bereich oberhalb P^* waagerechte oder unterhalb P^* senkrechte Seiten hat, so lassen sich die zu ihnen gehörigen einfachen Integrale durch die Operation (A) zur Differenz zweier Doppelintegrale „konzentrieren", was ja z. B. beim der Burnsideschen Formel verwendet wurde.

(Eingegangen am 24. 4. 27.)

Zur Schmidtschen Auflösungsformel in der Theorie der Integralgleichungen.

Von G. WIARDA in Dresden.

Eines der schönsten Ergebnisse in der Theorie der linearen Integralgleichungen ist die Auflösungsformel von E. Schmidt, wonach sich die Gleichung

$$(1) \qquad f(s) = \eta(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\,\eta(t)\,dt$$

($f(s)$, $K(s, t)$ gegeben, $K(s, t) = K(t, s)$) befriedigen läßt durch

$$(2) \qquad \eta(s) = f(s) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n \varphi_n(s)}{\lambda_n - \lambda}, \qquad (\lambda \neq \lambda_n)$$

wo λ_n und $\varphi_n(s)$ die Eigenwerte bzw. Eigenfunktionen des Kernes $K(s, t)$, γ_n die Fourierkoeffizienten von $f(s)$ in bezug auf das System $\{\varphi_n(s)\}$ bedeuten. Bekanntlich wird (2) gewonnen, indem zunächst der Schmidtsche Entwicklungssatz hergeleitet wird: Jede quellenmäßig, d. h. in der Form

$$g(s) = \int_a^b K(s, t)\,q(t)\,dt$$

darstellbare Funktion $g(s)$ gestattet die Entwicklung

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(s). \qquad \left(c_n = \int_a^b \varphi_n(s)\,g(s)\,ds\right)$$

Dieser Satz wird angewandt auf die Funktion $g(s) = \eta(s) - f(s)$ und so, unter der Voraussetzung, daß λ kein Eigenwert ist, gezeigt: wenn eine Lösung existiert, so ist sie in der Form (2) darstellbar. Daß umgekehrt (2) die Gleichung (1) wirklich befriedigt, wird dann hinterher nochmals unter Heranziehung des Entwicklungssatzes bewiesen.

Es erscheint nicht uninteressant, daß sich die Formel (2) auch ohne den Entwicklungssatz herleiten läßt; dieser wird bei der folgenden modifizierten Beweisanordnung vielmehr als Folgerung mit herauskommen.

Wie sofort ersichtlich, läßt sich in dem Spezialfall $f(s) = \varphi_n(s)$ die Lösung von (1) ohne weiteres hinschreiben:

$$\eta^*(s) = \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda} \varphi_n(s).$$

Somit haben wir auch in dem Falle, daß $f(s)$ sich in die gleichmäßig konvergente Reihe

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \varphi_n(s) \tag{3}$$

entwickeln läßt, sogleich die Lösung

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n \lambda_n}{\lambda_n - \lambda} \varphi_n(s). \tag{4}$$

Nun ist aber die formal gebildete Reihe (3) im allgemeinen gar nicht konvergent, also auch die in (4) nicht; diese läßt sich aber zerspalten in

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \varphi_n(s) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\lambda_n - \lambda} \varphi_n(s),$$

wo die zweite Summe stets gleichmäßig konvergiert, wie in bekannter Weise (mit Benutzung der Schwarzschen Ungleichung) gezeigt wird. Im Spezialfall (3) ist der erste Summand gerade $f(s)$; wir werden also vermuten dürfen, daß

$$H(s) = f(s) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\lambda_n - \lambda} \varphi_n(s)$$

stets, also auch, wenn (3) nicht gilt, (1) befriedigt.

Wir setzen $\quad F(s) = H(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) H(t)\, dt$

und wollen die Identität von $F(s)$ und $f(s)$ nachweisen. Man rechnet aus

$$F(s) - f(s) = \lambda \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\lambda_n} \varphi_n(s) - \int_a^b K(s, t) f(t)\, dt \right\},$$

und es handelt sich also darum, zu zeigen, daß

$$c(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\lambda_n} \varphi_n(s) - \int_a^b K(s, t) f(t)\, dt \tag{5}$$

identisch Null ist. Das wäre trivial, wenn wir für $K(s,t)$ die (gleichmäßig konvergente) Entwicklung $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(s)\varphi_n(t)}{\lambda_n}$ einsetzen dürften, was ja aber nicht erlaubt ist. Deshalb wollen wir, von (5) ausgehend, eine Beziehung herleiten, in der die zweite Iteration $K_2(s,t)$ auftritt, für die wir bekanntlich stets $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(s)\varphi_n(t)}{\lambda_n^2}$ einsetzen dürfen.[1])

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz in (5) ist $c(s)$ zu allen $\varphi_n(s)$ orthogonal und also

$$\int_a^b c^2(s)\,ds = -\iint_a^b K(s,t)\,c(s)\,f(t)\,ds\,dt.$$

Ebenso ergeben sich sofort folgende Beziehungen:

$$c_1(s) = \int_a^b K(s,t)\,c(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\lambda_n^2}\,\varphi_n(s) - \int_a^b K_1(s,t)\,f(t)\,dt,$$

$$\int_a^b c_1^2(s)\,ds = -\iiint_a^b K(r,s)\,K(r,t)\,c_1(s)\,f(t)\,dr\,ds\,dt,$$

$$c_2(s) = \int_a^b K(s,t)\,c_1(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\lambda_n^3}\,\varphi_n(s) - \int_a^b K_2(s,t)\,f(t)\,dt \equiv 0,$$

weil wir eben für $K_2(s,t)$ die bilineare Entwicklung einsetzen können. Verfolgen wir diese Gleichungen rückwärts, so ergibt sich der Reihe nach:

$c_2(s) \equiv 0$, $\int_a^b c_1^2(s)\,ds = 0$, $c_1(s) \equiv 0$, $\int_a^b c^2(s)\,ds = 0$, $c(s) \equiv 0$, womit die Formel (2) bewiesen ist. Speziell folgt aus (5) wegen der Willkür von $f(s)$ der Schmidtsche Entwicklungssatz.

1) Die Tatsache, daß die bilineare Entwicklung schon für $K_1(s,t)$ gilt, soll hier nicht benutzt werden, weil zu diesem Resultat noch anderweitige Überlegungen als hier benötigt werden.

(Eingegangen am 13. 3. 27.)

Ein Analogon zu einem Mittelwertsatze von H. A. Schwarz bei komplexen Polynomen.

Von Eberhard Hopf in Berlin-Friedenau.

Ein Mittelwertsatz von H. A. Schwarz[1]) lautet: $x_0, x_1, \ldots, x_p$ seien $p+1$ verschiedene reelle Zahlen, J das kleinste, sie enthaltende abgeschlossene Intervall. Ist $f(x)$ eine in J $p$mal differenzierbare reelle Funktion, so gibt es ein ξ in J, so daß

$$\frac{|1, x_i, x_i^2, \ldots, x_i^{p-1}, f(x_i)|}{|1, x_i, x_i^2, \ldots, x_i^{p-1}, x_i^p|} = \frac{1}{p!} f^{(p)}(\xi) \;^{2)} \quad \text{ist.}$$

Im folgenden geben wir ein Analogon dieses Satzes im Komplexen, und zwar für Polynome. Als Spezialfall ($p=1$) ergibt sich dabei ein Satz von Grace[3]) und Heawood[4]). Der Beweis ist sehr einfach und stützt sich ähnlich wie in diesem Spezialfalle auf einen bekannten algebraischen Satz von Grace.[5])

$z_0, z_1, \ldots, z_p$ seien $p+1$ verschiedene Punkte der komplexen Zahlenebene. Das nur von den z_ν und von n abhängige Polynom

(1) $$g_n(z) = |1, z_i, z_i^2, \ldots, z_i^{p-1}, (z-z_i)^n|; \quad n = p + m, \; m > 0$$

ist, wie leicht zu sehen, vom Grade $m = n - p$. K_n sei der kleinste Kreis um den Punkt $z = 0$ (oder um irgendeinen anderen festen Punkt der Zahlenebene) als Mittelpunkt, der sämtliche Wurzeln von $g_n(z) = 0$ enthält. Dann gilt der

Satz 1. Für irgendein Polynom $n$ten Grades $f(z)$, das der Bedingung

$$|1, z_i, z_i^2, \ldots, z_i^{p-1}, f(z_i)| = 0$$

genügt, besitzt die $p$te Ableitung $f^{(p)}(z)$ mindestens eine Nullstelle im Kreise K_n.

Beweis: Für ein beliebiges Polynom $P(z)$ vom $n$ten Grade setzen wir

$$P^{(p)}(z) = \sum_0^m \binom{m}{\nu} a_\nu z^\nu \quad \text{und} \quad |1, z_i, z_i^2, \ldots, z_i^{p-1}, P(z_i)| = \sum_0^m (-1)^\nu \binom{m}{\nu} a_\nu b_{m-\nu}.$$

---

1) Vgl. H. A. Schwarz, Ges. math. Abh. Bd. 2, S. 307.

2) Wir schreiben hier wie auch im folgenden die Determinanten auf der linken Seite in Form ihrer allgemeinen Zeile ($i = 0, 1, \ldots, p$).

3) J. H. Grace, Cambr. Phil. Soc. Proc. Bd. 11, S. 352—357, insb. S. 356.

4) P. J. Heawood, Quart. J. Bd. 38, S. 84—107.

5) a. a. O.[3]) Vgl. auch G. Szegö, Math. Zeitschr. Bd. 13, S. 31; J. Egerváry, Acta Univ. Hung. Francisco Joseph. Bd. 1. S. 39—45.

Um die b_μ näher zu deuten, setzen wir

$P(z) = (\zeta - z)^n$, also $P^{(p)}(z) = \lambda \cdot (\zeta - z)^m$ und $a_\nu = (-1)^\nu \cdot \lambda \cdot \zeta^{m-\nu}$.

Dann folgt mit Rücksicht auf (1) $g_n(\zeta) = \lambda \cdot \sum_0^m \binom{m}{\nu} b_\nu \zeta^\nu$. Setzen wir für $P(z)$ das $f(z)$ von Satz 1, so ist

$$\sum_0^m (-1)^\nu \binom{m}{\nu} a_\nu b_{m-\nu} = 0,$$

m. a. W. die beiden Polynome $f^{(p)}(z)$ und $g_n(z)$ sind zueinander „apolar". Nach dem erwähnten Satze von Grace muß daher jeder Kreisbereich, der sämtliche Nullstellen des einen dieser Polynome enthält, auch mindestens eine Nullstelle des anderen enthalten.

Allgemeiner gilt der

Satz 2. Ist $f(z)$ ein Polynom $n$ten Grades, so gibt es stets ein z^* im Kreise K_n, so daß

$$\frac{|1, z_i, z_i^2, \ldots, z_i^{p-1}, f(z_i)|}{|1, z_i, z_i^2, \ldots, z_i^{p-1}, z_i^p|} = \frac{1}{p!} f^{(p)}(z^*) \quad \text{ist.}$$

Beweis: Bezeichnen wir die linke Seite mit A und setzen wir $\varphi(z) = f(z) - Az^p$, so wird

$$|1, z_i, z_i^2, \ldots, z_i^{p-1}, \varphi(z_i)| = 0, \quad \varphi^{(p)}(z) = f^{(p)}(z) - p!\,A.$$

Wendet man nun auf das Polynom $\varphi(z)$ den Satz 1 an, so erhellt sofort die Richtigkeit von Satz 2.

Im Spezialfall $p = 1$ ist $g_n(z) = (z - z_1)^n - (z - z_0)^n$ mit den Nullstellen $\frac{z_0 + z_1}{2} + i\frac{z_0 - z_1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\nu\pi}{n}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$. Als Kreis K_n kann man dann den Kreis um $\frac{z_0 + z_1}{2}$ als Zentrum und mit dem Radius $\left|\frac{z_0 - z_1}{2}\right| \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$ wählen. Die Ableitung irgendeines Polynoms $f(z)$ vom $n$ten Grade mit $f(z_0) = f(z_1)$ verschwindet dann mindestens einmal in K_n (Grace, Heawood).

Übrigens sind die Kreise in K_n vom Satz 1 und 2 durch keine kleineren zu ersetzen. Folgendermaßen sieht man nämlich ein, daß ein im Sinne von Satz 1 für die Polynome $n$ten Grades verwendbarer Kreis sämtliche Nullstellen von $g_n(z)$ enthalten muß. Ist etwa ζ eine dieser Nullstellen, so ist nach (1), $f(z) = (\zeta - z)^n$ gesetzt, $|1, z_i, z_i^2, \ldots, z_i^{p-1}, f(z_i)| = 0$. Der betreffende Kreis muß daher eine Nullstelle von $f^{(p)}(z) = \lambda(\zeta - z)^{n-p}$, d. h. ζ, somit also sämtliche Nullstellen von $g_n(z)$ umschließen.

Man kann noch die Frage nach dem Verhalten der Radien $R_n = R_n(z_0, z_1, \ldots, z_p)$ der Kreise $K_n = K_n(z_0, z_1, \ldots, z_p)$ vom Satz 1

und 2 etwas genauer erörtern. Eine einfache grobe Abschätzung ergibt, nebenbei bemerkt,

$$R_n < \frac{1}{\ln 2} \cdot (n-p) \cdot \operatorname{Max}(|z_0|, \ldots, |z_p|).$$

Dies ergibt bei festgehaltenen z_ν nur $R_n = O(n)$. Die folgende leichte Überlegung liefert darüber hinaus die Existenz von $\lim\limits_{n=\infty} \frac{R_n}{n}$.[1] Wir setzen $z = \frac{n}{x}$ und

$$\varphi_n(x) = \frac{x^{n-p}}{n^n} g_n\left(\frac{n}{x}\right) = x^{-p} \cdot \left| 1, z_i, \ldots, z_i^{p-1}, \left(1 - \frac{x z_i}{n}\right)^n \right|.$$

Dann ist in jedem beschränkten x-Bereiche gleichmäßig

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n(x) = \Phi(x) = x^{-p} \cdot |1, z_i, \ldots, z_i^{p-1}, e^{-z_i x}|.$$

Die ganze Funktion $\Phi(x)$ hat unendlich viele Nullstellen.[2] ξ sei diejenige vom kleinsten Betrage. (Es ist offenbar $\xi \neq 0$.) Nach einem bekannten Satze von Hurwitz ist, da offenbar $\frac{n}{R_n}$ der Betrag der absolut kleinsten Nullstelle von $\varphi_n(x)$ ist,

$$\lim_{n=\infty} \frac{R_n}{n} = \frac{1}{|\xi|}.$$

Im speziellen Falle z. B., daß die z_ν linear und äquidistant gelegen sind, etwa im Falle $z_0 = 0$, $z_1 = 1, \ldots, z_p = p$ ist, wie leicht zu sehen, $\Phi(x) = \text{const.}\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right)^p$, also $|\xi| = 2\pi$.

(Eingegangen am 9. 6. 27.)

Über eine Erweiterung der Fourierschen Integralformel.

Von L. Casper in München.

Das Fouriersche Doppelintegral, angewandt auf die Funktion $f(x)$, konvergiert und stellt den Funktionswert $f(x)$ dar, sobald die Funktion $f(x)$ der Dirichletschen Bedingung genügt und ferner das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx \tag{1}$$

absolut konvergent ist. Die letzte der genannten Bedingungen schränkt die Zahl der brauchbaren Funktionen $f(x)$ sehr ein. Allgemeinere Bedingungen für die darzustellende Funktion, beziehungsweise Modifika-

1) Ich verdanke diese einer freundlichen Mitteilung von Herrn Szegö.

2) Vgl. hierzu G. Pólya, Münch. Ber. 1920, S. 285.

tionen der Fourierschen Integralformel, zum Zweck, die Bedingung für das Unendliche, als welches das Integral (1) anzusehen ist, zu erleichtern, haben A. Pringsheim[1]), H. Weyl[2]), T. C. Fry[3]) und N. Wiener[4]) gegeben.

Im folgenden soll eine einfache Erweiterung der Fourierschen Integralformel kurz mitgeteilt werden, bei der die Bedingung für das Unendliche praktisch keine Einschränkung der darzustellenden Funktion bedeutet und die Dirichletsche Bedingung überhaupt ganz in Wegfall kommt.

Es sei $f(x)$ eine integrierbare Funktion. Durch wiederholte teilweise Integration findet man die bekannte Beziehung

$$(2)\qquad \int_a^x \frac{(x-\lambda)^{n-1}}{(n-1)!} f(\lambda)\, d\lambda = \int_a^x d\lambda \int_a^\lambda d\xi_{n-1} \int_a^{\xi_{n-1}} d\xi_{n-2} \ldots \int_a^{\xi_2} f(\xi_1)\, d\xi_1 .$$

Setzt man darin die untere Integrationsgrenze a gleich Null und differenziert man auf beiden Seiten $n$mal, so erhält man

$$(3)\qquad f(x) = \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x \frac{(x-\lambda)^{n-1}}{(n-1)!} f(\lambda)\, d\lambda .$$

Hierauf ist die Veränderliche x aus der oberen Grenze des Integrales in (3) zu entfernen. Dies gelingt mit Hilfe des diskontinuierlichen Faktors von Dirichlet:

$$(4)\qquad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(\beta + i\mu)(x-\lambda)}}{(\beta + i\mu)^n}\, d\mu = \frac{(x-\lambda)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad (x > \lambda);$$
$$= \quad 0 \quad , \quad (x < \lambda).$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung kann man bekanntlich auf elementarem Wege bestätigen, solange man sich auf ganze positive Werte von n beschränkt, wie es im folgenden der Fall ist. Dabei ist für die Größe β eine beliebige Zahl mit positiv reellem Teil zu nehmen. Mit Benutzung des diskontinuierlichen Faktors läßt sich die Gleichung (3) in die folgende umschreiben

$$(5)\qquad f(x) = \frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\lambda f(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu \frac{e^{(\beta + i\mu)(x-\lambda)}}{(\beta + i\mu)^n} .$$

Man erkennt ohne weiteres, daß für negative x der Ausdruck auf der rechten Seite von (5) verschwindet.

1) Math. Ann. 68 (1910), S. 367; 71 (1911), S. 289.
2) Jahresber. d. d. Math.-Ver. 20 (1911), S. 339.
3) Ann. of Math. 22 (1921), S. 182.
4) Math. Ann. 95 (1926), S. 557.

Die Vertauschung der Integrationsfolgen im Doppelintegral (5) bietet keine Schwierigkeiten. In der elementaren Theorie der bestimmten Integrale[1]) wird der nachstehende Satz bewiesen: „Die Integrale

$$(6)\qquad \int_0^{\infty} d\lambda\,\psi(\lambda)\int_{-\infty}^{+\infty} d\mu\,\varphi(\mu,\lambda) \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu \int_0^{\infty} d\lambda\,\psi(\lambda)\cdot\varphi(\mu,\lambda)$$

haben denselben Grenzwert, falls $\varphi(\mu, \lambda)$ eine in endlichen Grenzen eingeschlossene stetige Funktion von μ und λ ist, ferner das Integral

$$(7)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu\,\varphi(\mu,\lambda)$$

für alle in Betracht kommenden Werte von λ konvergiert und schließlich das Integral

$$(8)\qquad \int_0^{\infty} d\lambda\,\psi(\lambda) \quad \text{absolut konvergent ist.“}$$

Zur Anwendung des genannten Satzes setze man

$$\psi(\lambda) = f(\lambda)e^{-\beta\lambda} \quad \text{und} \quad \varphi(\mu,\lambda) = \frac{e^{\beta x + i\mu(x-\lambda)}}{(\beta + i\mu)^n}.$$

Es sind dann alle Voraussetzungen erfüllt, sobald das Integral

$$(9)\qquad \int_0^{\infty} f(\lambda)e^{-\beta\lambda}d\lambda$$

absolut konvergiert. Nimmt man dies an, so ergibt die Vertauschung der Integrationsfolgen in (5) die angekündigte Erweiterung der Fourierschen Integralformel

$$(10)\qquad \frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\mu}{(\beta+i\mu)^n}\int_0^{\infty} d\lambda f(\lambda)e^{(\beta+i\mu)(x-\lambda)} = f(x); \quad (x > 0), \qquad = 0\;; \quad (x < 0) \qquad (n \geqq 1).$$

Die Bedingung (9), bei beliebig großem positiven β, ist die einzige, welcher die darzustellende Funktion $f(x)$ zu genügen hat, damit die erweiterte Fouriersche Integralformel (10) den Funktionswert $f(x)$ darstellt. Nur wenn die Differentiation nach x unterhalb des Integrales, statt vor dem Integral, ausgeführt werden soll, muß man die Funktion $f(x)$ einer weiteren Einschränkung, der Dirichletschen Bedingung, unterwerfen.

1) Riemann-Weber: Part. Diffgl., I., 6. Aufl., S. 23 u. 24.

(Eingegangen 12. 3. 27.)

Mathematische Miszellen. XII.

Bemerkungen zum Beweise des Budan-Fourierschen und Newton-Sylvesterschen Satzes.

Von ALEXANDER OSTROWSKI in Basel.

Der Beweis des Budan-Fourierschen Satzes läßt sich wesentlich vereinfachen und abkürzen, wenn man von dem folgenden Lemma Gebrauch macht:

Die Koeffizienten eines reellen Polynoms

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n$$

lassen sich durch Erteilung absolut beliebig kleiner Zuwächse derart variieren, daß das variierte Polynom 1. dieselbe Anzahl reeller Wurzeln besitzt wie $f(x)$; 2. nebst allen Ableitungen lauter einfache Wurzeln hat.

Unter Benutzung dieses Hilfssatzes läßt sich nämlich der Beweis des Budan-Fourierschen Satzes auf den Beweis des Falles zurückführen, in dem das vorgelegte Polynom nebst allen Ableitungen lauter einfache Wurzeln hat. Dann gestalten sich aber alle Überlegungen wesentlich durchsichtiger.

Zum Beweis des Lemmas denke man sich $f(x)$ in Linearfaktoren zerlegt:

$$f(x) = \prod_{\nu=1}^{n_1}(x-\alpha_\nu)\prod_{\mu=1}^{n_2}\{(x-\beta_\mu-i\gamma_\mu)(x-\beta_\mu+i\gamma_\mu)\}$$

mit reellen α_ν, β_μ, γ_μ und nicht verschwindenden γ_μ. Es genügt dann zu beweisen, daß man Größen α'_ν $(\nu=1,\ldots,n_1)$, β'_μ, γ'_μ $(\mu=1,\ldots,n_2)$ absolut beliebig klein und zugleich derart wählen kann, daß das „variierte" Polynom

$$f^*(x)=\prod_{\nu=1}^{n_1}(x-\alpha_\nu-\alpha'_\nu)\prod_{\mu=1}^{n_2}\{(x-\beta_\mu-\beta'_\mu-i\gamma_\mu-i\gamma'_\mu)(x-\beta_\mu-\beta'_\mu+i\gamma_\mu+i\gamma'_\mu)\}$$

die Eigenschaften 1. und 2. besitzt.

Um zunächst die Eigenschaft 1. sicherzustellen, genügt es, dafür zu sorgen, daß sämtliche Größen α'_ν, β'_μ, γ'_μ reell sind und

$$(1) \qquad |\gamma'_\mu| < |\gamma_\mu| \qquad (\mu=1,\ldots,n_2)$$

gilt.

Es sei nun $D_\varkappa(\alpha'_\nu, \beta'_\mu, \gamma'_\mu)$ die Diskriminante der $\varkappa$ten Ableitung von $f^*(x)$ $(\varkappa=1,\ldots,n-2)$. Jedes $D_\varkappa(\alpha'_\nu, \beta'_\mu, \gamma'_\mu)$ ist dann ein (reelles) Polynom in α'_ν, β'_μ, γ'_μ. Verschwindet keines dieser Polynome identisch, so ist es

Berichtigung.

S. 255, Zeile 10 von oben, lies: $\beta_\mu + \beta'_\mu + i(\gamma_\mu + \gamma'_\mu) = \eta_\mu$,

statt: $\beta_\mu + \beta'_\mu + i(\gamma + \gamma') = \eta_\mu$,

dann bekanntlich möglich, absolut beliebig kleine reelle Werte $\alpha'_\nu, \beta'_\mu, \gamma'_\mu$, die zugleich (1) genügen, so zu wählen, daß alle $D_\varkappa$ von 0 verschieden bleiben. Dann aber besitzt das zugehörige Polynom $f^*(x)$ die beiden behaupteten Eigenschaften. Wir haben also nur zu beweisen, daß kein $D_\varkappa$ identisch verschwindet. Würde aber ein $D_\varkappa$ identisch in den $\alpha'_\nu, \beta'_\mu, \gamma'_\mu$ verschwinden, so würde $f^{*(\varkappa)}(x)$ für *alle* — auch komplexe — Wertsysteme der $\alpha'_\nu, \beta'_\mu, \gamma'_\mu$ mehrfache Wurzeln haben. Nun kann man aber die Gleichungen

$$\alpha_\nu + \alpha'_\nu = \xi_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n_1);$$

$$\beta_\mu + \beta'_\mu + i(\gamma + \gamma') = \eta_\mu,\ \beta_\mu + \beta'_\mu - i(\gamma_\mu + \gamma'_\mu) = \eta'_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, n_2)$$

für *beliebige* Werte der $\xi_\nu, \eta_\mu, \eta'_\mu$ nach $\alpha'_\nu, \beta'_\mu, \gamma'_\mu$ auflösen. Daher müßte auch die $\varkappa$ te Ableitung eines jeden Polynoms von der Form

$$\prod_{\nu=1}^{n_1}(x - \xi_\nu) \prod_{\mu=1}^{n_2}(x - \eta_\mu) \prod_{\mu=1}^{n_2}(x - \eta'_\mu),$$

d. h. eines beliebigen Polynoms in x mit dem höchsten Glied x^n, mehrfache Wurzeln haben. Dann müßte aber auch jedes Polynom genau $(n - \varkappa)$ ten Grades mehrfache Wurzeln haben. Mit diesem Widerspruch ist unser Lemma bewiesen.

Auch im Falle des Newton-Silvesterschen Satzes lassen sich alle Schlüsse durch eine vorbereitende Variation der Koeffizienten von $f(x)$ wesentlich vereinfachen.[1]) In diesem Falle muß jedoch die Variation von $f(x)$ noch einer dritten Bedingung unterworfen werden: *Bildet man mit beliebigen, aber festen Konstanten k_ν die Ausdrücke*

$$g_\nu(x) = k_\nu f^{(\nu)}(x)^2 - f^{(\nu-1)}(x) f^{(\nu+1)}(x), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1),$$

so haben sie für das variierte Polynom lauter einfache Wurzeln.

---

1) Vgl. Weber, Lehrbuch der Algebra, Bd. 1, S. 350; Netto, Vorlesungen über Algebra, Bd. 1, S. 230. An diesen beiden Stellen wird die Möglichkeit einer derartigen Vereinfachung gestreift, es wird jedoch gleichzeitig hervorgehoben, daß die Schlußweise für den Fall mehrfacher Wurzeln versagen müsse, „weil hier der Übergang von reellen zu komplexen Wurzeln offen steht" (Netto). Die hier den beiden Autoren vorschwebende Schwierigkeit wird im obigen dadurch in einfachster Weise überwunden, daß von vornherein nicht die Koeffizienten, sondern die Wurzeln von $f(x)$ in geeigneter Weise variiert werden.

In der unter A. Hurwitz gemachten Thèse von E. Marchand, Sur les Théorèmes de Sylvester et la règle de Newton, Neuchâtel 1913, die die vollständigste Diskussion der hier in Betracht kommenden Sätze enthält, wird die Möglichkeit der vorbereitenden Variation der Koeffizienten gar nicht erwähnt. Unter der Benutzung der in der vorliegenden Note bewiesenen Tatsache läßt sich die Marchandsche Diskussion erheblich kürzer und übersichtlicher darstellen.

Offenbar sind die oben auf die Ableitungen von $f(x)$ angewandten Schlüsse ohne weiteres auch auf die Ausdrücke $g_\nu(x)$ anwendbar, sobald wir beweisen können: *Die Diskriminante eines Ausdrucks* $g(x) = kf^{(\nu)2}(x) - f^{(\nu-1)}(x) f^{(\nu+1)}(x)$ *verschwindet nicht identisch in* $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Es genügt hierzu, ein $f(x)$ zu finden, für das dieser Ausdruck lauter einfache Wurzeln hat. Dies kann z. B. folgendermaßen geschehen. Nun betrachte man für $k \neq 0$ die folgende Identität:

$$f^{(\nu)}(x)\, g'(x) = \frac{2k-1}{k}\, g(x) f^{(\nu+1)}(x) + g^*(x) f^{(\nu-1)}(x),$$

wo
$$g^*(x) = \frac{2k-1}{k} f^{(\nu+1)2}(x) - f^{(\nu)}(x) f^{(\nu+2)}(x)$$

ist. Aus ihr folgt, daß für eine mehrfache Wurzel von $g(x)$ auch $f^{(\nu-1)}(x)\, g^*(x)$ verschwinden müßte. Andererseits muß aber eine gemeinsame Wurzel von $f^{(\nu)}(x)$ und $g(x)$ auch eine Wurzel von $f^{(\nu)}(x)$ sein. Man wähle nun $f^{(\nu)}(x)$ so, daß $f^{(\nu)}(x)$ weder mit $f^{(\nu+1)}(x)$ noch mit $f^{(\nu+2)}(x)$ eine gemeinsame Wurzel hat. Dann hat auch $f^{(\nu+1)}(x)$ mit $g^*(x)$ keine gemeinsame Wurzel:

$$(2) \qquad (f^{(\nu+1)}, f^{(\nu)}) = (f^{(\nu+1)}, f^{(\nu+2)}) = (f^{(\nu+1)}, g^*) = 1.$$

Nunmehr bleibt aber zur Festlegung von $f^{(\nu+1)}$ noch der Koeffizient $a_{n-\nu+1}$ zur Verfügung. Da dieser Koeffizient in $f^{(\nu-1)}(x)$ mit einem positiven Zahlenfaktor multipliziert erscheint, kann er so gewählt werden, daß $f^{(\nu-1)}$ in keiner Nullstelle von $f^{(\nu)}$ verschwindet. Ferner kommt $a_{n-\nu+1}$ in $g(x)$ mit $cf^{(\nu+1)}(x)$ multipliziert vor, wo c eine von 0 verschiedene Konstante ist. Und da $f^{(\nu+1)}(x)$ mit $g^*(x)$ wegen (2) keine gemeinsame Wurzel hat, läßt sich $a_{n-\nu+1}$ auch so wählen, daß $g(x)$ in keiner Nullstelle von $g^*(x)$ verschwindet.

Ist aber $k = 0$, so genügt es, $f^{(\nu+1)}$ mit lauter einfachen Wurzeln anzunehmen und sodann nach beliebiger Wahl des Koeffizienten $a_{n-\nu}$ den Koeffizienten $a_{n-\nu+1}$ so zu wählen, daß $f^{(\nu-1)}$ weder mit $f^{(\nu)}$ noch mit $f^{(\nu+1)}$ gemeinsame Wurzeln hat.

(Eingegangen am 15. 3. 1928.)

Zur geodätischen Krümmung und Parallelverschiebung.

Von Erwin Kruppa in Wien.

Will man die Begriffe *geodätische Krümmung* und *geodätische Parallelverschiebung* (Parallelismus von Levi-Civita) im Zusammenhang und elementar im Rahmen der Differentialgeometrie der Flächen in R_3 behandeln, so dürfte sich der folgende Vorgang empfehlen. Ich gehe von der folgenden, wie es scheint, neuen Definition der geodätischen Krümmung aus:

Die Erklärung der *mittleren* Krümmung $\widehat{\varkappa}$ eines *ebenen* Kurvenstückes Δs, d. i. $\widehat{\varkappa} = \Delta\alpha : \Delta s$, wo $\Delta\alpha$ den Kontingenzwinkel bedeutet, kann in der Form geschrieben werden

$$\widehat{\varkappa} = \frac{\operatorname{arc\,cos} \mathfrak{t}_1 \mathfrak{s} - \operatorname{arc\,cos} \mathfrak{t}\mathfrak{s}}{\Delta s}, \tag{1}$$

worin $\mathfrak{t}, \mathfrak{t}_1$ die Einheitsvektoren bedeuten, die das (gerichtete) Kurvenstück in seinen Endpunkten berühren, und $\mathfrak{s}$ einen beliebigen Einheitsvektor der Ebene bezeichnet. Der Wert $\widehat{\varkappa}$ läßt sich aber auch für ein Stück einer auf einer Fläche liegenden Raumkurve bilden, wenn man unter $\mathfrak{s}$ einen beliebigen Einheitsvektor versteht, der die Fläche im Anfangspunkt des Kurvenbogens berührt. Freilich hängt dieser Wert von der Wahl von $\mathfrak{s}$ ab und darf daher *nicht* etwa als mittlere geodätische (tangentiale) Krümmung des Bogens bezeichnet werden. Wir werden nun zeigen, daß der Grenzwert von $\widehat{\varkappa}$ für $\Delta s \longrightarrow 0$ von der besonderen Wahl von $\mathfrak{s}$ unabhängig ist und die geodätische Krümmung $\varkappa_g$ der Kurve im betrachteten Punkt vorstellt. Nach (1) wird somit $\varkappa_g$ definiert durch

$$\varkappa_g = \frac{d}{ds} \operatorname{arc\,cos} \mathfrak{t}\mathfrak{s}; \tag{2}$$

darin bedeutet $\mathfrak{s}$ einen beliebigen, bei der Differentiation *konstanten* Einheitsvektor, der die Fläche im Kurvenpunkt berührt und von dem wir aus einem in (2a) ersichtlichen Grund noch weiter annehmen, daß er von $\mathfrak{t}$ verschieden sein soll. Führt man die Differentiation in (2) aus, so erhält man, wenn $\mathfrak{n}$ den Einheitsvektor in der Flächennormalen bezeichnet,

$$\varkappa_g = \frac{\mathfrak{s}\dot{\mathfrak{t}}}{(\mathfrak{s} \times \mathfrak{t})\mathfrak{n}} = \frac{\mathfrak{s}\dot{\mathfrak{t}}}{(\mathfrak{s}\mathfrak{t}\mathfrak{n})}. \tag{2a}$$

Es sei anmerkungsweise erwähnt, daß sich (2a) unmittelbar deuten läßt. Wendet man auf das Dreikant $\mathfrak{s}, \mathfrak{t}, \dot{\mathfrak{t}}$ den Kosinussatz an und be-

achtet, daß der Betrag von $\dot{\mathfrak{t}}$ die Krümmung $\varkappa$ der Kurve ist und $\mathfrak{t}$ auf $\dot{\mathfrak{t}}$ senkrecht steht, so erhält man die bekannte Definition der geodätischen Krümmung $\varkappa_g = \varkappa \cos\vartheta$, worin ϑ den Winkel zwischen der Schmiegebene und der Tangentenebene bezeichnet.

Die gegebene Fläche werde durch den Vektor $\mathfrak{x}(u_1 u_2)$ dargestellt; mit $\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_{ik}$ für $k = 1, 2$ werden die durch partielle Ableitung nach u_i entstehenden Vektoren bezeichnet. Es wird angenommen, daß alle Funktionen mindestens zweimal stetig differenzierbar seien. Wird eine Flächenkurve C dadurch bestimmt, daß u_1 und u_2 als Funktionen der Bogenlänge s gegeben werden, so ist

(3) $$\mathfrak{t} = \mathfrak{x}_1 \dot{u}_1 + \mathfrak{x}_2 \dot{u}_2$$

der C berührende Einheitsvektor. Ferner merken wir an: die Koeffizienten der *ersten Fundamentalform* E, F, G sind

(4) $$E = \mathfrak{x}_1^2, \qquad F = \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2, \qquad G = \mathfrak{x}_2^2;$$

die *Christoffelsymbole erster Art* sind

(4a) $$\Gamma_{ik,l} = \mathfrak{x}_{ik} \mathfrak{x}_l \quad \text{für} \quad i, k, l = 1, 2$$

und die *Christoffelsymbole zweiter Art*

(4b) $$\Gamma_{ik}^1 = \frac{G\Gamma_{ik,1} - F\Gamma_{ik,2}}{EG - F^2}, \qquad \Gamma_{ik}^2 = \frac{E\Gamma_{ik,2} - F\Gamma_{ik,1}}{EG - F^2}.$$

Aus (3) folgt

(5) $$\dot{\mathfrak{t}} = \mathfrak{x}_1 \ddot{u}_1 + \mathfrak{x}_2 \ddot{u}_2 + \mathfrak{x}_{11} \dot{u}_1^2 + 2\mathfrak{x}_{12} \dot{u}_1 \dot{u}_2 + \mathfrak{x}_{22} \dot{u}_2^2$$

und somit für den die Fläche berührenden willkürlichen Einheitsvektor

(6) $$\mathfrak{s} = s_1 \mathfrak{x}_1 + s_2 \mathfrak{x}_2$$

(6a) $$\mathfrak{s}\dot{\mathfrak{t}} = s_1 P_1 + s_2 P_2,$$

worin P_1 und P_2 die Bedeutung haben

(7) $$\begin{cases} P_1 = E\ddot{u}_1 + F\ddot{u}_2 + \Gamma_{11,1}\dot{u}_1^2 + 2\Gamma_{12,1}\dot{u}_1\dot{u}_2 + \Gamma_{22,1}\dot{u}_2^2 \\ P_2 = F\ddot{u}_1 + G\ddot{u}_2 + \Gamma_{11,2}\dot{u}_1^2 + 2\Gamma_{12,2}\dot{u}_1\dot{u}_2 + \Gamma_{22,2}\dot{u}_2^2. \end{cases}$$

Für den Nenner in (2a) erhält man, wenn man

(8) $$\mathfrak{n} = \frac{\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2}{\sqrt{EG - F^2}}$$ setzt,

(9) $$(\mathfrak{s}\mathfrak{t}\mathfrak{n}) = (s_1 \dot{u}_2 - s_2 \dot{u}_1)\sqrt{EG - F^2}.$$

Wegen $\mathfrak{t} \neq \mathfrak{s}$ ist (9) von Null verschieden. Somit ist nach (2a), (6a) und (9)

(10) $$\varkappa_g = \frac{s_1 P_1 + s_2 P_2}{(s_1 \dot{u}_2 - s_2 \dot{u}_1)\sqrt{EG - F^2}}.$$

Die Biegungsinvarianz dieses Wertes ist bereits daraus ersichtlich, daß er bloß von E, F, G abhängt; es ist nur noch zu zeigen, daß er von $\mathfrak{s}$ unabhängig ist. Dazu ziehen wir noch die Tatsache heran, daß $\mathfrak{t}$ ein Einheitsvektor, also $\mathfrak{t}\dot{\mathfrak{t}} = 0$ ist. Daher ist nach (6a) und (3)

(11) $$\dot{u}_1 P_1 + \dot{u}_2 P_2 = 0.$$

Erweitert man den Bruch (10) mit $\dot{u}_1$ und subtrahiert dann vom Zähler die mit s_1 multiplizierte linke Seite von (11), so kann man durch $(s_1 \dot{u}_2 - s_2 \dot{u}_1)$ kürzen und erhält

(12) $$\varkappa_g = \frac{-P_2}{\dot{u}_1 \sqrt{EG - F^2}}.$$

Erweitert man dagegen in (10) mit $\dot{u}_2$ und subtrahiert vom Zähler die mit s_2 multiplizierte linke Seite von (11), so kommt

(12a) $$\varkappa_g = \frac{P_1}{\dot{u}_2 \sqrt{EG - F^2}}.$$

Nach (11) stimmen diese beiden Ausdrücke für $\varkappa_g$ überein. Setzt man für die P_i ihre Werte aus (7), so erhält man für die geodätische Krümmung die beiden übersichtlich gebauten, biegungsinvarianten Ausdrücke

(13) $$\varkappa_g = \frac{E\ddot{u}_1 + F\ddot{u}_2 + \Gamma_{11,1}\dot{u}_1^2 + 2\Gamma_{12,1}\dot{u}_1\dot{u}_2 + \Gamma_{22,1}\dot{u}_2^2}{\dot{u}_2\sqrt{EG - F^2}}$$
$$= -\frac{F\ddot{u}_1 + G\ddot{u}_2 + \Gamma_{11,2}\dot{u}_1^2 + 2\Gamma_{12,2}\dot{u}_1\dot{u}_2 + \Gamma_{22,2}\dot{u}_2^2}{\dot{u}_1\sqrt{EG - F^2}}.$$

Mit diesem Resultat läßt sich leicht der Anschluß an bekannte Ergebnisse gewinnen.

Faßt man unsere Fläche als einen *Riemannschen Raum* mit dem Bogenelement $ds^2 = E\,du_1^2 + 2F\,du_1\,du_2 + G\,du_2^2$ auf, so bilden die Ausdrücke P_1 und P_2 in (12), (12a) die Komponenten eines kovarianten Vektors P, dessen Betrag der geodätischen Krümmung gleich ist.[1]) In der Tat folgt aus unseren Ausdrücken für die geodätische Krümmung (12), (12a) und dem Ausdruck für ds^2 unmittelbar

(14) $$\varkappa_g^2 = \frac{GP_1^2 - 2FP_1P_2 + EP_2^2}{EG - F^2}.$$

Bezeichnen P^1 und P^2 die kontravarianten Komponenten von P, d. h. die aus

(15) $$\begin{cases} P_1 = EP^1 + FP^2 \\ P_2 = FP^1 + GP^2 \end{cases}$$

---

1) J. Lipka, Sulla curvatura geodetica delle linee appartementi ad una varietà qualunque. Rend. Acc. Lincei Roma, Bd. 31, 1. Sem. (1922) S. 353—356.

nach (4b) und (7) hervorgehenden Ausdrücke

(16) $$\begin{cases} P^1 = \ddot{u}_1 + \Gamma^1_{11}\dot{u}_1^2 + 2\Gamma^1_{12}\dot{u}_1\dot{u}_2 + \Gamma^1_{22}\dot{u}_2^2 \\ P^2 = \ddot{u}_2 + \Gamma^2_{11}\dot{u}_1^2 + 2\Gamma^2_{12}\dot{u}_1\dot{u}_2 + \Gamma^2_{22}\dot{u}_2^2, \end{cases}$$

so geht (14) vermöge (15) über in die Bianchische Formel

(17) $$\varkappa_g^2 = E(P^1)^2 + 2FP^1P^2 + G(P^2)^2.$$

Umgerechnet auf einen *allgemeinen* Kurvenparameter t ergeben unsere Ausdrücke (13) wegen

(19) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{dt}{ds}\right) = -\frac{\dot{u}_1 P_1 + \dot{u}_2 P_2}{\dot{s}^3},$$

wo jetzt der Punkt, auch in den Ausdrücken für die P_i, die Ableitung nach t bedeutet,

(13a) $$\varkappa_g = \frac{\dot{s}^2 P_1 - (\dot{u}_1 P_1 + \dot{u}_2 P_2)(\dot{u}_1 E + \dot{u}_2 F)}{\dot{u}_2 \dot{s}^3 \sqrt{EG - F^2}}$$
$$= -\frac{\dot{s}^2 P_2 - (\dot{u}_1 P_1 + \dot{u}_2 P_2)(\dot{u}_1 F + \dot{u}_2 G)}{\dot{u}_1 \dot{s}^3 \sqrt{EG - F^2}}.$$

Diese beiden ohne weiteres als gleich zu erkennenden Ausdrücke für $\varkappa_g$ ergeben durch Addition die Beltramische Formel in der übersichtlichen Form

(20) $$\varkappa_g = \frac{(F\dot{u}_1 + G\dot{u}_2)P_1 - (E\dot{u}_1 + F\dot{u}_2)P_2}{(E\dot{u}_1^2 + 2F\dot{u}_1\dot{u}_2 + G\dot{u}_2^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{EG - F^2}}.$$

Führt man darin nach (15) statt P_i die P^i aus (16) ein, so entsteht

(21) $$\varkappa_g = \frac{(\dot{u}_2 P^1 - \dot{u}_1 P^2)\sqrt{EG - F^2}}{(E\dot{u}_1^2 + 2F\dot{u}_1\dot{u}_2 + G\dot{u}_2^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Differentialgleichungen der *geodätischen Linien* sind nach (12) und (12a) mit s als Kurvenparameter $P_1 = 0$ und $P_2 = 0$. Löst man diese in $\ddot{u}_1$ und $\ddot{u}_2$ linearen Gleichungen nach diesen Werten auf, so erhält man

(22) $$P^1 = 0, \qquad P^2 = 0.$$

Für einen allgemeinen Kurvenparameter folgt aus (21)

(23) $$\dot{u}_2 P^1 - \dot{u}_1 P^2 = 0,$$

d. i. z. B. mit u_1 als Kurvenparameter, wenn $u_2 = u$ gesetzt wird,

(23a) $$\ddot{u} - \Gamma^1_{22}\dot{u}^3 + (\Gamma^2_{22} - 2\Gamma^1_{12})\dot{u}^2 + (2\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11})\dot{u} - \Gamma^2_{11} = 0.$$

Wir wenden uns jetzt der Besprechung der *geodätischen Parallelverschiebung*[1]) zu und kommen am Schluß noch einmal zur geodätischen

1) T. Levi-Civita, Nozione di parallelismo etc. Rend. Circ. mat. Palermo, Bd. 42 (1917). Lezioni di calcolo differenziale assoluto, Roma 1925.

Krümmung zurück. Es sei C eine auf der Fläche $\mathfrak{x}(u_1 u_2)$ gelegene Kurve $u_1(t)$, $u_2(t)$. Um ein System *geodätisch-paralleler Tangentenvektoren* der Fläche längs der Führungskurve C zu erklären, gehen wir so vor. Wir wählen auf C zwei Punkte P und P_1, ferner einen beliebigen Vektor $\mathfrak{v}$, der die Fläche in P berührt, und konstruieren in P_1 den zu $\mathfrak{v}$ *längengleichen* Tangentenvektor $\mathfrak{v}_1$, der mit der (gerichteten) Schnittlinie $\mathfrak{s}$ der Tangentenebenen in P und P_1 denselben Winkel einschließt wie $\mathfrak{v}$. Bedeutet $\mathfrak{s}$ zugleich einen in der Schnittlinie $\mathfrak{s}$ gelegenen Vektor, so gelten mithin

(24) $$\begin{cases} \mathfrak{v}_1^2 - \mathfrak{v}^2 = 0 \\ (\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v})\mathfrak{s} = 0. \end{cases}$$

Verbinden wir diese Konstruktion mit dem Grenzübergang $P_1 \longrightarrow P$, so wird dadurch eine infinitesimale Verpflanzung von $\mathfrak{v}$ längs des Bogenelementes von C in P erklärt, die nach (24) den Differentialgleichungen

(25a) $$\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}} = 0$$

(25b) $$\mathfrak{s}\dot{\mathfrak{v}} = 0$$

genügt, worin $\mathfrak{s}$ einen Vektor bedeutet, dessen Richtung die zur Tangentenrichtung des Bogenelementes konjugierte Richtung ist und die Punkte die Ableitungen nach dem willkürlich gedachten Kurvenparameter t bedeuten. Zum System (25) ist noch zu bemerken, daß ihm auch dadurch entsprochen werden kann, daß man $\mathfrak{s}$ als Einheitsvektor normiert und $\mathfrak{v} \equiv \mathfrak{s}$ setzt. Zur Definition der Parallelverschiebung nach (25) soll daher noch hinzutreten

(25c) $$\mathfrak{v} \not\equiv \mathfrak{s}.$$

Es ist anschaulich verständlich, daß der *geodätische Parallelismus* eine Verallgemeinerung des *euklidischen Parallelismus* ist. Dreht man nämlich die Tangentenebene in P_1 um ihre Schnittlinie $\mathfrak{s}$ mit der Tangentenebene in P im geeigneten Sinn in diese Ebene, so werden die Vektoren $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}_1$ euklidisch parallel. Ein durch die Integration von (25) hervorgehendes System von geodätisch parallelen Vektoren längs eines *Flächenstreifens* wird mithin die Eigenschaft haben, daß es bei der Verebnung des Streifens in ein System euklidisch paralleler Vektoren übergeht. Mit der Bezeichnung

(26) $$\begin{cases} \mathfrak{s} = s_1(t)\mathfrak{x}_1 + s_2(t)\mathfrak{x}_2 \\ \mathfrak{v} = v_1(t)\mathfrak{x}_1 + v_2(t)\mathfrak{x}_2 \end{cases}$$

lauten die Gleichungen (25a, b)

(27) $$\begin{cases} v_1 Q_1 + v_2 Q_2 = 0 \\ s_1 Q_1 + s_2 Q_2 = 0, \end{cases}$$ worin

$$(27\text{a})\ \begin{cases} Q_1 = E\dot{v}_1 + F\dot{v}_2 + (\Gamma_{11,1}\dot{u}_1 + \Gamma_{12,1}\dot{u}_2)v_1 + (\Gamma_{12,1}\dot{u}_1 + \Gamma_{22,1}\dot{u}_2)v_2 \\ Q_2 = F\dot{v}_1 + G\dot{v}_2 + (\Gamma_{11,2}\dot{u}_1 + \Gamma_{12,2}\dot{u}_2)v_1 + (\Gamma_{12,2}\dot{u}_1 + \Gamma_{22,2}\dot{u}_2)v_2 \end{cases}$$

bedeuten. Nun ist aber wegen (25c) $v_1 s_1 - v_2 s_2 \neq 0$, somit lauten nach (27) die Differentialgleichungen der Parallelverschiebung

$$(28)\qquad \begin{cases} Q_1 = 0 \\ Q_2 = 0. \end{cases}$$

Löst man (28) nach $\dot{v}_1$ und $\dot{v}_2$ auf, so erhält man mittels (4b)

$$(28\text{a})\qquad \begin{cases} \dot{v}_1 + (\Gamma^1_{11}\dot{u}_1 + \Gamma^1_{12}\dot{u}_2)v_1 + (\Gamma^1_{12}\dot{u}_1 + \Gamma^1_{22}\dot{u}_2)v_2 = 0 \\ \dot{v}_2 + (\Gamma^2_{11}\dot{u}_1 + \Gamma^2_{12}\dot{u}_2)v_1 + (\Gamma^2_{12}\dot{u}_1 + \Gamma^2_{22}\dot{u}_2)v_2 = 0. \end{cases}$$

Es ist nun auffallend, daß bei dieser Herleitung der Differentialgleichungen (28) bzw. (28a) der Parallelverschiebung gar nicht von dem Umstand Gebrauch gemacht wurde, daß $\mathfrak{s}$ nach der vorangestellten Erklärung in der zur Kurventangente konjugierten Flächentangente liegt. Wesentlich war lediglich, daß $\mathfrak{s}$ einen *beliebigen*, von $\mathfrak{v}$ verschiedenen Tangentenvektor $\mathfrak{t}$ der Fläche vorstellte. Bei dieser Auffassung geht (25) in den von Levi-Civita (a. a. O.) gegebenen Ansatz zur Erklärung der Parallelverschiebung über

$$(29\text{a})\qquad \mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}} = 0$$

$$(29\text{b})\qquad \mathfrak{t}\dot{\mathfrak{v}} = 0;$$

(29a) drückt die Invarianz der Länge aus, (29b) besagt, daß die Änderung von $\mathfrak{v}$ beim Übergang zum benachbarten Vektor ein zur Fläche senkrechter Vektor sein soll.

Zum Schlusse werfen wir noch einen Blick auf die anfänglichen Betrachtungen über die geodätische Krümmung zurück. Es wurde hervorgehoben, daß $\hat{\varkappa}$ wegen seiner Abhängigkeit von $\mathfrak{s}$ nicht als die mittlere Krümmung des Kurvenstückes $\widehat{PP_1} = \varDelta s$ bezeichnet werden darf. Bildet man dagegen mit J. Lipka (a. a. O.) den Kontingenzwinkel $\varDelta\alpha$ als den Winkel, den der Tangentenvektor $\mathfrak{t}_1$ in P_1 mit dem Vektor einschließt, den man erhält, wenn man den Tangentenvektor $\mathfrak{t}$ in P längs $\widehat{PP_1}$ geodätisch parallel vorschiebt, so ist $\varkappa_m = \varDelta\alpha : \varDelta s$ ein nur vom Bogenstück abhängiger, biegungsinvarianter Wert, der mithin als *mittlere geodätische Krümmung* des Bogenstückes bezeichnet werden darf. Sein Grenzwert für $\varDelta s \to 0$ ist die geodätische Krümmung $\varkappa_g$. Wir zeigen, daß diese Erklärung leicht auf unsern Ausdruck (2a) führt. $\varkappa_m$ ist jetzt

$$(30)\qquad \varkappa_m = \frac{\operatorname{arc\,cos} \mathfrak{t}_1\mathfrak{s}_1 - \operatorname{arc\,cos} \mathfrak{t}\mathfrak{s}}{\varDelta s},$$

worin die Tangentenvektoren $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{t}_1$ als Einheitsvektoren normiert sind, $\mathfrak{s}$ einen beliebigen (von $\mathfrak{t}$ verschiedenen), die Fläche in P berühren-

den Einheitsvektor bedeutet und $\mathfrak{s}_1$ den aus $\mathfrak{s}$ durch geodätische Parallelverschiebung längs $\widehat{PP_1}$ hervorgehenden Vektor bezeichnet. Übt man in (30) den Grenzübergang $\Delta s \longrightarrow 0$ aus, so erhält man

$$\varkappa_g = \frac{d}{ds} \arc\cos \mathfrak{t}\mathfrak{s}, \tag{31}$$

worin $\mathfrak{s}$ nicht wie in (2) bei der Differentiation konstant zu halten ist, sondern die geodätische Parallelverschiebung erfährt. Nichtsdestoweniger liefern beide Auffassungen hinsichtlich des Vektors $\mathfrak{s}$ dasselbe Resultat. Führt man nämlich (31) aus, so erhält man

$$\varkappa_g = \frac{\mathfrak{s}\dot{\mathfrak{t}} + \dot{\mathfrak{s}}\mathfrak{t}}{(\mathfrak{s}\mathfrak{t}\mathfrak{n})}. \tag{32}$$

Dieser Wert stimmt aber mit (2a) überein, da für die geodätische Parallelverschiebung von $\mathfrak{s}$ nach (29b) $\mathfrak{t}\dot{\mathfrak{s}} = 0$ gilt.

(Eingegangen am 16. 5. 27.)

Abbildung der linearen Linienkomplexe auf Kegelschnitte in der Ebene.

Von Anna Fischer in Bern.

Mit 2 Figuren im Text.

Blaschke[1]) hat eine Abbildung der Raumgeraden auf Punktepaare in der Ebene angegeben, bei welcher zwei Geraden, die sich schneiden, zwei Punktepaare in isometrischer Lage entsprechen. Ich habe eine analoge Abbildung der Raumgeraden gesucht, indem für die Bildpunktepaare von zwei sich schneidenden Geraden anstatt der isometrischen die *Kreuzlage* verlangt wurde. Mit Hilfe der gefundenen neuen Zuordnung zwischen Raumgeraden und Punktepaaren wird im zweiten Teil der vorliegenden Arbeit das ebene Bild eines linearen Linienkomplexes erhalten und werden die Verhältnisse in einem Komplexbüschel näher untersucht.

1. Abbildung der Raumgeraden.

a) Konstruktion und analytische Darstellung der Abbildung.

Die Konstruktion der neuen Abbildung gestaltet sich analog wie die von Blaschke angegebene. Wir wählen in einem räumlichen rechtwinkligen Koordinatensystem die Ebene $z = 0$ als *Grundebene*. Die beiden zur Grundebene parallelen Ebenen im Abstand $z = +1$ und $z = -1$ bezeichnen wir mit α_r und α_s.

1) Zeitschr. f. Math. u. Phys. 60 (1912).

Für eine reelle Gerade G wird die Konstruktion des entsprechenden Punktepaares folgendermaßen ausgeführt: Man bringt die Gerade G zum Schnitt mit den Ebenen α_r und α_e in den Punkten g_r^α und g_e^α. Die beiden Schnittpunkte werden auf die Grundebene projiziert und ergeben da die Punkte g_r und g_e. Dann wird g_r um den Nullpunkt um $\pi/2$ im negativen Sinne gedreht und ergibt den einen Bildpunkt Q. g_e bleibt in seiner ursprünglichen Lage und liefert den zweiten Bildpunkt P (Fig. 1).

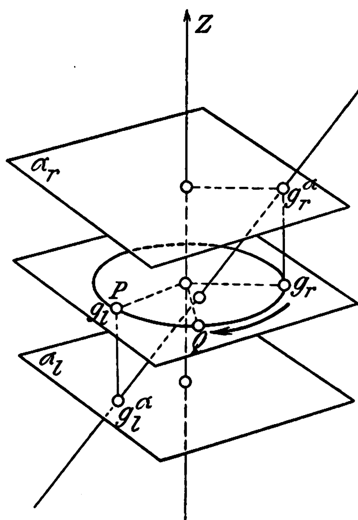


Fig. 1.

Die so erhaltene Zuordnung zwischen Raumgeraden und Punktepaaren ist, mit Ausnahme der zur Grundebene parallelen Geraden, umkehrbar eindeutig. Für die Bildpunktepaare von zwei sich schneidenden Geraden erhält man die Kreuzlage.

Um die analytische Darstellung für unsere Zuordnung zu erhalten, führen wir im Raume homogene Koordinaten ein, indem wir setzen

$$x = \frac{x_2}{x_1} \qquad y = \frac{x_3}{x_1} \qquad z = \frac{x_0}{x_1}. \tag{1}$$

In der Grundebene behalten wir inhomogene Koordinaten, $P(x, y)$ und $Q(\xi, \eta)$. Die Koordinaten der Schnittpunkte g_r^α und g_e^α werden dann

$$g_r^\alpha \begin{cases} y_0 = +1 \\ y_1 = +1 \\ y_2 = -\eta \\ y_3 = +\xi \end{cases} \qquad g_e^\alpha \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_1 = +1 \\ x_2 = +x \\ x_3 = +y. \end{cases} \tag{2}$$

Daraus berechnet man die Linienkoordinaten von G zu

$$\left\{\begin{matrix} G_{01} : G_{02} : G_{03} : \\ G_{23} : G_{31} : G_{12} \end{matrix}\right\} = \begin{matrix} 2 & : x - \eta : \xi + y : \\ -(x\xi + y\eta) : & \xi - y : x + \eta. \end{matrix} \tag{3}$$

Sind umgekehrt die Linienkoordinaten gegeben, so kann man die Koordinaten der Bildpunkte P und Q nach den folgenden Formeln bestimmen:

$$\begin{cases} x = \dfrac{G_{12} + G_{02}}{G_{01}} & \xi = \dfrac{G_{03} + G_{31}}{G_{01}} \\ y = \dfrac{G_{03} - G_{31}}{G_{01}} & \eta = \dfrac{G_{12} - G_{02}}{G_{01}}. \end{cases} \tag{4}$$

Die Inzidenzbedingung für zwei Gerade G und G^* lautet

$$x\xi^* + \xi x^* + y\eta^* + \eta y^* - (x\xi + y\eta) - (x^*\xi^* + y^*\eta^*) = 0. \tag{5}$$

Diese Gleichung ist aber in der Tat die Bedingung für die Kreuzlage.

b) Abbildung der Punkte und Ebenen.

Man kann nun weiter, analog wie Blaschke, die Abbildung der Punkte und Ebenen des Raumes erhalten. Man setzt die Koordinaten (3) in die Formeln ein, welche die Geraden durch einen Punkt p wiedergeben, und erhält

$$\begin{cases} \eta(p_0 + p_1) = x(p_1 - p_0) - 2p_2 \\ \xi(p_0 + p_1) = y(p_0 - p_1) + 2p_3. \end{cases} \tag{6}$$

Den Punkten p des Raumes werden somit durch unsere Abbildung in der Ebene spezielle Affinitäten zugeordnet, welche Homothetien mit einer Drehung um $-\pi/2$ darstellen.

Betrachten wir noch die Geraden in einer Ebene π. Setzen wir wiederum in die entsprechenden Gleichungen unsere Koordinaten (3) ein, so entsteht

$$\begin{cases} \pi_3\xi - \pi_2\eta + \pi_0 + \pi_1 = 0 \\ \pi_2 x + \pi_3 y + \pi_1 - \pi_0 = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Da die erste Gleichung nur ξ und η, die zweite nur x und y enthält, bekommen wir hier einfach ein senkrechtes Geradenpaar, das umgekehrt die Lage der Ebene im Raum unmittelbar bestimmt. Soll jetzt ein Punkt in einer Ebene liegen, so müssen die zwei Geraden einander in der durch den Punkt bestimmten Affinität entsprechen. Da diese nach den Formeln (6) eine Homothetie mit Drehung um $-\pi/2$ ist, so stehen die beiden Geraden in der Tat aufeinander senkrecht.

c) Rechtsparallele und linksparallele Geraden.

Als rechts-(links-)parallel werden auch in dieser Abbildung zwei Geraden G, G^* definiert, für welche die entsprechenden Punkte Q und Q^* (P und P^*) zusammenfallen. Die Bedingungen für den Rechts-(Links-) Parallelismus können aus den Formeln (4) abgeleitet werden.

Indem man nun als imaginäre Elemente die Kreispunkte

$$c_e: \quad x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 0 : 0 : i : 1$$
$$c_r: \quad x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 0 : 0 : -i : 1$$

der Grundebene einführt und die beiden reellen Ebenen α_r und α_e hinzunimmt, erhält man für die rechts-(links-)parallelen Geraden das folgende Resultat:

Die Geraden, welche zu einer gegebenen Geraden links-(rechts-) parallel sind, bilden eine elliptische Kongruenz. Die Achsen der Kongruenz linksparalleler Geraden sind eine imaginäre Gerade in α_e durch c_e und die konjugiert-imaginäre in α_e durch c_r. Die Achsen der Kongruenz rechtsparalleler Geraden sind eine imaginäre Gerade in α_r durch c_e und die konjugiert-imaginäre in α_r durch c_r.

Man könnte jetzt weiter die Figur, welche aus den beiden Kreispunkten und den Ebenen α_r und α_e besteht, als absolutes Gebilde annehmen. Mit Hilfe der Transformationen des Raumes, welche dieses in sich selbst transformieren, wäre der Aufbau einer nicht-euklidischen Geometrie möglich. Doch wollen wir auf diese Frage hier nicht näher eingehen.[1])

2. Abbildung des Linienkomplexes.

Die Abbildung eines linearen Linienkomplexes führt zu einer Kategorie von Eigenschaften der Kegelschnitte, die wohl noch nie erhalten und untersucht worden sind. Sie begründen eine merkwürdige Verallgemeinerung des Polarsystemes der Kurven zweiten Grades.

d) Abbildung des Linienkomplexes.

Ein linearer Linienkomplex hat mit unseren Koordinaten (3) die Gleichung

$$(8)\quad 2(x\xi + y\eta) + a(x-\eta) + b(\xi + y) + c(\xi - y) + d(x+\eta) + 2f = 0.$$

Mit dieser Gleichung können wir in der Grundebene weiter operieren. Wählen wir einen Punkt $A(x, y)$ fest, so entspricht diesem Punkt eine Gerade g. Verlangen wir nun, daß die Gerade g durch den Punkt A gehen soll, so erhalten wir die Gleichung

$$(9)\quad 2(x^2 + y^2) + x(a+b+c+d) + y(b-a-c+d) + 2f = 0.$$

Diejenigen Punkte A, deren entsprechende Gerade den Punkt A enthält, liegen somit auf einem *Kreis.*

Beschreibt A eine Gerade h, so dreht sich g um einen Punkt B. Wir verlangen, daß B auf h liegen soll und bekommen

$$(10)\quad \begin{vmatrix} u & v & w & 0 \\ a+d & b-c & 2f & w \\ 0 & 2 & d-a & v \\ 2 & 0 & b+c & u \end{vmatrix} = 0.$$

---

1) (Anmerkung bei der Korrektur.) Die Ausführungen dieses ersten Abschnittes decken sich z. T. mit den Resultaten, die Fritz Rehbock in seiner inzwischen erschienenen Arbeit (Zeitschr. f. angew. Math. u. Mechanik, Bd. 6, S. 379, 1926) erhalten hat. In den allgemeinen Abbildungen, die Rehbock untersucht, ist die meinige sowie diejenige von Blaschke enthalten.

Diejenigen Geraden h, deren entsprechende Punkte B auf h liegen, umhüllen somit einen *Kegelschnitt*. Diesen betrachten wir als ebenes Bild des linearen Linienkomplexes im Raume. Die Mittelpunkte vom Kreis und vom Kegelschnitt (den wir als Ellipse annehmen) fallen zusammen; der Kreis steht über der großen Achse der Ellipse.

Transformiert man die Gleichungen der Ellipse und des Kreises auf den Mittelpunkt und die Achsen, wobei man außerdem die große Achse der Ellipse gleich 1 setzt, so erhält man für die Ellipse

(11) $$x^2 + \frac{y^2}{k^2} - 1 = 0 \quad \text{mit} \quad 1 - k^2 = a^2.$$

Die Gleichung des entsprechenden Komplexes lautet

(12) $$2(x\xi + y\eta) + a[(x-\eta) - (\xi + y) - (\xi - y) + (x + \eta)] - 2 = 0.$$

Wir haben durch unsere Abbildung das Resultat erreicht: *Jedem linearen Linienkomplex entspricht in der Ebene ein Kegelschnitt. Der Kreis über der großen Achse desselben ist das Bild derjenigen Geraden des Komplexes, für welche die beiden Bildpunkte P und Q zusammenfallen.* Diese letzteren Geraden bilden im Raum ein Rotationshyperboloid.

e) Der Spezialkomplex.

Der Spezialkomplex ist die Gesamtheit derjenigen Geraden, welche eine gegebene Gerade, die Achse, treffen; er ist durch die Achse bestimmt. Bei unserer Abbildung entspricht der Achse ein Punktepaar. Somit wird ein Spezialkomplex auf das Punktepaar abgebildet, das zu seiner Achse gehört.

Beim Spezialkomplex zerfällt der Bildkegelschnitt in ein Punktepaar (P, Q).

Der Kreis über der großen Achse ist jetzt der Kreis über dem Durchmesser PQ. Diese Verhältnisse erinnern an das Zerfallen eines Kegelschnittes in das Brennpunktepaar. Darum wollen wir in der Folge speziell diejenige Gerade bestimmen, welche diesem Punktepaar entspricht. Im Resultat, das dabei gewonnen wird, liegt die Begründung unserer Anwendung der Abbildung auf die Kegelschnitte.

f) Konjugierte Geraden.

Es sei wiederum der Linienkomplex gegeben

(13) $$\Phi\colon\ -2G_{23} - G_{01} + a(G_{02} - G_{03} - G_{31} + G_{12}) = 0$$

mit der Bildellipse $$x^2 + \frac{y^2}{K^2} - 1 = 0.$$

In bezug auf diesen Komplex soll zu einer gegebenen Geraden H die konjugierte $\overline{H}$ bestimmt werden. Das Bildpunktepaar von H bezeichnen

wir mit $P_1(x_1, y_1)$ und $Q_1(\xi_1, \eta_1)$. Dieses Punktepaar bestimmt uns einen Spezialkomplex Ψ mit der Achse H. Um $\overline{H}$ zu finden, bilden wir den Büschel

$$\lambda \Phi + \Psi = 0. \tag{14}$$

Das entsprechende λ ist

$$-\lambda = \frac{x_1 \xi_1 + y_1 \eta_1 + a(x_1 - \xi_1) - 1}{K^2}. \tag{15}$$

Für $\lambda = 0$ fällt die Gerade mit ihrer Konjugierten zusammen und ist eine Gerade des Komplexes Φ.

Das Bildpunktepaar der Geraden $\overline{H}$ werde mit $P_2(x_2, y_2)$ und $Q_2(\xi_2, \eta_2)$ bezeichnet. Die Koordinaten sind

$$\begin{cases} x_2 = a + \dfrac{x_1 - a}{1 - \lambda} & \xi_2 = \dfrac{a + \xi_1}{1 - \lambda} - a \\ y_2 = \dfrac{y_1}{1 - \lambda} & \eta_2 = \dfrac{\eta_1}{1 - \lambda}. \end{cases} \tag{16}$$

Darin ist a die Koordinate des Brennpunktes der Ellipse, welche dem Komplex Φ zugeordnet ist.

Berechnen wir noch die Koordinaten des Mittelpunktes $M(x_m, y_m)$ der Strecke $\overline{P_1 Q_1}$ und des Mittelpunktes $M'(x'_m, y'_m)$ der Strecke $\overline{P_2 Q_2}$. Die Koordinaten dieser beiden Punkte stehen in folgender Beziehung zueinander:

$$x'_m = \frac{x_m}{1 - \lambda} \qquad y'_m = \frac{y_m}{1 - \lambda}. \tag{17}$$

Wir betrachten weiter die Lage der Brennpunkte $F_1(a, 0)$ und $F_2(-a, 0)$ der Ellipse, des gegebenen Punktepaares (P_1, Q_1) und des konjugierten Punktepaares (P_2, Q_2). Die Punkte P_1, P_2, F_1 liegen auf einer, Q_1, Q_2, F_2 auf einer zweiten, O, M, M' auf einer dritten Geraden. Die Punkte P_2, Q_2 und M' teilen die Strecken $\overline{F_1 P_1}$, $\overline{F_2 Q_1}$ und $\overline{OM}$ im gleichen Verhältnis.

g) Der Komplexbüschel.

Der Komplexbüschel, der uns zur Bestimmung der konjugierten Geraden diente, soll noch näher untersucht werden. Die Gleichung seiner Bildkegelschnittschar lautet

$$\begin{vmatrix} u & v & w & 0 \\ H_{03} + H_{31} + 2a\lambda & H_{12} - H_{02} & 2(H_{23} - \lambda) & w \\ 0 & -(H_{01} - 2\lambda) & H_{03} - H_{31} & v \\ -(H_{01} - 2\lambda) & 0 & H_{02} + H_{12} - 2a\lambda & u \end{vmatrix} = 0. \tag{18}$$

Sie ist quadratisch in λ. Somit entspricht dem räumlichen Linienkomplexbüschel in der Ebene eine quadratische Schar von Kegelschnitten. In

dieser Schar befinden sich zwei zerfallende Kegelschnitte, entsprechend den zwei Spezialkomplexen im Büschel. Alle Brennpunkte liegen auf den zwei Geraden $F_1 P_1$ und $F_2 Q_1$ und alle Mittelpunkte auf der Geraden OM. Um die Schar näher beschreiben zu können, bestimmen wir

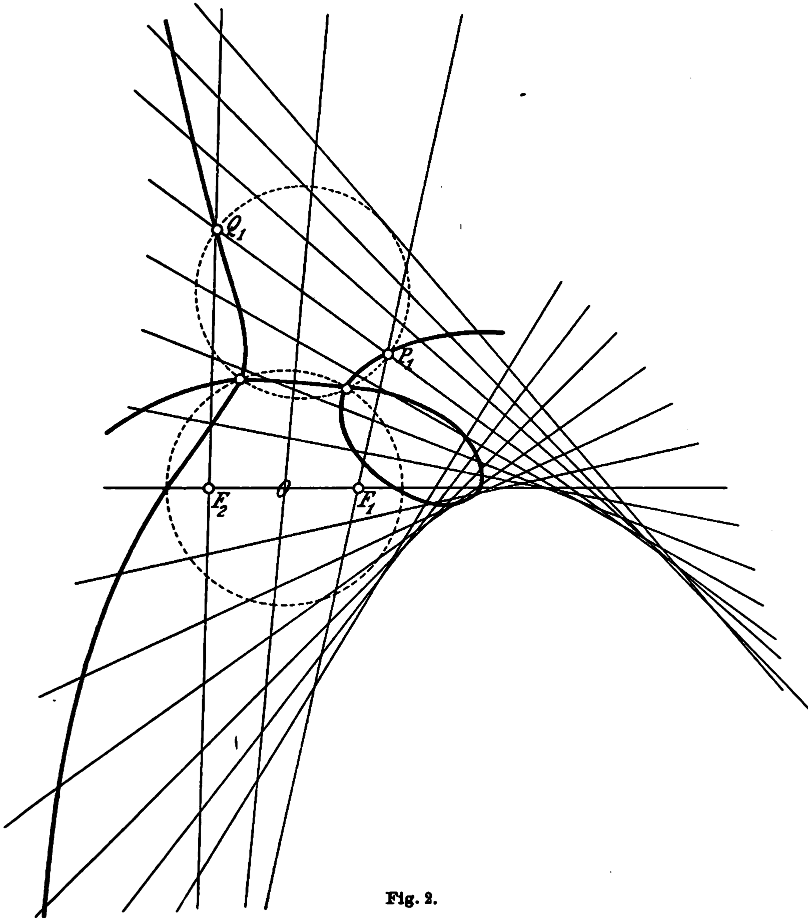


Fig. 2.

noch die Einhüllende der großen Achsen und die Verbindungskurve der Scheitel. Die Geraden, auf denen die großen Achsen liegen, sind durch die Brennpunkte gegeben. Die Enveloppe ist eine Parabel:

$$\begin{aligned}(19)\qquad & x^2(y_1-\eta_1)^2+y^2[4a^2+(x_1-\xi_1)^2-4a(x_1-\xi_1)]\\ & -2xy(y_1-\eta_1)(x_1-\xi_1-2a)+2ax(y_1^2-\eta_1^2)\\ & +2ay[4(x_1\eta_1-y_1\xi_1)-(y_1+\eta_1)(2a+x_1-\xi_1)]\\ & +a^2(y_1+\eta_1)^2=0.\end{aligned}$$

Die X-Achse, die Geraden $P_1 Q_1$, $P_1 F_1$ und $Q_1 F_2$ sind Tangenten

an diese Parabel. Folglich ist sie durch die Bildellipse des Komplexes und das Bildpunktepaar des einen Spezialkomplexes vollständig gegeben.

Die Bestimmung der Verbindungskurve der Ellipsenscheitel gestaltet sich konstruktiv viel einfacher als analytisch. Die Kurve ist der vierten Ordnung (Fig. 2). Es ist zu bemerken, daß sich in der Kegelschnittschar neben Ellipsen auch Hyperbeln befinden.

h) Die Achse.

Bei der Betrachtung unserer Schar haben wir gesehen, daß die Achse des Spezialkomplexes auf das Brennpunktepaar der zerfallenden Ellipse abgebildet wird. Wir wollen daher auch bei den nicht zerfallenden Kegelschnitten die beiden Brennpunkte als Achse annehmen. Damit geben wir aber der „Achse" eine Definition, die nicht mit der gewöhnlichen euklidischen zusammenfällt, wo die Achse auf den Nullebenen ihrer Punkte im euklidischen Sinne senkrecht steht. In der ausgearteten Metrik, von der wir unter c) gesprochen haben, und die durch unsere Ebenen α_r und α_e und die Kreispunkte auf ihrer Schnittgeraden ω bestimmt ist, führt eine analoge Definition der Achse einfach auf diejenige Gerade, welche in bezug auf den Linienkomplex der unendlich fernen Geraden ω konjugiert ist. Diese Gerade entspricht in der Tat dem Paare der Brennpunkte.

i) Komplexe mit gleicher Achse.

Es sollen noch die Komplexe untersucht werden, welche die gleiche Achse haben. Da die Achse auf das Brennpunktepaar abgebildet wird, sind diesen Komplexen in der Ebene konfokale Kegelschnitte zugeordnet.

Als ersten Spezialkomplex nehmen wir die Achse P, d. h. das Brennpunktepaar unserer Ellipse Φ, als zweiten die zu P konjugierte unendlich ferne Gerade H. Dem Büschel

$$P + \lambda H$$

entspricht die Kegelschnittschar

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{\lambda} - 1 = 0. \tag{20}$$

Der Parameter λ ist also in der konfokalen Kegelschnittschar einfach gleich dem Quadrat der kleinen Achse.

j) Das Moment.

Um das Moment zweier Komplexe zu berechnen, bilden wir mit einer andern Achse P' einen zweiten Komplexbüschel

$$P' + \mu H = 0.$$

Die Invariante der zwei Büschel ist

$$[P + \lambda H \cdot P' + \mu H]$$

oder mit unseren Koordinaten (3)

$$(21) \quad -(x\xi + y\eta) - (x'\xi' + y'\eta') + x\xi' + x'\xi + y\eta' + y'\eta + \lambda + \mu.$$

λ und μ sind hier nach früherem die Quadrate der kleinen Achsen der entsprechenden Ellipsen. Sind $P(x, y)$, $Q(\xi, \eta)$ und $P'(x', y')$, $Q'(\xi', \eta')$ die Bildpunktepaare der Achsen der Komplexe, so ist der erste Teil der Formel nichts anderes als das innere Produkt der Vektoren $\overrightarrow{PP'} = f$ und $\overrightarrow{QQ'} = f'$. Für zwei beliebige Kegelschnitte bekommen wir als „Moment" den Ausdruck

$$(22) \qquad J = (ff') + b^2 + b'^2.$$

J bedeutet eine Invariante für alle Punkttransformationen, welche der Gruppe der projektiven Transformationen des Raumes entsprechen würden, bei denen das Grundgebilde, mit dem wir das Moment und das Brennpunktepaar gedeutet haben, invariant bleibt. $J = 0$ ist eine metrische Eigenschaft zweier Kegelschnitte, die einigermaßen an die projektive Eigenschaft „Apolarität" erinnert. Für zwei Geraden, für die λ und μ gleich Null sind, bedeutet das Verschwinden der Invariante die Inzidenz.

k) Konstruktion der konjugierten Geraden.

Mit Hilfe des Momentes wollen wir nochmals auf die konjugierten Geraden zurückkommen. Es sei eine Gerade G gegeben mit den Bildpunkten $P_1(x_1, y_1)$, $Q_1(\xi_1, \eta_1)$. Wir haben gesehen, daß die konjugierte Gerade $P_2(x_2, y_2)$, $Q_2(\xi_2, \eta_2)$ dadurch gefunden wird, daß man die Strecke $\overline{P_1F_1}$ und $\overline{Q_1F_2}$ im Verhältnis $1 : 1 - \lambda$ teilt. Nach Formel (15) ist

$$(23) \qquad \frac{1}{1-\lambda} = \frac{K^2}{x_1\xi_1 + y_1\eta_1 + a(x_1 - \xi_1) - a^2}.$$

Der Nenner ist das Moment vom Brennpunktepaar (F_1, F_2) und von (P_1, Q_1), der Zähler ist das Quadrat der kleinen Achse der Ellipse Φ. Aus dieser Tatsache ergibt sich eine einfache Konstruktion des konjugierten Punktepaares.

Die Art und Weise, wie wir früher die Bilinearinvariante zweier Komplexe berechnet und gedeutet haben, enthält eine gewisse Normierung der Gleichung eines solchen Linienkomplexes. Für diese Invariante sei deshalb die Bezeichnung „Moment" eingeführt. Zum Schluß mögen nun die Resultate nochmals kurz zusammengefaßt werden, indem der Begriff des Momentes zugrunde gelegt wird.

1. Das Moment zweier Komplexe ist

$$[SS'] = (ff') + b^2 + b'^2,$$

wo f und f' die Vektoren zwischen den entsprechenden Brennpunkten, b und b' die kleinen Achsen der Bildkegelschnitte bedeuten.

2. Das Moment zweier spezieller Linienkomplexe wird zum Moment zweier Punktepaare

$$[PP'] = -(x\xi + y\eta) - (x'\xi' + y'\eta') + x\xi' + x'\xi + y'\eta + y\eta' = (ff'),$$

$[PP'] = 0$ bedeutet die Inzidenz der beiden Geraden.

3. Das Moment einer Geraden und eines Linienkomplexes wird zum Moment eines Punktepaares in bezug auf einen Kegelschnitt

$$[SP] = (ff') + b^2.$$

4. Für die Nullgeraden ist $[SP] = 0.$

(Eingegangen am 1. 4. 26.)

Geschichtliche Entwicklung der Topologie.[1]

Von Georg Feigl in Berlin.

„Von der Geometria situs, die Leibniz ahnte und in die nur einem Paar Geometern, Euler und Vandermonde, einen schwachen Blick zu tun vergönnt war, wissen und haben wir nach anderthalb hundert Jahren noch nicht viel mehr wie nichts.“ Dieser dem Nachlaß von Gauß entstammende, vom 22. Januar 1833 datierte Ausspruch kennzeichnet den Stand des Wissens, das die damalige Mathematik von der als *Geometria* oder *Analysis situs* bezeichneten geometrischen Disziplin hatte; er zeigt aber auch, welche Bedeutung Gauß dieser Disziplin beilegte, die er in einer durch den obigen Satz eingeleiteten Notiz selbst um ein Resultat, den Satz von dem Verschlingungsintegral zweier Kurven, bereicherte und die er, wie aus jener Notiz weiter hervorgeht, von der *Geometria magnitudinis* sehr wohl unterschied.

Die Untersuchungen Eulers, auf die Gauß hinweist, hatten sich einerseits mit dem *Königsberger Brückenproblem*, d. h. mit einer Frage aus der Theorie der Streckenkomplexe, andererseits mit der Aufstellung einer Beziehung zwischen den Anzahlen der Begrenzungsgebilde eines Polyeders beschäftigt: Sind α_0, α_1, α_2 die Anzahlen der Ecken, Kanten und Flächen eines Polyeders, so hat unter gewissen Bedingungen die als *Eulersche Charakteristik* des Polyeders bezeichnete Anzahl $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$ den Wert Zwei.

Diese Relation gilt, wie schon die Anschauung unmittelbar lehrt, unabhängig davon, ob man die Kanten und Flächen des Polyeders geradlinig und eben oder gekrümmt annimmt, und sie bleibt auch bei einer hinreichend kleinen stetigen Verbiegung des Polyeders erhalten. Die Analysis situs erscheint demgemäß als derjenige Zweig der Geometrie, der ohne Rücksicht auf Maß- und Größenverhältnisse die Zusammenhang und gegenseitige Lage betreffenden Eigenschaften der geometrischen Gebilde untersucht.

Die erste ausschließlich der Analysis situs gewidmete Darstellung hat Listing in den „Vorstudien zur Topologie“ (1847/48) gegeben. Auch der für die Analysis situs heute in erster Linie gebräuchliche

1) Antrittsvorlesung anläßlich der Habilitation als Privatdozent an der Universität Berlin, 11. Februar 1927.

Name *Topologie* geht auf ihn zurück. Vielleicht hat Listing deshalb einen neuen Namen gewählt, weil er bei der alten Bezeichnung Geometria oder Analysis situs eine Verwechselung mit der synthetisch und unter möglichst weitgehender Vermeidung von Maßbeziehungen betriebenen projektiven Geometrie befürchtete, für die gerade damals v. Staudt den Namen Geometrie der Lage in Aufnahme gebracht hatte. Übrigens ist v. Staudt auch für die Topologie nicht ohne Bedeutung; in seiner „Geometrie der Lage" gibt er einen Beweis der Eulerschen Polyederformel $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2$, und bei diesem Beweis wird die für das Bestehen der Formel notwendige Voraussetzung, nach welcher das Polyeder in der heutigen Ausdrucksweise eine geschlossene orientierbare Fläche vom Geschlecht Null bildet, klar formuliert und verwendet.

Listing hat sich in den „Vorstudien" vor allem mit der von Euler inaugurierten Theorie der Streckenkomplexe beschäftigt; etwa gleichzeitig (1847) wurde der Physiker Kirchhoff durch seine Untersuchungen über die Verzweigungen des elektrischen Stromes ebenfalls zu einigen wichtigen Resultaten auf diesem Gebiet geführt. Wechselwirkungen zwischen Topologie und Physik, für die man hier das erste Beispiel antrifft, ergeben sich auch in der weiteren Entwicklung der Topologie: Es sei in der Mechanik auf die Untersuchungen von Bohl und auf die an das „letzte geometrische Theorem" Poincarés anknüpfenden Untersuchungen von Birkhoff hingewiesen.

Schon die nächsten zwei Jahrzehnte bringen der Topologie große Fortschritte: Listings Untersuchungen über die Streckenkomplexe werden von Jordan weitergeführt, der sich auch mit dem Problem der Homotopie von Kurven auf Flächen beschäftigt. Moebius gibt das erste Beispiel einer nicht orientierbaren Fläche. Einen besonderen Einfluß üben die Arbeiten von Riemann aus, in denen er die Bedeutung gewisser von ihm aufgefundener topologischer Eigenschaften der Flächen für die Funktionentheorie aufdeckt, so daß die Aufmerksamkeit und das Interesse der Mathematiker sich mehr und mehr der Topologie zuwenden. Riemann und Betti öffnen den Zugang zu den Gebilden höherer Dimension, deren überraschende und eigenartige Eigenschaften in der Folgezeit das hauptsächlichste und reizvollste Arbeitsgebiet der Topologie bilden, und versuchen, die von Riemann für Flächen angegebene Zusammenhangszahl auf n-dimensionale Gebilde zu erweitern. Kronecker gibt in seiner Charakteristikentheorie ein neues Beispiel für die Anwendung der Integralrechnung in der Topologie; das bereits erwähnte Gaußsche Verschlingungsintegral bildet dafür das erste Beispiel. Übrigens erweisen sich später beide Integrale, das Gaußsche und das Kroneckersche, als Spezialfälle des Brouwerschen Abbildungsgrades.

Trotz dieser großen Fortschritte befand sich die Topologie um diese Zeit, also etwa ein Vierteljahrhundert nach dem Erscheinen der „Vorstudien“, prinzipiell noch in einem durchaus unfertigen Zustand; die Formulierung, die Listing und Riemann für den Problemkreis der Topologie und für die Abgrenzung gegen die anderen Zweige der Geometrie gegeben hatten, war zu vage und unbestimmt. Diese Unsicherheit wurde beseitigt, als Felix Klein im Jahre 1872 in seinem *Erlanger Programm* den Gruppenbegriff als ordnendes Prinzip in die Geometrie einführte. Jede Klasse geometrischer Untersuchungen wird durch eine Gruppe von Transformationen charakterisiert und ist demgemäß als Invariantentheorie dieser Gruppe aufzufassen. Neben die Bewegungs- und Ähnlichkeitsgeometrie, die affine und projektive Geometrie tritt als allgemeinste geometrische Disziplin die Topologie; sie beschäftigt sich mit der Gruppe der eineindeutigen und umkehrbar stetigen Transformationen, die jetzt nach dem Vorgang Brouwers als *topologische* bezeichnet werden. Nennt man nach Poincaré zwei Punktmengen, die durch topologische Abbildung ineinander übergeführt werden können, zueinander *homöomorph*, so ist also das Homöomorphieproblem, d. h. die Frage nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen für den Homöomorphismus zweier Punktmengen, das zentrale Problem der Topologie. Die Aufsuchung topologisch invarianter Eigenschaften und die Charakterisierung einer Punktmenge durch derartige Eigenschaften sind speziellere Fassungen des Grundproblems. Mit diesem nahe verwandt sind die Probleme der *Homotopie* und der *Isotopie:* Von zwei eindeutigen und stetigen, aber nicht notwendig umkehrbar eindeutigen Abbildungen f_0, f_1 einer Menge $\mathfrak{M}$ auf eine Menge $\mathfrak{N}$ wird nach L. E. J. Brouwer gesagt, sie gehören zur selben Klasse, wenn sie sich durch stetige Deformation ineinander überführen lassen, d. h. wenn sich für jedes t aus dem Intervall $< 0, 1 >$ eine von t stetig abhängende, eindeutige stetige Abbildung $\varphi(t)$ von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{N}$ so angeben läßt, daß $\varphi(0) = f_0$, $\varphi(1) = f_1$ ist. Zwei echte Teile $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ einer Punktmenge $\mathfrak{M}$ heißen homotop in bezug auf $\mathfrak{M}$, wenn sie sich in $\mathfrak{M}$ durch eine stetige Deformation ineinander überführen lassen. Diesen für beliebige eindeutige stetige Abbildungen formulierten Begriffen stetige Deformation, Abbildungsklasse, Homotopie entsprechen bei topologischen Abbildungen die Begriffe topologische Deformation, Abbildungstypus, Isotopie.

Etwa um dieselbe Zeit, als Kleins Erlanger Programm eine genaue Einordnung der Topologie in die Geometrie ermöglichte — die obige prägnante, jetzt natürlich längst Allgemeingut der Mathematiker gewordene Formulierung für diese Einordnung ist aber wohl zuerst von Hurwitz im Züricher Kongreßbericht ausgesprochen worden —, lieferte

die Entdeckung der Mengenlehre durch Georg Cantor das Rüstzeug für einen exakten Aufbau der Topologie. Zwar wurde die Theorie der Punktmengen zunächst lange Zeit hindurch nicht unter topologischen Gesichtspunkten, sondern einerseits als Anwendungsgebiet für die abstrakte Mengenlehre, andererseits als Hilfswissenschaft für die Theorie der Funktionen betrieben. Aber schon in einer der ersten Cantorschen Arbeiten finden sich die Begriffe des Häufungspunktes und der Ableitung einer Punktmenge; die daraus hervorgehenden Begriffe abgeschlossene, perfekte, zusammenhängende Punktmenge, Kontinuum, Gebiet usw. sind für die Analysis situs schlechthin grundlegend geworden, vor allem für denjenigen bedeutungsvollen Zweig, der mengentheoretisch fundiert ist und als *mengentheoretische Topologie* bezeichnet wird.

Bemerken möchte ich schon hier, daß die Struktur der abgeschlossenen Punktmengen, über die der Cantor-Bendixsonsche Satz eine erste Aussage macht, zum Gegenstand ausgedehnter Untersuchungen gemacht worden ist. Besonders zu nennen sind drei Arbeiten von L. E. J. Brouwer aus den Jahren 1910/11, die sich mit der feineren Struktur der perfekten Punktmengen beschäftigen und die in einem Spezialfall das Homöomorphieproblem lösen. Den Geist dieser Arbeiten von Brouwer verspürt man auch in den neuesten Arbeiten von Hurewicz, Menger und Tumarkin, in denen das Problem von der Struktur abgeschlossener Mengen in einem gewissen Sinne erledigt wird. Natürlich sind längst nicht alle Untersuchungen aus der Theorie der Punktmengen für die Topologie von Bedeutung. So ist z. B. das Lebesguesche Maß keine topologische Invariante, wie zuerst Schoenflies gezeigt hat; eine besonders prägnante Aussage darüber verdankt man Brouwer.

Die Entdeckung der Mengenlehre hat die Entwicklung der Topologie noch in anderer Beziehung stark beeinflußt. Durch die die Mächtigkeitsfragen betreffenden Arbeiten Cantors, also vor allem durch die Herstellung einer eineindeutigen Abbildung der Strecke auf das Quadrat oder sogar auf den ganzen Raum mit abzählbar vielen Dimensionen, wurde das naive Vertrauen auf die Anschauung auf das schwerste erschüttert. Auch von der Analysis her, für die um dieselbe Zeit Weierstraß zuerst einen strengen Aufbau gegeben hatte, ertönte die Warnung vor dem Glauben an die Anschauung. Die so gewonnene vorsichtige, kritische Einstellung sollte für die Topologie außerordentlich fruchtbar werden. Das erste Resultat, das sie zeitigte, ist der *Jordansche Kurvensatz;* dieser besagt, daß die geschlossene einfache Kurve, d. h. das ebene topologische Bild einer Kreisperipherie, die Ebene in genau zwei Teile zerlegt und mit dem Rand jedes dieser Gebiete identisch ist. Die Notwendigkeit, diese bis dahin für anschaulich richtig gehaltene

Tatsache wirklich in strenger Form zu beweisen, hat zuerst 1887 Jordan erkannt; er selbst hat auch für diesen Satz den ersten Beweis gegeben. Dem Jordanschen Beweis ist eine große Reihe weiterer gefolgt. Die meisten Beweisführungen, auch die Jordansche, setzen den Satz für Polygone voraus. Das Beweisverfahren ist vielfach das der Polygonapproximationen; in dem aus dem Jahr 1910 datierten Beweis von Brouwer sowie in einigen später veröffentlichten werden die Polygone nicht approximativ, sondern mehr topologisch verwendet. Ohne Benutzung von Polygonen operieren nur die Beweise von Veblen und Erhard Schmidt.

Der Beweis des Jordanschen Kurvensatzes regte im nächsten Vierteljahrhundert eine Fülle von Untersuchungen aus der zweidimensionalen mengentheoretischen Topologie an, von denen hier nur die wichtigsten genannt seien: Schoenflies zeigte, daß die geschlossene einfache Kurve die Eigenschaften der Erreichbarkeit und Unbewalltheit besitzt; er bewies ferner den sogenannten ebenen Erweiterungssatz sowie die Umkehrung des Jordanschen Kurvensatzes, nach welchem eine geschlossene Kurve dann und nur dann eine geschlossene einfache Kurve ist, wenn jeder ihrer Punkte für die beiden Gebiete, in welche die Kurve die Ebene zerlegt, erreichbar ist. Unter einer geschlossenen Kurve ist dabei jede ebene beschränkte Punktmenge zu verstehen, welche die Ebene in genau zwei Gebiete zerlegt und mit dem Rand jedes dieser Gebiete identisch ist. Man verdankt Schoenflies auch eine erste zusammenfassende Darstellung der mengentheoretischen Topologie, die von Brouwer aber in einigen Punkten richtiggestellt wurde. In dieser aus dem Jahre 1909 stammenden Brouwerschen Arbeit werden einige der Anschauung sehr schwer zugängliche, merkwürdige Möglichkeiten aufgedeckt, zu denen die geschlossene Kurve und der Rand eines einfach zusammenhängenden Gebiets Veranlassung geben. Durch den von Brouwer 1912 veröffentlichten Beweis für die topologische Invarianz der geschlossenen Kurve, durch die Untersuchungen von Carathéodory über den Rand eines einfach zusammenhängenden Gebiets (1913) und durch die Arbeiten von Hahn und Mazurkiewicz über die mengentheoretische Charakterisierung der stetigen Kurve (1913/14) wird die Entwicklung der zweidimensionalen mengentheoretischen Topologie zu einem gewissen Abschluß gebracht.

Ein Überblick zeigt, daß diese zweidimensionale Topologie, bei der die Punktmengen stets in der Euklidischen Ebene liegend vorausgesetzt werden, zwar eine Reihe von topologisch invarianten Eigenschaften, aber keinen wesentlichen Beitrag zur Lösung des Homöomorphieproblems liefert, daß es ihr an einem einheitlichen Beweisschema

fehlt, daß die Beweise sich zum großen Teil nicht auf höhere Dimensionen übertragen lassen und daß auch einige der Hauptsätze, z. B. die Umkehrung des Jordanschen Kurvensatzes und der Erweiterungssatz, schon in drei Dimensionen nicht mehr richtig sind.

Der Gedanke, daß man der Behandlung des Homöomorphieproblems einen besonders präparierten Begriff der Punktmenge, den der *n-dimensionalen Mannigfaltigkeit*, zugrunde legen müsse, um zur Bildung einer einheitlichen Methode zu gelangen und damit der Lösung näher zu kommen, ist aber schon wesentlich früher gefaßt worden. Die Mannigfaltigkeit muß einerseits so eng definiert werden, daß sich mit dem Begriff möglichst einfach operieren läßt; andererseits muß die Definition so weit sein, daß sie diejenigen Gebilde, über die man in erster Linie Aussagen machen möchte, umfaßt. Mit dem Begriff der Mannigfaltigkeit sind die drei für die Entwicklung der modernen Topologie wichtigsten Daten verknüpft: Die Begründung der *kombinatorischen Topologie* durch Henri Poincaré (1895), die Begründung der *abstrakten Topologie* durch Fréchet (1906) und die Entdeckung des *Abbildungsgrades* durch L. E. J. Brouwer (1910). Sowohl die kombinatorische als auch die abstrakte Topologie gewähren einen Zugang zum Begriff der Mannigfaltigkeit; die Theorie des Abbildungsgrades schafft das auf viele Probleme anwendbare einheitliche Beweisverfahren und liefert eine Reihe fundamentaler geometrischer Sätze.

Poincaré denkt die *n-dimensionale Mannigfaltigkeit* aus einem System von endlich vielen n-dimensionalen Polyedern oder *Zellen* des n-dimensionalen Zahlenraumes aufgebaut. Die Berandung der n-dimensionalen Zelle wird der Reihe nach von endlich vielen $n-1$-dimensionalen, $n-2$-dimensionalen Zellen usw. gebildet; die eindimensionalen Zellen sind die Kanten, die nulldimensionalen die Ecken des Polyeders. Zwischen Paaren $n-1$-dimensionaler Randzellen derselben n-dimensionalen Zelle oder verschiedener n-dimensionaler Zellen sind gewisse Zuordnungen vorgeschrieben, durch die die Punkte dieser beiden $n-1$-dimensionalen Zellen paarweise und alle sie berandenden Zellen niedrigerer Dimension identifiziert werden. Ein solches System von n-dimensionalen Zellen heißt nach Ausführung der Identifizierungsvorschriften das Schema einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit. Das Schema wird durch *das Poincarésche Relationensystem* vollständig beschrieben: Man lege auf allen q-dimensionalen Zellen des Schemas für $q = 1, 2, \ldots, n$ eine positive Orientierung fest und stelle die vollständige Berandung einer q-dimensionalen Zelle a_i^q auf. Diese Berandung wird von den $q-1$-dimensionalen Zellen a_i^{q-1} des Schemas gebildet, die dabei entweder gar nicht oder in positiver oder negativer Orientierung und auch mehrfach vorkommen

können. Das System der Berandungsrelationen hat demnach, wenn α_q die Anzahl der q-dimensionalen Zellen bedeutet, die Gestalt

$$a_i^q \Longrightarrow \sum_{j=1}^{\alpha_q - 1} \varepsilon_{ij}^q a_j^{q-1}; \qquad (i = 1, 2, \ldots, \alpha_q;\ q = 1, 2, \ldots, n).$$

Das Schema wird also durch die ganzzahligen Matrizen

$$T_q = \left(\varepsilon_{ij}^q\right) \qquad (q = 1, 2, \ldots, n)$$

vollständig charakterisiert.

Ändert man das Schema durch eine sogenannte *Elementartransformation* ab, indem man zwei n-dimensionale Zellen zu einer einzigen verschmilzt oder eine Zelle in zwei solche zerlegt, so bedeutet das für die zugehörige Mannigfaltigkeit jedenfalls nur eine topologische Abänderung. Die in der topologischen Betrachtungsweise liegende Vereinfachung besteht nun darin, daß sie nur solche topologische Abbildungen zuläßt, die sich durch endlich viele Elementartransformationen ausführen lassen. Ungelöst ist, abgesehen von den Fällen $n = 2$ und $n = 3$, allerdings noch die Frage, ob umgekehrt jede topologische Abbildung der Mannigfaltigkeit durch endlich viele Elementartransformationen des Schemas realisiert werden kann. Solange diese Frage ungelöst ist, bleiben manche Resultate der kombinatorischen Topologie für wirkliche geometrische Probleme nur von beschränktem Wert.

Was diese Resultate betrifft, so gelang Poincaré die Aufstellung einer Reihe numerischer Invarianten, der *Eulerschen Charakteristik*

$$C = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q \alpha_q,$$

der *Bettischen Zahlen* und der *Torsionskoeffizienten*. Bei den Bettischen Zahlen handelt es sich um eine strenge Definition für die Zahlen, mit denen Betti das Geschlecht einer geschlossenen Fläche auf höhere Dimensionen zu verallgemeinern versucht hatte. Bedeutet γ_q den Rang der Matrix T_q, so werden die Bettischen Zahlen durch folgende Formeln definiert:

$$P_q = \alpha_q - \gamma_q - \gamma_{q+1} + 1 \quad \text{für} \quad q = 1, 2, \ldots, n-1;$$
$$P_0 = \alpha_0 - \gamma_1, \quad P_n = \alpha_n - \gamma_n.$$

Unter den Torsionskoeffizienten $\tau_1^q, \tau_2^q, \ldots$ der Dimension q sind diejenigen Elementarteiler der Matrix T_{q+1} zu verstehen, die größer als Eins sind. Der Beweis für die Invarianz der Zahlen C, P_q, τ^q wird unter Benutzung der Theorie der ganzzahligen Matrizen am Poincaréschen Relationensystem geführt.

Den numerischen Invarianten stellt Poincaré eine weitere Invariante an die Seite, die von ihm entdeckte *Fundamentalgruppe* der Mannigfaltigkeit. Diese wird als die Gruppe der Decktransformationen des universellen Überlagerungsraumes der Mannigfaltigkeit definiert und erscheint im allgemeinen als unendliche diskontinuierliche Gruppe mit endlicher Basis. Auch die Betrachtung der Homotopie der auf der Mannigfaltigkeit gelegenen stetigen Kurven führt auf die Fundamentalgruppe.

Die vollständige Lösung des Homöomorphieproblems gelingt der kombinatorischen Topologie nur im Fall der zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten. Daß die Übereinstimmung der genannten numerischen Invarianten zweier Mannigfaltigkeiten für den Homöomorphismus nicht hinreicht, hat Poincaré selbst bewiesen: Er konstruierte eine Mannigfaltigkeit, deren Bettische Zahlen sämtlich Eins sind und die keinen Torsionskoeffizienten besitzt — Eigenschaften, die alle auch der n-dimensionalen Sphäre zukommen —, deren Fundamentalgruppe aber nicht, wie bei der Sphäre, die Identität ist. Ob übrigens die dreidimensionale Sphäre die einzige dreidimensionale Mannigfaltigkeit ist, deren Fundamentalgruppe die Identität ist, ist bisher noch unbekannt. Auch die Übereinstimmung der genannten numerischen Invarianten und einstufiger Isomorphismus der Fundamentalgruppen zusammen reichen für den Homöomorphismus noch nicht aus, wie J. W. Alexander am Beispiel zweier dreidimensionaler geschlossener orientierbarer Mannigfaltigkeiten gezeigt hat.

Die Behandlung der kombinatorischen Topologie ist zunächst besonders von Heegard, Steinitz, Dehn und Tietze fortgesetzt worden. Dem letzteren verdankt man die Aufstellung einer weiteren, die Bettische Zahl in gewisser Weise verallgemeinernden numerischen Invariante. Dehn beschäftigte sich mit dem Studium der Fundamentalgruppe und mit dem *Knotenproblem*; einer seiner Sätze besagt, daß eine im Raum gelegene geschlossene einfache Kurve dann und nur dann *unverknotet* ist, d. h. ein singularitätenfreies Elementarflächenstück berandet, wenn ihre Fundamentalgruppe eine Abelsche ist. Weiterhin wurde die kombinatorische Topologie intensiv in Amerika, in erster Linie von Veblen, J. W. Alexander und Lefschetz, betrieben. Alexander und Veblen — dem letzteren verdankt man auch eine zusammenhängende Darstellung der kombinatorischen Topologie — gaben eine Verallgemeinerung der Bettischen Zahlen durch Einführung der „Bettischen Zahlen mod 2“; eine weitere Verallgemeinerung bilden die kürzlich von Alexander eingeführten „Bettischen Zahlen mod π“ (π = natürliche Zahl $\geqq 2$), die die Betrachtung der Torsionskoeffizienten überflüssig machen. Ferner stellte Alexander die sogenannten „Schnittinvarianten“ auf; in dem oben erwähnten Alexanderschen Beispiel reicht deren Untersuchung allein aus,

um die Nichthomöomorphie der beiden Mannigfaltigkeiten zu beweisen. Von besonderer Bedeutung ist die von Alexander bewiesene Invarianz der Bettischen Zahlen gegenüber beliebigen topologischen Abbildungen. Bemerkenswert ist auch der Alexandersche Dualitätssatz; dieser mit kombinatorischen Methoden bewiesene Satz enthält den zuerst von Brouwer formulierten und bewiesenen Jordanschen Satz für den n-dimensionalen Raum. Lefschetz hat als erster die Methoden der kombinatorischen Topologie auf die Untersuchung der stetigen Abbildung von Mannigfaltigkeiten angewendet und auf diesem Wege neuerdings das Fixpunktproblem in gewissem Sinne vollständig erledigt.

Auf eine Schwäche in der kombinatorischen Definition der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit sei noch hingewiesen: Es wird, sofern die Mannigfaltigkeit unberandet ist, gefordert, daß jeder Punkt eine n-dimensionale euklidische, d. h. dem Innern des n-dimensionalen euklidischen Elements homöomorphe, Umgebung besitzt. Diese Forderung, die zuerst bei $n = 3$ explizite gestellt werden muß, kann rein kombinatorisch nur für $n = 3$, dagegen nicht mehr für $n \geqq 4$ formuliert werden. Eine rein kombinatorische Charakterisierung ist bisher nämlich nur für die zweidimensionale Sphäre, und zwar auf Grund der Eulerschen Polyederformel, dagegen noch nicht für die Sphären höherer Dimension bekannt.

Nunmehr soll das Wesen der von Fréchet begründeten *abstrakten Topologie* erörtert werden. Durch die Verallgemeinerungen angeregt, die der Raumbegriff im Lauf des 19. Jahrhundert erfahren hatte, stellte Fréchet eine abstrakte Definition des Raumes auf, in der über die Natur der Elemente gar keine Voraussetzung gemacht wird. Nach Fréchet entsteht ein *abstrakter Raum*, wenn eine aus irgendwelchen (aber mindestens zwei) Elementen bestehende Menge $\mathfrak{R}$ und ein Gesetz vorliegt, nach welchem jeder Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{R}$ die *abgeschlossene Hülle* $\overline{\mathfrak{M}}$ eindeutig zugeordnet wird, die selbst Teil von $\mathfrak{R}$ ist. Diese Zuordnung muß folgenden drei Axiomen genügen:

1. Jedes Element x von $\mathfrak{R}$ ist mit seiner abgeschlossenen Hülle identisch: $\bar{x} = x$.

2. $$\overline{\overline{\mathfrak{M}}} = \overline{\mathfrak{M}}.$$

3. Die abgeschlossene Hülle der Vereinigungsmenge ist mit der Vereinigungsmenge der abgeschlossenen Hüllen identisch:

$$\overline{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2} = \overline{\mathfrak{M}}_1 + \overline{\mathfrak{M}}_2.$$

Durch diese Axiome werden die Elemente der gegebenen Menge $\mathfrak{R}$ zu Punkten eines abstrakten Raumes, und es lassen sich für diesen Raum die fundamentalen Begriffe abgeschlossene und offene Menge, Umgebung,

Häufungspunkt und Stetigkeit definieren: Eine Teilmenge $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{R}$ heißt *abgeschlossen*, wenn sie mit ihrer abgeschlossenen Hülle $\overline{\mathfrak{A}}$ identisch ist; abgeschlossen sind z. B. jedes Element (nach 1), jede abgeschlossene Hülle (nach 2), außerdem $\mathfrak{R}$ selbst und die Nullmenge. Die Komplementärmenge $\mathfrak{R} - \mathfrak{A}$ einer abgeschlossenen Menge heißt *offen*; jede das Element x enthaltende offene Menge heißt eine *Umgebung* $\mathfrak{U}_x$ von x.

Auch der Umgebungsbegriff bietet einen Zugang zum abstrakten Raum. Diesen Weg ist Hausdorff gegangen: Er ordnet jedem Element x einer beliebigen Menge $\mathfrak{R}$ eine Teilmenge $\mathfrak{U}_x$ von $\mathfrak{R}$ so zu, daß folgende vier, mit den drei Fréchetschen Axiomen äquivalente Axiome erfüllt sind:

1. Zu jedem Element x von $\mathfrak{R}$ existiert mindestens eine Umgebung $\mathfrak{U}_x$; x ist in jeder Umgebung $\mathfrak{U}_x$ enthalten.

2. Zu zwei Umgebungen von x gibt es eine in beiden enthaltene Umgebung von x.

3. Zu jedem in $\mathfrak{U}_x$ enthaltenen Element y gibt es eine ganz in $\mathfrak{U}_x$ enthaltene Umgebung $\mathfrak{U}_y$.

4. Zu je zwei verschiedenen Elementen x und y von $\mathfrak{R}$ gibt es eine zu y fremde Umgebung $\mathfrak{U}_x$ und eine zu x fremde Umgebung $\mathfrak{U}_y$.

Das hier genannte vierte Axiom ist nicht das von Hausdorff formulierte. Aber nur bei dieser schwächeren Fassung besteht die Äquivalenz der vier Umgebungsaxiome mit den drei Fréchetschen Axiomen.

Zu diesen Axiomen wird Schritt für Schritt ein neues Axiom hinzugefügt, oder es wird ein bereits vorhandenes verschärft; auf jeder Stufe wird untersucht, welche Sätze aus der Theorie der Punktmengen Gültigkeit haben, so daß man zu einer sehr feinen Analyse der topologischen Eigenschaften des Raumes gelangt. Auf Grund des Umgebungsbegriffes kann man im abstrakten Raum wie üblich den Häufungspunkt, die abgeschlossene, offene, kompakte, zusammenhängende Menge definieren; dagegen versagt die Definition des Limes, da eine Punktfolge gegen zwei verschiedene Punkte konvergieren kann. Man muß daher durch eine verschärfte Fassung des Axioms 4 den Raumbegriff einengen. Der abstrakte Raum wird zum *topologischen Raum*, wenn man das vierte durch folgendes Axiom, das *Hausdorffsche Trennbarkeitsaxiom*, ersetzt: Zu zwei verschiedenen Punkten x und y gibt es stets zwei gegeneinander punktfremde Umgebungen $\mathfrak{U}_x$, $\mathfrak{U}_y$. Im topologischen Raum gilt zwar der Limesbegriff im gewöhnlichen Sinn, aber noch nicht der wichtige Satz, auf Grund dessen man aus einer Punktmenge mit dem Häufungspunkt x eine gegen x konvergierende Teilfolge auswählen kann. Zu diesem Satz gelangt Hausdorff durch Hinzufügung des *ersten Abzählbarkeitsaxioms*,

welches er schließlich durch eine verschärfte Fassung, das *zweite Abzählbarkeitsaxiom*, ersetzt. Das letztere fordert, daß sich ein zu dem ursprünglichen Umgebungssystem $\mathfrak{U}_x$ des topologischen Raumes gleichwertiges Umgebungssystem $\mathfrak{V}_x$ so angeben läßt, daß die Menge aller verschiedenen $\mathfrak{V}_x$ abzählbar ist. Es zeigt sich, daß der topologische Raum mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom die zum Aufbau der Topologie notwendigen Eigenschaften besitzt; es gilt z. B. das *Heine-Borelsche Theorem*. Aus den Ergebnissen der zahlreichen Untersuchungen über diese Räume sei ein besonders wichtiges herausgegriffen, welches man Urysohn verdankt und welches besagt, daß ein kompakter topologischer Raum dann und nur dann, wenn er dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügt, *metrisiert*, d. h. so mit einem Entfernungsbegriff versehen werden kann, daß das durch die Entfernung definierte Umgebungssystem mit dem ursprünglichen gleichwertig ist.

Der Schritt vom topologischen Raum zur *Mannigfaltigkeit* wird durch die Forderung bedingt, daß man im Kleinen überall ein Euklidisches Koordinatensystem einführen kann: Ein abstrakter Raum heißt eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, wenn er ein zusammenhängender topologischer Raum mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom ist und wenn ein vollständiges Umgebungssystem so angegeben werden kann, daß jede Umgebung dem Innern eines n-dimensionalen Euklidischen Elements homöomorph ist. Unter einem n-dimensionalen Euklidischen Element ist dabei das topologische Bild des n-dimensionalen Simplex des n-dimensionalen Zahlenraumes zu verstehen.

Wie bei der Mannigfaltigkeitsdefinition der kombinatorischen Topologie, so hat es auch hier Schwierigkeit bereitet, die Umgebungseigenschaft so zu formulieren, daß sie sich dem Rahmen der Definition anpaßt. Diese Schwierigkeit ist von P. Alexandroff, dem ebenso wie Urysohn ein großes Verdienst an der neueren Entwicklung der abstrakten Topologie zukommt, durch Angabe einer rein topologisch und abstrakt gefaßten Definition des n-dimensionalen Elements behoben worden.

Die Theorie Brouwers, auf die nun zum Schluß eingegangen werden soll, nimmt zwischen dem kombinatorischen und dem abstrakten Standpunkt eine mittlere Stellung ein und ist wohl gerade deshalb geometrisch so außerordentlich erfolgreich geworden. Brouwer setzt die Mannigfaltigkeit nach den Regeln der kombinatorischen Topologie aus endlich oder abzählbar unendlich vielen n-dimensionalen Elementen zusammen; die im Umgebungsbegriff liegende Schwierigkeit wird durch Zuhilfenahme des *Simplexsterns* umgangen, nämlich dadurch, daß gefordert wird, daß in jedem Eckpunkt eines Elements die dort anstoßen

den Elemente sich in derselben Weise zusammenschließen wie die Simplexe eines Simplexsterns des n-dimensionalen Zahlenraumes. Von dem Mannigfaltigkeitsbegriff der abstrakten Topologie unterscheidet sich der Brouwersche im wesentlichen durch die zusätzliche Forderung der Triangulierbarkeit.

Für diese Mannigfaltigkeit werden die Prädikate geschlossen, offen, orientierbar, nicht orientierbar in der gewöhnlichen Weise definiert, und es lautet der durch Approximation zu beweisende *Hauptsatz der Theorie des Abbildungsgrades*: Jeder eindeutigen stetigen Abbildung f einer geschlossenen orientierbaren n-dimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ auf eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_1$ läßt sich eine ganze Zahl γ zuordnen; diese Zahl gibt an, daß die Bildmenge von $\mathfrak{M}$ jedes Teilgebiet von $\mathfrak{M}_1$ genau γ-mal öfter positiv als negativ überdeckt. γ heißt *der Grad der Abbildung f.*

Der Abbildungsgrad ist eine topologische Invariante. Er hat, sofern die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_1$, auf welche abgebildet wird, offen oder nicht orientierbar ist, den Wert Null, dagegen den Wert $+1$ bzw. -1, wenn $\mathfrak{M}_1$ geschlossen und orientierbar und die Abbildung topologisch und die Indikatrix erhaltend bzw. die Indikatrix umkehrend ist. Für die Anwendung des Abbildungsgrades am wichtigsten sind einerseits der Multiplikationssatz, auf Grund dessen der Grad des Produktes zweier Abbildungen gleich dem Produkt der Grade der beiden Abbildungen ist, andererseits der Satz, welcher besagt, daß je zwei Abbildungen derselben Klasse im Grad übereinstimmen. Der letztere Satz läßt sich, wie für $n = 2$ von Brouwer selbst, für beliebiges n von H. Hopf bewiesen worden ist, unter der Voraussetzung umkehren, daß die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_1$ die n-dimensionale Sphäre ist. In einer noch nicht veröffentlichten Arbeit hat H. Hopf kürzlich gezeigt, daß zu einer den Grad γ bezitzenden Abbildung einer geschlossenen orientierbaren n-dimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ auf eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_1$ stets eine Abbildung derselben Klasse angegeben werden kann, bei welcher die Bildmenge von $\mathfrak{M}$ in einer zu präzisierenden Ausdrucksweise fast alle Punkte von $\mathfrak{M}_1$ im ganzen genau $|\gamma|$-mal überdeckt. Ferner ist es H. Hopf gelungen, die Theorie des Abbildungsgrades ohne die Voraussetzung der Triangulierbarkeit für die abstrakt definierte n-dimensionale Mannigfaltigkeit zu begründen.

Mit Hilfe des Abbildungsgrades beweist Brouwer die Fixpunkt sätze für das n-dimensionale Element und die n-dimensionale Sphäre, die Invarianz des n-dimensionalen Gebiets und den Jordanschen Satz für den n-dimensionalen Raum. Für die Topologie äußerst wichtige Begriffe: die Ordnung eines Punktes in bezug auf das stetige Bild einer

Sphäre oder in bezug auf eine Jordansche Mannigfaltigkeit (eine Verallgemeinerung der Kroneckerschen Charakteristik), die Verschlingungszahl zweier Mannigfaltigkeiten (eine Verallgemeinerung des Gaußschen Verschlingungsintegrals) sowie der Index eines singulären Punktes in bezug auf ein stetiges Vektorfeld werden als spezielle Abbildungsgrade eingeführt.

Die Theorie des Abbildungsgrades, die von Brouwer explizite nur für die Abbildung *unberandeter* Mannigfaltigkeiten aufgestellt worden ist, gilt auch, allerdings mit gewissen Einschränkungen, für *berandete*. Brouwer hat das zwar explizite nirgends ausgesprochen, aber bei seinem Beweis des Satzes von der *Invarianz der Dimensionenzahl*, den er vor der grundlegenden, vom Juli 1910 datierten Arbeit über den Abbildungsgrad veröffentlichte, entwickelt und verwendet er, ohne den Namen zu gebrauchen, sehr weitgehend den Abbildungsgrad für den Fall einer berandeten Mannigfaltigkeit.

Der Satz von der Invarianz der Dimensionenzahl ermöglicht noch nicht die Aufstellung einer vom topologischen Standpunkt aus befriedigenden Dimensionstheorie. Den ersten und wichtigsten Schritt zu einer solchen Theorie hat schon Brouwer im Jahre 1913 getan. Derselbe gibt eine rekurrente, nur die inneren topologischen Eigenschaften der Menge benutzende Definition der Dimension, die er als „allgemeinen Dimensionsgrad“ bezeichnet, und er beweist vor allem den „Rechtfertigungssatz der Dimensionstheorie“, welcher besagt, daß in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit die Umgebung eines beliebigen Punktes stets genau den Dimensionsgrad n besitzt. Brouwer hat diese Theorie nicht weiter ausgebaut. Unabhängig voneinander haben Urysohn und Menger im Jahre 1922 Dimensionstheorien geschaffen, die in den wesentlichen Punkten untereinander und auch mit der Brouwerschen Theorie übereinstimmen. Diese *topologische Dimensionstheorie*, deren weiterer Ausbau in erster Linie Menger sowie Hurewicz zu verdanken ist, gehört zu den schönsten und fruchtbarsten Ergebnissen der abstrakten Topologie und hat die ältere Dimensionstheorie von Fréchet völlig verdrängt. Die Fréchetsche Dimensionstheorie ordnet zwar jeder Menge einen topologisch invarianten „Dimensionstypus“ zu, sie führt aber im allgemeinen auf nicht ganzzahlige Dimensionstypen und überdies auf Paare von Dimensionstypen verschiedener Punktmengen, die beide zwischen zwei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen gelegen, aber nicht miteinander vergleichbar sind.

Die weitere Entwicklung der Topologie dürfte zunächst dahin zielen, ihre beiden anfangs scharf getrennten Hauptzweige einander mehr und mehr zu nähern. Diese Tendenz zeigt sich einerseits in den schon ge-

nannten Arbeiten von Alexander und Lefschetz, in denen mit kombinatorischen Methoden Probleme wesentlich mengentheoretischer Natur angegriffen werden, andererseits in teilweise noch nicht veröffentlichten Arbeiten von Alexandroff, die sich mit der Betrachtung ihrem Wesen nach kombinatorischer Fragestellungen innerhalb der mengentheoretischen Topologie beschäftigen, und die als eine konkrete geometrische Anwendung z. B. die für $n = 2$ durch den Brouwerschen Satz von der Invarianz der geschlossenen Kurve gegebene Beantwortung der Frage nach der Zerlegung des n-dimensionalen Raumes durch abgeschlossene Mengen ermöglichen. Auch die Untersuchungen von H. Hopf über die Abbildung von Mannigfaltigkeiten sind hier zu nennen; in diesen Untersuchungen greifen mengentheoretische und kombinatorisch-gruppentheoretische Eigenschaften der Abbildungen ineinander, und es zeigt sich, daß der beide Seiten vereinigende und beherrschende Begriff der Abbildungsgrad ist.

(Eingegangen am 2. 10. 27.)

Dem Andenken an Dr. Wilhelm Ahrens.

Von O. STAUDE† in Rostock.

Am 23. April dieses Jahres verschied nach längerem Leiden das langjährige Mitglied der Deutschen Mathematikervereinigung, Dr. Wilhelm Ahrens in Rostock.

Er war geboren am 3. März 1872 in Lübz an der Elde in Mecklenburg, studierte 1890—97 in Rostock, Berlin und Freiburg i. Br. In Rostock promovierte er als mein Schüler summa cum laude mit der Arbeit: „Über eine Gattung $n$fach periodischer Funktionen von n Veränderlichen" und bestand darauf die Oberlehrerprüfung. Von 1895 bis 1896 wirkte er als Lehrer an der deutschen Schule in Antwerpen und studierte dann noch ein Semester bei Professor Lie in Leipzig, und verfaßte, von dort angeregt, die Arbeit: „Über Transformationsgruppen, deren sämtliche Untergruppen invariant sind", Hamburger Math. Gesellschaft, Bd. IV, 1902. Später war er in Magdeburg, von 1897 an der Baugewerkschule und von 1901 an der Maschinenbauschule angestellt, siedelte aber 1904 wieder nach Rostock über, um sich ganz seinen schriftstellerischen Arbeiten zu widmen.

Sein eigenartiges Arbeitsgebiet war die wissenschaftliche Behandlung der mathematischen Spiele. Sein großes Werk „Mathematische Unterhaltungen und Spiele" erschien in 2. Auflage in zwei Bänden 1910 und 1918 und zeichnet sich durch eine ganz umfassende Literaturkenntnis aus. Eine kürzere Darstellung des Gegenstandes „Mathematische Spiele" erschien 1919 in 4. Auflage in der Teubnerschen Sammlung „Aus Natur

und Geisteswelt". Infolge seiner Kenntnisse auf diesem Gebiete wurde er auch mit der Abfassung eines Artikels über „Mathematische Spiele“ für die Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. I^2, S. 1081, betraut. Eine wertvolle Sammlung klassischer Aussprüche über mathematische Fragen gab er in dem Buche: „Scherz und Ernst in der Mathematik“, Teubner 1904. Von besonderem Interesse für die Geschichte der Mathematik ist der von ihm herausgegebene „Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und M. H. Jacobi“, 1907, und „zwischen Jacobi und Fuß“ 1908. Ebenso die „Skizzen aus dem Leben Weierstraß'“, Math.-naturwissenschaftl. Blätter, 1907; „Gudermanns Urteil über die Staatsexamensarbeit von Weierstraß“, ebenda 1908; „Peter Gustav Lejeune Dirichlet“, ebenda 1905.

Allgemeinere Veröffentlichungen von ihm sind, um nur einige herauszugreifen: „C. G. J. Jacobi als Politiker“ 1907; „In welcher Sprache sollen die Werke Leonhard Eulers herausgegeben werden?“, Internat. Wochenschrift für Wissenschaft, Kunst und Technik, 1909; „Latein oder Deutsch“, 1910; „Gelehrte Anekdoten“, 1911; „Das Theater in der Sonne des Humors“, 1913; „Altes und Neues aus der Unterhaltungsmathematik“, 1918; „Rostocker Studentenstammbuch von 1736—37“ (zusammen mit Dr. G. Kohfeldt herausgegeben), 1919. Dazu kommen noch zahlreiche Aufsätze in Zeitschriften und Zeitungen.

Seinen Fachkollegen in Rostock ist er nicht nur ein anregender Gefährte in allen wissenschaftlichen Fragen, sondern auch ein treuer, stets hilfsbereiter Freund gewesen, den sie in aufrichtiger Trauer am 26. April zu seiner letzten Ruhestätte begleitet haben.

(Eingegangen am 5. 6. 27.)

Emanuel Czuber.

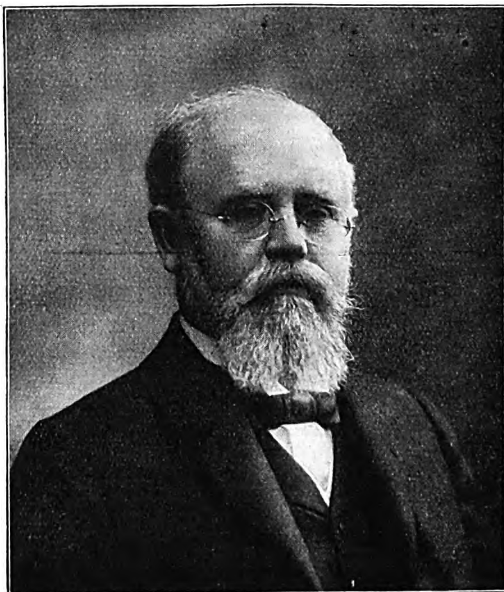
Von E. Doležal in Wien.

Mit Bildnis.

Emanuel Czuber hat am 22. August 1925 in Gnigl bei Salzburg, wo er seine letzten Jahre verbrachte, die Augen für immer geschlossen. Der Allbezwinger Tod hat seinen unermüdlich tätigen, rastlos forschenden Geist zum Stillstand gebracht.

Mit ihm verliert die Wissenschaft einen hervorragenden Führer auf dem Gebiete der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen, einen Bahnbrecher in so manchem Zweige des Versicherungswesens.

Am 19. Januar 1851 in Prag geboren, besuchte er in seiner Vaterstadt die Volks- und Mittelschule und absolvierte dann die Ingenieurfachabteilung am dortigen deutschen Polytechnikum. Schon als Student



wurde er Assistent an der Lehrkanzel für *Praktische Geometrie* bei dem bekannten Geodäten und Kartographen Dr. K. Kořistka. Nach Beendigung seiner Studien wurde er im Jahre 1874 Supplent an der II. deutschen Staats-Oberrealschule in Prag, und nach Ablegung der Lehrbefähigungsprüfung 1878 wirkte er noch acht Jahre an dieser Anstalt als wirklicher Lehrer, resp. Professor für Mathematik und darstellende Geometrie. Im selben Jahre erwarb Czuber die venia docendi an der Prager Deutschen Technischen Hochschule für *Theorie und Praxis der Ausgleichungsrechnung* und wurde im April 1886 als ordentlicher Professor der Mathematik an die Deutsche Technische Hochschule in Brünn berufen, an der er im Studienjahre 1890/91 die Würde des Rektors bekleidete.

Unmittelbar darauf übernahm er als Nachfolger Prof. Dr. Anton Wincklers die Lehrkanzel für Mathematik II an der Technischen Hochschule in Wien, wurde hier für das Studienjahr 1894/95 zum Rektor gewählt, und 1899 im Alter von 48 Jahren wurde ihm Titel und Charakter eines Hofrates verliehen, zu jener Zeit eine hohe und seltene Auszeichnung.

Durch volle 28 Jahre wirkte Czuber unermüdlich und vorbildlich als akademischer Lehrer an der Wiener Technik, bis er im Winter 1919 durch Krankheit genötigt wurde, einen Urlaub zu nehmen. Da sich sein Gesundheitszustand nicht besserte, nahm er im Juli 1919 schweren Herzens von der Hochschule, seinen Kollegen und Hörern Abschied, um auf seinem lieblichen Landsitz in Gnigl bei Salzburg, umgeben von der gewaltigen und herrlichen Alpenwelt, seinen Lebensabend zu beschließen. Im Alter von 70 Jahren, 1921, trat er, ohne das Ehrenjahr zu machen, in den dauernden Ruhestand.

Czuber war eine Persönlichkeit von ganz besonderer Prägung: Tiefschürfender wissenschaftlicher Forscher mit genialem Blicke bei Verwertung der theoretischen Ergebnisse für die Bedürfnisse der Praxis,

Meister der akademischen Diktion und seinen Hörern nicht nur ein bewunderter Lehrer, sondern ein herzlicher Freund.

Die besondere Vorliebe Czubers für jene Gebiete der angewandten Mathematik, die auf der Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung beruhen, geht schon auf die Zeit zurück, wo er sich als Assistent für Geodäsie intensiv mit Beobachtungsfehlern und Ausgleichungsaufgaben beschäftigte; er trug sich damals, wie aus einer seiner Äußerungen hervorgeht, sogar einige Zeit mit dem Gedanken, sich dem akademischen Lehramte im Vermessungswesen zu widmen, verlegte aber später seine Spezialforschungen doch auf alle Gebiete, in welchen die Wahrscheinlichkeitstheorie ausgedehntere praktische Verwendung finden kann.

Kurz nach seiner Habilitation 1879 brachte Czuber die auf Meyers Akademieschrift fußenden *Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung* und hierauf ein schönes selbständiges Werk: *Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte,* Leipzig 1884, in welchem er als erster eine systematische Darstellung der Wahrscheinlichkeiten bei geometrischen Beobachtungen und den aus ihnen abzuleitenden annähernd richtigsten Mittelwerte bietet, und das auch ins Französische übertragen wurde.

In die Zeit seiner Prager Lehrtätigkeit fallen auch einige kleinere geodätische Arbeiten, die er als Redakteur der *Technischen Blätter* verfaßte, ferner anderweitig veröffentlichte Abhandlungen über Genauigkeit der geodätischen Punktbestimmung und die Theorie der Fehlerellipse.

Aus der Zeit seines Brünner Aufenthaltes stammt die *Theorie der Beobachtungsfehler,* Leipzig 1891, und eine interessante Kritik der Gauß-schen Formel.

In Wien erreichte das wissenschaftliche Wirken Czubers seinen Höhepunkt. Der Bericht an die Deutsche Mathematiker-Vereinigung über *Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihre Anwendungen,* Leipzig 1899, und das umfassende Werk: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung,* Leipzig 1903, festigten nicht nur seinen Ruf, sondern brachten ihn bereits in die erste Reihe der Forscher auf dem Gebiete der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen.

Czubers meisterhafte Beherrschung der Theorie kam auch in der Praxis des Versicherungswesens sehr zur Geltung. Er nahm in den Jahren 1895—1900 großen Anteil an den Arbeiten der Kommission für die Sterblichkeitsstatistik der bei österr.-ungar. Gesellschaften Versicherten und betätigte sich auch bei der Herstellung der österreichischen Volkssterbetafel 1909/10. Alle seine Studien auf diesem Gebiete, wie: die Arbeit über Moivres Leibrententheorie, Wien 1906; die be-

völkerungsstatistischen Studien, Wien 1912; Beiträge zur Theorie statistischer Reihen, Wien 1914 u. a. besitzen einen dauernden Wert für das Versicherungswesen. In seiner Schrift: *Die Zukunft des Versicherungswesens in Österreich*, Wien 1916, bekämpft er mit sachlichen Argumenten und ruhiger Objektivität den Plan, das private Versicherungswesen behufs Erhöhung der staatlichen Einnahmen zu monopolisieren, und zeigt sich hierbei als umfassender Beherrscher nicht nur der Theorie, sondern des gesamten Tatsachen- und Ziffernmaterials. Der Entwicklungsgang des Versicherungsmonopols in Italien hat Czubers Anschauung sehr bald bestätigt.

Sein Verdienst ist auch die Schaffung des *Versicherungstechnischen Kurses* an der Technischen Hochschule in Wien 1894, dessen Ausgestaltung ihm ganz besonders am Herzen lag. Auch der Verband der österreichischen und ungarischen Versicherungstechniker, dessen Präsident er im Jahre 1898 wurde, hat an den wirklich Unermüdlichen eine große Dankesschuld abzutragen und erkannte dies durch eine Stiftung an, die Czubers Namen trägt.

Wenn manches von dem Letztangeführten auch nur als lokales Verdienst gewertet werden sollte, so haben seine bahnbrechenden Arbeiten auf dem Gebiete der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihres gesamten Anwendungsfeldes sowie seine speziellen versicherungstechnischen Arbeiten Czubers Namen weit über die Grenzen der alten Monarchie bekannt gemacht, was bei dem *VI. Internationalen Kongresse für Versicherungswissenschaft* in Wien 1909 deutlich zum Ausdruck gelangte. Als Vorsitzender dieses Kongresses prägte Czuber in seiner Eröffnungsansprache die für ihn kennzeichnenden Worte:

„Auch der stolze Bau der Versicherung bedarf einer neuen Seele, soll er Leben und Schönheit erlangen. Und diese Seele ist die Humanität. So lassen Sie denn durch die strengen Formeln und die trockenen Zahlenreihen, die nun einmal unerläßlich sind, auf Ihrem Arbeitsgebiete überall die Humanität durchleuchten."

Für das Studium der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Versicherungstechnik werden Czubers Arbeiten auf lange Zeit hinaus die grundlegenden Fundamente bleiben; es muß aber besonders betont werden, daß dieser universelle Geist gewiß nicht in seinem geliebten Spezialgebiete erstarrte, daß er vielmehr auch andern Zweigen der mathematischen Wissenschaft sein lebhaftes Interesse zuwendete. Rein mathematische Arbeiten finden sich in größerer Zahl in den *Sitzungsberichten von Akademien*, im *Crelleschen Journal*, in *Grunerts Archiv*, in den *Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* und in den *Monatsheften für Mathematik und Physik*, usw.

Das Bild von Czubers literarisch-wissenschaftlicher Tätigkeit würde entschieden eine Lücke aufweisen, wenn nicht seiner vorzüglichen mathematischen Lehrbücher gedacht würde, und zwar:

1. *Einführung in die höhere Mathematik*, ein Band, Leipzig 1909, und
2. *Vorlesungen über Differential- und Integral-Rechnung*, in zwei Bänden, Leipzig 1898,

wovon das erste Werk drei und das letzte sechs Auflagen erlebte.

Bei dem Werdegange und dem ganzen Wesen Czubers ist es eine Selbstverständlichkeit, daß er allen Fragen des Unterrichtes die größte Aufmerksamkeit zuwendete. Als ehemaliger Mittelschullehrer, als Redakteur der angesehenen *Zeitschrift für Realschulwesen*, als Vorsitzender bei den Maturitätsprüfungen an Realschulen und als Experte im n.-ö. Landesschulrate hat er wiederholt wertvolle Anregungen für die Führung und Ausgestaltung des mathematischen Unterrichtes an Realschulen gegeben.

Hinsichtlich des Hochschulunterrichtes trat er insbesondere für eine sorgfältige Ausbildung in den grundlegenden Disziplinen ein, und in seinen Berichten, die er als Mitglied verschiedener Kommissionen in Angelegenheit des mathematischen Unterrichtes erstattet hat, bringt er äußerst zeitgemäße Aufschlüsse über die behandelte Materie.

Seine Studie: *Gedanken über die Reform der Technischen Hochschulen*, Wien 1913, enthält eine Fülle wertvoller Anregungen und hat für zukünftige Reformpläne grundlegende Bedeutung.

Czuber war wirklich aufopferungsvoll im Dienst der Wiener Technischen Hochschule tätig und gehörte gewiß zu ihren hervorragendsten und erfolgreichsten Lehrern. Sein Vortrag war frei von jedem Pathos, es gelang ihm auch durch den logischen Aufbau und die plastische Darstellungsweise die Hörerschaft stets zu fesseln und der gewiß etwas spröden Materie durch enge Verbindung der reinen Theorie mit philosophischen Gesichtspunkten und den vielseitigen Anwendungsgebieten eine lebendige, starkes Interesse erweckende Gestaltung zu geben.

Czubers Verdienste um Lehre und Forschung fanden im Auslande verdiente Anerkennung; die belgische Gesellschaft für Naturwissenschaften in Lüttich ernannte ihn zum korrespondierenden Mitgliede, und die Technische Hochschule in München verlieh ihm das Doktorat der technischen Wissenschaften ehrenhalber, eine Auszeichnung, die ihm besondere Freude bereitete. In den Annalen der Wiener Technischen Hochschule wird Czuber ein besonderer, ehrender Platz eingeräumt werden.

Czuber war ein Österreicher von altem Schrot und Korn und hing mit inniger Liebe an seinem Vaterlande; der Zerfall der alten Monarchie

traf ihn äußerst schwer. Mehrere Schlaganfälle, von Lähmungserscheinungen begleitet, erschütterten die Arbeitskraft des greisen Gelehrten, dem es ohnehin sehr schwer fiel, sich in die neuen Verhältnisse zu schicken. Aber aller Unmut über den Lauf der Zeit, Alter und Krankheit konnten den starken Geist nicht zum Rasten zwingen. Seinen letzten Lebensjahren verdanken wir noch drei wertvolle Werke:

1. *Die statistischen Forschungsmethoden*, Wien 1921;
2. *Die philosophischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Leipzig 1923, und
3. *Mathematische Bevölkerungstheorie*, Leipzig 1923.

Als endlich der unerbittliche Tod der Hand des Unermüdlichen die Feder entwandt, die sie so glänzend geführt hatte, wurde wahrlich unter ein reiches Lebenswerk ein Strich gesetzt. Aber von Tausenden dankbaren Schülern werden einige, in denen der Geist des Meisters weiterlebt, dieses Werk fortsetzen zum Beweise, daß nicht bloß die Materie, sondern auch der Geist unvergänglich ist. Czubers Kollegen aber werden sich mit Wehmut der Tage gemeinsamer Arbeit in einer Zeit erinnern, in der geistige Werte noch anders eingeschätzt wurden als in unseren Tagen.

Ehre dem Andenken des großen Forschers und Lehrers!

1. Selbständige Schriften.

Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung. Auf Grund einer Akademieschrift von A. Meyer. Leipzig 1879.

Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte. Leipzig 1884.

Dasselbe in französischer Übersetzung bei Hermann, Paris 1902.

Zum Gesetze der großen Zahlen. Prag 1889. Untersuchung der Ziehungsergebnisse der Prager und Brünner Lotterie vom Standpunkt der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Theorie der Beobachtungsfehler. Leipzig 1891.

Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. 2 Bände. Leipzig. 1. Aufl. 1898, 2. Aufl. 1906, 3. Aufl. 1912, 4. Aufl. 1917/18, 5. und 6. Aufl. 1924.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. Leipzig. 1. Aufl. 1902/03 in 1 Bd., 2. Aufl. 1908 in 2 Bdn., 3. Aufl. 1914 in 1 Bd., 4. Aufl. 1924.

A. de Moivres Abhandlung über die Leibrenten. Wien 1906.

Die Kollektivmaßlehre. Wien 1908.

Einführung in die höhere Mathematik. Leipzig 1909. 2. Aufl. 1921, 3. Aufl. 1922.

Gedanken über eine Reform der Technischen Hochschulen. Wien 1913.

Die Zukunft des Versicherungswesens in Österreich. Wien 1916.

Die statistischen Forschungsmethoden. Wien 1921.

Die philosophischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Leipzig 1923

Mathematische Bevölkerungstheorie. Leipzig 1923.

2. Technische Blätter.

(Redaktion innegehabt von 1876 bis 1885.)

1876. Bemerkungen über die mathematische Behandlung von Beobachtungsergebnissen.
1878. Genauigkeit der geodätischen Punktbestimmung durch zwei und mehrere Gerade.
1883. Hohmanns Präzisions-Polarplanimeter.
1884. Hohmanns freischwebendes Präzisionsplanimeter.
1888. Die Kugelplanimeter von G. Coradi.
1891. Ein Ausgleichsprinzip.
1892. Die Reduktion geometrischer Nivellements wegen der Veränderlichkeit der Schwerkraft.
1891. Das Kgl. Preuß. Geodätische Institut in Potsdam.

3. Crelles Journal für die reine und angewandte Mathematik.

1889. Berechnung der krummen Oberfläche und des körperlichen Inhaltes eines Kugelausschnittes zwischen zwei beliebigen, die Kugel und einander schneidenden Ebenen.
1895. Die Steinerschen Polygone.
1920. Der Mittelwert eines Quotienten.

4. Archiv der Mathematik und Physik.

1877. Über aufsteigende Kettenbrüche.
1877. Kegelflächen 2. Ordnung mit einer Symptotenachse.
1878. Berechnung der dritten Seite eines Dreieckes aus zwei gegebenen Seiten und dem von diesen eingeschlossenen Winkel.
1878. Ableitung der Zentralprojektion aus einer kotierten Orthogonalprojektion.
1878. Vergleichung zweier Annahmen über die moralische Bedeutung von Geldsummen.
1881. Das Petersburger Problem.
1883. Die geodätische Linie auf der Kreiskegelfläche.
1888. Mittelwerte, die Krümmung ebener Kurven und krummer Flächen betreffend.
1889. Die sphärische Kurve 4. Ordnung als Einhüllende von Kreisscharen.
1889. Geometrischer Beweis eines Satzes der Flächentheorie.
1890. Zur Theorie der Kegelschnittslinien.
1892. Über die einem Kegelschnitt umgeschriebenen Kreisvierecke.
1902. Über Einhüllende von Kurven und Flächen.

5. Zeitschrift für Mathematik und Physik.

1887. Die C_3 und C_4, welche durch die unendlich fernen Kreispunkte gehen.
1899. Beitrag zur graphischen Integration der linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung.

6. Monatshefte für Mathematik und Physik.

1890. Zur Theorie der Beobachtungsfehler.
1891. Zur Theorie zweier vielfacher Integrale.
1891. Zur Kritik einer Gaußschen Formel.

1892. Über einen geometrischen Ort und eine damit zusammenhängende krumme Fläche.
1892. Über die Einhüllenden.
1893. Zur Anwendung eines Kroneckerschen Satzes.
1894. Über Diskriminantenmannigfaltigkeiten algebraischer Gleichungen.
1894. Die ein-eindeutigen Punkttransformationen in der Ebene.
1898. Beitrag zur graphischen Integration der linearen Differentialgleichungen.
1920. Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung.

7. Sitzungsberichte der Kais. Akademie d. Wissenschaften in Wien.

1880. Zur Theorie der Fehlerellipse.
1884. Zur Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten.
1892. Über die Differentialquotienten von Funktionen mehrerer Variabeln.
1893. Über Kurvensysteme und die zugehörigen Differentialgleichungen.
1894. Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.
1903. Zur Theorie der eingliedrigen Gruppen in der Ebene und ihrer Beziehungen zu den gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung.

8. Sitzungsberichte d. Bayer. Akad. d. Wissenschaften in München.

1915. Eine geometrische Aufgabe.

9. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

1897. Über einen symbolischen Kalkül auf Trägern vom Geschlechte Eins.
1899. Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen.
1903. Ein Satz der Fehlertheorie und seine Anwendung.
1915. Mathematik und Technik.

10. Prag, Sitzungsberichte der böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften.

1875. Um- und eingeschriebene Polygone bei Kegelschnitten.

11. Mathematische Zeitschrift.

1922. Statistische Reihen.

12. Mitteilungen d. Verbandes d. öst.-ung. Versicherungstechniker.

1902. Die neuen englischen Sterblichkeitsmessungen.
1915. Vom Leben und Sterben.

13. Assekuranz-Jahrbuch. (Ehrenzweig.)

1909. Über neue Sterblichkeitstafeln.

14. Bericht an den Versicherungsbeirat

betreffend das Programm für die Reform und den Ausbau der Arbeiterversicherung. Wien 1907.

15. Versicherungswissenschaftliche Mitteilungen der Vereinigung für das Versicherungswesen in der Tschechoslowakei.

1922. Analytische Behandlung statistischer Aufnahmen.

16. Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft.

1904. Zum Problem der Sterblichkeitsmessung.
1905. Neuere Sterblichkeitsuntersuchungen an Versicherten.
1921. Aphorismen zur Zeitgeschichte.

17. Mitteilungen einzelner Feuerversicherungsanstalten

1912. Die kulturelle Bedeutung des Versicherungswesens.

18. Versicherungswissenschaftliche Mitteilungen.

(Mitteilungen des österr.-ungar. Verbandes der Privatversicherungsanstalten.)

1907. Die Altersverteilung der Gestorbenen.
1907. Buchbesprechung über „Vorlesungen über mathematische Statistik", von Dr. Ernst Blaschke.
1908/09. Die Versicherungsdauer als Element der Sterbenswahrscheinlichkeit.
1911. Die kulturelle Bedeutung des Versicherungswesens. (Vortrag.)
1912. Bevölkerungsstatistische Studien.
1913. Die historische Entwicklung des Versicherungswesens. (2 Vorträge.)
1914. Beitrag zur Theorie statistischer Reihen.
1915. Vom Leben und Sterben.
1916. Lebensversicherung und Krieg.

19. Zeitschrift für Sozialwissenschaft.

1921. Soziologische Kriegsprobleme.

20. Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- u. Geniewesens

1908. Die Kollektivmaßlehre.
1911. Die Morbidität im österr.-ungar. Heere.

21. Wiener Zeitung. Abendpost.

1913 u. 1914. Ergebnisse der Ziehung der Klassenlotterie und andere Artikel.

22. Neue Freie Presse.

1902. N. H. Abel.
1909. Zum VI. Internationalen Kongreß für Versicherungswissenschaft.
1911. Novellierung des Pensionsversicherungsgesetzes.
1915. Zum hundertjährigen Jubiläum der Technischen Hochschule in Wien und andere Artikel.

23. Österreichische Rundschau.

1922. Enquete des Völkerbundes über Fragen der Rohstoffe und Lebensmittel.

24. Österreichische Revue.

(Organ für Versicherung und Volkswirtschaft.)

1920. Das Bevölkerungsproblem.
1920. Zur Novellierung des Pensionsversicherungsgesetzes.
1920. Einfluß des Krieges auf die allgemeine Sterblichkeit.
1922. Soziologische Probleme.

25. Das Ausland.

1911. Die Schwerkraft in den Ostalpen, Karpathen und in der ungarischen Tiefebene.
1911. Grenzgebiete der Geodäsie und der mathematischen Geographie.

26. Zeitschrift für die österreichischen Realschulen.

(Czuber war Redakteur von 1897 bis zur Einstellung 1921.)

1892. Elementare Lösung einer Aufgabe der Sphärik.
1893. Die Zeichensprache der Mathematik.
1897. Der erste Internationale Mathematiker-Kongreß in Zürich.
1898. Kritische Bemerkungen zu den Grundbegriffen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.
1899. Zur Hochschulfrage.
1899. Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie.
1899. Über die Dezimalteilung der Winkel- und Zeitgrößen.
1900. Zweiter Internationaler Mathematiker-Kongreß in Paris.
1901. Zur Theorie der reellen Zahlen.
1902. Die Abel-Feier in Christiania.
1903. L. K. Schultz von Straßnitzki (zur hundertsten Wiederkehr seines Geburtstages.)
1904. Ein geometrisches Problem: Das einer Ellipse eingeschriebene Dreieck von größtem Umfange.
1904. Zum Zahl- und Größenbegriff.
1904. Dritter Internationaler Mathematiker-Kongreß in Heidelberg.
1905. Die Frage der Einführung der Infinitesimalrechnung in den Mittelschulunterricht vom österreichischen Standpunkt.
1906. Die Kollektivmaßlehre.
1909. Über die Körperbeschaffenheit der zum einjährig-freiwilligen Dienst berechtigten Wehrpflichtigen Deutschlands.
1910. Die Scheiteltransversalen des gleichseitigen Dreiecks.
1911. Aphorismen zur Entwicklungsgeschichte der Mathematik im XIX. Jahrhundert.
1912. Der fünfte Internationale Mathematiker-Kongreß in Cambridge.
1914. Die Reflexionspolygone im Dreieck.
1914. Über rationale rechtwinklige Dreiecke.
1914. Die Pariser Konferenz der Internationalen mathematischen Unterrichtskommission.
1915. Orbiforme Kurven.
1915. Zu dem Erlaß des Ministers für Kultus und Unterricht vom 31. Juli 1915, betreffend die Eindämmung des Zudranges zu den Mittelschulen.
1915. Über ein neues Multiplikationsverfahren.
1917. Zur Vollendung eines großen Werkes.
1918. Sterblichkeit, Tontine und Lebensversicherung.

27. Zeitschrift f. d. landwirtschaftl. Versuchswesen in Österreich.

1918. Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Fragen der Landwirtschaft.
1920. Beziehungen zwischen Parzellengröße und Fehlern der Einzelbeobachtung bei Feldversuchen.

28. Landwirtschaftliche Jahrbücher.

1920. Feldversuche mit Kartoffeln. Zu dem Aufsatz von E. Alfred Mitscherlich.

29. Fühlings „Landwirtschaftliche Zeitung“

1921. Zu P. Ehrenbergs Beweis für die Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Feldversuche.

30. Zeitschrift für Pflanzenzüchtung.

1922. Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf landwirtschaftliche Versuche.

31. Archiv für die Psychologie.

1921. Theorie der linearen Korrelation.
1924. Lineare Ausgleichung der Korrelation.

32. Zeitschrift „Metron". (Rovigo.)

1920. Funktionen von Variabeln, zwischen welchen Korrelationen bestehen.

33. Beiträge zur Landes- und Volkskunde, Elsaß-Lothringen.

1911. Schwerkraft der Alpen.

34. Mitteilungen der anthropologischen Gesellschaft in Wien.

1915. Anthropologische Zahlenreihen, Bedeutung der Kollektivmaßlehre für die Bearbeitung von anthropologischen Problemen.

35. Unterrichtswesen.

Der mathematische Unterricht an den Technischen Hochschulen Österreichs. Wien 1910.
Bericht über den mathematischen Unterricht in Österreich. Wien 1910.
Gedanken über eine Reform der Technischen Hochschulen. Wien 1918.

36. Festschrift für L. Boltzmann. 1904.

Zur Geometrie der gewöhnlichen Differentialgleichungen.

37. Festschrift für Elster und Geitel 1915.

Kathodenkoloreszenz, permutierende Lumineszenz und Thermoluminovariabilität.

38. Programmarbeiten.

Figur und Größe der Erde. — Im Programme der II. Deutschen Staats-Oberrealschule in Prag 1875; diese Abhandlung erschien auch čechisch:
O měření země. Prag 1875.
Aphorismen zur Entwicklungsgeschichte der Mathematik im XIX. Jahrhundert. — Rektoratsrede. Programm der Technischen Hochschule in Wien, 1894/95.

39. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften.

Leipzig 1900—1904, I. Band, 2. Teil, Abschnitt „Wahrscheinlichkeitsrechnung".

(Eingegangen am 10. 1. 27.)

Bemerkungen zu Grundlagenfragen. II.

Die mengentheoretischen Paradoxien.

Von Karl Menger in Wien.

Wir gehen zur Behandlung der mengentheoretischen Paradoxien von einer ganz elementaren Tatsache der Arithmetik aus, die wohl niemandem als paradox erscheint: *Ist M irgendeine endliche Menge von natürlichen Zahlen, so gibt es eine natürliche Zahl, welche in M nicht enthalten ist.* In verschiedener Weise können natürliche Zahlen, welche in der gegebenen Menge M nicht enthalten sind, angegeben werden: z. B. die Summe oder das Produkt der in M enthaltenen natürlichen Zahlen, die größte der in M enthaltenen natürlichen Zahlen vermehrt um Eins, u. s. w. Man pflegt die erwähnte einfache Tatsache auch dadurch auszudrücken, daß man sagt: *Es gibt unendlichviele natürliche Zahlen*, oder: *Die natürlichen Zahlen bilden eine unendliche Menge.*

Ebenso einleuchtend ist der Satz: *Ist M irgendeine endliche Menge von Primzahlen, so gibt es eine Primzahl, welche in M nicht enthalten ist.* Beispielsweise erhält man eine in M nicht enthaltene Primzahl, wenn man das um Eins vermehrte Produkt der in M enthaltenen Primzahlen in seine Primfaktoren zerfällt. Man sagt statt der angeführten einfachen Tatsache auch: *Es gibt unendlichviele Primzahlen*, oder: *Die Primzahlen bilden eine unendliche Menge.*

Ebenso ist man sich einig über folgenden Satz: *Ist M irgendeine abzählbare Menge von Dezimalbrüchen, so gibt es einen Dezimalbruch, welcher in M nicht enthalten ist.* Man kann die gegebene Menge M, da sie abzählbar ist (laut Definition der Abzählbarkeit) in eine Folge ordnen und dann beispielsweise nach dem Diagonalverfahren einen in M nicht enthaltenen Dezimalbruch bilden. Man drückt diese Tatsache auch dadurch aus, daß man sagt: *Es gibt unabzählbarviele Dezimalbrüche*, oder: *Die Dezimalbrüche bilden eine unabzählbare Menge.*

Bekanntlich kann man auch in einfacher Weise zeigen: *Ist M irgendeine abzählbare Menge von Ordinalzahlen der zweiten Zahlenklasse, so gibt es eine Ordinalzahl der zweiten Zahlenklasse, welche in M nicht enthalten ist.* Man drückt diese Tatsache auch dadurch aus, daß man sagt: *Es gibt unabzählbarviele Ordinalzahlen der zweiten Zahlenklasse*, oder: *Die Ordinalzahlen der zweiten Zahlenklasse bilden eine unabzählbare Menge.*

Betrachten wir nun irgendeine gegebene Menge M von Mengen, die sich nicht als Element enthalten. Wir behaupten: Es gibt eine Menge,

die sich nicht als Element enthält, welche in der gegebenen Menge M nicht enthalten ist. In der Tat, die Menge M *selbst* ist *erstens* in M nicht als Element enthalten, da ja vorausgesetzt ist, daß M eine Menge von Mengen ist, die sich *nicht* als Element enthalten. Daher enthält zugleich *zweitens* die Menge M sich selbst nicht als Element. Die Menge M ist also tatsächlich eine Menge, die sich nicht als Element enthält, welche in M nicht enthalten ist, und wir haben also bewiesen: *Ist M irgendeine Menge von Mengen, die sich nicht als Element enthalten, so gibt es eine Menge, die sich nicht als Element enthält, welche in M nicht enthalten ist.*

Wenn es zu jeder gegebenen **endlichen** Menge von Dingen bestimmter Art ein Ding der betreffenden Art gibt, welches in der gegebenen endlichen Menge nicht enthalten ist, so wird dies auch ausgedrückt durch die Worte: *Es gibt* **unendlichviele** *Dinge der betreffenden Art*, oder: *die Dinge der betreffenden Art bilden eine* **unendliche Menge.**

Wenn es zu jeder gegebenen **abzählbaren Menge** von Dingen bestimmter Art ein Ding der betreffenden Art gibt, welches in der gegebenen abzählbaren Menge nicht enthalten ist, so wird dies auch ausgedrückt durch die Worte: *Es gibt* **unabzählbarviele** *Dinge der betreffenden Art*, oder: *Die Dinge der betreffenden Art bilden eine* **unabzählbare Menge.**

Wollen wir eine analoge Ausdrucksweise anwenden auf die eben bewiesene Tatsache

> „Zu jeder gegebenen **Menge** von Mengen, die sich selbst nicht als Element enthalten, gibt es eine Menge, die sich nicht als Element enthält, welche in der gegebenen Menge nicht enthalten ist“,

so müssen wir offenbar sagen:

> „*Es gibt eine* **Unmenge** *von Mengen, die sich nicht als Element enthalten*“,

oder:

> „*Die Mengen, die sich nicht als Element enthalten, bilden eine* **Unmenge.**“[1])

Sprechen wir hingegen statt dessen von der „*Menge aller Mengen, die sich nicht als Element enthalten*“, so ist das genau so, als sprächen wir von der „*endlichen Menge aller natürlichen Zahlen*“, von der „*endlichen Menge aller Primzahlen*“, von der „*abzählbaren Menge aller Dezimalbrüche*“ oder von der „*abzählbaren Menge aller Ordinalzahlen der zweiten Zahlenklasse*“.

1) Für Nicht-Deutsche, welche das seltene Wort *Unmenge* nicht kennen, sei bemerkt, daß es zur Bezeichnung außerordentlich großer Gesamtheiten bisweilen tatsächlich verwendet wird.

Und wenn Widersprüche dadurch entstehen, daß wir auf die Unmenge aller Mengen, die sich nicht als Element enthalten, die Sätze über Mengen anwenden, so ist das ebensowenig verwunderlich, als wenn Widersprüche dadurch entstehen, daß wir auf die Menge aller natürlichen Zahlen oder auf die Menge aller Dezimalbrüche die Sätze über endliche bzw. über abzählbare Mengen anwenden.

Bisweilen ergeben übrigens derartige Schlüsse zufällig richtige Resultate. Wenn man z. B. schließt: Jede endliche Menge von natürlichen Zahlen enthält eine kleinste Zahl, also enthält die „endliche Menge aller natürlichen Zahlen“ eine kleinste Zahl, so ist in dem Resultat des Schlusses zufälligerweise etwas Richtiges enthalten; denn die unendliche Menge aller natürlichen Zahlen enthält eine kleinste Zahl. Und analog, wenn wir schließen: Jede Menge enthält die leere Menge als Teilmenge, also enthält die „Menge aller Mengen, die sich nicht als Element enthalten“, die leere Menge als Teilmenge, — so ist in diesem Resultat zufälligerweise etwas Richtiges enthalten; denn die Unmenge aller Mengen, die sich nicht als Element enthalten, enthält tatsächlich die leere Menge.

Wenn man dagegen schließt: Jede endliche Menge von natürlichen Zahlen enthält eine größte Zahl, also enthält die „endliche Menge aller natürlichen Zahlen“ eine größte Zahl, — so ist nicht nur der Schluß falsch, da die natürlichen Zahlen eine unendliche Menge bilden, — sondern es führt auch das Resultat zu Widersprüchen. Und analog, wenn man schließt: Jede Menge enthält sich entweder als Element oder enthält sich nicht als Element, also enthält die „Menge aller Mengen, die sich nicht als Element enthalten“, sich entweder als Element, oder sie enthält sich nicht als Element, — so ist nicht nur der Schluß falsch, da die Mengen, die sich nicht als Element enthalten, eine Unmenge bilden, — sondern es führt bekanntlich auch das Resultat zu Widersprüchen, welche den Inhalt einer sog. Paradoxie bilden. Denn jeder der beiden Fälle impliziert sein Gegenteil. Würde man beispielsweise annehmen, daß die „Menge“ aller Mengen, die sich nicht als Element enthalten, sich *nicht* als Element enthält, so wäre die betrachtete „Menge“ eine von den Mengen, die sich nicht als Element enthalten, wäre also ein Element der „Menge“ aller Mengen, die sich nicht als Element enthalten; das hieße aber, daß die „Menge“ aller Mengen, die sich nicht als Element enthalten, sich *doch* als Element enthält, im Widerspruch gegen die Annahme. Wirft man hingegen für die *Unmenge* aller Mengen, die sich nicht als Element enthalten, die Frage auf, ob sie sich als Element enthält, so ist diese Frage offenbar zu *verneinen*, ohne daß sich hieraus der Widerspruch ergeben würde, welchen man erhält, wenn man die Unmenge aller Mengen, die sich nicht als Element enthalten, fälschlich als „Menge“ bezeichnet.

Wir führen noch einige andere Beispiele von Unmengen an. Zunächst betrachten wir die Ordinalzahlen. Ist M irgendeine Menge von Ordinalzahlen, so gibt es eine Ordinalzahl, welche in M nicht enthalten ist. Um eine solche Ordinalzahl zu erhalten, kann man beispielsweise so vorgehen: Man bildet die Menge M' von Ordinalzahlen, welche 1. alle Ordinalzahlen von M enthält und 2. jede Ordinalzahl enthält, zu der eine größere in M enthaltene Ordinalzahl existiert. Die Ordinalzahl der so definierten Menge M' ist, wie man leicht einsieht, nicht in M enthalten. *Es gibt also eine Unmenge von Ordinalzahlen*, und in analoger Weise kann man zeigen, *daß es auch eine Unmenge von Kardinalzahlen gibt.*

Es gibt schließlich eine Unmenge von Mengen. Sei nämlich M irgendeine Menge von Mengen. Wir bilden die Menge M' aller jener Mengen, welche Teilmengen von irgendeiner Menge aus M sind; genau gesprochen: Es sei M' die Menge aller Mengen m', welche die Eigenschaft haben, daß ein Element m von M existiert, so daß m' Teilmenge von m ist. Die so definierte Menge M' ist sicher nicht Element von M. Denn wenn m irgendein Element von M ist, so ist die Mächtigkeit von M' größer als die Mächtigkeit von m, da ja M' die Menge aller Teilmengen von m als Teilmenge enthält. Zu jeder gegebenen Menge von Mengen gibt es also eine Menge, welche in der gegebenen Menge nicht enthalten ist, d. h. *es gibt eine Unmenge von Mengen.*

Anschaulich gesprochen steht es also so:

Es gibt gewisse Bereiche von Dingen, welche sich nicht in endliche Mengen einzwängen lassen. Bei jedem Versuch, die Elemente solcher Bereiche in eine endliche Menge zusammenzufassen, entschlüpfen gewisse Elemente. Bei jeder Aussonderung einer endlichen Teilmenge aus solchen Bereichen bleiben Elemente übrig. Derartige Bereiche werden *unendlich* genannt. (Man spricht auch von *unendlichen Mengen*, obwohl man strenggenommen nur von *Un-Endlichenmengen* sprechen dürfte; denn für einen Bereich, dessen Elemente keine endliche Menge bilden, besteht ja die Möglichkeit, daß seine Elemente, wie etwa im Falle des Bereiches aller Ordinalzahlen, überhaupt *keine Menge* bilden.)

Es gibt ferner Bereiche von Dingen, welche sich nicht in abzählbare Mengen zusammenfassen lassen. Bei jeder Aussonderung von abzählbaren Teilmengen aus solchen Bereichen bleiben Elemente übrig. Derartige Bereiche werden *unabzählbar* genannt (vielfach auch *unabzählbare Mengen*, wofür es wieder korrekter *Un-Abzählbaremengen* heißen sollte).

Es gibt weiters Bereiche von Dingen, welche sich nicht in Mengen zusammenfassen lassen. Zu jeder gegebenen Menge von Elementen dieser

Bereiche gibt es Elemente, welche in der gegebenen Menge nicht enthalten sind. Derartige Bereiche haben wir *Unmengen* genannt. Unmengen gibt es beispielsweise von Mengen, — von Mengen, die sich nicht als Element enthalten, — von Kardinalzahlen, — von Ordinalzahlen.

Ein Kriterium dafür, ob die Elemente eines gegebenen Bereiches (z. B. die reellen Zahlen!) eine Menge oder eine Unmenge bilden, folgt aus den vorstehenden Überlegungen natürlich keineswegs. Denn es geht ja in die Definition des Begriffes „Unmenge" der Mengenbegriff ein, und man muß sich also darüber einig sein, was als Menge zu bezeichnen ist, um die Definition der Unmengen überhaupt anwenden zu können. Doch kann man den Formalismus der Unmengen näher untersuchen und sieht dann beispielsweise, daß die Unmengen keine mit den Mächtigkeiten der Mengen übereinstimmenden Mächtigkeiten besitzen[2]), daß die wohlgeordneten Unmengen (wie z. B. die Unmenge aller Ordinalzahlen) keine mit den Ordinalzahlen wohlgeordneter Mengen übereinstimmenden Ordinalzahlen haben. Dadurch erklären sich die Paradoxie von Burali-Forti und verwandte Paradoxien, welche die Ordinalzahl bzw. die Mächtigkeit von *Unmengen* als Ordinalzahl bzw. als Mächtigkeit von *Mengen* behandeln.[3]) So wie die bereits oben analysierte Paradoxie betreffend die Mengen, die sich nicht als Element erhalten, entstehen also auch diese Paradoxien *durch die Anwendung von Sätzen über Mengen auf Unmengen.* Das ist aber, wie wir sahen, ein Verfahren, welches *völlig analog ist der Anwendung von Sätzen über endliche Mengen auf unendliche.*

---

2) Herr H. Hahn schlug mir gesprächsweise vor, den Unmengen *Unzahlen* als Mächtigkeiten zuzuordnen.

3) (*Zusatz bei der Korrektur:*) Auch die Probleme, welche sich auf Unmengen von Unmengen beziehen, mögen hier bloß Erwähnung finden: Dabei sprechen wir der Kürze halber von *Klassen,* für welchen Ausdruck z. B. eines der Worte „endliche Menge", „abzählbare Menge", „Menge" substituiert werden kann. Ein Bereich, in dem zu jeder gegebenen Klasse (gewisser Art) ein Element existiert, welches in der gegebenen Klasse nicht enthalten ist, heiße eine *Unklasse* (der betreffenden Art). Ferner wollen wir jene Klassen, die sich selbst nicht als Element enthalten, kurz als *normal* bezeichnen. Dann sieht man: Zu jeder gegebenen Klasse von normalen Klassen existiert eine in der gegebenen Klasse nicht enthaltene normale Klasse (nämlich die gegebene Klasse selbst!). Also bilden die normalen Klassen eine Unklasse. Nun kann diese Argumentation auch auf Unklassen von normalen Unklassen angewendet werden und zwingt dann zur Einführung von *Ununklassen.* Man kann die Klassen als Klassen erster Ordnung, die Unklassen als Klassen zweiter Ordnung, und allgemein die Unklassen, welche zu Klassen (n — 1)-ter Ordnung gehören als *Klassen n-ter Ordnung* bezeichnen. Man gelangt auf diese Weise gleichsam zu einer Reihe von Klassentypen, wobei aber die Sprünge zwischen den aufeinanderfolgenden Ordnungen viel größer sind, als die zwischen aufeinanderfolgenden Typen im Russellschen Sinn.

(Eingegangen am 1. 11. 27.)

Bemerkungen zu Grundlagenfragen. III.

Über Potenzmengen.

Von Karl Menger in Wien.

Zu den am heftigsten angefochtenen Begriffsbildungen der abstrakten Mengenlehre gehört der Begriff der *Potenzmenge*, der Begriff der Menge aller Teilmengen einer gegebenen Menge. In einer folgenden Mitteilung soll ausgeführt werden, daß die in der Diskussion über diese Begriffsbildung vorgebrachten Argumente (daß die Existenz von Potenzmengen *„evident"* sei, bzw. daß diese Begriffsbildung *„unkonstruktiv"* und *„sinnlos"* sei) nicht streng präzisiert worden und einer völlig strengen Präzisierung wohl auch gar nicht fähig sind.

Hier soll zunächst betont werden, daß außerordentlich wichtige Teile der Mengenlehre von dieser Begriffsbildung und der an sie knüpfenden Diskussion vollkommen *unabhängig* sind. Jenen Forschern freilich, welche den Gipfel der Cantorschen Ideen in der Mächtigkeitslehre erblicken, muß der Begriff der Potenzmenge, welcher ein Aufsteigen zu immer höheren Mächtigkeiten gestattet, als Kernbegriff der Mengenlehre erscheinen. Wer aber angesichts der großen Fortschritte der letzten Jahre *die mengentheoretische Geometrie* als jenen Teil der Cantorschen Schöpfung erkannt hat, welcher sich am fruchtbarsten erwiesen hat und im engsten Zusammenhang mit der übrigen Mathematik steht, der weiß, daß dieser Kern der Mengenlehre von den am meisten angefochtenen Methoden und Begriffsbildungen der abstrakten Mengenlehre, insbesondere vom Begriff der Potenzmenge frei ist, und daß in ihm lediglich solche Methoden zur Anwendung gelangen, welche auch zur Begründung der Lehre von den reellen Zahlen, also in der gesamten Analysis unentbehrlich sind.[1]) Soweit sich beispielsweise[2]) die mengentheoretische Geometrie mit der Topologie endlich-

1) Vgl. die diesen Sachverhalt in Evidenz setzende Einführung in die mengentheoretische Geometrie in meinem Buche „Dimensionstheorie" (bei Teubner 1928), Kap. I.

2) Die Punktmengenlehre oder, wie ich statt dessen lieber sage, die *mengentheoretische Geometrie,* wird bisweilen mit allgemeiner Topologie identifiziert. Ohne an dieser Stelle näher auf die Systematik der mengentheoretischen Geometrie einzugehen, möchte ich doch die erwähnte Auffassung als unrichtig bezeichnen. Selbst in der Lehre von jenen gestaltlichen Eigenschaften, die sich als topologisch invariant erweisen, ist diese Invarianz häufig etwas Sekundäres, was sich hinterher herausstellt. Und übrigens ist neben der mengentheoretischen Topologie beispielsweise ein Zweig der mengentheoretischen Geometrie in Ausbildung begriffen, welcher eine *allgemeine Theorie der Metrik* zum Gegenstand hat. (Vgl. meine „Untersuchungen über allgemeine Metrik" in den Mathem. Annalen Bd. 100.)

dimensionaler kompakter und separabler Räume befaßt, ist sie ja, einem Fundamentalsatz der Dimensionstheorie[3]) zufolge, eine Theorie der topologischen Eigenschaften der Teilmengen euklidischer Räume. Von einem Aufsteigen zu immer höheren Mächtigkeiten ist in ihr also nicht im entferntesten die Rede!

Die Tatsache, daß die mengentheoretische Geometrie (im Gegensatz zur abstrakten Mengenlehre) bloß die üblichen Methoden der Analysis verwendet, und daß daher durch die gegen die abstrakte Mengenlehre gerichteten Angriffe auf die mengentheoretische Geometrie kein größerer Verdacht fällt als auf die Analysis, wird besonders deutlich, wenn man die übliche Behandlungsweise der mengentheoretischen Geometrie vergleicht mit ihrer Behandlung durch Brouwer, also durch den einzigen Kritiker der Cantorschen Mengenlehre, welcher derselben ein eigenes positives System gegenüberstellt. Dieser Vergleich ergibt nämlich, daß die Differenzen dieselben sind wie jene zwischen der üblichen und der Brouwerschen Behandlung der Lehre von den reellen Zahlen, daß sie sich nämlich im wesentlichen bloß auf die Anwendung bzw. Nichtanwendung *des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten* und auf die entsprechende Zusammenlegung bzw. Aufspaltung der Begriffe beziehen. Hinsichtlich der spezifischen Begriffsbildungen der mengentheoretischen Geometrie hingegen sind die Unterschiede zwischen der üblichen und der Brouwerschen Behandlungsweise, wie in der Note über Verzweigungsmengen[4]) auseinandergesetzt wurde, vorwiegend bloß terminologischer Natur.[5])

---

3) Vgl. mein Buch „Dimensionstheorie", Kap. IX.

4) Bemerkungen zu Grundlagenfragen I. In diesem Jahresbericht **37**, S. 213. (Im folgenden ist diese Arbeit kurz als G I zitiert.)

5) Zu den Begriffen der mengentheoretischen Geometrie ist dabei insbesondere auch *das Kontinuum der reellen Zahlen* zu rechnen. Es scheint mir lediglich ein terminologischer Unterschied, wenn Brouwers Interpreten das Kontinuum als *„Medium freien Werdens"*, als *„Inbegriff aller werdenden Intervallfolgen"* u. dgl. bezeichnen, statt es in der üblichen Weise als *Menge aller Intervallschachtelungen* zu bezeichnen. Denn eine bestimmte werdende Folge von Intervallen ist eine bestimmte Intervallschachtelung, eine frei werdende Folge von Intervallen ist eine beliebige Intervallschachtelung.

Anders liegen zum Unterschiede von der mengentheoretischen Geometrie die Verhältnisse in der *abstrakten* Mengenlehre. Hier fallen zahlreiche Cantorsche Begriffsbildungen (wie z. B. die Menge aller Ordinalzahlen irgendeiner Zahlenklasse u. dgl.) fort, wenn man sich, wie Brouwer, auf abstrakte analytische Mengen (= auf „Mengen" in der Brouwerschen Terminologie) und auf beliebige Teilmengen analytischer Mengen (= auf „Spezies", die aus solchen Mengen abgeleitet sind) beschränkt. Das (G I S. 225 formulierte) Problem einer Deduktion dieser Beschränkung aus allgemeinen Konstruktivitätsforderungen ist noch offen.

Während in der mengentheoretischen Geometrie oder wenigstens in ihren wichtigsten Teilen, nicht nur von einem Aufstieg zu höheren Mächtigkeiten keine Rede ist, sondern auch die Bildung von Potenzmengen im allgemeinen eingangs definierten Sinn nicht erforderlich wird, bietet sich das Problem einer Bildung von Potenzmengen bisweilen mit gewissen Restriktionen dar. Es handelt sich z. B. bisweilen um die Menge aller *abgeschlossenen* Teilmengen eines *kompakten* Raumes, oder allgemeiner um die Menge aller *kompakten* Teilmengen eines *analytischen* Raumes.[6]) Die Bildung solcher Potenzmengen im engen Sinn kann aber durch ein Verfahren tatsächlich vorgenommen werden.

Es sei V eine *Verzweigungsmenge.*[7]) Es ist also jedem endlichen

---

6) Die Auffassung der analytischen Räume als Zwischenstufe zwischen den separabeln und den kompakten Räumen findet sich in G I, S. 224, und sei hier nochmals auseinandergesetzt. Ist R ein beliebiger *separabler* Raum, so kann jedem endlichen Komplex von natürlichen Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_k$ eine offene Menge $A_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ zugeordnet werden, so daß, wenn $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ irgendeine Folge natürlicher Zahlen ist, der Durchschnitt $A_{n_1} \cdot A_{n_1, n_2} \cdot \ldots \cdot A_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \cdot \ldots$ höchstens einen Punkt enthält (d. h. entweder genau einen Punkt enthält oder leer ist). *Analytisch* heißt der gegebene Raum A dann und nur dann, wenn jedem endlichen Komplex von natürlichen Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_k$ eine offene Menge $A_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ so zugeordnet werden kann, daß für jede Folge von natürlichen Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ der Durchschnitt $A_{n_1} \cdot A_{n_1, n_2} \cdot \ldots \cdot A_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \cdot \ldots$ auch wirklich genau einen Punkt enthält, falls alle den Durchschnitt bildenden Mengen nicht-leer sind; wenn also für eine Zahlenfolge $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ der Durchschnitt $A_{n_1} \cdot A_{n_1, n_2} \cdot \ldots \cdot A_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \cdot \ldots$ dann und nur dann leer ist, falls eine der den Durchschnitt bildenden Mengen leer ist und anderenfalls genau einen Punkt enthält. *Kompakt* heißt ein analytischer Raum dann und nur dann, wenn ein Mengensystem $\{A_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ dieser Art derart angebbar ist, daß für jedes natürliche k das Mengensystem nur endlichviele nicht-leere Mengen mit k Indizes enthält. Durch diese Definition schieben sich also die analytischen Räume zwischen die separabeln und die kompakten ein.

Es sei dabei übrigens noch auf folgende Verallgemeinerung dieser Begriffsbildungen hingewiesen, welche, wenn man mit transfiniten Ordinalzahlen operiert, möglich ist. Als *k-separabel* (bzw. *k-analytisch*) kann ein Raum bezeichnet werden, wenn jedem endlichen Komplex von Ordinalzahlen der k ersten Zahlenklassen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ eine offene Menge $A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}$ zugeordnet ist, so daß für jede Folge von Ordinalzahlen der k ersten Zahlenklassen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ der Durchschnitt

$$A_{\alpha_1} \cdot A_{\alpha_1, \alpha_2} \cdot \ldots \cdot A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} \cdot \ldots$$

höchstens einen Punkt (bzw. genau einen Punkt, wofern keine der den Durchschnitt bildenden Mengen leer ist) enthält. Die gewöhnlichen separabeln bzw. analytischen Räume ordnen sich in diese Begriffsbildung als die 1-separabeln bzw. als die 1-analytischen Räume ein.

7) Vgl. G I S. 213 u. 216.

Komplex von natürlichen Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ein Ding $A_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ eines Dingsystems $\mathfrak{A}$ zugeordnet, wobei $\mathfrak{A}$ auch ein gewisses Ding N, genannt Nullding, enthält. Bilden wir für alle jene Folgen von natürlichen Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$, für welche kein Ding $A_{n_1, n_2, \ldots n_k}$ mit N identisch ist, die Dingfolgen

$$D_{n_1}, D_{n_1, n_2}, \ldots, D_{n_1, n_2, \ldots, n_k}, \ldots$$

so ist V die Menge dieser Dingfolgen. Das System der den Komplexen natürlicher Zahlen zugeordneten Dinge $\{A_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ heißt das die Menge V *erzeugende System*. Sind für jedes natürliche k fast alle Dinge $A_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ mit k Indizes des erzeugenden Systems mit N identisch, so heißt die erzeugte Menge *finit*. Eine Verzweigungsmenge V' mit dem erzeugenden System $\{A'_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ heißt *Teilverzweigungsmenge* von V, wenn für jeden Komplex $n_1, n_2, \ldots, n_k$ von natürlichen Zahlen das Ding $A'_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ entweder mit $A_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ oder mit N identisch ist. Jede Teilverzweigungsmenge einer finiten Menge ist offenbar finit. Wir beweisen nun folgenden Satz:

Das System aller finiten Teilverzweigungsmengen einer Verzweigungsmenge ist eine Verzweigungsmenge. Das System aller Teilverzweigungsmengen einer finiten Menge ist eine finite Menge.

Das Problem, ob, in welchem Sinn und inwieweit die Definition einer Menge durch ein erzeugendes System als eine *konstruktive* Definition bezeichnet werden kann, — ein Problem, welches in der Note über Verzweigungsmengen[8]) formuliert wurde, — bleibt durch diese Überlegungen unberührt. Wir zeigen nur: Wenn man die Definition einer Menge durch ein erzeugendes System als konstruktiv ansehen will, dann ist auch die Menge aller finiten Teilmengen einer so definierten Menge konstruktiv definierbar.

Wir leiten nun aus dem gegebenen erzeugenden System $\{A_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ von A ein System von Dingen $\{B_{m_1, m_2, \ldots, m_k}\}$ her, dessen Dinge durch folgende induktive Vorschrift definiert sind:

Um die Dinge B_{m_1}, also die Dinge des ersten Schrittes (die Dinge mit einem Index) des zu definierenden Systems zu bestimmen, bilden wir zunächst alle endlichen Komplexe (alle n-Tupel, $n = 1, 2, \ldots$ ad inf.) von Dingen A_{n_1}, d. h. von Dingen des ersten Schrittes des gegebenen Dingsystems. Diese endlichen Komplexe bilden insgesamt ein abzählbares System von Dingen. Wir ordnen dieselben in eine Folge und bezeichnen sie der Reihe nach mit $B_1, B_2, \ldots$ ad inf.

8) Vgl. G I S. 225.

Wir wollen nun annehmen, es seien bereits die Dinge des k-ten Schrittes des zu definierenden Systems, d. h. die Dinge $B_{m_1, m_2, \ldots, m_k}$ ($m_1, m_2, \ldots, m_k = 1, 2, \ldots$) bestimmt, und zwar sei jedes von ihnen (wie dies für $k = 1$ der Fall ist) ein Komplex von endlichvielen der Dinge $A_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ ($n_1, n_2, \ldots, n_k = 1, 2, \ldots$), d. h. von endlichvielen Dingen des k-ten Schrittes des gegebenen Systems. Die endlichvielen Dinge des gegebenen Systems, die im Komplex $B_{m_1, m_2, \ldots, m_k}$ enthalten sind, wollen wir auch kurz als die *Summanden* von $B_{m_1, m_2, \ldots, m_k}$ bezeichnen.

Wir bestimmen dann die Dinge $B_{m_1, m_2, \ldots, m_k, m_{k+1}}$, d. h. die Dinge des $(k+1)$-ten Schrittes des zu definierenden Systems, folgendermaßen: Es sei $m_1, m_2, \ldots, m_k$ ein gegebener Komplex von k Zahlen. Das ihm entsprechende Ding $B_{m_1, m_2, \ldots, m_k}$ ist laut Annahme bereits definiert u. zw. als Komplex von endlichvielen Dingen des k-ten Schrittes des gegebenen Systems $A_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$, welche wir die Summanden des Dinges $B_{m_1, m_2, \ldots, m_k}$ nannten. Wir betrachten nun alle jene Dinge $A_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}}$ des $(k+1)$-ten Schrittes des gegebenen Systems, deren k erste Indizes mit jenen von einem der Summanden von $B_{m_1, m_2, \ldots, m_k}$ übereinstimmen. Wir bilden sodann alle endlichen Komplexe (alle n-Tupel, $n = 1, 2, \ldots$) dieser Dinge $A_{n_1, \ldots, n_{k+1}}$. Wir erhalten so ein abzählbares System von Dingen, ordnen dieselben in eine Folge und bezeichnen sie der Reihe nach mit

$$B_{m_1, m_2, \ldots, m_k, 1}, \quad B_{m_1, m_2, \ldots, m_k, 2}, \ldots, \quad B_{m_1, m_2, \ldots, m_k, m}, \ldots.$$

Die endlichvielen Dinge $A_{n_1, \ldots, n_{k+1}}$ des Komplexes $B_{m_1, \ldots, m_{k+1}}$ nennen wir wieder kurz die *Summanden* von $B_{m_1, \ldots, m_{k+1}}$.

Durch diese Vorschrift wird sukzessive jedem endlichen Komplex von natürlichen Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_k$ ein Ding $B_{m_1, m_2, \ldots, m_k}$ zugeordnet.

Das so definierte System $\{B_{m_1, m_2, \ldots, m_k}\}$ ist, wenn jedes Ding, dessen sämtliche Summanden mit N identisch sind, als Nullding N' aufgefaßt wird, das erzeugende System der Menge aller finiten Teilverzweigungsmengen von V. Denn ist *erstens* F eine finite Teilmenge von V, so existiert eine Folge $m_1, m_2, m_k, \ldots$ von natürlichen Zahlen, so daß für jedes k die Dinge des k-ten Schrittes vom erzeugenden System von F mit den Summanden von $B_{m_1, m_2, \ldots, m_k}$ identisch sind. Der Menge F ist also das Element

$$B_{m_1}, B_{m_1, m_2}, \ldots B_{m_1, m_2, \ldots, m_k}, \ldots$$

der durch $\{B_{m_1, m_2, \ldots, m_k}\}$ erzeugten Verzweigungsmenge zugeordnet. Und ist *zweitens*

$$B_{m_1}, B_{m_1, m_2}, \ldots B_{m_1, m_2, \ldots, m_k}, \ldots$$

ein Element der durch $\{B_{m_1, m_2, \cdots, m_k}\}$ erzeugten Verzweigungsmenge, so entspricht dasselbe einer finiten Teilmenge von V, nämlich jener Menge, in deren erzeugendem System für jedes k die Dinge des k-ten Schrittes mit den Summanden von $B_{m_1 m_2, \cdots, m_k}$ identisch sind.

Nun geht aus unserer Konstruktion offenbar folgendes hervor: Wenn das System $\{A_{n_1, n_2, \cdots, n_k}\}$ für jedes natürliche k bloß endlichviele von N verschiedene Dinge des k-ten Schrittes enthält, dann enthält auch das System $\{B_{m_1, m_2, \cdots, m_k}\}$ für jedes natürliche k bloß endlichviele von N' verschiedene Dinge des k-ten Schrittes, dann bilden also die finiten Teilmengen der Menge V eine *finite* Menge.

Offen bleibt folgende Frage: *Bilden* (nicht nur die finiten, sondern) *alle Teilverzweigungsmengen einer Verzweigungsmenge eine Verzweigungsmenge?* Um aus einem eine Teilverzweigungsmenge erzeugenden System ein die Menge aller *finiten* Teilmengen erzeugendes System herzuleiten, haben wir für jedes natürliche k zu den abzählbar vielen Dingen des k-ten Schrittes des gegebenen Systems endliche Komplexe von diesen Dingen adjungiert, wodurch wieder ein *abzählbares* System von Dingen entstand, welche wir als die Dinge des k-ten Schrittes des neuen erzeugenden Systems verwendeten. Um aber aus einem eine Verzweigungsmenge erzeugenden System ein System herzuleiten, welches die Menge aller Teilverzweigungsmengen erzeugt, können wir nicht in analoger Weise für jedes natürliche k zu den Dingen des k-ten Schrittes des gegebenen Systems alle abzählbaren Komplexe dieser Dinge adjungieren, da ja hierdurch ein *unabzählbares* Dingsystem entstünde. Die zur Erzeugung der Menge aller finiten Teilmengen einer Verzweigungsmenge verwendete Methode kann also nicht ohne weiteres zu einer Erzeugung der Menge aller Teilmengen verwendet werden.

Hingegen halte ich es für wahrscheinlich, daß mit Hilfe von Methoden analog jenen, die wir zur Erzeugung gewisser Potenzmengen verwendeten, unter geeigneten Restriktionen auch *Auswahlmengen* vorschriftsmäßig erzeugbar sind.

(Eingegangen am 1. 11. 27.)

Bemerkungen zu Grundlagenfragen. IV.

Axiomatik der endlichen Mengen und der elementargeometrischen Verknüpfungsbeziehungen.

Von Karl Menger in Wien.

Einleitung.

Es sei ein System S von Sätzen gegeben, welche die Form haben: Zwischen den Dingklassen $A, B, C, \ldots$ bestehen die Relationen $R_1, R_2, \ldots$ Man kann dann zu dem gegebenen Sätzesystem S (zunächst rein formal) folgendes System $D(S)$ von Definitionen bilden: Wenn zwischen den Dingklassen $X, Y, Z, \ldots$ die Relationen $R_1, R_2, \ldots$ bestehen, dann bezeichnen wir die Dingklasse X mit A, die Dingklasse Y mit B, die Dingklasse Z mit $C \ldots$ Derartige Definitionen, durch welche Dingklassen auf Grund von gewissen zwischen ihnen bestehenden Relationen mit gewissen Namen bezeichnet werden, heißen implizite Definitionen, und das angegebene Schema ermöglicht, jedem Sätzesystem der angeführten Art ein System von impliziten Definitionen zuzuordnen.

Wenn, abgesehen vom Sätzesystem S, Dingklassen mit den Namen $A, B, C, \ldots$ nicht definiert sind, dann stellt das Sätzesystem S, bzw. das aus ihm ableitbare Definitionssystem $D(S)$ *eine neue Einführung von Dingklassen*, die mit bestimmtem Namen zu bezeichnen sind, dar. Wenn dagegen Dingklassen mit den Namen $A, B, C, \ldots$ irgendwie unabhängig vom Sätzesystem S definiert sind, dann ist das Sätzesystem S, auch wenn es widerspruchsfrei ist, zweckmäßigerweise zu ergänzen durch einen Nachweis der Berechtigung seiner Benennung, durch den Nachweis nämlich, daß die unabhängig von S definierten Dingklassen $A, B, C, \ldots$ den durch die Sätze von S behaupteten Relationen genügen.

Wir wollen das Sätzesystem S ein Axiomensystem für die unabhängig von dem Sätzesystem definierten Dingklassen $A, B, C, \ldots$ nennen, wenn das aus dem Sätzesystem S herleitbare Definitionssystem $D(S)$ mit den von den Sätzen S unabhängigen Definitionen der Dingklassen $A, B, C, \ldots$ äquivalent ist, wenn m. a. W. folgendes gilt:

a) *Die unabhängig vom Sätzesystem S definierten Dingklassen $A, B, C, \ldots$ genügen den Behauptungen der Sätze des Systems S.*

b) *Wenn ein System von Dingklassen $X, Y, Z, \ldots$ den Behauptungen des Sätzesystems S genügt, dann ist es möglich, unter Erfüllung der Sätze des Systems S die Dingklassen $X, Y, Z, \ldots$ bzw. „A", „B", „C", ... zu nennen;* d. h. es ist möglich, die Dingklassen $X, Y, Z, \ldots$ eineindeutig

auf die unabhängig vom Sätzesystem S definierten Dingklassen $A, B, C, \ldots$ derart abzubilden, daß dabei jedes System von Dingklassen des gegebenen Systems, welches gewisse Relationen des Sätzesystems S erfüllt, auf ein System von Dingklassen des independent definierten Systems abgebildet wird, welches dieselben Relationen erfüllt.

Beispielsweise sind der dreidimensionale euklidische Raum, seine Ebenen, Geraden und Punkte definiert als Menge aller Tripel reeller Zahlen mit einer gewissen Abstandsdefinition, zwischen denen bzw. keine, eine, zwei, drei lineare Relationen bestehen. Zwischen den so definierten Raumgebilden bestehen zahlreiche Relationen, z. B. Inzidenz- und Anordnungsrelationen. Stellen wir nun ein System S von Sätzen auf, welche Relationen behaupten zwischen Dingklassen, die „Punkte", „Gerade", „Ebenen" und „Raum" genannt werden, so kann das Sätzesystem S dann und nur dann als eine Axiomatik der euklidischen Geometrie bezeichnet werden, wenn a) die arithmetisch definierten Raumgebilde den Sätzen des Sätzesystems S genügen, und wenn b) jedes System von Dingklassen, zwischen denen die im System S behandelten Relationen bestehen, unter Erfüllung der durch S ausgesprochenen Behauptungen auf ein System von Zahlentripeln, zwischen denen keine, eine, zwei, drei lineare Relationen bestehen, eineindeutig abbildbar ist. Diese Forderung erfüllt beispielsweise, wie in Hilberts Grundlagen der Geometrie nachgewiesen wird, das dort aufgestellte Axiomensystem.

Bei einer axiomatischen Einführung des *Mengen*begriffes tritt das erwähnte Problem nicht auf, solange eine Definition des allgemeinen Mengenbegriffes nicht existiert. Es ist unmöglich, jedes System von Dingklassen, welches gewissen Aussagen genügt, auf ein System von Mengen, ihre Teilmengen usw. abzubilden, wenn man nicht weiß, was Mengen sind.

Anders liegen die Verhältnisse indes hinsichtlich der wichtigsten Klassen von Mengen, die sich unabhängig von den am meisten angefochtenen Methoden der abstrakten Mengenlehre (arithmetisch und auf anderen Wegen) definieren lassen, und die, nebenbei bemerkt, die einzigen Mengenklassen sind, die in den fruchtbarsten Teilen der Mengenlehre eine Rolle spielen: die *endlichen* Mengen, die *abzählbaren* Mengen, die *kompakten* Räume, die *analytischen* Räume, die *separabeln* Räume (insbesondere also *die Mengen reeller Zahlen*). Das Verlangen, für *diese* Mengenklassen Axiomatiken aufzustellen, die sich als Axiomatiken der betreffenden Mengenklassen im angeführten Sinn erweisen lassen (so wie gewisse Axiomatiken der euklidischen Geometrie als solche erwiesen werden können) — dieses Verlangen ist durchaus sinnvoll und aller Wahrscheinlichkeit nach auch erfüllbar.

In der vorliegenden Note wird der einfachste Fall dieses Problems behandelt. Wir betrachten ein System von Dingen, zwischen denen gewisse Beziehungen bestehen, die durch sechs Axiome festgelegt sind. Die fünf ersten stehen in enger Beziehung zum Schröderschen *Klassenkalkül.* Sie sind Rechengesetze dieses Kalküls, die eine weitgehende Analogie mit den Definitionen der abstrakten Gruppen und Körper besitzen. Durch die Axiome wird insbesondere für die Dinge des Systems eine gewissen Bedingungen genügende Summen-, Durchschnitts- und (nicht notwendig eindeutige) Differenzenbildung definiert, und es wird jedem Ding eine gewisse Forderungen erfüllende natürliche Zahl zugeordnet.

Man erhält auf diese Weise vor allem *die Verknüpfungsaxiome der n-dimensionalen projektiven Geometrie.* Man hat dazu die Dinge des Systems als projektive Unterräume eines endlichdimensionalen projektiven Raumes zu deuten, die Summe, bzw. den Durchschnitt zweier Dinge als den durch die beiden betreffenden Räume „*bestimmten*", bzw. als den ihnen „*gemeinsamen*" projektiven Raum, den Betrag eines Dinges als die *Dimension* des betreffenden projektiven Raumes. Verglichen mit Verknüpfungsaxiomen, welche Hilbert für die dreidimensionale Elementargeometrie formuliert hat, besitzen unsere Verknüpfungsaxiome eine detailliertere und mehr algebraische Form und eine andere Anordnung. Dies rührt daher, daß Hilbert den Formalismus der Worte „bestimmen" und „gemeinsam haben" nicht in eigenen Axiomen formuliert, was wegen der Beschränkung auf den dreidimensionalen Raum möglich ist. Hingegen würde eine Begründung der n-dimensionalen Elementargeometrie ohne explizite Formulierung des klassenkalkülartigen Unterbaues der Geometrie zu wenig übersichtlichen, gedächtnismäßig schwer behaltbaren Axiomen führen.

Verschärft man eines der Axiome, verlangt man nämlich *eindeutige* Umkehrung der Addition, so gelangt man zu einem Axiomensystem, welches im wesentlichen identisch ist mit einem der Axiomensysteme des Klassenkalküls von Huntington (Trans. Am. Math. Soc. 5, 1904, S. 288) und von welchem man zeigen kann:

a) Das System aller Teilmengen einer endlichen Menge erfüllt die sechs Axiome, wofern in ihnen Summen-, Durchschnitts- und Differenzenbildung im mengentheoretischen Sinn verstanden werden und als die jedem Ding zugeordnete Zahl die Mächtigkeit der betreffenden Menge gewählt wird.

b) Ist irgendein System $\mathfrak{S}$ von Dingen vorgelegt, zwischen denen die durch die sechs Axiome festgelegten Beziehungen bestehen, dann ist es möglich, das System eineindeutig auf das System der Teilmengen

einer endlichen Menge abzubilden, so zwar, daß das zwei Dingen A und B axiomatisch zugeordnete Summen-, Durchschnitts- und Differenzending stets abgebildet wird auf die mengentheoretische Summe, den mengentheoretischen Durchschnitt bzw. die mengentheoretische Differenz der den beiden Dingen A und B entsprechenden Bildmengen.

Diese beiden Tatsachen berechtigen uns, die sechs Axiome als Axiome für endliche Mengen zu bezeichnen.

Der Grund der weitgehenden Übereinstimmung der Axiomensysteme für endliche Mengen und für elementargeometrische Verknüpfungsbeziehungen liegt darin, daß die Verknüpfungsbeziehungen der n-dimensionalen projektiven Geometrie letzten Endes nichts anderes sind als Verknüpfungsbeziehungen zwischen den Randsimplexen eines n-dimensionalen Simplexes und daß diese wieder identisch sind mit den Subsumtionsbeziehungen zwischen den Teilmengen einer endlichen Menge.

Wir entwickeln im *ersten* Abschnitt die den endlichen Mengen und der projektiven Geometrie gemeinsamen Axiome, zeigen im *zweiten* Abschnitt, wie man durch geeignete Deutung dieser Axiome und Verschärfung eines von ihnen eine unseren Forderungen genügende Axiomatik der endlichen Mengen erhält, und zeigen im *dritten* Abschnitt, wie man durch geeignete Deutung der Axiome die Verknüpfungsaxiome der n-dimensionalen projektiven Geometrie erhält. Speziell für den Fall $n = 3$ leiten wir aus diesen Axiomen die Hilbertschen Verknüpfungsaxiome her.

Der nächste Schritt des Programmes einer (als solche nachweisbaren) mengentheoretischen Axiomatik, ein Axiomensystem für *abzählbare* Mengen, wird nebst Anwendungen auf eine unendlichdimensionale projektive Geometrie in einer folgenden Note ausgeführt werden.

1. Das Axiomensystem.

Es sei ein System von irgendwelchen Dingen gegeben.

Axiom I (Identitätsaxiom). *In unserem System von Dingen ist eine reflexive symmetrische transitive Identitätsrelation definiert,* d. h.

1. Für je zwei Dinge A und B unseres Systems gilt entweder $A = B$ oder $A \neq B$.
2. Für jedes Ding A gilt $A = A$.
3. Wenn $A = B$ gilt, so gilt $B = A$.
4. Wenn $A = B$ und $B = C$ gilt, so gilt $A = C$.

Die beiden folgenden Axiome, das Summen- und das Durchschnittsaxiom, wollen wir, da sie einander parallel laufen, nebeneinander formulieren.

Axiom II (Summenaxiom).	**Axiom III (Durchschnittsaxiom).**

In unserem System von Dingen sind zwei assoziative kommutative totallineare Verknüpfungsoperationen mit Einheitselementen definiert,

die Summenbildung,	*die Durchschnittsbildung,*

d. h. je zwei Dingen A und B unseres Systems entspricht

ein Ding $A+B$, die „*Summe*“ von A und B.	ein Ding $A \cdot B$, der „*Durchschnitt*“ von A und B.

Es gilt:

1. $(A+B)+C=A+(B+C)$	*(Assoziativität)*	1. $(A \cdot B) \cdot C=A \cdot (B \cdot C)$
2. $A+B=B+A$	*(Kommutativität)*	2. $A \cdot B=B \cdot A$
3. $A+A=A$	*(Totallinearität)*	3. $A \cdot A=A$
4. Es existiert ein Ding V, das „*Vakuum*“ oder „*Leerding*“,	*(Existenz von Einheitselementen)*	4. Es existiert ein Ding T, das „*Total-*“ oder „*Gesamtding*“,

so daß für jedes Ding A unseres Systems $A+V=A$ gilt.	so daß für jedes Ding A unseres Systems $A \cdot T=A$ gilt.

Man beweist unschwer aus den Axiomen I, $\mathrm{II}_{1,2,3}$ und $\mathrm{III}_{1,2,3}$:

Satz 1. *In unserem System existiert höchstens ein Leerding und höchstens ein Gesamtding.*

Eine *distributive* Verknüpfung der Summen- und Durchschnittsoperation, wie sie im Klassenkalkül gilt, wird *nicht* postuliert. Hingegen verknüpfen wir die beiden Operationen durch folgendes Axiom, welches den Absorptionssätzen des Klassenkalküls verwandt ist:

Axiom IV (Absorptionsaxiom). *Wenn für zwei Dinge A und B unseres Systems $A+B=B$ gilt, so gilt auch $A \cdot B=A$ und umgekehrt.*

Wir verwenden das Absorptionsaxiom zur Einführung von Subsumtionsrelationen:

Definition 1 (Teilding). *Wenn für zwei Dinge A und B unseres Systems die Beziehungen $A+B=B$ und $A \cdot B=A$ gelten, so sagen wir, A sei „Teilding“ von B, und schreiben*

$$A \leqq B \quad \text{und} \quad B \geqq A.$$

Definition 2 (Echtes Teilding). *Wenn für zwei Dinge A und B unseres Systems die Beziehungen $A \leqq B$ und $A \neq B$ zusammenbestehen, so sagen wir, A sei „echtes“ Teilding von B, und schreiben*

$$A < B \quad \text{und} \quad B > A.$$

Es gelten nun folgende einfache Tatsachen:

Satz 2. Für jedes Ding A unseres Systems gilt $A \leqq A$. (Nach Definition 1 und II_3 oder III_3.)

Satz 3. Aus $A \leqq B$ und $B \leqq C$ folgt $A \leqq C$.
„ $A \leqq B$ „ $B < C$ „ $A < C$.
„ $A < B$ „ $B \leqq C$ „ $A < C$.

Um etwa die erste Relation zu beweisen, setzen wir die Gültigkeit von $A + B = B$ und $B + C = C$ voraus und behaupten die Gültigkeit von $A + C = C$. Durch Addition der beiden vorausgesetzten Formeln und Anwendung von II_3 erhalten wir $A + B + C = B + C$, und wenn wir hier $B + C$ nach der zweiten vorausgesetzten Formel beiderseits durch C ersetzen, ergibt sich die Behauptung.

Satz 4. Es bestehen die Beziehungen $A \leqq B$ und $B \leqq A$ dann und nur dann zusammen, wenn $A = B$ gilt. Die zweite Hälfte folgt aus Satz 2. Wenn umgekehrt die beiden Beziehungen zusammenbestehen, so gelten die Relationen $A + B = A$ und $A + B = B$, woraus sich durch Vergleich $A = B$ ergibt.

Satz 5. Für jedes Ding A unseres Systems gilt $V \leqq A \leqq T$. Dies folgt aus II_4, III_4 und Definition 1.

Satz 6. Für je zwei Dinge A und B unseres Systems gilt $A \cdot B \leqq A \leqq A + B$. Um etwa $A \cdot B \leqq A$ nachzuweisen, hat man zufolge der Definition 1 zu zeigen, daß $A \cdot (A \cdot B) = A \cdot B$ gilt. Dies folgt aber aus III_1 und III_3.

Satz 7. Aus $A \leqq C$ und $B \leqq C$ folgt $A + B \leqq C$ und $A \cdot B \leqq C$.
„ $A \geqq C$ „ $B \geqq C$ „ $A \cdot B \geqq C$ „ $A + B \geqq C$.

Zum Beweise etwa der ersten Hälfte der ersten Behauptung hat man nach Definition 1 zu zeigen: Aus $A + C = C$ und $B + C = C$ folgt $A + C = C$. Addiert man die beiden vorausgesetzten Formeln und berücksichtigt II_3, so erhält man $A + B + C = C$, und hieraus, wenn man $B + C = C$ anwendet, die Behauptung.

Im bisherigen war von den beiden Verknüpfungsoperationen, der Summen- und der Durchschnittsbildung, keine vor der anderen ausgezeichnet. Von nun ab tritt eine gewisse Bevorzugung der Summenbildung ein, indem wir eine (übrigens nicht eindeutige) Umkehrung der Addition, die Subtraktion, definieren, während wir Umkehrungen der Durchschnittsbildung außer Betracht lassen.

Die Addition besteht darin, daß je zwei Dingen A und B ein Ding $A + B$ entspricht, wobei wir bewiesen haben, daß jede Summe ihre

Summanden als Teildinge enthält. Eine triviale Umkehrung der Addition ist immer möglich. Wenn ein Ding S und ein Teilding A von S gegeben sind, so kann immer ein Ding B angegeben werden, so daß $A + B = S$ ist. Wir brauchen ja bloß $B = S$ zu setzen. Von Wichtigkeit für das Folgende sind aber derartige Umkehrungen der Addition, bei denen der zu bestimmende Summand B und der gegebene Summand A der gegebenen Summe S das Leerding als Durchschnitt haben. Die Möglichkeit derartiger Subtraktionen muß eigens postuliert werden. Es geschieht durch

Axiom V (Subtraktionsaxiom). *Wenn $A + S = S$ gilt, dann existiert (mindestens) ein Ding B, welches den Bedingungen genügt*

$$A + B = S, \qquad A \cdot B = V.$$

Es sei bemerkt, daß viele wichtige Sätze des Klassenkalküls, welche mit Hilfe des „*Axioms der Negation*“ abgeleitet werden (die distributive Verknüpfung von Summen- und Durchschnittsbildung, die Formeln von de Morgan, die Sätze über non-A), aus unseren bisherigen Axiomen *nicht* hergeleitet werden können. Dies hat seinen Grund darin, daß durch das Axiom V zwar eine Umkehrbarkeit, aber nicht notwendig *eindeutige* Umkehrbarkeit der Addition postuliert wird.

Hingegen können zwei für das Folgende wichtige einfache Sätze hergeleitet werden.

Satz 8. Wenn für zwei Dinge A und B die Beziehung gilt $V \subset A \subset B$ so existiert ein Ding A', welches den Beziehungen $V \subset A' \subset B$ und $A \cdot A' = V$ genügt.

In der Tat, die Behauptung wird erfüllt, wenn wir A' nach dem Axiom V so bestimmen, daß $A + A' = B$ und $A \cdot A' = V$ gilt. Die zweite behauptete Beziehung ist dann offenbar erfüllt. Es bleibt zu zeigen, daß $V \subset A'$ und $A' \subset B$ ist. Nach Satz 5 ist $V \subseteqq A'$. Um die Beziehung $V \subset A'$ zu erweisen, haben wir also nur zu zeigen, daß $V \neq A'$ gilt. Dies muß aber gelten; denn wäre $V = A'$, so wäre, der Definiton von A' zufolge, $A + V = A = B$, und das widerspräche der Voraussetzung $A \subset B$. Um die Beziehung $A' \subset B$ zu erweisen, haben wir, da sicher $A' \subseteqq B$ gilt, nur zu zeigen, daß $A' \neq B$ gilt. Dies muß aber gelten; denn wäre $A' = B$, so würde gelten $A' \cdot A = B \cdot A = A$, also müßte, da $A' \cdot A = V$ sein soll, $A = V$ sein, und das widerspräche der Voraussetzung $V \subset A$. Damit ist Satz 8 bewiesen.

Satz 9. Ist $\mathfrak{S}$ ein System von Dingen, welches die Axiome I—V (jedoch nicht notwendig III_4) befriedigt, ist ferner A irgendein bestimmtes Ding des Systems $\mathfrak{S}$, dann genügen die Dinge von $\mathfrak{S}$, welche Teildinge

von A sind, für sich den Axiomen I—V und dabei auch dem Axiom III_4, wenn $T = A$ gesetzt wird.

Axiom I gilt für die Teildinge von A selbstverständlich, ebenso ist je zweien von ihnen eine Summe und ein Durchschnitt gemäß $II_{1,2,3}$ und $III_{1,2,3}$ zugeordnet, und nach Satz 7 ist die Summe und der Durchschnitt zweier Teildinge von A ein Teilding von A. Nach der ersten Hälfte von Satz 5 ist für die Teildinge von A auch II_4 erfüllt. Da für jedes Teilding D von A die Beziehung besteht $D \cdot A = A$, so ist auch III_4 erfüllt, wenn man $T = A$ setzt. Auch gelten für die Teildinge von A die Axiome IV und V; letzteres deshalb, weil das Ding X', welches zwei Teildingen X und Y $(X \leqq Y)$ von A vermöge Axiom V zugeordnet wird, ein Teilding von Y, also auch ein Teilding von A ist. Damit ist Satz 9 bewiesen.

Wir führen nun ein neues Axiom ein, durch welches für die Dinge unseres Systems eine gewissen Forderungen und einer Funktionalgleichung genügende Funktion, der „Betrag", definiert wird.

Axiom VI (Betragsaxiom). *Jedem Ding A ist eine* (nicht notwendig positive) *ganze Zahl zugeordnet, die wir mit $|A|$ bezeichnen und den Betrag von A nennen, gemäß den Bedingungen:*

1. *Wenn alle echten Teildinge eines Dinges A einen Betrag $\leqq n - 1$ haben, so ist $|A| \leqq n$.*
2. *Wenn ein echtes Teilding von A einen Betrag $\geqq n - 1$ hat, so ist $|A| \geqq n$.*
3. *Für je zwei Dinge A und B gilt*

$$|A| + |B| = |A + B| + |A \cdot B| \quad \textit{(Betragsgleichung).}$$

VI_1 und VI_2 zusammengenommen ergeben

Satz 10. $|A|$ ist die kleinste ganze Zahl, welche größer ist, als der Betrag von allen echten Teildingen von A.

Durch das Axiom VI wird eine neue Bevorzugung der Summen- vor der Durchschnittsbildung eingeführt. Denn die Definition des Betrages eines Dinges führt rekursiv auf die Beträge der echten Teildinge des betreffenden Dinges, also letzten Endes auf das Leerding, das Einheitselement der Addition. Das Axiom II_4 über das Leerding ist daher für die folgenden Entwicklungen viel wichtiger als das Axiom III_4 über das Totalding. Ja, da die wichtigsten Argumentationen des Folgenden von der Existenz eines Totaldinges ganz unabhängig sind, wollen wir das Axiom III_4, welches bisher nur zum Beweis der zweiten Hälfte von Satz 5 verwendet worden ist, wieder weglassen, bzw. ausdrücklich hervorheben, in welche Argumentationen dieses Axiom eingeht.

Satz 11. *Aus* $A = B$ *folgt* $|A| = |B|$.

„ $A \subset B$ „ $|A| < |B|$.

„ $A \subseteqq B$ „ $|A| \leqq |B|$.

Die erste dieser Beziehungen ist evident, die zweite folgt aus VI_2, die dritte aus den beiden ersten.

Satz 12. Der Betrag ist für jedes Ding $\geqq v$, (wo $v = |V|$). Dies folgt aus Satz 11 mit Rücksicht auf Satz 5.

Wir führen nun einen Namen ein für jene Dinge, welche nur das Leerding als echtes Teilding enthalten, d. h. also für jene vom Leerding verschiedenen Dinge, welche nur das Leerding und sich selbst als Teildinge enthalten.

Definition 3 (Elementarding). *Wir nennen Elementarding ein Ding, welches das Leerding und nur dieses als echtes Teilding enthält.*

Satz 13. Die Elementardinge sind, wenn wir den Betrag des Leerdinges mit v bezeichnen, *dadurch charakterisiert, daß ihr Betrag* $= v + 1$ *ist.* (Zufolge Satz 11_3.)

Satz 14. Sind E *und* E' *Elementardinge, so ist* $E \cdot E' = V$, *wenn* $E \neq E'$ *ist, und* $E \cdot E' = E$, *wenn* $E = E'$ *ist.*

Satz 15. Jedes vom Leerding verschiedene Ding enthält ein Elementarding als Teilding. Jedes vom Leerding verschiedene Ding hat, den Sätzen 12 und 11 zufolge, einen Betrag $> v$. Für Dinge mit dem Betrag $v + 1$ ergibt sich die Behauptung von Satz 15 aus Satz 13. Angenommen, es sei bereits bewiesen, daß jedes Ding, dessen Betrag $\leqq v + n - 1$ ist, ein Elementarding als Teilding enthält. Sei dann A ein Ding mit dem Betrag $v + n$. Es enthält nach Satz 10 ein echtes Teilding, dessen Betrag $= v + n - 1$ ist. Also enthält A nach der für $v + n - 1$ als bewiesen angenommenen Behauptung von Satz 15 ein Elementarding als Teilding.

Satz 16. Ein Ding mit dem Betrag n *ist Summe von einem Ding mit dem Betrag* $n - 1$ *und einem Elementarding.*

Ist $|A| = n$, so existiert nach Satz 10 ein echtes Teilding B von A mit dem Betrag $n - 1$. Nach Axiom V existiert ein Ding C, so daß $B + C = A$ und $B \cdot C = V$ gilt. Aus der Betragsgleichung ergibt sich für dieses Ding C

$$|C| = |B + C| + |B \cdot C| - |B|, \quad \text{also} \quad = |A| + |V| - |B| = |V| + 1.$$

Demnach ist C ein Elementarding und Satz 16 ist bewiesen.

Satz 17. Ist A *Summe von einem Elementarding* E *und von einem Ding* D, *dessen Betrag* $v + n$ *ist, so ist* $|A| = v + n$ *bzw.* $= v + n + 1$,

je nachdem ob $E \leqq D$ *gilt oder nicht gilt.* Nach VI_3 ist $|A| = |D + E| = |D| + |E| - |D \cdot E| = (v + n) + (v + 1) - |D \cdot E|$, und da $D \cdot E = E$ bzw. $= V$ ist, je nachdem $E \leqq D$ gilt oder nicht gilt, ergibt sich hieraus die Behauptung von Satz 16.

Satz 18 **(Zerspaltungssatz).** *Jedes Ding, dessen Betrag* $= v + n$ *ist, ist Summe von* n, *aber nicht von weniger als* n *Elementardingen.* Die beiden Teile der Behauptung ergeben sich aus den Säten 16 bzw. 17 durch vollständige Induktion.

Satz 19 **(Komprehensionssatz).** *Sind* A *und* B *zwei Dinge, deren Beträge* $\geqq v + 2$ *sind und so, daß alle echten Teildinge von* A *auch Teildinge von* B *sind, dann gilt* $A \leqq B$. *Zwei Dinge mit Beträgen* $\geqq v + 2$, *für die das System aller echten Teildinge identisch ist, sind identisch.*

Wenn für zwei Dinge A und B, deren Beträge $\geqq v + 2$ sind, nicht $A \leqq B$ gilt, dann ist also $A \cdot B \neq A$. Mithin ist $A \cdot B < A$ und es existiert nach Axiom V ein Ding D, so daß $A \cdot B + D = A$ und $A \cdot B \cdot D = V$ gilt. Es gilt dann $D \leqq A$. Nach Satz 15 enthält D ein Elementarding E. Es gilt $E \leqq A$ und, weil $|A| \geqq v + 2$ ist, gilt $E < A$. Es gilt aber nicht $E \leqq B$, denn sonst wäre ja $E \leqq A \cdot B$, was unmöglich ist, da $E \leqq D$ und $D \cdot A \cdot B = V$ vorausgesetzt wurde. Wenn also $A \leqq B$ nicht gilt, so existiert ein echtes Teilding von A, welches nicht Teilding von B ist. Damit ist die erste Hälfte von Satz 19 bewiesen und aus ihr ergibt sich sofort die zweite.

2. Axiomatik der endlichen Mengen.

Wir wollen nun das Axiom V verschärfen, indem wir annehmen

Axiom V′ (Axiom von der eindeutigen Subtraktion). *Wenn* $A + S = S$ *gilt, so gibt es genau ein Ding* B, *welches den Beziehungen genügt*

$$A + B = S, \qquad A \cdot B = V.$$

Wir setzen auch $B = S - A$.

Mit Hilfe von Axiom V′ kann bewiesen werden das

Lemma. Voraussetzungen:

1. D und E seien zwei Elementardinge.
2. Es gelte $E \leqq A + D$.
3. Es gelte $A \cdot D = V$.

Behauptung: Es gilt entweder $E = D$ oder $E \leqq A$.

Angenommen, die Behauptung wäre falsch, so würden, wie daraus hervorgeht, daß E ein Elementarding ist, die Voraussetzungen 1., 2., 3. zusammenbestehen mit den Beziehungen 4. $E \cdot D = V$, 5. $E \cdot A = V$. Daraus leiten wir aber einen Widerspruch her. Nehmen wir nämlich

an, es würden 1. bis 5. zusammenbestehen. Dann wenden wir auf die Dinge $A + E$ und D die Betragsgleichung an und erhalten dadurch

$$(\dagger) \qquad |A+E| + |D| = |A+E+D| + |(A+E)\cdot D|.$$

Wegen 5. ist $|A+E| = |A| + 1$. Aus 2. ergibt sich $|A+E+D| = |A+D|$. Also ergibt sich aus (†)

$$(\dagger\dagger) \qquad |A| + 1 + |D| = |A+D| + |(A+E)\cdot D|.$$

Wenden wir auf die Dinge A und D die Betragsformel an, so erhalten wir

$$(\dagger\dagger\dagger) \qquad |A| + |D| = |A+D| + |A\cdot D|.$$

Der Vergleich von (††) und (†††) ergibt $|(A+E)\cdot D| = |V| + 1$. Es ist also $(A+E)\cdot D$ ein vom Leerding verschiedenes Teilding von D. Da D nach 1. ein Elementarding ist, so ist mithin $(A+E)\cdot D = D$, d. h. es ist $D \leqq A+E$. Da offenbar auch $A \leqq A+E$ gilt, so gilt nach Satz 7_1 $A+D \leqq A+E$. Anderseits ist nach 2. $A+E \leqq A+D$, also ist $A+E = A+D$. Nennen wir diese Menge $A+D=S$, so sehen wir: Nach 4. ist $E\cdot D = V$. Die beiden Dinge E und D sind also verschieden; trotzdem gelten die Beziehungen

$$A+D=S, \quad A\cdot D = V \quad \text{(letzteres nach 3.)},$$
$$A+E=S, \quad A\cdot E = V \quad \text{(letzteres nach 5.)}.$$

Dies widerspricht aber dem Axiom V′, demzufolge zu den Dingen S und A ($A \leqq S$) nur ein einziges Ding $S - A$ existiert. Damit ist das Lemma bewiesen.

Satz 20. Ist ein Elementarding Teilding einer Summe, so ist es Teilding von mindestens einem der Summanden.

Man sieht leicht ein, daß man sich beim Beweise auf Summen von zwei Summanden, deren Durchschnitt das Leerding ist, beschränken kann. Wir machen also die Voraussetzungen

1. $A\cdot B = V$,
2. E ist ein Elementarding,
3. $E \leqq A+B$,

und wir behaupten: Es gilt entweder $E \leqq A$ oder $E \leqq B$.

Wäre die Behauptung falsch, so würden mit den Voraussetzungen 1., 2., 3. die beiden Beziehungen zusammenbestehen: 4. $E\cdot A = V$, 5. $E\cdot B = V$. Das ist aber unmöglich. Denn wenn wir die Betragsgleichung auf die Dinge $A+E$ und $B+E$ anwenden, so erhalten wir

$$(\dagger) \quad |A+E| + |B+E| = |A+B+E| + |(A+E)\cdot(B+E)|.$$

Nun folgt aus 4. $|A+E| = |A| + 1$, und aus 5. $|B+E| = |B| + 1$.

Also ergibt sich aus (†), wenn wir auf der rechten Seite 3. berücksichtigen:

(††) $|A| + |B| + 2 = |A + B| + |(A + E) \cdot (B + E)|$.

Vergleichen wir diese Formel mit jener, die sich durch Anwendung der Betragsgleichung auf die Dinge A und B ergibt, d. h. mit

(†††) $|A| + |B| = |A + B| + |A \cdot B|$,

so erhalten wir mit Rücksicht auf 1. $|(A + E) \cdot (B + E)| = 2 + |V|$. Also existiert nach den Sätzen 8 und 15 ein Elementarding E', welches den Beziehungen genügt

$$E \cdot E' = V, \quad E' \leqq (A + E) \cdot (B + E).$$

Es ist also $E' \leqq A + E$. Daher ist mit Rücksicht auf $E' \neq E$ und 4. nach dem Lemma $E' \leqq A$, und aus analogen Gründen ist $E' \leqq B$. Also ist nach Satz 7_2 $E' \leqq A \cdot B$. Dies steht aber in Widerspruch zu 1. Damit ist Satz 20 bewiesen.

Satz 21. Sind A und B irgendzwei Teildinge eines Dinges C, so gilt

$$A = A \cdot B + A \cdot (C - B).$$

Bezeichnen wir die Summe auf der rechten Seite mit S, so ist erstens, da beide Summanden von S Teildinge von A sind, nach Satz 7_1 S ein Teilding von A. Wir haben zu zeigen, daß auch umgekehrt A ein Teilding von S ist. Nun gilt nach Definition des Dinges $C - B$ die Beziehung $C = B + (C - B)$. Also ist nach Satz 20 jedes Elementarding, welches Teilding von C ist (insbesondere also jedes Elementarding, welches Teilding von A ist) entweder Teilding von B oder Teilding von $C - B$. Jedes Elementarding, welches Teilding von A ist, ist also Teilding von einem der beiden Summanden von S und daher von S. Also gilt nach dem Komprehensionssatz die Beziehung $A \leqq S$, und damit ist bewiesen, daß $A = S$ gilt, wie Satz 21 behauptet.

Man kann nun die *distributiven Gesetze*, die *de Morganschen Formeln*, ferner unter Voraussetzung der Existenz eines Totaldinges (d. h. unter Annahme von III_4) die Sätze des Klassenkalküls über *non-A* und das *Dualitätsprinzip* beweisen. Wir gehen hierauf nicht näher ein, sondern beweisen sogleich jene beiden Sätze, durch welche das aufgestellte Axiomensystem als ein Axiomensystem für endliche Mengen erwiesen wird.

a) *Ist E eine endliche Menge, so genügt das System der Teilmengen von E (jede Teilmenge als „Ding" aufgefaßt) unseren Axiomen.* I ist selbstverständlich erfüllt, II und III sind erfüllt, wenn unter der Summen- und Durchschnittsbildung die mengentheoretische Summen- und Durchschnittsbildung verstanden wird, als V die leere Menge, als T die

Menge E aufgefaßt wird. Insbesondere gilt also III_4. Die Axiome IV und V' sind dann erfüllt. Ordnen wir jeder Teilmenge von E als Betrag ihre Mächtigkeit zu, so ist das Axiom VI erfüllt. Speziell ist $|V| = 0$.

b) *Ist ein System von Dingen gegeben, welches den Axiomen I, II, III, IV, V', VI genügt (insbesondere auch* III_4*), so ist es möglich, das System der vorliegenden Dinge eineindeutig auf das System aller Teilmengen einer endlichen Menge abzubilden, und zwar so, daß die Summe bzw. der Durchschnitt bzw. die Differenz je zweier Dinge des Systems auf die mengentheoretische Summe bzw. auf den mengentheoretischen Durchschnitt bzw. auf die mengentheoretische Differenz der entsprechenden Bildmengen abgebildet wird, und daß, wenn speziell* $|V| = 0$ *gilt, der Betrag jedes Dinges mit der Mächtigkeit der Bildmenge übereinstimmt.*

Wenn $|T| = 0$ ist, so ist $T = V$. Sämtliche Dinge des vorliegenden Systems sind dann identisch, und das vorliegende System von Dingen kann eineindeutig und unter Erhaltung aller Relationen auf das System der Teilmengen der leeren Menge abgebildet werden.

Angenommen, Satz b) sei bereits bewiesen für alle Systeme von Dingen, für welche $|T| \leqq n - 1$ gilt. Satz b) ist bewiesen, wenn wir auf Grund dieser Annahme jedes vorgegebene System von Dingen, für welche $|T| = n$ gilt, in der behaupteten Weise auf das System der Teilmengen einer Menge der Mächtigkeit n abbilden. Wir wollen annehmen, es sei ein System von Dingen vorgelegt, welches unseren Axiomen genügt und die Beziehungen $|T| = n$, $|V| = 0$ erfüllt. Nach Satz 16 enthält T ein echtes Teilding M mit dem Betrag $n - 1$. Nach Annahme ist das System der Teildinge von M eineindeutig und unseren Forderungen gemäß abbildbar auf das System der Teilmengen einer Menge M' mit der Mächtigkeit $n - 1$. Nach Satz 16 existiert ein Elementarding E, so daß $T = M + E$ und $E \cdot M = V$ gilt. Wir ordnen dem Ding E eine zu M' fremde Menge E' mit der Mächtigkeit 1 zu. Das vorliegende Dingsystem enthält, wenn A irgendein Teilding von M ist, ein Ding $A + E$. Jedem solchen Ding ordnen wir die Menge $A' + E'$ zu, wenn A' die dem Teilding A von M zugeordnete Teilmenge von M' bezeichnet. Nun ist nach Satz 21 jedes Teilding von T, d. h. jedes Ding des vorliegenden Systems Summe von einem Teilding von M und einem Teilding von E. Da E ein Elementarding ist, ist also jedes Ding des vorliegenden Systems entweder Teilding von M oder Summe von E und einem Teilding von M. Wir haben also durch die angegebene Vorschrift bereits jedem Ding des vorliegenden Systems eine Teilmenge der Menge $M' + E'$ zugeordnet. Man sieht mühelos ein, daß die so definierte Zuordnung allen Forderungen von Satz b) genügt, d. h. daß Summen,

Durchschnitte und Differenzen von Dingen in die entsprechenden Summen, Durchschnitte und Differenzen der Bildmengen übergeführt werden und daß der Betrag jedes Dinges mit der Mächtigkeit der ihm zugeordneten Menge übereinstimmt. Damit ist Satz b) bewiesen.

3. Die Verknüpfungsaxiome der n-dimensionalen projektiven und sphärischen Geometrie.

Um aus dem Axiomensystem des Abschnittes 2 zu den Axiomen für endliche Mengen zu gelangen, hatten wir das Axiom V durch die Verschärfung V′ zu ersetzen, $|V| = 0$ anzunehmen und die Dinge des Systems als Teilmengen einer endlichen Menge zu deuten. Durch eine andere Deutung der Axiome des Abschnittes 2 erhält man die Verknüpfungsbeziehungen der n-dimensionalen projektiven Geometrie. Allgemein kann man ein System von irgendwelchen Dingen, welche den Axiomen I—V genügen, als Feld bezeichnen. Felder bilden dann z. B. die Teilmengen einer Menge und die projektiven Teilräume eines projektiven Raumes.

Bezeichnet man als „Dinge" die *projektiven niedrigerdimensionalen Teilräume eines endlichdimensionalen projektiven Raumes P*, dann gilt offenbar Axiom I. Bezeichnet man als Summe zweier projektiver Teilräume A und B von P den durch die beiden Räume A und B *„bestimmten"* projektiven Unterraum von P, d. h. den niedrigstdimensionalen projektiven Teilraum von P, welcher A und B enthält, so gilt Axiom II. Bezeichnet man als Durchschnitt zweier projektiver Teilräume A und B von P den A und B *„gemeinsamen"* projektiven Raum, d. h. den höchstdimensionalen projektiven Teilraum von P, welcher in A und B enthalten ist, so gilt Axiom III. Insbesondere sind II_4 und III_4 erfüllt, wenn wir einen *leeren projektiven Raum* als Leerding einführen und den *Raum P* als Totalding bezeichnen. Es gelten ferner die Axiome IV und V (aber nicht V′) und, wenn wir $|V| = -1$ setzen und unter dem Betrage eines Dinges die *Dimension* des betreffenden projektiven Raumes verstehen, gilt Axiom VI. Dies ergibt sich aus bekannten einfachen Sätzen über lineare Gleichungen.

Elementarding ist im System der projektiven Räume (wegen $|V| = -1$) jeder nulldimensionale projektive Raum, d. h. jeder *Punkt*. Durch die Einführung der Punkte als Elementardinge des Feldes der Teilräume eines Raumes wird offenbar Euklids alte Definition: *„Punkt ist, was keine Teile hat"*, präzisiert! Während eine Menge von der Mächtigkeit n nach dem Zerspaltungssatz und wegen $|V| = 0$ *Summe von n Mengen der Mächtigkeit* 1 ist, und zwar wegen Axiom V′ Summe von n bis auf die Reihenfolge *eindeutig* bestimmten Mengen der Mächtigkeit 1, — ist

ein n-dimensionaler projektiver Raum nach dem Zerspaltungssatz wegen $|V| = -1$ *Summe von* $n+1$ *Punkten* (nulldimensionalen projektiven Räumen), und zwar ist die Zerspaltung, da bloß Axiom V, nicht aber Axiom V′ gilt, *nicht eindeutig*. Die Tatsache, daß der Betrag (die Dimension) des Leerdinges im Feld der projektiven Räume um Eins geringer ist als der Betrag (die Mächtigkeit) des Leerdinges im Feld der Teilmengen einer endlichen Menge, und daß infolgedessen der Betrag von Dingen im System der projektiven Räume um eine Einheit geringer ist als der Betrag entsprechender Dinge im System der endlichen Mengen, spiegelt sich in der Tatsache wieder, daß ein n-dimensionales Simplex bestimmt ist durch die Menge seiner Eckpunkte, welche die Mächtigkeit $n+1$ hat.

Auch die Beziehungen der *n-dimensionalen sphärischen Geometrie* ordnen sich in das Axiomensystem von Abschnitt 2 ein, was sich schon aus den Beziehungen von sphärischer und projektiver Geometrie ergibt. Es sei eine n-dimensionale Sphäre S gegeben. Man bezeichne als Dinge des Feldes die in S enthaltenen *niedrigerdimensionalen Großsphären* (d. h. die in S enthaltenen niedrigerdimensionalen Sphären, deren Durchmesser mit jenem von S übereinstimmt). Als Leerding des Feldes ist die leere Sphäre aufzufassen und (-1)-dimensional zu nennen. Die Elementardinge des Feldes sind die nulldimensionalen Großsphären, d. h. *die Paare entgegengesetzter* (diametral gegenüberliegender) *Punkte*. Es gelten dann alle Axiome I bis VI, wenn als Betrag einer Sphäre ihre Dimension aufgefaßt wird. Beispielsweise gilt dann auch der Satz: *Je zwei verschiedene nulldimensionale Sphären haben zur Summe* (= „bestimmen eindeutig") *eine eindimensionale Sphäre*. Wenn man als Elementarding der sphärischen Geometrie statt der nulldimensionalen Sphäre einzelne Punkte annimmt, dann bestimmen zwei solche Elemente, auch wenn sie verschieden sind, nicht ausnahmslos eine eindimensionale Sphäre (der Ausnahmsfall tritt für diametral gegenüberliegende Punkte ein). Aus den vorangehenden Überlegungen geht hervor, daß ein naturgemäßer rekursiver Aufbau der sphärischen Geometrie zu nulldimensionalen Großsphären, also zu diametral gegenüberliegenden Punktepaaren, und nicht zu einzelnen Punkten, als den Elementardingen führt.

Wir betrachten nun den Spezialfall $n = 3$ und führen in diesem Fall folgende Bezeichnungsweise ein: Wir nennen die Dinge mit dem Betrag 0 (die nulldimensionalen Dinge) „*Punkte*", die Dinge mit dem Betrag 1 „*Gerade*", die Dinge mit dem Betrag 2 „*Ebenen*", das Gesamtding, dessen Betrag 3 ist, „*Raum*". Wir zeigen, daß diese Punkte, Geraden und Ebenen den Hilbertschen *Verknüpfungsaxiomen* genügen:

1. *Zwei voneinander verschiedene Punkte A, B bestimmen stets eine Gerade.*

Wir setzen voraus, A und B seien Punkte, d. h. daß $|A| = |B| = 0$ gilt. A und B sind Elementardinge unseres Systems. Setzen wir also ferner voraus, daß A und B verschieden sind, so ergibt Satz 14 die Beziehung $|A \cdot B| = -1$. Dann ergibt also die Betragsformel

$$|A + B| = |A| + |B| - |A \cdot B| = 1,$$

d. h. die Summe von A und B, d. h. das durch A und B bestimmte Ding, hat den Betrag 1, ist also eine Gerade.

2. *Irgend zwei voneinander verschiedene Punkte einer Geraden bestimmen diese Gerade.*

Setzen wir voraus, es sei G eine Gerade, d. h. daß $|G| = 1$ gilt; ferner, daß A und B zwei Punkte sind, d. h. daß $|A| = |B| = 0$ gilt; endlich, daß A und B Punkte von G sind, d. h. daß $A \leqq G$ und $B \leqq G$ gilt. Nach Satz 7_1 ist dann $A + B \leqq G$. Wenn wir schließlich noch voraussetzen, daß A und B verschieden sind, d. h. daß $|A \cdot B| = -1$ gilt, dann ist nach Satz 1 $|A + B| = 1$. Daraus folgt aber, daß $A + B = G$ gilt; denn andernfalls, wäre $A + B$ ein echtes Teilding von G, und das ist unmöglich, da der Betrag von $A + B$ und G übereinstimmt. Damit ist gezeigt, daß irgend zwei verschiedene Punkte einer Geraden G dieselbe bestimmen.

3. *Auf einer Geraden gibt es wenigstens zwei verschiedene Punkte in einer Ebene gibt es wenigstens drei nicht auf derselben Geraden liegende Punkte.*

Nach dem Zerspaltungssatz, den wir aus unseren Axiomen hergeleitet haben, ist jedes Ding vom Betrag Eins (d. h. jede Gerade) Summe von zwei verschiedenen Dingen vom Betrag Null (d. h. von zwei Punkten), und es ist jedes Ding vom Betrag Zwei (d. h. jede Ebene) Summe von drei Dingen vom Betrag Null (d. h. von drei Punkten), und zwar von solchen, die nicht auf einer Geraden liegen, d. h. deren Summe nicht den Betrag Eins hat.

4. *Drei nicht auf ein und derselben Geraden liegende Punkte A, B, C bestimmen stets eine Ebene.*

Wenn die Summe von drei Dingen mit dem Betrag Null nicht den Betrag Eins hat, so hat sie nach dem Zerspaltungssatz den Betrag Zwei.

5. *Irgend drei Punkte einer Ebene, die nicht auf ein und derselben Geraden liegen, bestimmen diese Ebene.*

Der Beweis läuft unter Verwendung der Betragsgleichung analog dem von Zwei.

6. *Wenn zwei Punkte A, B einer Geraden a in einer Ebene α liegen, so liegt jeder Punkt von a in der Ebene α.*

Nach dem aus unseren Axiomen abgeleiteten Satz 7_1 folgt aus $A \leqq \alpha$ und $B \leqq \alpha$ die Beziehung $A + B \leqq \alpha$. Sind A und B verschieden, so gilt $A + B = a$, also $a \leqq \alpha$ und daher, wenn P irgendein Punkt $\leqq a$ ist, $P \leqq \alpha$.

7. *Wenn zwei Ebenen α, β einen Punkt A gemein haben, so haben sie wenigstens noch einen weiteren Punkt B gemein.*

Durch diesen Satz postuliert Hilbert, daß das Totalding einen Betrag $\leqq 3$ hat. Andernfalls wäre ja der Satz nicht richtig: Zwei Ebenen des R_4 können genau einen Punkt gemein haben. Befinden wir uns im Spezialfall $|T| = 3$, so ergibt sich der Satz aus der Betragsgleichung. Denn es ist $|\alpha + \beta| = 3$, $|\alpha| = |\beta| = 2$, also muß $|\alpha \cdot \beta| = 1$ sein.

(In der projektiven Geometrie ist die Voraussetzung $|\alpha \cdot \beta| \geqq 0$ gar nicht nötig.)

8. *Es gibt wenigstens vier nicht in einer Ebene gelegene Punkte.*

Durch diesen Satz postuliert Hilbert, daß das Totalding einen Betrag $\geqq 3$ hat. Wegen $|T| \geqq 3$ existieren nach dem Zerspaltungssatz vier Punkte, deren Summe der Raum ist. Der Betrag der Summe dieser vier Punkte ist daher nicht schon zwei, d. h. die vier Punkte liegen nicht in einer Ebene.

(Eingegangen am 1. 11. 27.)

[*Zusatz während der Drucklegung:*] Die im vorangehenden entwickelte Axiomatik des Feldbegriffes wird in einem demnächst in den Monatsheften f. Mathem. u. Phys. erscheinenden Aufsatz von G. Bergmann in eine reduzierte und zugleich duale Gestalt gebracht. Daselbst wird ferner die Äquivalenz der distributiven Verknüpfung von Summen- und Durchschnittsbildung mit der Eindeutigkeit der Umkehrung dieser Operationen bewiesen, und es werden die Bedingungen untersucht, unter denen in einem Feld eine dem Axiom VI genügende Dimensionsfunktion definierbar ist. (Vgl. bereits Bergmanns Voranzeige im Wiener Akad. Anzeiger, 6. XII. 1928.)

Es sei ferner darauf hingewiesen, daß auch das *System der meßbaren Teilmengen des R_n* ein Feld bildet und das Maß eine zwar nicht ganzzahlige Funktion der Dinge dieses Feldes ist, die aber doch der Betragsgleichung genügt: $m(A) + m(B) = m(A + B) + m(A \cdot B)$. Auch eine formale Axiomatik der *Wahrscheinlichkeitsrechnung* läßt sich auf diese Weise gewinnen, ähnlich der von J. M. Keynes („Über Wahrscheinlichkeit", deutsch bei Barth, 1926).

Bemerkung zu einigen Sätzen über unendliche Reihen.

Von KONRAD KNOPP in Tübingen.

In Band 34 dieses Jahresberichtes, S. 161—171, führt Herr Ostrowski den Beweis eines funktionentheoretischen Satzes von Vitali-Blaschke bzw. einer Variante desselben mit Hilfe der bekannten Jensenschen Formel unmittelbar auf einen Satz über Reihen mit positiven, monoton zu 0 abnehmenden Gliedern zurück. Dieser lautet:

Satz 1. *Eine Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *mit positiven, monoton gegen* 0 *abnehmenden Gliedern konvergiert dann und nur dann, wenn die Folge*

$$\sigma_n = s_n - n a_n, \quad \left(s_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\right)$$

konvergiert. Im Falle der Konvergenz ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \sigma_n.$$

Dieser Satz enthält die bekannte Tatsache, daß für die in Rede stehenden Reihen $n a_n \longrightarrow 0$ streben muß. Diese letztere hat de la Vallée Poussin weitgehend verallgemeinert und Herr Ostrowski beweist im Anschluß daran die folgende Verallgemeinerung seines ersten Satzes:

Satz 2. *Es sei* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *eine Reihe mit positiven Gliedern und* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$ *eine solche Folge positiver Zahlen, daß* $\frac{a_n}{\mu_n}$ *monoton gegen* 0 *abnimmt. Unter diesen Voraussetzungen konvergiert die Reihe* $\sum a_n$ *dann und nur dann, wenn die Folge*

$$\sigma_n = s_n - \frac{\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n}{\mu_n} a_n, \quad \left(s_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\right)$$

konvergiert. Im Falle der Konvergenz ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \sigma_n.$$

Dieser Satz enthält für $\mu_k \equiv 1$ den vorigen und für $\mu_k = \frac{1}{k}$ die schon von E. Lasker bemerkte Tatsache, daß, wenn bei der konvergenten Reihe $\sum a_n$ sogar $n a_n$ monoton fällt, notwendig $n \log n \cdot a_n \longrightarrow 0$ streben muß.

Endlich wird dieser Satz auf Integrale übertragen und liefert so den

Satz 3. *Es seien* $f(x)$ *und* $\mu(x)$ *für* $0 \leqq x < +\infty$ *definierte, positive, integrierbare Funktionen und mit wachsendem* $x \longrightarrow +\infty$ *nehme* $\frac{f(x)}{\mu(x)}$ *monoton gegen* 0 *ab. Unter diesen Voraussetzungen konvergiert das Integral* $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ *dann und nur dann, wenn die Funktion*

$$\sigma(x) = s(x) - \left(\frac{1}{\mu(x)} \int_0^x \mu(y)\,dy\right) f(x), \quad \left(s(x) = \int_0^x f(y)\,dy\right),$$

für $x \longrightarrow +\infty$ *einem endlichen Grenzwert zustrebt; und wenn dies der Fall ist, so ist dieser Grenzwert gleich dem Integral* $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$.

Diese interessanten Sätze formuliert Herr Ostrowski noch in einer zweiten Art, durch die er sich einen Beweis ermöglicht, den er als be-

sonders elegant bezeichnet. Alle drei ergeben sich aber mit wohl nicht mehr zu überbietender Einfachheit in folgender Weise:

Schreibt man das σ_n des Satzes 1 in der Form

$$(1)\quad \sigma_n = (a_1 - a_n) + (a_2 - a_n) + \cdots + (a_\nu - a_n) + \cdots + (a_n - a_n),$$

so folgt aus den Voraussetzungen, daß neben s_n auch σ_n monoton wächst. Daher hat man

$$s_n \longrightarrow s, \quad \sigma_n \longrightarrow \sigma, \quad (s \text{ und } \sigma < \textit{oder} \doteq +\infty).$$

Wegen $\sigma_n \leqq s_n$ ist nun sicher $\sigma \leqq s$. Bricht man aber die Summe auf der rechten Seite von (1) für $n > \nu$ beim ν-ten Summanden ab, so folgt für $n \longrightarrow +\infty$, daß

$$\sigma \geqq s_\nu, \quad \text{also} \quad \sigma \geqq s \quad \text{und somit} \quad \sigma = s$$

ist. Damit ist alles bewiesen; denn im Falle der Endlichkeit des gemeinsamen Wertes hat man noch $na_n = s_n - \sigma_n \longrightarrow 0$.

Der Satz 2 ergibt sich wörtlich ebenso, wenn man das dortige σ_n in der Form

$$(2)\quad \sigma_n = \mu_1\left(\frac{a_1}{\mu_1} - \frac{a_n}{\mu_n}\right) + \cdots + \mu_\nu\left(\frac{a_\nu}{\mu_\nu} - \frac{a_n}{\mu_n}\right) + \cdots + \mu_n\left(\frac{a_n}{\mu_n} - \frac{a_n}{\mu_n}\right),$$

und der Satz 3 ebenso, wenn man $\sigma(x)$ in der Form

$$(3)\qquad \sigma(x) = \int_0^\xi \mu(y)\left(\frac{f(y)}{\mu(y)} - \frac{f(x)}{\mu(x)}\right) dy + \int_\xi^x \mu(y)\left(\frac{f(y)}{\mu(y)} - \frac{f(x)}{\mu(x)}\right) dy$$

schreibt.

(Eingegangen am 25. 4. 28.)

Vereinfachter Beweis des Hauptsatzes über symmetrische Funktionen.

Von Alwin Korselt in Plauen i. V.

Die Beweise der ersten Sätze über symmetrische Funktionen haben noch nicht den möglichen Grad der Einfachheit erhalten. Man schlägt sich mit Gleichungswurzeln, neuen Veränderlichen, Ableitungen oder Rangordnung der Veränderlichen herum, während der Begriff der Symmetrie gerade eine solche Ordnung ausschließt und die Sätze doch unmöglich von dem Verhalten zu einer anderen Veränderlichen abhängen können. Auch hier genügt vollständige Induktion und ein leicht erkennbarer Ansatz. Dies möge für den Gaußschen Satz durchgeführt werden:

G) *Eine ganze symmetrische Funktion f der Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ mit irgendwelchen Begleitern gilt gleich einer ganzen Funktion der Grundfunktionen der x_ν, deren Begleiter ganze ganzzahlige Funktionen der Begleiter von f sind.*

Für den Beweis ist es gut, einige Verständigungen über allgemeine Begriffe vorauszuschicken, die auch sonst brauchbar sind und bisher nirgends verwendet werden.

1. *Füllig* = von Null verschieden.

2. *Leiter, Hilfsveränderliche, Parameter von f* = Argument von f, dessen Werte dem f schon Veränderliche als Werte erteilen, vielleicht sogar schon Funktionen. So ist a ein Parameter von $x^2 + a$ in bezug auf x, und x eine zugehörige „Unterveränderliche". In der Bedeutung „Hilfsveränderliche" sagt das Wort, daß mit ihrer Hilfe vorgeschriebene Funktionen in vorgeschriebener Form ausdrückbar sind.

3. *x ist gleichgültiges Argument von f, kommt in f nicht vor* = für jeden erlaubten Wert von x — und solche gibt es — erhält f denselben Wert (der eine Funktion sein kann). Andernfalls heißt x *wesentliches* Argument von f und „kommt in f vor". Z. B. x ist gleichgültiges Argument von $y + x + 1 - x$.

4. *x ist scheinbares Argument von f* = x kommt in einem Bestandteile von (der Vorstellung von) f vor, aber jede Ersetzung von x durch erlaubte Werte macht f leer. Z. B. in den Funktionen

$$\int_0^1 x\,dx \left(= \tfrac{1}{2}\right), \qquad \lim\,(x, \infty)\,\frac{1}{1+x}\,(= 0).$$

5. *Einglied, Monom* = eine unveränderliche Größe oder ein Potenzprodukt von Veränderlichen nebst einem von diesen unabhängigen Faktor, der dann „Begleiter, Koeffizient" des Eingliedes heiße.

6. *Vielglied, Polynom* = Summe von Eingliedern. Eine ganze Funktion, z. B. $(x - y)(x + y)$ ist also noch kein Polynom, sondern nur einem solchen „gleich oder gleichläufig". Durch verschiedene Ordnung der ganzen Funktion entstehen verschiedene Vielglieder mit ganz andern Begleitern.

7. *Begleiter eines Vielgliedes P* = Begleiter eines in P „vorkommenden" Eingliedes.

Die ganzen Funktionen sollen hier nach *allen* Argumenten in Vielglieder entwickelt und diese als möglichst zusammengezogen angenommen werden, so daß keine Nullglieder, leere Exponenten oder gleichgültige oder scheinbare Argumente vorkommen.

8. *Grad δf einer ganzen Funktion f von irgendwelchen Veränderlichen* = größte unter den Zahlen, die als Summe von Exponenten der Eingliedern von f erscheinen.

Spanne eines Eingliedes E = δE, vermindert um die Anzahl der in ihm wirklich (mit einem fülligen Exponenten) vorkommenden Veränderlichen.

Spanne $\mathfrak{S}f$ *eines Vielgliedes* f = größte unter den (mildnatürlichen) Zahlen, deren jede Spanne eines Eingliedes aus f ist. Z. B. $\mathfrak{S}(1 + 2x_1^3 x_2) = 4$, $\mathfrak{S}(1 + 2x_1^3 x_2) = 2$.

Mildnatürliche (positive, negative) Zahl = Null oder natürliche Zahl, bzw. ≥ 0, bzw. ≤ 0. „Mild“ spricht sich besser aus als „nicht“.

9. *Grundfunktion* ν*-ten Grades*, f_ν, *der Veränderlichen* $x_1, \ldots, x_n$ die bekannte Funktion $\sum x_1 x_2 \ldots x_\nu$.

Einartige symmetrische Funktion der x_ν = symmetrische Funktion von der Form $\sum x_1^{\lambda_1}, \ldots, x_i^{\lambda_i}$, die also lauter Begleiter 1 hat, und deren Glieder sich aus einem durch Vertauschung der x_ν ergeben. Parameter kommen nicht vor.

Es wird genügen, Satz G) für einartige Funktionen zu beweisen, da sich die andern als homogene (gleichartige) lineare Funktionen einartiger darstellen lassen, versehen mit Zahlenbegleitern oder Parametern, die schon in der gegebenen Funktion auftreten. Es sei also

10. $$f = \sum x_1^{\lambda_1} \ldots x_i^{\lambda_i}$$

eine einartige Funktion mit *fülligen* Exponenten und der Spanne

11. $$\mathfrak{S}f = \delta f - i = \lambda_1 + \cdots + \lambda_i - i.$$

Hieraus folgt offenbar

12. $$f = f_i \sum x_1^{\lambda_1 - 1} \ldots x_i^{\lambda_i - 1} + f'$$

mit f' als einer symmetrischen ganzen Funktion von demselben Grade wie f, aber in jedem Eingliede mit mindestens $i + 1$ Veränderlichen versehen. f' hat also eine Spanne unterhalb $\mathfrak{S}f$ und ist eine homogene lineare Funktion von einartigen Funktionen mit lauter für unsere Zwecke passenden (ganzzahligen) Begleitern.

Nun gilt G) für die Funktionen der Spanne 0, nämlich die f_ν und deren lineare Verbindungen. Nach 12. gilt G) mit einer Funktion der Spanne a auch für jede (zunächst einartige und dann nach dem Obigen überhaupt) symmetrische (ganze) Funktion der Spanne $a + 1$, da er für die in 12. rechts stehenden Bestandteile f_i, $\sum$ und f' von f gilt, die ihre Spannen unterhalb a haben. Gemäß vollständiger Induktion gilt also G) für die mildnatürliche Zahlenreihe, d. h. *für jede ganze symmetrische Funktion.*

In ähnlicher Weise habe ich die Potenzsummen $\sum x_1^i$ vermittelst der Funktion $\sum x_1 \ldots x_r x_{r+1}^m$ $(m > 1)$ behandelt und bin für den Beweis des Newtonschen Satzes mit einfachen Kehrschlüssen ausgekommen.

(Eingegangen am 2. 5. 28.)

Über die Zerlegung der hyperbolischen Ebene in konvexe Polygone.

Von KARL REINHARDT in Greifswald.

Zerlegt man die parabolische Ebene in eine Folge von gleicheckigen konvexen Polygonen, von denen jedes einen Durchmesser $\leqq d$ besitzt, während in jedes ein Kreis vom Radius r gelegt werden kann, so gilt der Satz, daß die Eckenzahl dieser Polygone nicht größer als 6 sein kann. Man kann sich die entsprechende Frage für die hyperbolische Ebene vorlegen. Dabei ergibt sich für die Eckenzahl eine Schranke, die noch von d abhängt, so daß sie zwar beliebig groß werden kann, aber nur mit wachsendem d, und zwar nach Maßgabe des folgenden Satzes: *Zerlegt man die hyperbolische Ebene in eine Folge von gleicheckigen konvexen Polygonen, deren Durchmesser höchstens gleich d sind, und deren Flächeninhalte mindestens den Wert* $2\pi \cdot (\cos\text{hyp}\, r - 1)$ *haben, so kann die Eckenzahl n der Polygone nicht größer als $e^d + 4\frac{1}{2}$ sein (falls sie damit gleichzeitig größer als 6 wird).*

Der Beweis kann etwa auf dieselbe Weise geführt werden, die ich beim Beweise des entsprechenden Satzes bei der parabolischen Ebene in einem Aufsatz im Tôhoku Mathematical Journal benutzt habe[1]), der in einen topologischen Teil und in einen Grenzübergang zerfällt. Der topologische Teil gilt ohne weiteres auch für die hyperbolische Ebene, und verwendet man die dort abgeleitete Ungleichung (2), so ergibt sich beim hyperbolischen Grenzübergang sofort $n \leqq e^d + 5$. Führt man den topologischen Teil jedoch noch etwas weiter durch, so erhält man ein um ein Geringes besseres Ergebnis, das in dem obigen Satz ausgesprochen ist. Dies soll hier geschehen.

Ich denke mir die Zerlegung konzentrisch aufgebaut, indem ich ein beliebiges Polygon als *Kern* R_0 herausgreife, diejenigen Polygone, die an R_0 in Seiten und Ecken angrenzen, zu einem *ersten Ring* R_1 zusammenfasse, diejenigen, die ebenso „nach außen" an R_1 angrenzen, zu einem *zweiten Ring* R_2, usw. Der Teilbereich $R_0 + R_1 + R_2 + \cdots + R_\nu$ der Zerlegung sei B_ν. Dann ist B_ν stets einfach zusammenhängend, wenn $n \geqq 6$ ist.[2]) Das Randpolygon von B_ν heiße C_ν. Auf C_ν liegen zwei Arten von Punkten: solche, die Ecken von nur einem einzigen der-

1) Zwei Beweise für einen Satz über die Zerlegung der Ebene, The Tôhoku Mathematical Journal, Vol. 28, 1927.

2) Siehe a. a. O., S. 222.

jenigen Polygone sind, die B_ν zusammensetzen *(Ecken erster Art)*; und solche, in denen zwei Polygone von B_ν zusammenstoßen *(Ecken zweiter Art)*.[1]) An C_ν grenzen zwei Arten von Polygonen: solche, auf deren Rand keine Ecke zweiter Art von C_ν liegt *(Hauptpolygone)*; und solche, auf deren Rand eine Ecke zweiter Art von C_ν liegt *(Nebenpolygone)*. Die sämtlichen an C_ν grenzenden Haupt- und Nebenpolygone setzen $R_{\nu+1}$ zusammen. Ein an C_ν grenzendes Hauptpolygon muß (immer $n \geqq 6$ vorausgesetzt) auf $C_{\nu+1}$ offenbar mindestens $n-4$ Ecken erster Art haben; und ein an C_ν grenzendes Nebenpolygon besitzt auf $C_{\nu+1}$ mindestens $n-5$ Ecken erster Art. $n-4$ aufeinanderfolgende Ecken erster Art auf $C_{\nu+1}$ geben aber zu mindestens $n-5$ Hauptpolygonen in $R_{\nu+2}$ Anlaß; und $n-5$ aufeinanderfolgende Ecken erster Art zu mindestens $n-6$ Hauptpolygonen. Nebenpolygone in $R_{\nu+2}$ sind es aber ersichtlich mindestens soviel, wie es in $R_{\nu+1}$ überhaupt Polygone gibt. Sind also $a_{\nu+1}$ und $b_{\nu+1}$ Mindestzahlen von Haupt- bzw. Nebenpolygonen in $R_{\nu+1}$, so sind $a_{\nu+2} = (n-5) \cdot a_{\nu+1} + (n-6) \cdot b_{\nu+1}$ und $b_{\nu+2} = a_{\nu+1} + b_{\nu+1}$ Mindestzahlen von Haupt- bzw. Nebenpolygonen in $R_{\nu+2}$. Für R_1 aber ist die Zahl der Hauptpolygone mindestens n, die der Nebenpolygone mindestens Null. Damit ergeben sich für die Mindestzahlen a_ν und b_ν die folgenden unimodularen Rekursionsformeln:

$$(1) \qquad \begin{cases} a_{\nu+1} = (n-5) \cdot a_\nu + (n-6) \cdot b_\nu, & a_1 = n, \\ b_{\nu+1} = \qquad\qquad a_\nu + \qquad\qquad b_\nu, & b_1 = 0. \end{cases}$$

Hieraus seien einige Folgerungen gezogen. Ich setze die Determinante $\begin{vmatrix} a_{\nu+1} & a_\nu \\ b_{\nu+1} & b_\nu \end{vmatrix} = \varDelta_\nu$. Dann ist $\varDelta_\nu = D \cdot \varDelta_{\nu-1}$, wo D die Determinante von (1), also 1, ist. Da $\varDelta_1 = -n^2$ ist, so ist $\varDelta_\nu = -n^2$. Setze ich $\frac{a_{\nu+1}}{b_{\nu+1}} = q_{\nu+1}$, so ist $q_{\nu+1} - q_\nu = -\frac{n^2}{b_{\nu+1} \cdot b_\nu}$. Die q_ν nehmen also monoton ab und konvergieren gegen einen Grenzwert q, der sich aus der Gleichung $q = \frac{(n-5) \cdot q + (n-6)}{q+1}$ zu $q = \frac{1}{2} \cdot \left((n-6) + \sqrt{(n-6) \cdot (n-2)}\right)$ bestimmt. Mithin ist $q \geqq n-6$, und daher auch $q_\nu > n-6$.

Nun ist

$$a_{\nu+1} + b_{\nu+1} = (n-4) \cdot a_\nu + (n-5) \cdot b_\nu = (n-4-\lambda) \cdot (a_\nu + b_\nu),$$

wo $\frac{1}{q_\nu + 1} = \lambda$ gesetzt ist. Da nun $q_\nu > n-6$ ist, so ist stets

$$a_{\nu+1} + b_{\nu+1} > \left(n - 4 - \frac{1}{n-5}\right) \cdot (a_\nu + b_\nu).$$

---

1) Die Ecken zweiter Art sind stets (für $n \geqq 6$) durch Ecken erster Art getrennt.

Ist also nunmehr wirklich $n > 6$, also $n - 5 \geqq 2$, so ist

$$a_{\nu+1} + b_{\nu+1} > (n - 4\tfrac{1}{2}) \cdot (a_\nu + b_\nu),$$

demnach auch
$$a_{\nu+1} + b_{\nu+1} > (n - 4\tfrac{1}{2})^\nu \cdot n.$$

Durch Summation dieser Ungleichung über ν von 0 bis $i - 1$ ergibt sich schließlich als untere Schranke für die Anzahl N_i sämtlicher im Teilbereich B_i enthaltenen Polygone der Zerlegung

$$N_i > ((n - 4\tfrac{1}{2})^i - 1) \cdot \frac{n}{n - 5\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

Nun liegt B_i ganz in einem Kreise, dessen Mittelpunkt sich in R_0 befindet, und dessen Radius $(i + 1) \cdot d$ ist. Infolge der von Null verschiedenen unteren Schranke der Flächeninhalte der Polygone gewinnt man hieraus für N_i die Abschätzung

$$2\pi \cdot (\cos\operatorname{hyp} r - 1) \cdot N_i < 2\pi \cdot (\cos\operatorname{hyp}\,(i + 1) \cdot d - 1)\ ^{1)},$$

$$N_i < \frac{\cos\operatorname{hyp}\,(i+1) \cdot d - 1}{\cos\operatorname{hyp} r - 1}. \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt

$$\frac{(n - 4\frac{1}{2})^i - 1}{e^{(i+1) \cdot d} + e^{-(i+1) \cdot d} - 2} < \frac{n - 5\frac{1}{2}}{2 \cdot n \cdot (\cos\operatorname{hyp} r - 1)}.$$

Eine solche Ungleichung kann für alle i jedoch nur bestehen, wenn $n - 4\frac{1}{2} \leqq e^d$ ist, womit (da Ungleichung (2) nur für $n > 6$ richtig ist) der ausgesprochene Satz bewiesen ist. Man kann den vorstehenden Gedankengang natürlich noch weiter ausbeuten und versuchen, auf diese Weise die (möglichst) exakte Schranke für die Eckenzahl bei gegebenem d zu erhalten, doch bietet das wenig Interesse.

---

1) Hier ist der Parameter der hyperbolischen Geometrie R zu 1 normiert; vgl. etwa R. Baldus, Nichteuklidische Geometrie, 1927.

(Eingegangen am 9. 12. 27.)

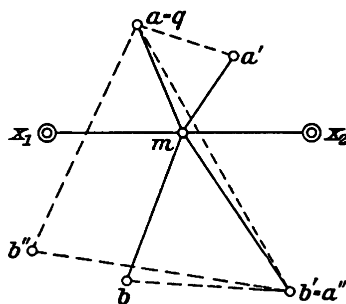
Zur Bestimmung des Punktepaares, das im Sinne von Möbius zwei gegebene Punktepaare der Ebene harmonisch trennt.

Von R. MEHMKE in Stuttgart.

Mit 1 Figur im Text.

Herr Dr. Löbell hat kürzlich[1]) auf geistreiche Weise eine hübsche Konstruktion für die in der Überschrift genannte Aufgabe hergeleitet. Ich möchte hier eine andere (vor mehreren Jahren von mir gefundene) Konstruktion mitteilen, die weniger Hilfslinien (Geraden und Kreise) erfordert und unmittelbar aus der Möbiusschen Erklärung für die harmonische Lage von vier Punkten einer Ebene hervorgeht.

Bezeichnet man komplexe Zahlen mit kleinen lateinischen Buchstaben und immer den Bildpunkt einer Zahl mit demselben Buchstaben wie diese, dann ist nach Möbius[2]), wenn a, b und a', b' die beiden gegebenen Punktepaare, dagegen x_1 und x_2 die gesuchten Punkte, x irgendeinen von ihnen und m den Mittelpunkt ihrer Verbindungsstrecke oder die zugehörigen komplexen Zahlen bedeuten, in der von Möbius gebrauchten Schreibweise



$$[mx]^2 = [ma][mb] = [ma'][mb'].$$

Wie diese Doppelgleichung ausdrückt, liegen (was natürlich Möbius bekannt war) die Punkte x_1 und x_2 in der Halbierungslinie des Winkels amb oder $a'mb'$, und zwar in einem Abstand von m gleich dem geometrischen Mittel aus den Längen von ma und mb oder ma' und mb'. Die gesuchten Punkte lassen sich daher auf elementarem Wege leicht bestimmen, sobald man m gefunden hat. Nun ist nach obigem

$$[ma] : [ma'] = [mb'] : [mb],$$

was besagt, daß m der selbstentsprechende Punkt zweier direkt ähnlichen ebenen Punktfelder ist, in denen die Strecken aa' und $b'b$ einander zugeordnet sind. Die einfachste Konstruktion für diesen Punkt ist wohl die, seit langem aus der Kinematik ähnlich-veränderlicher ebener

1) F. Löbell, Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. 36 (1927), Heft 9/12, S. 364.

2) F. A. Möbius, Leipz. Ber., mathem.-physikal. Kl. 4 (1852), S. 50 = Crelles Journal 52 (1856), S. 233 = Werke Bd. 2, S. 201, Gleichung (4).

Punktsysteme bekannte[1]): Man trägt an einen willkürlichen Punkt q die Strecken ab' und $a'b$ nach Länge und Richtung an und konstruiert, wenn die Endpunkte der beiden Strecken in der neuen Lage a'' und b'' heißen, über aa' oder $b'b$ ein zum Dreieck $a''b''q$ gleichstimmig ähnliches Dreieck, dann ist die Spitze des einen oder andern dieser Dreiecke der verlangte Punkt m. (In der Figur ist q in a liegend angenommen, so daß a'' mit b' zusammenfällt.)

Die Konstruktion versagt nicht (im Gegensatz zu der von Herrn Löbell), wenn die gegebenen Punkte a, b, a', b' auf einem Kreise liegen. Halbieren die Strecken ab und $a'b'$ einander, so fallen a'' und b'' zusammen und m rückt ins Unendliche, die Geraden ma und mb oder ma' und mb' werden von unbestimmter Richtung parallel und die Halbierungslinie ihres Winkels geht in die Parallele zu ihnen über, die in der Mitte zwischen ihnen verläuft. Man kommt so zu dem bekannten Ergebnis, daß in diesem Sonderfall der eine von den gesuchten Punkten der gemeinsame Mittelpunkt der Strecken ab und $a'b'$, der andere der unendlich ferne Punkt der komplexen Zahlenebene wird.

Bei Möbius stellt sich die Erklärung der harmonischen Lage zweier Punktepaare oder allgemeiner des komplexen Doppelverhältnisses von vier Punkten einer Ebene als Anwendung seines Verfahrens dar, „um von Relationen, welche der Longimetrie angehören, zu entsprechenden Sätzen der Planimetrie zu gelangen“. Dieses Verfahren und damit auch die eben gelöste Aufgabe, läßt sich in vielen Richtungen verallgemeinern, z. B. durch Übergang von der euklidischen zur Cayley-Kleinschen allgemeinen projektiven Maßbestimmung und auf mannigfache andere Weise, wie in einer späteren Mitteilung ausgeführt werden soll.

(Eingegangen am 24. 10. 27.)

Zur Konstruktion des Punktepaares, das zu zwei gegebenen Punktepaaren der komplexen Zahlenebene harmonisch liegt.

Von E. A. Weiss in Bonn.

Eine geometrische Konstruktionsaufgabe lösen heißt, sie auf Fundamentalkonstruktionen zurückführen, deren Ausführbarkeit postuliert wird. Die Wahl dieser Fundamentalkonstruktionen richtet sich nach der Art der Geometrie, der die Aufgabe angehört. Für die linearen und quadratischen Aufgaben der Inversionsgeometrie hat E. Study[2]) drei Fundamentalkonstruktionen angegeben, auf die er die geometrische Lösung

1) R. Mehmke, Civilingenieur, Neue Folge Bd. 29 (1883), S. 495.

2) E. Study, Das Apollonische Problem. Math. Ann. 49 (1897).

des Apollonischen Problems zurückführt. Von denselben Fundamentalkonstruktionen geht J. L. Coolidge in seinem Buche[1]) aus, in dem auch einfachere Aufgaben ausführlich zur Sprache kommen. Dort findet sich insbesondere (S. 324) eine Konstruktion des Punktepaares, das zu zwei gegebenen Punktepaaren harmonisch liegt.

Für die gleiche Aufgabe hat kürzlich Herr F. Löbell in dieser Zeitschrift (Bd. 36, S. 364) eine anschauliche Konstruktion angegeben, zu der ich die folgenden Bemerkungen machen möchte:

1. Die im Sinne der Bezeichnung $(1, \xi, -1)$ und $(1, -\xi, -1)$ *orientierten* Kreise bestimmen einen winkelhalbierenden Kreis. Es ist einer der beiden „Potenzkreise".

2. Die Konstruktion der Potenzkreise ist eine quadratische Aufgabe, deren Lösung (weil Zirkel und Lineal nicht benutzt werden dürfen) keineswegs trivial ist. Sie findet sich bei E. Study.[2])

3. Damit ist die Aufgabe auf *drei* quadratische Konstruktionen zurückgeführt — zweimal Potenzkreise zu zeichnen und einmal Kreise zum Schnitt zu bringen — während zwei quadratische Konstruktionen zur Lösung ausreichen.[3]) In der Tat kann das zweite Paar der Potenzkreise linear bestimmt werden, sobald das erste Paar bekannt ist.

(Eingegangen am 17. 1. 28.)

Ebene, nichteuklidische Bewegung.

Von R. Lauffer in Graz.

Mit 4 Figuren im Text.

In einer in diesen Berichten veröffentlichten Arbeit[4]) wurden Beziehungen zwischen den euklidischen Bewegungen der Ebene und der Geometrie eines R_3 abgeleitet und dazu benützt, um unter anderem Konstruktionen für Beschleunigungsrichtungen abzuleiten. Die a. a. O. abgeleiteten Konstruktionen besitzen eine über die euklidische Maßbestimmung hinausgehende Allgemeinheit.

1) J. L. Coolidge, A Treatise on the Circle and the Sphere. Oxford 1916.

2) l. c. S. 532.

3) Betrachtet man an Stelle der Ebene eine Kugel, so bestimmt jedes Punktepaar zwei Geraden: Die Verbindungslinie seiner Punkte und ihre Polare. Es handelt sich dann darum, 1. die gemeinsamen Treffgeraden dieser vier Geraden zu finden, und 2. die Schnittpunkte der Geraden, welche in das Innere der Kugel dringt, mit der Kugel.

4) R. Lauffer, Ebene Bewegung und Raumgeometrie, Jahrb. d. D. Math. Ver. B. 35, S. 182ff.

In den folgenden Ausführungen sollen für nichteuklidische Bewegungen der Ebene Beziehungen aufgezeigt und daraus Konstruktionen abgeleitet werden, welche auch dann ihre Gültigkeit nicht verlieren, wenn die allgemeine nichteuklidische Maßbestimmung durch die singuläre euklidische Maßbestimmung ersetzt wird. Natürlich ergeben sich bei euklidischer Maßbestimmung wegen des dann geltenden Satzes: Sind zwei Gerade zu einer dritten Geraden normal, so sind sie parallel, Vereinfachungen bei den auszuführenden Konstruktionen. Weiter zerfallen bei euklidischer Maßbestimmung gewisse, bei nichteuklidischer Maßbestimmung auftretende Kegelschnitte, so daß an ihre Stelle Gerade treten.

Da wir eine Ebene mit einteiligem oder nullteiligem Maßkegelschnitt durch eine lineare (komplexe) Abbildung eines Bündels in einem euklidischen Raum auf diese Ebene erhalten[1]) und um unsere Untersuchungen möglichst anschaulich zu machen, benützen wir als Repräsentanten eines zweidimensionalen Raumes mit nichteuklidischer Maßbestimmung das Bündel eines Punktes π in einem euklidischen R_3. Dieser Vorgang bietet uns überdies den Vorteil, für den analytischen Teil unserer Untersuchungen die Symbolik der Vektorrechnung benützen zu können, die in unserem Falle der Anwendung projektiver Koordinaten gleichkommt. Für unsere Zwecke am geeignetsten erweist sich die von E. Study eingeführte Symbolik[2]), die sich innig an die Clebsch-Aronholdsche Symbolik der projektiven Geometrie anschließt. Wir setzen

(a) $$(a/w) \equiv a_1 w_1 + a_2 w_2 + a_3 w_3$$

(b) $$(a/b) \equiv a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

(c) $$(abc) \equiv \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix}$$ und endlich

(d) $$(ab/cd) \equiv (a/c)(b/d) - (a/d)(b/c).$$

Weiter ist $$\begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3, & (a/e) \\ b_1, & b_2, & b_3, & (b/e) \\ c_1, & c_2, & c_3, & (c/e) \\ d_1, & d_2, & d_3, & (d/e) \end{vmatrix} \equiv 0$$ und daher

1) Die Abbildung erfolgt so, daß den Strahlen (Ebenen) des Bündels Punkte (Gerade) der Ebene ein-eindeutig zugeordnet werden, so daß dem Winkel zweier Strahlen der Abstand zweier Punkte und dem Winkel zweier Ebenen der Winkel zweier Geraden entspricht usw....

2) Siehe E. Study, Zur Diff. Geometrie der analytischen Kurven, Trans. of the Americ. Math. Soc. 10 (1909) S. 1—49, und Berwald, Über die Flächen mit einer einzigen Schar... München Ber. 1913 S. 143ff.

(e) $$(abc)(d/e) - (abd)(c/e) + (acd)(b/e) - (bcd)(a/e) \equiv 0$$

und wenn $(d/w) \equiv (abw)$, $(e/w) \equiv (acw)$ ist, ist

(f) $$(dew) \equiv (a/w)(abc).$$

§ 1. Geschwindigkeitsbilder eines Strahles.

Zur analytischen Darstellung des Strahles A benützen wir den auf ihm liegenden Vektor

(1) $$(a/w)\ ^{1)}$$

Ist der Vektor (a/w) von der Zeit t abhängig, so setzen wir

(2) $$D_t(a/w) \equiv (\dot{a}/w)$$

Der Vektor $(\dot{a}/w)$ (Fig. 1) besitzt, wenn A keine Minimalgerade ($(a/a) \neq 0$) ist, eine zu A normale Komponente

(3) $$(v/w) \equiv (\dot{a}/w) - \frac{(a/\dot{a})(a/w)}{(a/a)} \equiv \frac{(a\dot{a}/aw)}{(a/a)}.$$

Wird der Vektor

(4) $$(\bar{a}/w) \equiv \sigma(a/w);\ \sigma \neq 0$$

zur Bestimmung des Strahles A benützt, so ist

$$(\dot{\bar{a}}/w) \equiv \dot{\sigma}(a/w) + \sigma(\dot{a}/w) \quad \text{und}$$

(5) $$(\bar{v}/w) \equiv \sigma\frac{(a\dot{a}/aw)}{(a/a)} \equiv \sigma(v/w).$$

Der Vektor (v/w) ist daher gegenüber der Transformation (4) eine Invariante vom Gewicht eins und daher der durch den Vektor

(6) $$(a'/w) \equiv (a/w) + (v/w)$$

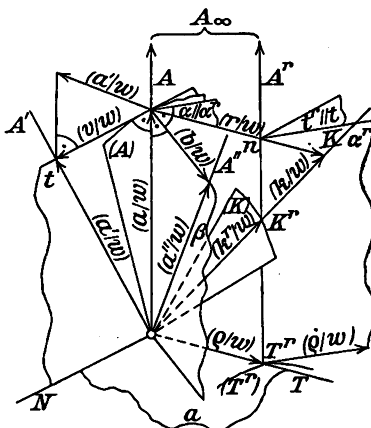


Fig. 1.

bestimmte Strahl A' gegenüber der Transformation (4) invariant.

Wir erklären den Strahl A' als den Endstrahl der Geschwindigkeit des Strahles A.

Die Ebene $t = [AA']$ ist Tangentialebene des vom Strahl A beschriebenen Bahnkegel (A).

Der Winkel $\widehat{AA'}$ ist bei endlichen Geschwindigkeiten nicht gleich 90°. Bei einem ruhenden Strahl A (nicht notwendig $(\dot{a}/w) \equiv 0$; $\{w\}$) ist $A = A'$.

1) Die Vektoren (a/w) und $\sigma(a/w)$ bestimmen denselben Strahl A. Wir verwenden nicht Einheitsvektoren ($(a/a) = 1$) zur Darstellung des Strahles A, damit auch Minimalstrahlen, bei denen $(a/a) = 0$ ist, in den Bereich der Untersuchung fallen können.

Die durch π gehende zu A' normale Ebene α' nennen wir das reziproke Geschwindigkeitsbild der Geschwindigkeit des Strahles A.

Den Vektor

$$(\varrho/w) \equiv \frac{(a v w)}{(a/a)} \equiv \frac{(a \dot{a} w)}{(a/a)}, \tag{7}$$

der ebenfalls gegenüber der Transformation (4) invariant ist, nennen wir den Winkelgeschwindigkeitsvektor des Strahles A. Der Vektor (ϱ/w) liegt in der Ebene α' und es ist wegen $(a/v) \equiv 0$

$$(\varrho/\varrho) \equiv \frac{(a v/a v)}{(a/a)^2} \equiv \frac{(v/v)}{(a/a)} \equiv \operatorname{tg}^2 (\widehat{AA'}), \tag{8}$$ weiter ist

$$(\varrho a w) \equiv (v/w) \tag{9}$$ und wegen (7)

$$(a/\varrho) \equiv 0 \tag{10}$$

$$(\dot{a}/\varrho) \equiv 0. \tag{11}$$

Durch den Endpunkt T^r des Vektors (ϱ/w) legen wir die Gerade A^r. Man sieht leicht, daß durch die Angabe der Geraden A^r nicht nur der Strahl A, sondern auch sein Winkelgeschwindigkeitsvektor und durch (9) das reziproke Geschwindigkeitsbild des Strahles A bestimmt ist.

Wir nennen A^r die Bildgerade des bewegten Strahles A. Ist der Strahl A in Ruhe, so ist $A = A^r$. Bei endlichen Geschwindigkeiten des Strahles A ist die Bildgerade A^r immer im Endlichen. Die Ebene $n = [AA^r]$ ist Normalebene des Bahnkegels.

§ 2. Das bewegte System.

Unter einem System $\sum$ des Bündels π verstehen wir einen Komplex von Strahlen und Ebenen, welche untereinander so verbunden sind, daß alle in dem System auftretenden Winkel konstant sind.

$$\cos \widehat{A_1 A_2} = \frac{(a_1/a_2)}{\sqrt{(a_1/a_1)(a_2/a_2)}} = \text{konst.} \tag{12}$$

Durch die Differentiation von (12) nach der Zeit erhalten wir nach Umformungen

$$\frac{(a_1 \dot{a}_1/a_1 a_2)}{(a_1/a_1)} + \frac{(a_2 \dot{a}_2/a_2 a_1)}{(a_2/a_2)} \equiv 0 \tag{13}$$ und wegen (7)

$$(\varrho_1 - \varrho_2, a_1, a_2) = 0. \tag{14}$$

D. h., der Vektor $(\varrho_1 - \varrho_2/w)$ ist parallel zur Ebene $l = [A_1 A_2]$. Es schneiden sich daher die Bildgeraden $A_1{}^r$ und $A_2{}^r$ der Strahlen A_1 und A_2, wenn diese Strahlen einem System $\sum$ angehören. Da aber drei und mehr Strahlen, die nicht in einer Ebene liegen, sich nur dann schneiden, wenn sie einem Bündel angehören, so gilt

Satz 1: Die Bildgeraden der Strahlen eines bewegten Systems $\sum$ schneiden sich in einem Punkt Q.

Den Punkt Q nennen wir den Bildpunkt des bewegten Systems $\sum$. Der Vektor des Punktes Q sei (ϱ_{Σ}/w).

Die Gerade $P = [Q\pi]$ (Fig. 2)[1]) nennen wir Polachse des Systems, die Ebene $p \perp P$ den Äquator des Systems. Die Gerade P ist Schnitt der Normalebenen der Bahnkegel.

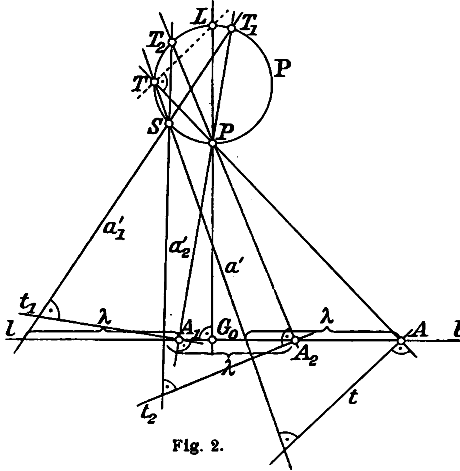


Fig. 2.

Das Bild eines ruhenden Systems ist der Punkt π. Besitzt ein System endliche Geschwindigkeit, so liegt der Bildpunkt im Endlichen. Ist der Vektor (ϱ_{Σ}/w) isotrop, also $(\varrho_{\Sigma}/\varrho_{\Sigma}) = 0$, so liegt die Polachse auf dem Minimalkegel und der Äquator des Systems berührt den Minimalkegel in der Polachse.

Ist die Polachse Erzeugende des Minimalkegels, so nennen wir die Systembewegung eine Schiebung, andernfalls eine Drehung.

Bei einer Drehung sind außer der Polachse noch die isotropen Strahlen des Äquators des Systems in Ruhe. Bei einer Schiebung fallen diese Strahlen mit der Polachse zusammen.

Ist der Strahl A Strahl des Systems $\sum$, so ist wegen Satz 1

$$(\varrho_{\Sigma}/w) \equiv (\varrho/w) + \lambda\,(a/w)$$

und wegen (10)
$$\lambda = \frac{(\varrho_{\Sigma}/a)}{(a/a)}.$$

Wir haben daher

(15)
$$(\varrho/w) \equiv (\varrho_{\Sigma}/w) - \frac{(\varrho_{\Sigma}/a)}{(a/a)}\,(a/w) \equiv \frac{(a\,\varrho_{\Sigma}/a\,w)}{(a/a)}.$$

Liegt der Strahl A in der Ebene l und ist (l/w) ein Vektor in der Normalen L von l, so ist

(16)
$$(l/a) = 0.$$

Setzen wir in (7) l, w statt w, so erhalten wir $(\varrho\, l\, w) \equiv \frac{(a\,\dot{a}/l\,w)}{(a/a)}$ und wegen (16) $(\varrho\, l\, w) \equiv -\frac{(\dot{a}/l)}{(a/a)}\,(a/w)$ und endlich mit Rücksicht auf (15)

(17)
$$\mathsf{P} \equiv (\varrho\, l/\varrho\, \varrho_{\Sigma}) = 0.$$

1) Die Figuren 2, 3 und 4 stellen Verhältnisse in der Ebene und nicht im Raume dar, es ist daher beim Vergleich dieser Figuren mit dem zugehörigen Text die auf Seite 336, 2. Absatz erwähnte Abbildung zu beachten.

Gleichung (17) ist eine homogene Gleichung 2. G. für die Koordinaten des Strahles T durch den Vektor (ϱ/w).

Zufolge (6) und (9) ist

(18) $$(a'/w) \equiv (a/w) + (\varrho a w)$$ und wegen (15)

(19) $$(a'/w) \equiv (a/w) + (\varrho_{\Sigma} a w).$$

Gehören die Strahlen A_1 und A_2 demselben bewegten System Σ an, so sei (l/w) der Vektor des Strahles $L \perp l = [A_1 A_2]$.

Der Vektor $(s/w) \equiv (a'_1 a'_2 w)$ bestimmt die Schnittgerade S der reziproken Geschwindigkeitsbilder a'_1 und a'_2. Wir erhalten durch Umformen unter Benützung der Identität (f) $(s/w) \equiv (a_1 a_2 w) - (a_1 a_2/\varrho_{\Sigma} w) + (\varrho_{\Sigma} a_1 a_2)(\varrho_{\Sigma}/w)$ und wegen

(20) $$(l/w) \equiv (a_1 a_2 w)$$

(21) $$(s/w) \equiv (l/w) + (\varrho_{\Sigma} l w) + (\varrho_{\Sigma}/l)(\varrho_{\Sigma}/w).$$

Da wie aus (21) ersichtlich, der Strahl S von der Lage der Strahlen A_1 und A_2 in der Ebene l unabhängig ist, gilt

Satz 2: Die reziproken Geschwindigkeitsbilder der Strahlen eines Systemstrahlenbüschels schneiden sich in einer Geraden S. Ist das System in Ruhe, so fällt diese Gerade mit der Normalen L des Strahlenbüschels zusammen. Bei endlichen Geschwindigkeiten kann diese Gerade nicht mit der Polachse zusammenfallen.

Setzen wir in (21) ϱ_{Σ}, w statt w, so ist

$$(s\varrho_{\Sigma} w) \equiv (l\varrho_{\Sigma} w) + (\varrho_{\Sigma}/\varrho_{\Sigma})(l/w) - (\varrho_{\Sigma}/l)(\sigma_{\Sigma}/w)$$

und wegen (21)

(22) $$(s\varrho_{\Sigma} w) + (s/w) \equiv (l/w)(1 + (\varrho_{\Sigma}/\varrho_{\Sigma})).$$ Es ist daher

(17a) $$\overline{\mathsf{P}} \equiv (sl/s\varrho_{\Sigma}) = 0.$$

Ersichtlich sind die Gleichungen (17) und (17a) identisch, und es gilt

Satz 3: Die Schnittgerade S der reziproken Geschwindigkeitsbilder der Strahlen eines Systemstrahlenbüschels l ist Erzeugende des Kegels

(23) $$\mathsf{P} \equiv (xl/x\varrho_{\Sigma}) = 0.$$

Die Gleichung (23) stellt einen Kegel durch die Polachse P und die Normale L der Ebene l des Strahlenbüschels dar, dessen Erzeugende mit P und L verbunden Paare normaler Ebenen geben. Der Kegel P geht durch die Minimalgeraden der Ebenen p und l. Der Kegel P zerfällt nur dann, wenn $(l/\varrho_{\Sigma}) = 0$ ist, also die Ebene l durch die Polachse P geht, u. zw. in den Äquator p des Systems und die Ebene l.

Der Kegel P ist kein Drehkegel.

Der Schnittstrahl des reziproken Geschwindigkeitsbildes des Strahles A der Ebene l mit dieser Ebene ist wegen (19) durch den Vektor

$$(a'lw) \equiv (alw) + (\varrho_\Sigma a/lw)$$

bestimmt. Wegen (16) ist

(24) $$(a'lw) \equiv (alw) + (\varrho_\Sigma/l)\,(a/w).$$

Der Kosinus des Winkels λ dieses Schnittstrahles mit dem Strahl A ist

$$\cos\lambda = \frac{(a'la)}{\sqrt{(a'l/a'l)\,(a/a)}}.$$

Durch Einsetzen und Umformen erhalten wir mit Rücksicht auf (16)

(25) $$\cos\lambda = \frac{(\varrho_\Sigma/l)}{\sqrt{(l/l) + (\varrho_\Sigma/l)^2}}.$$

Satz 4: Der Winkel eines Strahles der Ebene l mit dem Schnittstrahl dieser Ebene mit dem reziproken Geschwindigkeitsbild des Strahles ist für alle Strahlen der Ebene l gleich.

§ 3. Der Beschleunigungszustand eines Strahles.

Bei der Bewegung des Strahles A auf dem Bahnkegel (A) (Fig. 1) beschreibt die Bildgerade A^r die Bildregelfläche (A^r). Die Spitze T^r des Winkelgeschwindigkeitsvektors (ϱ/w) beschreibt die Kurve (T^r) auf der Regelfläche (A^r), deren Tangente die Richtung des Winkelbeschleunigungsvektors $(\dot\varrho/w)$ angibt.

Der Winkelbeschleunigungsvektor $(\dot\varrho/w)$ ist daher parallel zur Tangentialebene α^r der Bildregelfläche (A^r) im Punkte T^r.

Weiter ist wegen (10) und (11) auch

(26) $$(\dot\varrho/a) = 0.$$

Satz 5: Die Fußpunktkurve (T^r) des Punktes π auf der Bildregelfläche (A^r) ist orthogonale Trajektorie der Regelfläche (A^r).

Satz 6: Der Winkelbeschleunigungsvektor $(\dot\varrho/w)$ ist parallel zur Tangentialebene α^r der Bildregelfläche (A^r) im Punkte T^r und ist normal zum Strahl A.

Von den Ebenen durch die Bildgerade A^r ist noch die Normalebene $n = [AA^r]$ des Kegels (A) ausgezeichnet. Die Ebene n hüllt bei der Bewegung des Strahles A den Evolutenkegel (K) des Kegels (A) ein. Die in der Ebene n liegende Erzeugende K des Kegels (K) ist Krümmungsachse des Kegels (A). Da die Krümmungsachse K Schnitt der Ebene n mit ihrer Nachbarlage ist, ist der die Krümmungsachse be-

stimmende Vektor (k/w) normal zum Vektor (v/w) und seiner Ableitung $(\dot{v}/w)$ nach der Zeit.

Aus (9) erhalten wir

$$(\dot{v}/w) \equiv (\dot{\varrho} a w) + (\varrho \dot{a} w).$$

Wir setzen $(k/w) \equiv \alpha\,(a/w) + \beta\,(\varrho/w)$, wodurch wegen (9)

$$(27) \qquad (v/k) = 0$$

erfüllt ist, und erhalten aus

$$(28) \qquad (\dot{v}/k) = 0,$$

eine Gleichung für das Verhältnis $\alpha:\beta$. Es ist $\alpha\,(\varrho \dot{a} a) + \beta\,(\dot{\varrho} a \varrho) = 0$ und wegen (7)

$$\alpha\,(a/a)\,(\varrho/\varrho) = \beta\,(a \varrho \dot{\varrho}).$$

Setzen wir $\alpha = 1$, so wird (k/w) gegenüber der Transformation (4) Invariante vom Gewicht eins und Differentialinvariante vom Gewicht null. Es ist

$$(29) \qquad (k/w) \equiv (a/w) + \frac{(a/a)\,(\varrho/\varrho)}{(a \varrho \dot{\varrho})}\,(\varrho/w).$$[1] Wir setzen

$$(30) \qquad (r/w) \equiv \frac{(a/a)(\varrho/\varrho)}{(a \varrho \dot{\varrho})}\,(\varrho/w).$$

Im Punkte $K^r = [A^r K]$ wird die Regelfläche (A^r) von der Ebene n berührt.

Der Vektor des Punktes K^r ist $(k^r/w) \equiv \alpha\,(k/w)$ und da K^r auf der Bildgeraden A^r liegt, ist $(k^r/w) \equiv (\varrho/w) + \beta\,(a/w)$.

Wegen (10) ist $\qquad \alpha = \frac{(\varrho/\varrho)}{(k/\varrho)}$

und (k/w) aus (29) eingesetzt gibt

$$\alpha = \frac{(a \varrho \dot{\varrho})}{(a/a)\,(\varrho/\varrho)}$$ und endlich

$$(31) \qquad (k^r/w) \equiv (\varrho/w) + \frac{(a \varrho \dot{\varrho})}{(a/a)\,(\varrho/\varrho)}\,(a/w).$$

Ferner ist die durch A^r gehende zu n normale Ebene t^r zur entsprechenden Tangentialebene t des Richtkegels (A) parallel, berührt also die Regelfläche (A^r) im unendlichfernen Punkt.

Es sind daher ausgezeichnete Paare der Projektivität auf der Geraden A^r:

1. Die Ebene $n = [A, A^r] \equiv (\varrho a x) = 0$ und der Punkt $K^r = [A^r, K]$ (siehe (31)).

---

1) Ist $(a \varrho \dot{\varrho}) = 0$, so ist A eine Wendeerzeugende des Kegels (A) und es ist $(k/w) \equiv (\varrho/w)$ nur der Richtung nach invariant.

2. Die Ebene $t^r \perp n$; $t^r \equiv (\varrho/x) - (\varrho/\varrho) = 0$ und der unendlich ferne Punkt A_∞ des Strahles A bzw. der Geraden A^r und
3. Die Ebene $\alpha^r \equiv (\dot{\varrho}\, a\, x) - (a\, \varrho\, \dot{\varrho}) = 0$ parallel zum Vektor $(\dot{\varrho}/w)$ und der Fußpunkt T^r der Normalen aus π auf A^r.

Wir erklären in Erweiterung der bisherigen Abbildung als Bild eines bewegten Strahles A die Gerade $A^r \| A$ mit der Projektivität

$$\Pi^r \equiv \begin{Bmatrix} n \longleftrightarrow K^r \\ t^r \longleftrightarrow A_\infty \\ \alpha^r \longleftrightarrow T^r \end{Bmatrix}.$$

Die Punktreihe auf der Geraden A^r wird durch

(32) $$(g/w) \equiv (\varrho/w) + \lambda\, (a/w) \quad \text{dargestellt.}$$

Wir erhalten die Punkte T^r, A_∞ und K^r für λ gleich 0, ∞ bzw. $\frac{(a\,\varrho\,\dot{\varrho})}{(a/a)\,(\varrho/\varrho)}$.

Das Ebenenbüschel durch die Gerade A^r wird durch

(33) $$(\dot{\varrho}\, a\, x) - (a\, \varrho\, \dot{\varrho}) - \lambda\, (a/a)\, ((\varrho/x) - (\varrho/\varrho)) = 0$$

dargestellt, und man erhält die Ebenen α^r, t^r und n für λ gleich 0, ∞ bzw. $\frac{(a\,\varrho\,\dot{\varrho})}{(a/a)\,(\varrho/\varrho)}$.

Man erhält daher aus (32) und (33) für gleiche Werte von λ entsprechende Paare der Bildprojektivität Π^r.

Umgekehrt ist eine Projektivität auf der endlichen Geraden A^r Bild eines bewegten Strahles A, wenn dem unendlichfernen Punkt A_∞ der Geraden A^r die Ebene $t^r \perp n = [A\,A^r]$ entspricht und gewisse (analytisch durch Ungleichungen ausgedrückte Bedingungen) erfüllt sind, die unendlich große Beschleunigungen ausschließen.

Durch den Winkelbeschleunigungsvektor $(\dot{\varrho}/w)$ im Verein mit der Krümmungsachse lassen sich drei invariante Strahlen definieren, die wir analog dem Gebrauch bei der ebenen euklidischen Kinematik Endstrahlen der Beschleunigung, der Normalbeschleunigung und der Tangentialbeschleunigung nennen wollen.

Wir setzen

(34) $$(b/w) \equiv (\dot{\varrho}\, a\, w) \equiv \alpha\, (\varrho/w) + \beta\, (v/w)$$

und erhalten wegen (7) und (8)

$$\alpha = \frac{(a\,\varrho\,\dot{\varrho})}{(\varrho/\varrho)}, \quad \beta = \frac{(\dot{\varrho}\, a\, v)}{(v/v)} = \frac{(a/a)}{(v/v)}\, (\varrho/\dot{\varrho}) = \frac{(\varrho/\dot{\varrho})}{(\varrho/\varrho)} \qquad \text{und daher}$$

(35) $$(b/w) \equiv \frac{(a\,\varrho\,\dot{\varrho})}{(\varrho/\varrho)}\, (\varrho/w) + \frac{(\varrho/\dot{\varrho})}{(\varrho/\varrho)}\, (v/w)$$

Weiter setzen wir

(36) $$(b_n/w) \equiv \frac{(a\varrho\dot{\varrho})}{(\varrho/\varrho)}(\varrho/w)$$ und

(37) $$(b_t/w) \equiv \frac{(\varrho/\dot{\varrho})}{(\varrho/\varrho)}(v/w).$$

Wegen (30), (8) und

(38) $$(r/r) = \frac{(a/a)^2(\varrho/\varrho)^3}{(a\varrho\dot{\varrho})^2}$$ ist

(39) $$(b_n/w) \equiv \frac{(v/v)(r/w)}{(r/r)}.$$

Die Strahlen A'', A_n'' und A_t'', welche wir der Reihe nach Endstrahlen der Beschleunigung, der Normalbeschleunigung und der Tangentialbeschleunigung nennen, werden durch die Vektoren

(40) $$(a''/w) \equiv (a/w) + (b/w)$$

(41) $$(a_n''/w) \equiv (a/w) + (b_n/w)$$ und

(42) $$(a_t''/w) \equiv (a/w) + (b_t/w)$$ bestimmt.

Wegen (26) und (34) sind die Vektoren $(\dot{\varrho}/w)$, (b/w) und der Strahl A paarweise normal. Es ist daher die Ebene β, in der die Strahlen A, A'' und der Vektor (b/w) liegen, normal zum Vektor $(\dot{\varrho}/w)$ und daher auch normal zur Ebene α^r.

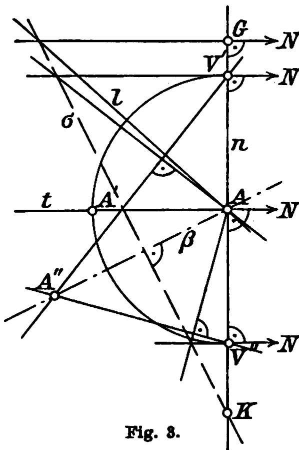


Fig. 8.

Die Ebene β nennen wir Ebene der Beschleunigung.

Bezieht man das Ebenenbüschel des Strahles A so projektiv auf das Ebenenbüschel der Bildgeraden A^r (33), daß entsprechende Ebenen parallel sind und projiziert man die Punktreihe A^r (32) aus dem Punkt π durch ein Strahlenbüschel in der Ebene n, so wird durch die Projektivit Π^r die Projektivität Π zwischen dem Ebenenbüschel A und dem Strahlenbüschel n hervorgerufen. Der beliebigen Ebene l des Büschels A entspricht der Strahl G des Büschels n.

Das Ebenenbüschel, welches das Strahlenbüschel n aus dem Strahl N projiziert, ist mit dem Ebenenbüschel A perspektiv, da die gemeinsame Ebene t sich selbst entspricht. Die Perspektivitätsebene σ geht durch die Krümmungsachse K und durch den Schnitt der Ebenen $\alpha \| \alpha^r$ und $a = [TN] \perp A$.

Da der Vektor $(\dot{\varrho}/w)$ im Schnitt der Ebenen α und a liegt und die Ebene β der Beschleunigung normal auf dem Vektor $(\dot{\varrho}/w)$ ist, ist die Ebene β der Beschleunigung normal zur Ebene σ.

Bezieht man das Ebenenbüschel des Strahles A'' (40) so projektiv auf das Ebenenbüschel der Bildgeraden A^r (33) bzw. des Strahles A, daß entsprechende Ebenen normal sind, so wird dieses Ebenenbüschel wegen der Projektivität Π^r auch auf die Punktreihe A^r (32) projektiv bezogen, und wir erhalten aus (32) und der Gleichung des Ebenenbüschels A''

(43) $$(\dot{\varrho} a/a''x) - \lambda (a/a)(\varrho a'' x) = 0$$

für gleiche Werte von λ entsprechende Elemente der Punktreihe A^r und des Ebenenbüschels A''.

Wegen $(a''/w) = (a/w) + (\dot{\varrho} a w)$ erhalten wir aus (43)

(44) $$(\dot{\varrho} a/a x) - \lambda (a/a)((\varrho a x) + (\dot{\varrho} a/x \varrho)) = 0.$$

Die Incidenz entsprechender Paare der Projektivität zwischen der Punktreihe A^r (32) und dem Ebenenbüschel A'' (44) gibt für λ die quadratische Gleichung $1 - \lambda^2 (a/a) = 0$ und daraus $\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{a/a}}$.

Die durch die Vektoren

(45) $$(v'^{rn}/w) \equiv (\varrho/w) + \frac{(a/w)}{\sqrt{a/a}}$$ und

(46) $$(v''^{rn}/w) \equiv (\varrho/w) - \frac{(a/w)}{\sqrt{(a/a)}}$$

bestimmten Strahlen V' und V'' nennen wir analog dem Gebrauch in der euklidischen Kinematik Endstrahlen der gedrehten Geschwindigkeit.[1])

Bestimmt man die Strahlen V' und V'' durch die Vektoren

$$(v'/w) \equiv (a/w) + (\varrho/w)\sqrt{a/a}$$

und $$(v''/w) \equiv (a/w) - (\varrho/w)\sqrt{a/a},$$

so sieht man leicht, daß diese beiden Strahlen und der Strahl A' (18) Erzeugende eines Drehkegels mit der Achse A sind.

Endlich gilt

Satz 5: Die durch den Endstrahl A'' der Beschleunigung und durch einen Endstrahl $V^{(i)}$ der gedrehten Geschwindigkeit des Strahles A

---

1) Der Begriff gedrehte Geschwindigkeit eines Punktes einer Ebene mit euklidischer Maßbestimmung läßt außer der obenstehenden auch eine triviale Verallgemeinerung zu. Ordnet man dem bewegten Strahl A den durch den Vektor

$$(\bar{v}/w) \equiv (\varrho/w) + \frac{(\bar{\pi}/\bar{\pi}) - (\bar{\pi}/\varrho)}{(\bar{\pi}/a)}(a/w)$$

bestimmten Strahl $\bar{V}$ zu, dessen Schnitt mit der Bildgeraden A^r in der Ebene $\bar{\pi} \equiv (\bar{\pi}/x) - (\bar{\pi}/\bar{\pi}) = 0$ liegt, so gilt der Satz: Gehören die Strahlen A_1 und A_2 demselben System an, so schneiden sich die Ebenen $l = [A, B]$ und $\bar{l} = [\bar{V}_1, \bar{V}_2]$ in der Ebene $\bar{\pi}$.

gehende Ebene ist normal auf der Ebene des Büschels A, die in der Projektivität Π dem Strahl $V^{(i)}$ entspricht.[1])

§ 4. Der Beschleunigungszustand eines Systems.

Gehören die Strahlen A_1 und A_2 dem System $\sum$ an und sei l die Ebene durch A_1 und A_2, so liegen die Bildgeraden A_1^r und A_2^r in der Ebene $l^r \parallel l$. Bei der Bewegung des Systems $\sum$ beschreiben die Bildgeraden A_1^r und A_2^r die Bildregelflächen (A_1^r) und (A_2^r), die Ebene l^r erzeugt eine abwickelbare Regelfläche (G_0^r). Die in l^r liegende Erzeugende dieser Regelfläche sei G_0^r. Der von der Ebene l eingehüllte Kegel (G_0) ist Richtkegel der Fläche (G_0^r). Die in l liegende Erzeugende G_0 des Kegels (G_0) ist parallel zur Erzeugenden G_0^r in l^r.

Die Gerade G_0 nennen wir Gleitstrahl der Ebene l. Die Ebene durch den Gleitstrahl G_0 und den Polstrahl P des Systems $\sum$ ist normal auf die Ebene l.

Die Gerade G_0^r ist der Schnitt der Ebene l^r mit ihrer Nachbarlage, es schneidet daher die Gerade G_0^r nicht nur die Bildgeraden A_1^r und A_2^r, sondern auch ihre Nachbarlagen und ist daher Tangente der Bildregelflächen (A_1^r) und (A_2^r). Die Ebene l^r berührt die Regelflächen (A_1^r) und (A_2^r) in den Punkten $G_1^r = [A_1^r G_0^r]$ und $G_2 = [A_2^r G_r^0]$.

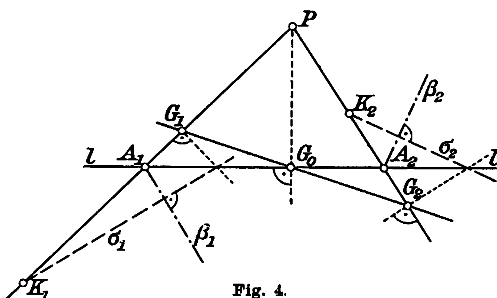


Fig. 4.

Satz 6: Die Strahlen A_1 und A_2 gehören demselben System an, wenn ihre Bildgeraden sich im Punkt Q schneiden und der Ebene l^r in den Projektivitäten Π_1^r und Π_2^r je ein Punkt entspricht, die auf einer zum Gleitstrahl G_0 der Ebene $l = [A_1 A_2]$ parallelen Geraden liegen.

---

1) Für die Endstrahlen V_1' und V_2' der gedrehten Geschwindigkeiten der Strahlen A_1 und A_2 eines Systems $\sum$ existiert naturgemäß auch eine Beziehung, die ohne auf Beweise einzugehen wie folgt ausgesprochen werden soll. Sind A_1 und A_2 Strahlen eines bewegten Systems $\sum$ und sind V_1' und V_2' die Endstrahlen ihrer gedrehten Geschwindigkeiten, so schneidet die Ebene durch den Strahl V_1' und den Strahl $\bar{A}_1 \perp A_1$ des Büschels $[A_1 A_2]$ die Ebene durch den Strahl V_2' und den Strahl $\bar{A}_2 \perp A_2$ desselben Büschels in einer Geraden, die in einer der Symmetrieebenen der Strahlen A_1 und A_2 liegt. Oder: Ist A ein Strahl einer Ebene l, so ist die Öffnung des Keiles mit der Anfangsebene l, dessen Träger normal auf A ist und dessen Endebene durch den Endstrahl V' der gedrehten Geschwindigkeit des Strahles A geht, für alle Strahlen der Ebene l gleich.

Durch Projektion der Punkte und Geraden der Ebene l^r aus dem Punkt π ergibt sich

Satz 7: Die Strahlen A_1 und A_2 gehören demselben System an, wenn der Ebene $l = [A_1, A_2]$ in den Projektivitäten Π_1 und Π_2 je ein Strahl entspricht, die mit dem Gleitstrahl G_0 der Ebene l in einer Ebene liegen.

Ist ϱ_Σ der auf dem Polstrahl P liegende Geschwindigkeitsvektor des Systems $\sum$, so beschreibt der Endpunkt Q dieses Vektors die Bildkurve (Q) des Systems $\sum$. Den Strahl U' des Vektors

(47) $$(u'/w) \equiv (\varrho_\Sigma/w) + \frac{(\varrho_\Sigma \dot{\varrho}_\Sigma/\varrho_\Sigma w)}{(\varrho_\Sigma/\varrho_\Sigma)}$$ [1])

nennen wir Endstrahl der Polwechselgeschwindigkeit. Den Vektor

(48) $$(\gamma_\Sigma/w) \equiv \frac{(\varrho_\Sigma/\dot{\varrho}_\Sigma)}{(\varrho_\Sigma/\varrho_\Sigma)} (\varrho_\Sigma/w)$$

nennen wir Winkelbeschleunigungsvektor des Systems.

Die Gerade $U^r \| P$ durch den Endpunkt des Vektors

(49) $$(\varrho_u/w) \equiv \frac{(\varrho_\Sigma \dot{\varrho}_\Sigma w)}{(\varrho_\Sigma/\varrho_\Sigma)}$$

nennen wir Bildgerade der Polwechselgeschwindigkeit.

Die Tangente H^r der Kurve (Q) im Punkte Q ist Tangente der Bildregelfläche (A^r) des Systemstrahles A, da die Bildgerade A^r durch Q geht und daher (Q) Kurve der Fläche (A^r) ist.

Der durch den Vektor $(\dot{\varrho}_\Sigma/w)$ bestimmte Strahl H ist parallel zur Tangente H^r der Kurve (Q) und besitzt als Systemstrahl keine Tangentialbeschleunigung.

Außer dem Strahl H besitzen noch alle jene Strahlen des Systems keine Tangentialbeschleunigung, bei welchen die Vektoren (ϱ_Σ/w) und $(\dot{\varrho}_\Sigma/w)$ normal sind. Da bei solchen Strahlen die Projektivität auf der Bildgeraden so ausartet, daß die Ebene $t^r \perp n$ allen Punkten der Geraden A^r also auch dem Punkt Q entspricht, muß die Ebene t^r mit der Ebene $[A^r H^r]$ zusammenfallen, d. h. es ist die Ebene $[A^r H^r]$ und die zu ihr parallele Ebene $[AH]$ normal zur Ebene $n = [AP]$.

Satz 8: Die Strahlen des Systems, welche keine Tangentialbeschleunigung besitzen, geben mit den Strahlen H und P verbunden Paare normaler Ebenen.

---

1) Die durch (47) bis (49) erklärten Gebilde existieren ersichtlich nur für $(\varrho_\Sigma/\varrho_\Sigma) \neq 0$; also nur bei Drehungen.

Durch Differentiation von (15) erhalten wir

$$(50)\qquad (\dot{\varrho}/w) \equiv (\dot{\varrho}_{\Sigma}/w) - \frac{(\varrho_{\Sigma}/a)}{(a/a)}(\dot{a}/w) - (a/w)\, D_t \frac{(\varrho_{\Sigma}/a)}{(a/a)}.$$

Setzen wir in (31) aus (15) und (50) ein, so erhalten wir

$$(51)\qquad (k^r/w) \equiv \frac{(a\,\varrho_{\Sigma}\dot{\varrho}_{\Sigma})}{(a\,\varrho_{\Sigma}/a\,\varrho_{\Sigma})}(a/w) + (\varrho_{\Sigma}/w).$$[1]

Die Gleichung (51) ist eine Parameterdarstellung der Fläche (K^r), die Ort aller Punkte K^r der Strahlen des Systems Σ ist.

Bilden wir

$$(k^r\varrho_{\Sigma}/k^r\varrho_{\Sigma}) = \frac{(a\,\varrho_{\Sigma}\dot{\varrho}_{\Sigma})^2}{(a\,\varrho_{\Sigma}/a\,\varrho_{\Sigma})}$$

und

$$(k^r\varrho_{\Sigma}\dot{\varrho}_{\Sigma}) = \frac{(a\,\varrho_{\Sigma}\dot{\varrho}_{\Sigma})^2}{(a\,\varrho_{\Sigma}/a\,\varrho_{\Sigma})},$$

so erhalten wir als Gleichung in rechtwinkeligen Raumkoordinaten

$$(52)\qquad (K^r) \equiv (x\,\varrho_{\Sigma}/x\,\varrho_{\Sigma}) - (x\,\varrho_{\Sigma}\dot{\varrho}_{\Sigma}) = 0.$$

Die Fläche (K^r) ist ein Zylinder durch die Polachse P, denn die Gleichung (52) wird durch $(x_1 + \alpha\varrho_{\Sigma}/w)$ erfüllt, wenn (x_1/w) die Gleichung (52) erfüllt.

Weiter ist auch die Bildgerade U^r der Polwechselgeschwindigkeit Erzeugende des Zylinders (K^r). Der Normalschnitt des Zylinders (K^r) ist ein Kreis.

Projiziert man einen Punkt K^r des Zylinders (K^r) aus π durch den Strahl K, denselben Punkt aus Q durch die Gerade A^r und zieht man $A \parallel A^r$ durch π, so ist die Verwandtschaft $A \longleftrightarrow K$ die umkehrbar-eindeutige, quadratische Verwandtschaft zwischen den Strahlen des bewegten Systems Σ und ihren Krümmungsachsen.

Diese Abbildung wird auch durch die Gleichungen

$$(53)\qquad (k/w) \equiv (a\,\varrho_{\Sigma}\dot{\varrho}_{\Sigma})(a/w) + (a\,\varrho_{\Sigma}/a\,\varrho_{\Sigma})(\varrho_{\Sigma}/w) \quad \text{und}$$

$$(54)\qquad (a/w) \equiv (k\,\varrho_{\Sigma}\dot{\varrho}_{\Sigma})(k/w) - (k\,\varrho_{\Sigma}/k\,\varrho_{\Sigma})(\varrho_{\Sigma}/w) \quad \text{vermittelt.}$$

Da bei einem Strahl A, welcher in einer Wendeerzeugenden seines Bahnkegels liegt, die Krümmungsachse K auf dem Strahl A normal steht, liegt der Punkt $K^r = [A^r, K]$ eines solchen Strahles des Systems Σ auf einer Kugel W über der Strecke $\overline{\pi Q}$ als Durchmesser. Wir erhalten daher den Wendekegel 3. O., auf welchem die Strahlen des Systems Σ liegen, die in Wendeerzeugenden ihrer Bahnkegel sich befinden, wenn

1) Der Vektor (k^r/w) existiert wegen $(a\,\varrho_{\Sigma}/a\,\varrho_{\Sigma}) \neq 0$ nur für Strahlen, die nicht in einer Minimalebene des Polstrahles P liegen.

wir die Durchdringungskurve des Zylinders (K^r) mit der Kugel W aus dem Punkt Q projizieren und durch den Punkt π den Parallelkegel legen. Die Projektion derselben Durchdringungskurve aus dem Punkt π ist der Kegel 3. O., auf welchem die zugeordneten Krümmungsachsen liegen.

Aus (53) und (54) erhalten wir wegen $(a/k) = 0$ die Gleichungen des Wendekegels und des Kegels der zugeordneten Krümmungsachsen mit

(55) $$(x\varrho_\Sigma\dot\varrho_\Sigma)(x/x) + (x\varrho_\Sigma/x\varrho_\Sigma)(\varrho_\Sigma/x) = 0$$ und

(56) $$(x\varrho_\Sigma\dot\varrho_\Sigma)(x/x) - (x\varrho_\Sigma/x\varrho_\Sigma)(\varrho_\Sigma/x) = 0.$$

Durch Differentiation von (52) erhält man

(57) $$(\dot K^r) \equiv 2(x\varrho_\Sigma/x\dot\varrho_\Sigma) - (x\varrho_\Sigma\varrho_\Sigma) = 0.$$

Der Schnitt der Flächen (K^r) und $(\dot K^r)$ aus π projiziert, gibt den Kegel der stationären Krümmungsachsen. Wir bilden

$$(\dot K^r)(x\varrho_\Sigma\dot\varrho_\Sigma) - K^r(x\varrho_\Sigma\ddot\varrho_\Sigma) = 0$$

und erhalten die Gleichung des Burmesterschen Kegels der stationären Krümmungsachsen

(58) $$2(x\varrho_\Sigma/x\dot\varrho_\Sigma)(x\varrho_\Sigma\dot\varrho_\Sigma) - (x\varrho_\Sigma/x\varrho_\Sigma)(x\varrho_\Sigma\ddot\varrho_\Sigma) = 0.$$

Setzt man in (58) $(x\varrho_\Sigma\dot\varrho_\Sigma)(x/w) + (x\varrho_\Sigma/x\varrho_\Sigma)(\varrho_\Sigma/w)$ statt (x/w) (vgl. (53)), so erhält man

(59) $$2(x\varrho_\Sigma/x\dot\varrho_\Sigma)((x\varrho_\Sigma\dot\varrho_\Sigma) + (x\varrho_\Sigma/x\varrho_\Sigma)) - (x\varrho_\Sigma/x\varrho_\Sigma)(x\varrho_\Sigma\ddot\varrho_\Sigma) = 0,$$

die Gleichung des zweiten Burmesterschen Kegels, dessen Erzeugende stationäre Krümmungsachsen besitzen.

Ist die Systembewegung eine Schiebung,

(60) $$(\varrho_\Sigma/\varrho_\Sigma) = 0$$ und außerdem

(61) $$(\varrho_\Sigma/\dot\varrho_\Sigma) = 0,$$

so sprechen wir von einer stationären Schiebung.[1])

Wie schon in Anmerkung 1), S. 347, bemerkt wurde, verlieren die Gleichungen (47) bis (49) bei Schiebungen ihre Bedeutung, und es vereinfacht sich (52) in

(62) $$(K^r) \equiv (x/\varrho_\Sigma)^2 - (x\varrho_\Sigma\dot\varrho_\Sigma).$$

Die Fläche (K^r) ist daher bei einer Schiebung ein Zylinder, der die unendlichferne Ebene in einer Tangente des Minimalkegels berührt, ein sogenannter parabolischer Kreiszylinder.

---

1) Ist $(\varrho_\Sigma/\varrho_\Sigma) \equiv 0;\ \{t\}$, so sprechen wir von einer endlichen Schiebung. Die Bildkurve einer endlichen Schiebung ist eine Kurve auf dem Minimalkegel.

Bei einer stationären Schiebung ist wegen (60) und (61)

(63) $$(\varrho_\Sigma \dot{\varrho}_\Sigma w) \equiv \frac{(\varrho_\Sigma \dot{\varrho}_\Sigma u)}{(\varrho_\Sigma / u)} (\varrho_\Sigma / w),$$

wobei (u/w) ein beliebiger Vektor ist, für den $(\varrho_\Sigma/u) \neq 0$ ist. Wir erhalten daher aus (62)

(64) $$(K^r) \equiv (x/\varrho_\Sigma)\,((x/\varrho_\Sigma)\,(\varrho_\Sigma/u) - (\varrho_\Sigma \dot{\varrho}_\Sigma u)) = 0\,.$$

D. h. bei einer stationären Schiebung zerfällt die Fläche (K^r) in die Minimalebene der Polachse und eine zu dieser parallelen Ebene.[1]) Die Verwandtschaft $A \longleftrightarrow K$ wird eine Kollineation.

Aus (55) und (56) erhalten wir

(65) $$(\varrho_\Sigma/x)\,((\varrho_\Sigma \dot{\varrho}_\Sigma u)\,(x/x) - (u/\varrho_\Sigma)\,(\varrho_\Sigma/x)^2) = 0$$ und

(66) $$(\varrho_\Sigma/x)\,((\varrho_\Sigma \dot{\varrho}_\Sigma u)\,(x/x) + (u/\varrho_\Sigma)\,(\varrho_\Sigma/x)^2) = 0\,.$$

Der Wendekegel und der Kegel der zugeordneten Krümmungsachsen zerfallen bei einer stationären Schiebung in die Minimalebene der Polachse und je einen Kegel 2. O., die den Minimalkegel in der Polachse in 3. O. berühren.

(Eingegangen am 7. 4. 27.)

Das Schließungsproblem für das Viereck und die Metrik des Kegelschnittes.

Von L. Schleiermacher † in Aschaffenburg.[2])

Mit 7 Figuren im Text.

Durch die Arbeiten von K. Rohn[3]) hat die ausgedehnte Literatur[4]) über das Schließungsproblem, vom rein geometrischen Standpunkte aus betrachtet, manch wertvolle Förderung erfahren. Insbesondere dürfte die Behandlung kaum zu übertreffen sein, welche er für den Fall des Dreiecks[5]) dem Problem zu geben wußte. Indem ich im voraus bemerke,

1) Die Ebene $(x/\varrho_\Sigma)(\varrho_\Sigma/w) - (\varrho_\Sigma \dot{\varrho}_\Sigma w) = 0\,\{w\}$ kann als Bild der Polwechselgeschwindigkeit aufgefaßt werden. Ist der Strahl P selbst Strahl eines Systems, so geht diese Ebene durch den Bildpunkt des Systems.

2) Der Mühe, die Korrekturen zu lesen, hat sich freundlicherweise Herr Dingeldey unterzogen.

3) Ber. d. Sächs. Ges. d. Wiss. Leipzig LX 1908 und LXV 1913.

4) F. Dingeldey, Enz. d. math. Wiss. III C 1, Nr. 26 f. In der franz. Ausg. von dems. und E. Fabry III 17, Nr. 45. Historische Darstellung bei G. Loria, I poligoni di Poncelet, Torino 1889, und Bibl. math. (2) Bd. 3, 1889.

5) Jahresbericht d. D. Math.-Ver. Bd. 22, S. 330. 1913.

daß sich die Betrachtung beim Viereck wesentlich einfacher gestaltet, möchte ich nicht unterlassen, darauf hinzuweisen, daß wir für das Dreieck ein gewissermaßen klassisches Beispiel besitzen, welches nur als solches bisher noch nicht erkannt worden zu sein scheint.

Der schöne Satz von J. H. Lambert[1]), welcher besagt, daß *der Kreis, der durch die Schnittpunkte dreier Parabeltangenten geht, auch durch den Brennpunkt gehen muß*, ist die besondere Form des Schließungssatzes für die Parabel und den Kreis, welcher einem beliebigen Tangentendreieck umbeschrieben ist.

Denn wenn dieser Kreis von irgendeiner anderen Parabeltangente in den Punkten A und B geschnitten wird, müssen sich nach dem Schließungssatze die anderen von A und B auslaufenden Tangenten in einem Punkte C des Kreises begegnen. Nun ist aber die unendlichferne Gerade Parabeltangente, trifft den Kreis in den unendlichfernen imaginären Kreispunkten, und sonach müssen die anderen von diesen Kreispunkten an die Parabel gezogenen Tangenten sich auf dem Kreise treffen: ihr Schnittpunkt ist aber der Brennpunkt der Parabel.

Es liegt nahe, diese Betrachtungsweise auf den allgemeinen Kegelschnitt anzuwenden.

Das Vierseit der Kegelschnitt-Tangenten aus den Kreispunkten hat als weitere Gegeneckenpaare die reellen Brennpunkte R, R' und die imaginären J, J'. Nach dem Schließungssatze *muß sich jedes Tangentenvierseit des Kegelschnitts, wenn drei seiner Ecken A, B, C auf einem Kreise liegen, welcher durch eines dieser Brennpunktpaare hindurchgeht, auf diesem Kreise in einem Punkte D schließen.*

Solch ein Vierseit ist stets symmetrisch — entweder zur Nebenachse des Kegelschnittes, wenn der Kreis dem Büschel durch R, R' angehört — oder zur Hauptachse, wenn dem konjugierten Büschel durch J, J'.[2])

Dies erweist die folgende Betrachtung über das *Viereck, welchem ein Kegelschnitt* $\mathfrak{U}$ *umbeschrieben und ein anderer* $\mathfrak{E}$ *ein- oder anbeschrieben ist.*

Es seien gegeben (Fig. 1) vier Punkte A, B, C, D und die vier Geraden a, b, c, d, welche die Punkte der Reihe nach in geschlossenem Linienzuge verbinden. Die Punkte haben zwei weitere Verbindungslinien AC, BD, welche sich in G schneiden; die Geraden haben zwei weitere Schnittpunkte ac, bd mit der Verbindungslinie g. G und g sind Pol und Polare für jeden Kegelschnitt $\mathfrak{U}$ des Büschels mit den Grundpunkten A, B, C, D, wie auch für jeden Kegelschnitt $\mathfrak{E}$ der Schar mit den

1) Insigniores orbitae cometarum proprietates. Augsb. 1761. Ostwalds Klassiker Nr. 133.

2) Salmon-Dingeldey, Analyt. Geom. d. Kegelschnitte I, S. 243 f.

Grundtangenten a, b, c, d, und soll deswegen G *Grundpol*, g *Grundpolare* heißen.

Wie nun einerseits bei festgehaltenem Viereck $ABCD$ Grundpol G und Grundpolare g unverändert bleiben, mag man auch $\mathfrak{U}$ im Büschel,

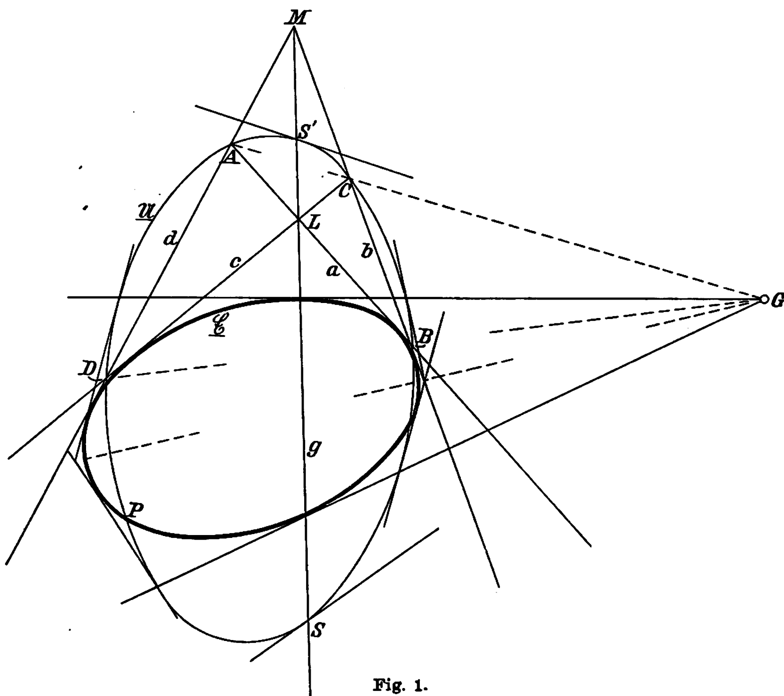


Fig. 1.

$\mathfrak{E}$ in der Schar durch andere Kegelschnitte ersetzen, so bleiben G und g anderseits auch unverändert, wenn gemäß dem Schließungssatze das Viereck $ABCD$ stetig in ein anderes der unendlichvielen Vierecke übergeführt wird, welche dem $\mathfrak{U}$ einbeschrieben und zugleich dem $\mathfrak{E}$ umbeschrieben werden können. Ein solches ist durch eine Ecke auf $\mathfrak{U}$, oder eine Seite gegeben, welche $\mathfrak{E}$ berührt. Man beachte, daß

1. die dritte Seite jedes dem $\mathfrak{U}$ einbeschriebenen Dreiecks, wenn die anderen Seiten $\mathfrak{E}$ berühren, durch G geht,
2. die dritte Ecke jedes dem $\mathfrak{E}$ umbeschriebenen Dreiseits auf g liegt, wenn die beiden anderen Ecken auf $\mathfrak{U}$ liegen.

Die Konfiguration $\mathfrak{U} = \mathfrak{E}$ ist an Beziehungen reich. Hervorzuheben sind besonders die folgenden, welche sich aus den Ausartungen des Vierecks ergeben.

Rücken zwei Gegenecken, wie A und C, zusammen, nämlich in einem Schnittpunkte $g \times \mathfrak{U}$, so fallen vier Seiten paarweise zusammen,

nämlich a mit b, c mit d. Von den Ecken B und D laufen also je zwei zusammenfallende Tangenten aus, d. h. B und D sind Punkte von $\mathfrak{E}$, also Punkte $\mathfrak{U} \times \mathfrak{E}$. Man sieht:

I. *Die Tangenten von $\mathfrak{E}$ aus den Schnittpunkten von $\mathfrak{U}$ und g berühren $\mathfrak{E}$ in solchen Schnittpunkten $\mathfrak{E} \times \mathfrak{U}$, deren Verbindungslinie durch G geht.*

Fallen zwei Gegenseiten, wie a und c, zusammen, nämlich in einer $\mathfrak{E}$-Tangente durch G, so fallen je zwei Nachbarecken zusammen, A mit D, C mit B: Die Seiten AD und BC sind also auch Tangenten von $\mathfrak{U}$. Man sieht:

II. *Jede der beiden $\mathfrak{E}$-Tangenten aus G schneidet den $\mathfrak{U}$ in den Berührpunkten gemeinsamer Tangenten von $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{E}$, welche sich auf g begegnen.*

Im Hinblick auf diese beiden dualistischen Eigenschaften der Konfiguration erkennt man weiter:

III. *Das dritte Gegeneckenpaar $ac = L$, $bd = M$ ist ein Punktpaar einer Involution auf g mit den Schnittpunkten $\mathfrak{U} \times g$ als Doppelpunkten;*

IV. *Das dritte Gegenseitenpaar AC, BD ist Strahlenpaar einer Involution mit dem Scheitel G und den $\mathfrak{E}$-Tangenten aus G als Doppelstrahlen.*

Die vorstehende geometrische Betrachtung stützt sich auf den Schließungssatz. Ich stelle ihr eine analytische Behandlung zur Seite, welche sie nicht nur sichert, sondern zugleich den *Schließungssatz für das Viereck beweist* und außerdem die *charakteristische Gleichung für die Konstanten der Kegelschnitte* $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{E}$ liefert.

Bezogen auf ein beliebiges Polardreieck mit den Seiten $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ habe $\mathfrak{E}$ die Gleichung

$$\mathfrak{E}(x) \equiv \mathfrak{e}_1 x_1^2 + \mathfrak{e}_2 x_2^2 + \mathfrak{e}_3 x_3^2 = 0,$$

$x_1 = 0$ sei Grundpolare. Das auf ihr liegende Punktpaar L und M wählen wir zum dritten Gegeneckenpaar des Tangentenvierseits von $\mathfrak{E}$, setzen für die Koordinaten von L und M

$$y_1 : y_2 : y_3 = 0 : \lambda : 1 \quad \text{bzw.} \quad 0 : \mu : 1.$$

Das von L auslaufende Tangentenpaar des $\mathfrak{E}$ hat nach der Formel $f(x, x) f(y, y) - f^2(x, y) = 0$ die Gleichung

$$\mathfrak{L}(x) \equiv (\mathfrak{e}_2 \lambda^2 + \mathfrak{e}_3)\mathfrak{e}_1 x_1^2 + \mathfrak{e}_2 \mathfrak{e}_3 (x_2 - \lambda x_3)^2 = 0,$$

und das von M auslaufende

$$\mathfrak{M}(x) \equiv (\mathfrak{e}_2 \mu^2 + \mathfrak{e}_3)\mathfrak{e}_1 x_1^2 + \mathfrak{e}_2 \mathfrak{e}_3 (x_2 - \mu x_3)^2 = 0.$$

Jeder Kegelschnitt des Büschels $\mathfrak{L}(x) + \theta \cdot \mathfrak{M}(x) = 0$ geht durch die Schnittpunkte dieser beiden zerfallenen Kegelschnitte (durch A, B, C, D

nach früherer Bezeichnung), erfüllt also die Bedingung eines $\mathfrak{U}$. Wir wählen hieraus denjenigen, welcher auf dasselbe Polardreieck bezogen ist wie $\mathfrak{E}$, dessen Gleichung also die Form hat

$$\mathfrak{U}(x) \equiv \mathfrak{u}_1 x_1^2 + \mathfrak{u}_2 x_2^2 + \mathfrak{u}_3 x_3^2 = 0$$

und setzen zu dem Ende $\lambda + \theta\mu = 0$. Nach einfachen Reduktionen ergibt sich

$$\mathfrak{u}_1 : \mathfrak{u}_2 : \mathfrak{u}_3 = \mathfrak{e}_1(\mathfrak{e}_2 \lambda\mu - \mathfrak{e}_3) : - \mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_3 : \mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_3\lambda\mu,$$

so daß für *die Konstanten der beiden Kegelschnitte* $\mathfrak{E}$ *und* $\mathfrak{U}$ *die Beziehung*

$$\frac{\mathfrak{u}_1}{\mathfrak{e}_1} = \frac{\mathfrak{u}_2}{\mathfrak{e}_2} + \frac{\mathfrak{u}_3}{\mathfrak{e}_3}$$

gilt, wenn $x_1 = 0$ die Grundpolare ist.

In den Koeffizienten $\mathfrak{u}_i$ treten die Parameter λ, μ nicht getrennt, sondern nur in der Form $\lambda\mu$ auf, und zwar ist

$$\lambda\mu = -\frac{\mathfrak{u}_3}{\mathfrak{u}_2},$$

wodurch dem noch *beliebigen* Punkte L der Punkt M einer Involution auf $x_1 = 0$ zugeordnet wird, welche die Schnittpunkte dieser Geraden mit $\mathfrak{U}(x) = 0$ zu Doppelpunkten hat, was unter III. ausgesprochen ist. *Es gibt also* ∞^1 *Vierecke, welche zugleich* $\mathfrak{U}$ *ein- und* $\mathfrak{E}$ *umbeschrieben sind, entsprechend der Willkür in der Wahl von* L, und dies ist der Schließungssatz.

Man kann von $\mathfrak{U}$ ausgehend den dualistischen Weg der Analyse einschlagen, statt Punktkoordinaten die Linienkoordinaten verwenden. Dann treten an die Stelle der Koeffizienten ihre reziproken Werte. Da aber $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{E}$ die Rollen tauschen, behält die Relation ihre Gestalt.

Wir kehren nun zum Ausgangspunkte zurück. Gegeben sei der Kegelschnitt $\mathfrak{E}$, oder genauer die Kurve 2. Klasse $\mathfrak{E}$. Wir legen an sie von den imaginären Kreispunkten K und K' aus die Tangenten, welche sich in den reellen Brennpunkten R, R' von $\mathfrak{E}$ und den imaginären J, J' schneiden.

Durch je zwei von den drei Gegeneckenpaaren des Tangentenvierseits ist ein Büschel von $\mathfrak{U}$-Kegelschnitten bestimmt. Es interessieren uns hiervon *die beiden Büschel*, welche durch K und K' gehen, *deren Kegelschnitte* $\mathfrak{U}$ also *Kreise sind.*[1])

1. Zu dem Kreisbüschel, welcher die reellen Brennpunkte R, R' zu Grundpunkten hat — er heiße Büschel R, R' —, gehört als Grundpolare

1) Der dritte Büschel, mit den reellen und imaginären Brennpunkten als Grundpunkten, ist ersichtlich ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln.

die Verbindungslinie des dritten Gegeneckenpaares J, J', nämlich die Nebenachse von 𝔈, und demgemäß als Grundpol der u. f. Punkt der Hauptachse. Durch den Grundpol geht das dritte Gegenseitenpaar eines dem 𝔘 ein-, dem 𝔈 umbeschriebenen Vierecks, und auf der Grundpolare liegt das dritte Gegeneckenpaar desselben. Daher gilt hier der Satz:

V. *Liegen drei Ecken A, B, C eines Tangentenvierseits eines Kegelschnittes 𝔈 auf einem Kreise, der durch die reellen Brennpunkte geht, so auch die vierte Ecke D, und zwar ist dieses Viereck zur Nebenachse symmetrisch. Das dritte Gegeneckenpaar liegt auf ihr und teilt den Kreisdurchmesser harmonisch; das dritte Gegenseitenpaar teilt die Nebenachse des Kegelschnittes 𝔈 harmonisch.*

Die letztgenannten Eigenschaften sind Folgerungen aus III bzw. IV.

2. Der Kreisbüschel J, J' hat zur Grundpolare die Hauptachse, zum Grundpole den unendlich fernen Punkt der Nebenachse.

Va. *Der entsprechende Satz geht aus dem ausgesprochenen hervor*, wenn man darin Haupt- und Nebenachse vertauscht und statt jenes Kreises einen Kreis 𝔘 zugrunde legt, welcher die Strecke der reellen Brennpunkte harmonisch teilt.

Weil ein Kegelschnitt 𝔈 symmetrisch zu beiden Achsen ist, läßt der erste Teil der Sätze V und Va auch folgende kürzere Fassung zu:

VI. *Liegt eine Ecke eines Tangentendreiseits eines Kegelschnittes auf der Nebenachse (Hauptachse), so liegen die beiden anderen Ecken auf einem Kreise, welcher durch die beiden reellen Brennpunkte geht (welcher die reellen Brennpunkte harmonisch trennt).*

Denn durch Drehung um die genannte Achse entsteht aus dem Dreiseit das Vierseit obiger Sätze.

Auf die vorausgehenden Betrachtungen ließe sich wohl ein vollständiges Lehrgebäude für die Metrik der Kegelschnitte gründen. Damit aber nicht Vollständigkeit den Reiz der Einfachheit verschütte, welchen die Einzelheit gewährt, werde davon abgesehen.

Es mag genügen, die Grundlage des Gebäudes zu skizzieren und zu zeigen, wie daraus die bekanntesten metrischen Kegelschnitteigenschaften von selbst erwachsen.

Durch die beiden reellen Brennpunkte R, R' und eine Tangente t, welche durch keinen dieser Punkte hindurchgeht, ist der Kegelschnitt 𝔈 bestimmt, sowie das Kreisbüschel (R, R') mit diesen Grundpunkten und das hierzu orthogonale Büschel (J, J').

Schneidet (Fig. 2) die Gerade t irgendeinen Kreis 𝔘 des einen oder anderen Büschels in den Punkten A, B und sind bzw. C und D ihre

Spiegelbilder in bezug auf die Zentrale des Büschels (die Grundpolare), so sind auch BC, CD, DA Tangenten von $\mathfrak{C}$.

Indem wir an Stelle von $\mathfrak{U}$ der Reihe nach andere Kreise des Büschels setzen, erhalten wir $\mathfrak{C}$ als Umhüllungsgebilde seiner Tangenten.

Fig. 3.

Unter den Kreisen des Büschels sind hervorzuheben:

1. *Der Kreis $\mathfrak{K}_1$, welcher durch den Schnittpunkt von t mit der Zentrale geht.* Sein zweiter Schnittpunkt mit t ist der *Berührungspunkt* P von t und $\mathfrak{C}$.
2. *Der Kreis $\mathfrak{K}_2$ des Büschels (RR'), welcher um den Schnittpunkt der Tangente t und der Zentrale gezogen ist.* Für ihn sind BC, DA zur Zentrale parallel: der zu diesen Tangenten gehörige Kreis $\mathfrak{K}_1$ ist daher die Potenzlinie RR'. Die auf ihr liegenden Berührungspunkte H, H' heißen *Hauptscheitel* und die Gerade RR' heißt *Hauptachse von* $\mathfrak{C}$.
3. *Die beiden Kreise (RR'), welche t berühren.* In solchem Kreise fällt D mit A, C mit B zusammen, und die Tangenten AB und CD fallen zusammen in die zur Zentrale normale Tangente, welche dann im Schnittpunkt mit ihr den $\mathfrak{C}$ berührt. Ein solcher Punkt heißt *Nebenscheitel* von $\mathfrak{C}$, die Verbindungslinie der beiden Nebenscheitel N und N', also die Zentrale des Büschels (RR'), heißt *Nebenachse* von $\mathfrak{C}$.

Bezüglich 2. und 3. hätten auch Kreise (JJ') betrachtet werden können unter sinngemäßer Abänderung der Bezeichnung der Scheitel und Achsen.

Die Fokaleigenschaften von Ellipse, Hyperbel lassen sich leicht aus dem Kreise $\mathfrak{K}_1$ ablesen. Schneidet die gegebene Tangente t die Hauptachse zwischen R und R', so ist $\mathfrak{C}$ eine Hyperbel, und wenn außerhalb, eine Ellipse. In Figur 3a ist in dem Büschelkreise RR', wel-

cher die Zentrale in S und S' trifft, die Gerade $S'P$, welche zwischen R und R' läuft, Hyperbeltangente und die Gerade SP Ellipsentangente, P Berührungspunkt für beide konfokale Kegelschnitte, und es lehrt ein Blick auf die Figur 3a ohne weiteres, daß die Radienvektoren gleiche Winkel bilden mit jeder der beiden Tangenten.[1]) Ebenso anschaulich tritt zutage die Eigenschaft für die *Summe und Differenz der Radienvektoren* bei Ellipse und Hyperbel. Es genüge, dies für die Ellipse an Figur 3b zu erläutern. Zur Tangente t sind die zugehörigen Kreise $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ gezogen und die Radienvektoren RP, $R'P$ bis zu ihren weiteren Schnittpunkten Q, Q' mit $\mathfrak{K}_2$ verlängert. Auf Grund der Fokaleigen-

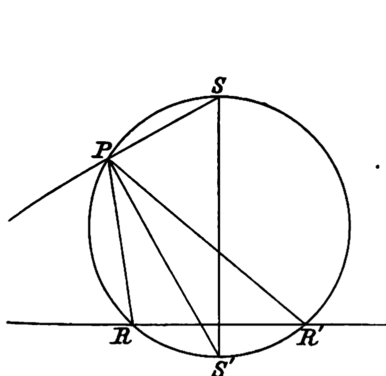


Fig. 3a.

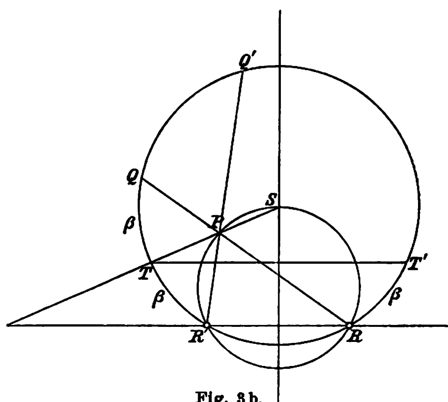


Fig. 3b.

schaft ist t Symmetrieachse für das Geradenpaar RQ, $R'Q'$ wie für $\mathfrak{K}_2$ und deswegen
$$QR = RP + R'P,$$
ferner auch Bogen $RT' = TR' = \beta$, wenn T der Schnittpunkt von t mit $\mathfrak{K}_2$ ist, welcher zwischen P und Hauptachse liegt. Zieht man durch T die zur Hauptachse parallele Sehne TT', welche nach (2) der „großen Achse“ HH' gleich ist, und beachtet, daß, wegen der Symmetrie in bezug auf die Nebenachse, Bogen $TR' = RT' = \beta$, so ergibt sich
$$\text{Bogen } QR = TT' = R'R + 2\beta$$
und für die zugehörigen Sehnen: $QR = TT'$ oder
$$RP + R'P = TT' = HH'.$$

Rückt ein Brennpunkt in gegebener Richtung ins Unendliche, so ist ❨ *Parabel* mit gegebenem Fokus R und gegebener Achsenrichtung, und durch eine Tangente t bestimmt: Diese schneide in S die Achse.

1) Auf die projektive Bedeutung der Fokaleigenschaft komme ich weiter unten zurück.

Von den beiden Kreisbüscheln tritt hier nur (JJ') in Erscheinung: es ist das Büschel der konzentrischen Kreise um R, da jeder Kreis die Strecke RR' harmonisch teilen muß.

Der Satz VI erhält also hier die besondere Form:

Liegt eine Ecke eines Tangentendreiecks der Parabel auf ihrer Achse, so sind die beiden anderen Ecken gleichweit vom Fokus entfernt.

Sei nun (Fig. 4) S der Schnittpunkt der Tangente t mit der Parabelachse (Grundpolare), so schneidet der Büschelkreis 1. die t im Berührpunkte P, und im Dreieck SPR sind also die Winkel bei P und S einander gleich, womit die Fokaleigenschaft der Parabel ausgesprochen ist.

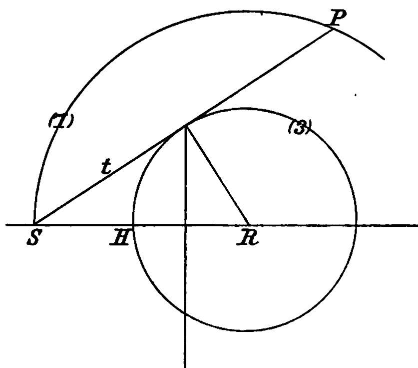


Fig. 4.

Der Büschelkreis 2. ist überhaupt nicht konstruierbar, von den beiden Kreisen 3. nur einer: er berührt die t im Fußpunkt der von R auf sie gefällten Tangente, und somit geht durch diesen die Scheiteltangente.

Für alle Kegelschnitte $\mathfrak{C}$ möge nun noch die *Aufgabe* gelöst werden:

Durch einen gegebenen Punkt Q an $\mathfrak{C}$ die Tangenten zu legen.

Nach dem Hauptsatze bedienen wir uns hierzu der Punktinvolution auf der Grundpolare mit den Scheiteln, welche der Büschelkreis 3. ergibt, als Doppelpunkten.

Durch Q wird (Fig. 5) der Büschelkreis $\mathfrak{U}$ und die Normale zur Grundpolare gezogen, welche diese in Q_1 treffe. Der dem Punkte Q_1 entsprechende Punkt Q_2 der Involution wird aus

$$OQ_1 \cdot OQ_2 = h^2$$

konstruiert, wobei O der Mittelpunkt und h die halbe Entfernung der Scheitel bedeutet. Die Normale zur Grundpolare durch Q_2 schneidet den Büschelkreis $\mathfrak{U}$ in Punkten der gesuchten Tangenten, wodurch die Aufgabe gelöst ist.

Für *Ellipse* und *Hyperbel* sind beiderlei Büschelkreise $\mathfrak{U}$ verwendbar[1]), wobei jedoch, wenn für die Hyperbel der Büschelkreis RR' benützt wird, dem Umstande Rechnung zu tragen ist, daß hier h rein imaginär ist, also OQ_1 und OQ_2 entgegengesetzte Richtung haben.

1) In Fig. 5 sind für die Ellipse beide Konstruktionen der Kontrolle wegen durchgeführt.

Bei der *Parabel* liegt der eine Scheitel im Unendlichen, daher sind Q_1 und Q_2 gleichweit vom endlichen Scheitel entfernt.

Fig. 5.

Man beachte auch den Fall, wo $\mathfrak{E}$ ein *Kreis* ist, also R' mit R zusammenfällt. Hier kann ein beliebiger Durchmesser des Kreises zur Grundpolare gewählt werden; wählt man aber hierzu den Durchmesser durch Q, so ist unsere Konstruktion keine andere als die zumeist angewendete Tangentenkonstruktion des Kreises.

Über den *projektiven Charakter der Fokaleigenschaft* soll noch folgendes gesagt werden.

In der absoluten Geometrie tritt an die Stelle des Winkels das Doppelverhältnis der Schenkel und der Strahlen vom Scheitel nach den Kreispunkten (Tangenten des absoluten Kegelschnittes). Betrachten wir (Fig. 6) die Konfiguration $\mathfrak{U}\mathfrak{E}$, worin R, R' und K, K' und J, J' die Gegeneckenpaare eines Vierecks $RKK'R'$ sind, welchem der Kegel-

schnitt 𝔘 umbeschrieben ist und dessen Seiten von 𝔈 berührt werden. Die Grundpolare $g \equiv JJ'$ treffe 𝔘 in den Punkten S, S', dann berührt eine 𝔈-Tangente aus S den 𝔈 in einem Schnittpunkt P mit 𝔘 nach I.

Man weiß: vier feste Punkte eines Kegelschnittes erscheinen von jedem seiner Punkte aus unter demselben Doppelverhältnis.

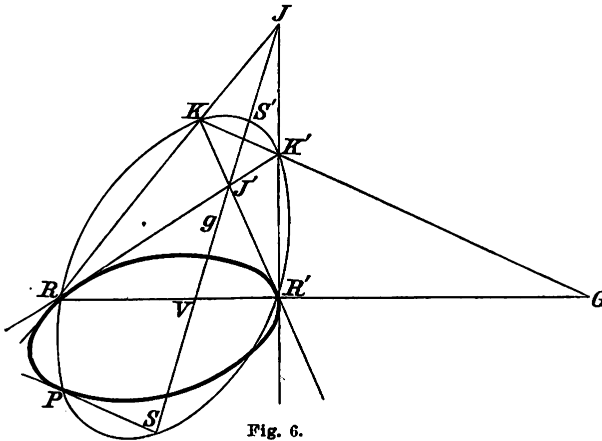


Fig. 6.

Nun haben die Strahlen aus R nach S, R', K', K das Doppelverhältnis der auf g liegenden Durchschnittspunkte bzw. $S, V, J', J = \delta$.

Aber die Strahlen aus R' nach S, R, K, K' haben ebenfalls dieses Doppelverhältnis δ.

Mithin, da an Stelle von R und R' jeder Punkt von 𝔘 gesetzt werden kann, haben die Strahlen aus P nach den Punkten S, R', K', K dasselbe Doppelverhältnis wie die nach den Punkten S, R, K, K'.

Hierdurch ist (für den Fall, daß K, K' die Kreispunkte, R, R' die Brennpunkte sind) die Fokaleigenschaft von 𝔈 in ganz bestimmter Form dargestellt.

Der Satz selbst aber kann in folgender Form ausgesprochen werden:

VII. *Ist einem Kegelschnitte ein Vierseit umbeschrieben und ist ein Punkt des Kegelschnittes mit zwei Paar Gegenecken verbunden, so bleibt das Doppelverhältnis, welches drei der Verbindungslinien mit der Tangente des Punktes eingehen, ungeändert, wenn jede Ecke durch ihre Gegenecke ersetzt wird.*

Der dualistische Satz, welcher hieraus abgeleitet werden kann, findet in den vorausgegangenen Betrachtungen keine Anwendung.

(Eingegangen am 12. 10. 26.)

Relativgeometrische Erweiterung eines Sechsscheitelsatzes von W. Blaschke.

Von Wilhelm Süss in Greifswald.

Herr W. Blaschke hat den folgenden Satz[1]) bewiesen: Es seien zwei Eilinien $\mathfrak{x}(t)$ und $\bar{\mathfrak{e}}(t)$ gegeben. $\mathfrak{e}(t)$ sei eine solche zu $\bar{\mathfrak{e}}$ flächentreu affine Eilinie, daß der gemischte Flächeninhalt $S(\mathfrak{x}, \mathfrak{e})$ (im Sinne H. Minkowskis) seinen Minimalwert annimmt. Eine solche Eilinie $\mathfrak{e}$ existiert stets. Ist $\bar{\mathfrak{e}}$ insbesondere eine Ellipse, so geht $\mathfrak{x}$ durch die inhaltstreue Affinität, welche $\mathfrak{e}$ in einen Kreis $\mathfrak{e}^*$ überführt, in eine solche Eilinie $\mathfrak{x}^*$ über, die mindestens sechs Scheitel besitzt. Dabei heißt ein Punkt von $\mathfrak{x}$ Scheitel, wenn in ihm der Krümmungsradius einen stationären Wert besitzt.

Dieser Satz ist ein Sonderfall eines Satzes der relativen Differentialgeometrie im Sinne von E. Müller.[2]) Ich behaupte nämlich: Wählt man eine extremale Eilinie $\mathfrak{e}$ zur Eichkurve einer relativen Kurventheorie, so hat die gegebene Eilinie $\mathfrak{x}$ mindestens sechs Relativscheitel (R. D. Nr. 3) bezüglich $\mathfrak{e}$.

Ein Relativscheitel von $\mathfrak{x}$ bezüglich $\mathfrak{e}$ ist dabei ein solcher Punkt von $\mathfrak{x}$, in welchem der Relativkrümmungsradius $\varrho = \frac{\bar{\varrho}(\mathfrak{x})}{\bar{\varrho}(\mathfrak{e})}$ einen stationären Wert besitzt, wobei $\bar{\varrho}(\mathfrak{x})$ und $\bar{\varrho}(\mathfrak{e})$ die gewöhnlichen Krümmungsradien in einander durch parallele Normalen zugeordneten Punkten von $\mathfrak{x}(t)$ und $\mathfrak{e}(t)$ bedeuten.

Sind x_i und e_i $(i=1,2)$ die Komponenten der Vektoren $\mathfrak{x}$ bzw. $\mathfrak{e}$, so ergeben sich für $\mathfrak{e}$ die Bedingungen (l. c. [1]) (11)):

$$(1) \qquad \begin{cases} \oint x_1 de_2 + \oint x_2 de_1 = 0, \\ \oint x_1 de_1 = \oint x_2 de_2 = 0. \end{cases}$$

Nun ist (R. D. § 1)

$$(2) \qquad \frac{d\mathfrak{x}}{dt} = \varrho \frac{d\mathfrak{e}}{dt},$$ also ist nach $(1)_2$

$$(3) \quad \oint x_i^2 d\left(\frac{1}{\varrho}\right) = -\oint \frac{1}{\varrho} d(x_i^2) = -2\oint \frac{1}{\varrho} x_i dx_i = -2\oint x_i de_i = 0 \quad (i=1,2)$$

1) Eine Minimumaufgabe über Eilinien; Christiaan Huygens 2 (1923).

2) Relative Minimalflächen; Monatshefte für Math. und Phys. 31 (1921). Vgl. auch die Arbeit des Verfassers: Zur relativen Differentialgeometrie I; Jap. Journ. of Math. 4 (1927), mit R. D. zitiert.

und nach $(1)_1$

$$(4) \quad \oint x_1 x_2 d\left(\frac{1}{\varrho}\right) = -\oint \frac{x_1\,dx_2 + x_2\,dx_1}{\varrho} = -\oint (x_1 de_2 + x_2 de_1) = 0.$$

Da ferner aus (2) folgt

$$(5) \qquad \oint x_i d\left(\frac{1}{\varrho}\right) = -\oint \frac{1}{\varrho}\,dx_i = -\oint de_i = 0,$$

so läßt sich unser Beweis durch dieselbe Methode von Herrn G. Herglotz und Herrn J. Radon zu Ende führen, mit welcher man den Sechsscheitelsatz der Affingeometrie beweist.[3])

Es sei noch bemerkt, daß aus (2) und (5) allein nach dem Herglotzschen Gedankengang der Vierscheitelsatz der Relativgeometrie (bei beliebiger Eilinie $\bar{\mathfrak{e}}$ als Eichkurve) folgt, den schon Herr W. Blaschke ausgesprochen hat[4]) und welcher den von Herrn C. Carathéodory entdeckten Vierscheitelsatz der Eilinien[5]) als Sonderfall enthält.

Es bleibt noch zu zeigen, daß der Blaschkesche Satz ein Sonderfall des bewiesenen ist. Ist $\bar{\mathfrak{e}}$, also auch $\mathfrak{e}$, eine Ellipse, so geht ϱ bei der inhaltstreuen Affinität, welche $\mathfrak{e}$ in den Kreis $\mathfrak{e}^*$ überführt, in den gewöhnlichen Krümmungsradius von $\mathfrak{x}^*$, mit einer Konstanten, der Krümmung von $\mathfrak{e}^*$, multipliziert, über. Es wird

$$(2') \qquad \frac{d\mathfrak{x}^*}{dt} = \varrho^* \frac{d\mathfrak{e}^*}{dt}.$$

In einem Relativscheitel ist nun nach (2)

$$\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} = \varrho \frac{d^2\mathfrak{e}}{dt^2}.$$

Bei einer Affinität müssen die entsprechenden Vektoren $\frac{d^2\mathfrak{x}^*}{dt^2}$ und $\frac{d^2\mathfrak{e}^*}{dt^2}$ einander parallel bleiben; es muß also aus

$$\frac{d\varrho}{dt} = 0$$

nach (2′)

$$\frac{d\varrho^*}{dt} = 0$$

folgen, w. z. b. w.

---

3) Vgl. W. Blaschke und K. Reidemeister: Vorlesungen über Differentialgeometrie II § 19, Berlin 1923.

4) l. c. 3), S. 65 Nr. 12.

5) Der erste Beweis dafür wurde von Herrn A. Kneser veröffentlicht: Bemerkungen über die Anzahl der Extreme der Krümmung auf geschlossenen Kurven . . ., H. Weber-Festschrift, Leipzig 1912.

(Eingegangen am 9. 10. 1927.)

Eine Erweiterung des Pascalschen Kegelschnittsatzes.

Von Rudolf J. Höpfner in Berlin.

Auf Seite 158 ff. des 34. Bandes dieser Zeitschrift hat Herr W. Franz Meyer einen einfachen analytischen Ausdruck für den Pascalschen Kegelschnittsatz gegeben, der sich auf beliebige perspektive Gebilde der Ebenen oder des Raumes ausdehnen läßt.

1. Sind zunächst

$$\begin{array}{c} A_1 A_2 A_3 \\ B_1 B_2 B_3 \end{array}$$

entsprechende Eckpunkte zweier perspektiven Dreiecke mit dem Zentrum C_0, dann kann man z. B. auf der Geraden $A_1 B_1 C_0$ die Gleichung jedes der drei Punkte aus den Gleichungen der beiden anderen kombinieren.

Sind also $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ und $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, $v_3 = 0$ die Gleichungen der Eckpunkte, und ist $c = 0$ die Gleichung des Zentrums, dann hat man z. B. für den Punkt A_1 die Gleichung $u_1 \equiv v_1 + \lambda_1 c = 0$, und ebenso für B_1 die Gleichung $v_1 \equiv u_1 + \mu_1 c = 0$.

Bedeutet ikl eine Permutation von 123, dann wird der Kegelschnitt k_2, welcher die Verbindungslinien nicht entsprechender Eckpunkte der beiden perspektiven Dreiecke berührt, dargestellt durch die Gleichung

$$\prod_1^3 (u_i + \mu_i c) - \prod_1^3 u_i \equiv \prod_1^3 (v_i + \lambda_i c) - \prod_1^3 v_i = 0.$$

Die Gleichungen haben den gemeinschaftlichen Faktor c und repräsentieren daher eine Kurve 3. Klasse, welche in das Zentrum $c = 0$ und die Kurve 2. Klasse $k_2 = 0$ zerfällt.

Ersetzt man die Symbole u, v durch x, y, dann geht das Zentrum $c = 0$ in die Achse $p = 0$ über, und man erhält den genannten analytischen Ausdruck für den Kegelschnitt eines Pascalschen Sechsecks.

2. Aus der perspektiven Gruppe $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$ erhält man durch Vertauschung der Eckpunkte noch die drei perspektiven Gruppen

$$\begin{array}{ccc} B_1 A_2 A_3 & A_1 B_2 A_3 & A_1 A_2 B_3 \\ A_1 B_2 B_3 & B_1 A_2 B_3 & B_1 B_2 A_3, \end{array}$$

die alle das Zentrum C_0 haben, während die Verbindungslinien nicht entsprechender Eckpunkte sich teilweise ändern; es ändert sich daher auch der Kegelschnitt.

Der Kegelschnitt der Gruppe $B_1 A_2 A_3$, $A_1 B_2 B_3$ hat z. B. die Gleichung

$$u_2 u_3 (u_1 + \mu_1 c) - u_1 (u_2 + \mu_2 c)(u_3 + \mu_3 c)$$
$$\equiv v_2 v_3 (v_1 + \lambda_1 c) - v_1 (v_2 + \lambda_2 c)(v_3 + \lambda_3 c) = 0.$$

Der häufig aufgestellte Satz, daß die Schnittpunkte nicht entsprechender Seiten zweier perspektiven Dreiecke auf einem Kegelschnitt liegen, und daß dual die Verbindungslinien nicht entsprechender Eckpunkte einen anderen Kegelschnitt berühren, erschöpft also nicht das Problem und bedarf der Ergänzung.

3. Die vorigen Betrachtungen lassen sich sofort auf beliebige perspektive Punktgruppen der Ebene bzw. auf Geraden übertragen, die paarweise durch beliebige Punkte einer Direktrix gehen; für $2n$ Elemente erhält man dann eine Kurve $(n-1)$-ter Klasse bzw. Ordnung.

So liegen z. B. im Pascalschen Sechseck auf einer Steinerschen Linie vier Steinersche Punkte, durch welche je eine Pascalsche Linie und eine Cayleysche Linie gehen; die beiden Gruppen der Geraden schneiden sich in zwölf Kirkmanschen Punkten; die bekannte c_3 durch diese Punkte läßt sich daher analytisch einfach darstellen. Vertauscht man eine der Pascalschen Linien mit der entsprechenden Cayleyschen Linie, dann ergeben sich als Schnittpunkte außer sechs Kirkmanschen Punkten noch drei Salmonsche Punkte (Schnittpunkte der Cayleyschen Linie) und drei Diagonalpunkte (Schnittpunkte der Pascalschen Linie); auch durch solche 12 Punkte geht daher eine c_3.

4. Eine Fläche F_3 3. Ordnung kann in gewissem Sinne als das Erzeugnis zweier perspektiven Tetraeder betrachtet werden; denn solche Tetraeder bestimmen eine Konfiguration $15_6 20_3$ und diese wieder eine F_3 bzw. die duale Φ_3.

Da man aber aus einem perspektiven Tetraederpaar noch sieben andere perspektive Gruppen ableiten kann, so gehören zu zwei perspektiven Tetraedern acht Flächen F_3 3. Ordnung und acht Flächen Φ_3 3. Klasse, deren Gleichungen sich leicht, wie vorher, ableiten lassen.

Überhaupt darf man die u, v bzw. die x, y als lineare Funktionen mit beliebig vielen Veränderlichen betrachten.

(Eingegangen am 8. 6. 26.)

Mathematische Miszellen. XIII.

Über Abhängigkeit linearer Systeme und Integrabilitätsbedingungen für Systeme linearer Differentialgleichungen in mehreren Variabeln.

Von ALEXANDER OSTROWSKI in Basel.

Im folgenden behandle ich die Frage nach den Integrabilitätsbedingungen des Systems

$$\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\varrho} - \sum_{\varkappa=1}^{m} \Gamma^{(\varrho)}_{\mu\varkappa} A_{\varkappa\nu} = 0 \qquad \begin{matrix} \mu, \nu = 1, 2, 3, \ldots, m \\ \varrho = 1, 2, 3, \ldots, r \end{matrix}$$

nach einer Methode, die vielleicht wegen der beiden dabei benutzten allgemeinen Sätze über lineare Abhängigkeit von Funktionensystemen (Sätze 1 und 2) ein gewisses Interesse darbieten dürfte. An sich sind die Integrabilitätsbedingungen für das obige Gleichungssystem oft untersucht worden, da sie in der Riemannschen Geometrie in der Theorie der Parallelverschiebung eine wichtige Rolle spielen. Wohl die schärfste und eleganteste Behandlungsweise für diese Fragen ist erst kürzlich von Herrn Schlesinger entwickelt worden.[1]) Das von Schlesinger benutzte Hilfsmittel der Matrizenproduktintegration gestattet jedenfalls, die Sätze unter besonders weitreichenden Voraussetzungen über die $\Gamma^{(\varrho)}_{\mu\nu}$ zu beweisen, während jeder sich auf Differentiation stützende Ansatz wohl zu weitgehenden Einschränkungen in dieser Richtung verurteilt ist. — In unserem Beweis wird vorausgesetzt, daß die $\Gamma^{(\varrho)}_{\mu\nu}$ beliebig oft differenzierbar sind, was natürlich eine besonders weitgehende Einschränkung darstellt. Indessen legen die folgenden Ausführungen vor allem auf den formalen Ansatz, der in einer gewissen Richtung besonders direkt erscheint, Nachdruck.

Satz 1. *Es seien* $X_{\mu\nu}$ $(\mu = 1, 2, 3, \ldots, m;\ \nu = 1, 2, 3, \ldots, n)$ *m Funktionensysteme von je n Elementen, die von den Variablen* $v_1, v_2, \ldots$ *abhängig und nach diesen Variablen* $(m-1)$*-mal stetig differenzierbar in einem Gebiet G sein mögen. Für die Existenz eines solchen von* $v_1, v_2, \ldots$ *freien Systems von m nicht sämtlich verschwindenden Größen*

$$C_1, C_2, \ldots, C_m,$$

1) L. Schlesinger, Parallelverschiebung und Krümmungstensor. Math. Ann. 99 (1928), S. 413—434.

daß identisch in $v_1, v_2, \ldots$ in G Beziehungen bestehen:

$$
(1) \qquad \begin{array}{c}
C_1 X_{11} + C_2 X_{21} + \cdots + C_m X_{m1} = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
C_1 X_{1n} + C_2 X_{2n} + \cdots + C_m X_{mn} = 0,
\end{array}
$$

ist notwendig, daß die Matrix

$$
(2) \qquad \left|\begin{array}{ccc}
X_{11} & \cdots\cdots & X_{m1} \\
\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\
X_{1n} & \cdots\cdots & X_{mn} \\
\frac{\partial X_{11}}{\partial v_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial X_{m1}}{\partial v_1} \\
\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\
\frac{\partial^i X_{1\alpha}}{\partial v_1 \partial v_2 \ldots} & \cdots\cdots & \frac{\partial^i X_{m\alpha}}{\partial v_1 \partial v_2 \ldots} \\
\cdots & \cdots\cdots & \cdots
\end{array}\right|
$$

in der alle Ableitungen der $X_{\mu\nu}$ nach den $v_1, v_2, \ldots$ bis zur $(m-1)$-ten Ordnung auftreten, höchstens den Rang $m-1$ hat; sind in keinem Punkte von G alle Unterdeterminanten $(m-1)$-ter Ordnung von (2), an denen eine der ersten n Zeilen beteiligt ist, zugleich gleich Null, so ist dies auch hinreichend.

Beweis: Die notwendige Bedingung ergibt sich durch Differentiation von (1) unmittelbar.

Ist der Rang von (2) $< m$, und ist die Zusatzbedingung erfüllt, so benutze ich ein Kriterium für lineare Abhängigkeit von m Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_m$ von k Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_k$, das so lautet: Sind $f_1, f_2, \ldots, f_m$ in einem Gebiet G des $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$-Raumes m-mal stetig differenzierbar, so ist für das Bestehen einer linearen Beziehung in G mit von den x unabhängigen Koeffizienten

$$c_1 f_1 + \cdots + c_m f_m = 0$$

notwendig, daß alle Determinanten

$$
(3) \qquad \left| f_\mu, \frac{\partial^{k_1} f_\mu}{\partial x_1^{\alpha_1'} \ldots \partial x_n^{\alpha_n'}}, \ldots, \frac{\partial^{k_{m-1}} f_\mu}{\partial x_1^{\alpha_1^{(m-1)}} \ldots \partial x_n^{\alpha_n^{(m-1)}}} \right| \qquad \begin{array}{l} \mu = 1, \ldots, m \\ k_\nu \leqq m-1 \end{array}
$$

verschwinden. Dies ist auch hinreichend, z. B. wenn die Funktionen f in G analytisch sind; ferner, wenn in keinem Punkte des Gebietes G alle für je $(m-1)$ unter den m Funktionen f_μ gebildeten Determinanten (3) $(m-1)$-ter Ordnung zugleich verschwinden.[1])

1) Vgl. A. Ostrowski, Über ein Analogon der Wronskischen Determinante bei Funktionen mehrerer Veränderlichen, Math. Zeitschr. 4 (1919), S. 223 ff.; W. Sternberg, Über die lineare Abhängigkeit von Funktionen mehrerer Variablen, Math. Zeitschr. 14 (1922), S. 169 ff. Das obige Kriterium folgt unmittelbar aus dem in der

Man bilde nun unter Einführung von n neuen Veränderlichen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ die m Funktionen von $u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots$:

$$U_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} X_{\mu\nu} u_\nu.$$

Die für diese Funktionen von den Variablen $u_1, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots$ gebildeten Determinanten (3) verschwinden offenbar, wenn alle Determinanten m-ter Ordnung aus der Matrix (2) verschwinden. Es sei nun P ein Punkt von G, Δ eine in P von 0 verschiedene Unterdeterminante $(m-1)$-ter Ordnung von (2)

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_{1i} & \ldots\ldots\ldots & X_{m-1,i} \\ X_{1i_1} & \ldots\ldots\ldots & X_{m-1,i_1} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial^k X_{j1}}{\partial v_1^\alpha \partial v_2^\beta} & \ldots\ldots\ldots & \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

Es sei Ω eine Umgebung von P in G, in der durchweg $|\Delta| \geqq \delta > 0$ ist. Es seien die absoluten Beträge aller anderen Unterdeterminanten von (2) in Ω kleiner als C. Dann gibt es eine für $U_1, U_2, \ldots, U_m$ gebildete Determinante D von der Form (3), die bis auf die erste Zeile mit Δ übereinstimmt, in der ersten Zeile aber $U_1, \ldots, U_m$ enthält. Wähle ich nun ein Gebiet ω des u-Raumes, in dem der absolute Betrag von u_i wenigstens um das $\left(m\frac{C}{\delta}\right)$-fache größer ist als die absoluten Beträge der übrigen u_ν, so wird D im Gebiet des u, v-Raumes, das den beiden Gebieten Ω und ω entspricht, stets von 0 verschieden sein, so daß die Existenz eines linearen Relationensystems (1) in Ω gesichert ist.

Aus dem Nichtverschwinden von Δ folgt aber, daß die Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_m$ bis auf einen Homogenitätsfaktor eindeutig bestimmt sind. Ist nun P_1 ein anderer Punkt von G, Ω_1 ein Gebiet um P_1, in dem die Existenz der Relationen (1) und ihre Eindeutigkeit bis auf eine beliebige Konstante nachgewiesen ist, so folgt aus dem Überdeckungssatze, daß man zwischen Ω und Ω_1 endlich viele Gebiete $\Omega', \ldots, \Omega^{(k)}$ einschalten kann, so daß in jedem von diesen Gebieten die Relationen (1) bestehen und bis auf einen Homogenitätsfaktor eindeutig bestimmt sind,

---

ersten der zitierten Arbeiten bewiesenen allgemeineren Satze. In der oben formulierten spezielleren Form wird es in der zweiten Arbeit bewiesen, allerdings mit einer etwas *engeren* hinreichenden Bedingung. Man vergleiche ferner noch die folgenden Arbeiten, in denen verschiedene Kriterien für lineare Abhängigkeit bewiesen werden: Pasch, Crelles Journal Bd. 80, S. 178 ff.; Kellogg, Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 63, S. 159 ff.

und daß Ω mit Ω', Ω' mit Ω'', ..., $\Omega^{(k)}$ mit Ω_1 ein gemeinsames Teilgebiet besitzt. Daraus folgt, daß in Ω_1 dieselben Relationen (1) wie in Ω gelten, die damit für das ganze Gebiet nachgewiesen sind. Damit ist der Satz 1 bewiesen.

Satz 2. *Es seien m (n-dimensionale) Vektoren gegeben*

$$A_1, A_2, \ldots, A_m,$$

wo die n Komponenten von A_i *durch*

$$A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{in}$$

bezeichnet werden mögen. Diese Vektoren mögen von den Variablen $u_1, u_2, \ldots, v_1, v_2, \ldots$ *abhängen und nach* $v_1, v_2, \ldots$ *beliebig oft in einem Gebiete G differenzierbar sein. Man fasse ins Auge die lineare Schar von* ∞^m *Vektoren*

$$\text{(S)} \qquad C_1 A_1 + C_2 A_2 + \cdots + C_m A_m,$$

wo die Koeffizienten C_μ *skalare Größen sind, die nur von* $v_1, v_2, \ldots$ *abhängen und nach diesen Variablen in G beliebig oft differenzierbar sind.*

Wenn als Basis der Schar S m Vektoren gewählt werden können, die von $v_1, v_2, \ldots$ *unabhängig sind, muß die Ableitung jedes Vektors* A_i *nach jeder der Variablen* $v_1, v_2, \ldots$ *ebenfalls der Schar S angehören.*

Diese Bedingung ist auch hinreichend, wenn z. B. entweder

1. $m = n$ *ist und die Determinante* $|A_{ik}| \neq 0$ *für ein festes Wertesystem* (u') *der u-Variablen und alle in Betracht kommende Werte der v ist; oder*
2. *wenn die* A_{ik} *eindeutige meromorphe Funktionen der Variablen u, v auf der in Betracht kommenden Menge sind und von den skalaren Faktoren* C_μ *dasselbe verlangt wird.*

Ich bezeichne ein Wertsystem der u-Variablen mit einem Buchstaben u. Werden daneben weitere Wertsysteme der u-Variablen betrachtet, so sollen sie mit u' bzw. u'' usw. bezeichnet werden. — Ein Wertsystem der v-Variablen sei mit v bezeichnet.

Die Notwendigkeit unserer Bedingung ist klar. Wir beweisen nun zunächst, daß sie im Falle 1. hinreichend ist. Zu diesem Zwecke betrachte ich für ein i mit $1 \leqq i \leqq m = n$ die Matrix mit $m + 1$ Zeilen

$$\left\| \begin{array}{l} A_{11}(u', v),\ A_{21}(u', v),\ \cdots,\ A_{m1}(u', v) \cdots \dfrac{\partial^k A_{\mu 1}(u', v)}{\partial v_1^\alpha \partial v_2^\beta \ldots} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_{1m}(u', v),\ A_{2m}(u', v),\ \cdots,\ A_{mm}(u', v) \cdots \dfrac{\partial^k A_{\mu m}(u', v)}{\partial v_1^\alpha \partial v_2^\beta \ldots} \\ A_{1i}(u, v),\ A_{2i}(u, v),\ \cdots,\ A_{mi}(u, v) \cdots \dfrac{\partial^k A_{\mu i}(u, v)}{\partial v_1^\alpha \partial v_2^\beta} \end{array} \right\| .$$

In den Kolonnen dieser Matrix kommen alle Ableitungen der $A_{\mu\nu}(u', v)$ bzw. $A_{\mu\nu}(u, v)$ nach den v-Variablen bis zur m-ten Ordnung vor. Da nun nach Voraussetzung jede die Ableitungen enthaltende Kolonne dieser Matrix sich linear durch die m ersten Kolonnen ausdrücken läßt, ist der Rang dieser Matrix höchstens m, und da die Determinante $|A_{ik}(u', v)| \neq 0$ ist, folgt aus dem Satz 1, daß die Relationen bestehen

(4) $$A_{ki}(u, v) = \sum_{\mu=1}^{m} C_{\mu}^{(i)} A_{k\mu}(u', v) \qquad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Definiere ich nun m neue Vektoren $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ durch die Festsetzung, daß die Komponenten des μ-ten Vektors Γ_μ die Werte haben

$$\Gamma_{\mu 1} = C_{\mu}^{1}, \ \ldots, \ \Gamma_{\mu m} = C_{\mu}^{(m)},$$

so folgt aus (4) $$A_{\varkappa} = \sum_{\mu=1}^{m} A_{\varkappa\mu}(u', v)\, \Gamma_{\mu},$$

und da $|A_{\varkappa\mu}(u', v)| \neq 0$ ist, sind auch umgekehrt die Γ_μ durch die A_μ linear mit Koeffizienten ausdrückbar, die von den u-Variablen unabhängig sind. Damit ist der Fall 1. erledigt.

Im Falle 2. gehen wir folgendermaßen vor:

Wir dürfen annehmen, daß keiner der Vektoren sich durch die übrigen linear mit nur von den v-Variablen abhängigen Koeffizienten ausdrücken läßt.

Wir betrachten nun zuerst die ersten Komponenten $A_{11}, A_{21}, \ldots, A_{m1}$ der Vektoren $A_1, \ldots, A_m$ und fassen ins Auge die eventuell bestehenden Relationen

(5) $$V_1 A_{11} + \cdots + V_m A_{m1} = 0,$$

in denen $V_1, \ldots, V_m$ nur von den v-Variablen abhängig und in G meromorph sind. Bestehen k solche unabhängige Relationen, so kann man nach einer geeigneten Transformation der Basis annehmen, daß sie die Form haben

(6) $$A_{k_1+1,1} = 0, \ \ldots, \ A_{m1} = 0;$$

dann besteht zwischen den ersten Komponenten $A_{11}, \ldots, A_{k_1 1}$ der ersten k_1 Vektoren keine solche Abhängigkeit. Ist $k_1 < m$, so betrachten wir die zweiten Komponenten der letzten $m - k_1$ Vektoren

$$A_{k_1+1,2}, \ \ldots, \ A_{m2}.$$

Wir dürfen annehmen, daß nicht alle diese Komponenten verschwinden, da keiner der Vektoren A_μ lauter verschwindende Komponenten hat und wir die letzten $m-1$ Komponenten beliebig umnumerieren können. Wir suchen nach den zwischen diesen Komponenten bestehenden Relationen

von der Form (5). Gibt es solche Relationen, so können sie nach einer geeigneten Transformation der Vektoren $A_{k_1+1}, \ldots, A_m$ in der Form vorausgesetzt werden

$$A_{k_2+1,2} = 0, \ldots, A_{m2} = 0, \tag{7}$$

wobei gleichzeitig auch (6) gültig bleibt. Zwischen den Komponenten $A_{k_1+1,2}, \ldots, A_{k_2 2}$ bestehen keine Relationen von der Form (5). Ist $k_2 < m$, so gehen wir ebenso weiter vor und erreichen, daß für ein $k_3 > k_2$ $A_{k_2+1,3} = 0, \ldots A_{m3} = 0$ gilt, während zwischen $A_{k_2+1,3}, \ldots, A_{k_3 3}$ keine Relation (5) besteht. Wir müssen so einmal zuerst zum Wert $k_r = m$ gelangen, da sonst beim Vektor A_m alle Komponenten schließlich als 0 erwiesen werden würden, was der Unabhängigkeit der A_μ widerspricht. Wir betrachten nunmehr für $1 \leqq i \leqq m$ die folgende Matrix, in der, wie von nun an wiederholt, die funktionale Abhängigkeit von v nicht explizite zum Ausdruck gebracht wird,

$$\left|\begin{array}{llll}
A_{11}(u'), \ldots\ldots, & A_{m1}(u') & \ldots & \dfrac{\partial^p A_{\mu 1}(u')}{\partial v_1^\alpha\, \partial v_2^\beta \ldots} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
A_{11}(u^{(k_1)}), \ldots\ldots, & A_{m1}(u^{(k_1)}) & \ldots & \dfrac{\partial^p A_{\mu 1}(u^k)}{\partial v_1^\alpha\, \partial v_2^\beta \ldots} \\
A_{12}(u^{(k_1+1)}), \ldots, & A_{m2}(u^{(k_1+1)}) & & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
A_{12}(u^{k_2}), \ldots\ldots, & A_{m2}(u^{k_2}) & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
A_{1r}(u^{(m)}), \ldots\ldots, & A_{mr}(u^{(m)}) & \ldots & \dfrac{\partial^p A_{\mu r}(u^{(m)})}{\partial v_1^\alpha\, \partial v_2^\beta \ldots} \\
A_{1i}(u, v), \ldots\ldots, & A_{mi}(u, v) & \ldots & \dfrac{\partial^p A_{\mu i}(u, v)}{\partial v_1^\alpha\, \partial v_2^\beta \ldots}
\end{array}\right| \tag{8}$$

Ihr Rang ist nach der Voraussetzung höchstens gleich m, da sich jede Kolonne mit den Ableitungen durch die ersten m Kolonnen ausdrücken läßt. Wir behaupten nun, daß ihre Unterdeterminante m-ter Ordnung aus den ersten m Kolonnen und ersten m Zeilen nicht identisch in $u', \ldots, u^{(m)}$ verschwindet. In der Tat ist diese Determinante gleich dem Produkt der Determinanten

$$\left|\begin{array}{ccc}
A_{11}(u') & \ldots & A_{k_1 1}(u') \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
A_{11}(u^{(k_1)}) & \ldots & A_{k_1 1}(u^{k_1})
\end{array}\right| \cdot \left|\begin{array}{ccc}
A_{k_1+1,2}(u^{(k_1+1)}) & \ldots & A_{k_2 2}(u^{k_1+1}) \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
A_{k_1+1,2}(u^{k_2}) & \ldots\ldots & A_{k_2 2}(u^{(k_2)})
\end{array}\right| \ldots \tag{9}$$

Nun gilt der folgende leicht zu beweisende Satz:

Ist $Q_1(\xi_1, \ldots, \xi_n), \ldots, Q_\varrho(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ ein beliebiges System von Funktionen, so ist für die lineare Abhängigkeit dieser Funktionen auf einer (ξ_ν)-Menge Ω notwendig und hinreichend, daß die Determinante

$$\left| Q_i\left(\xi_1^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)}\right) \right| \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, \varrho \\ k = 1, 2, \ldots, \varrho \end{matrix}$$

für ϱ beliebig gewählte Punkte $\left(\xi_\nu^{(k)}\right)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, \varrho)$ von Ω verschwindet.[1])

Nach diesem Satze lassen sich die Wertesysteme $u', \ldots, u^{(m)}$ so wählen, daß das Produkt (9) von 0 verschieden bleibt, also nicht identisch in den v-Variablen verschwindet. Daher läßt sich auf die Matrix (8) der Satz 1 anwenden, und es folgt das Bestehen eines Relationensystems

$$A_{\mu i} = C_1^{(i)} A_{\mu 1}(u') + C_2^{(i)} A_{\mu 1}(u'') + \cdots + C_m^{(i)} A_{\mu r}(u^{(m)}).$$

Setzt man daher allgemein $\Gamma_{\mu i} = C_\mu^{(i)}$, so folgt für die m Vektoren $\Gamma_1, \ldots \Gamma_m$

$$A_\mu = A_{\mu 1}(u')\,\Gamma_1 + A_{\mu 1}(u'')\,\Gamma_2 + \cdots + A_{\mu r}(u^{(m)})\,\Gamma_m,$$

und diese Relationen lassen sich nach $\Gamma_1, \ldots \Gamma_m$ auflösen, da ihre Determinante nach dem eben Gesagten nicht identisch in den v-Variablen verschwindet. Damit haben wir eine Basis Γ_μ der Schar S von der gewünschten Beschaffenheit gebildet. —

Wir betrachten nunmehr ein System von Differentialgleichungen

$$(10) \qquad \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\varrho} = \sum_{\varkappa=1}^{m} \Gamma_{\mu\varkappa}^{(\varrho)} A_{\varkappa\nu}, \qquad \begin{matrix} \mu = 1, 2, \ldots, m \\ \nu = 1, 2, \ldots, m \\ \varrho = 1, 2, \ldots, r \end{matrix}$$

wo $A_{\mu\nu}$ als m^2 Funktionen der r Variablen x_ϱ gesucht werden und $\Gamma_{\mu\nu}^{(\varrho)}$ $m^2 \cdot r$ in einem Gebiet G gegebene und dort beliebig oft differenzierbare Funktionen der x_ϱ sind.

Wir fragen, wann man zu einer beliebig vorgegebenen Zahlenmatrix $(a_{\mu\nu})$ mit von 0 verschiedener Determinante eine Lösung $(A_{\mu\nu})$ des Systems (10) im Gebiet G finden kann, die an einer beliebig vorgegebenen Stelle des Gebietes G sich auf $(a_{\mu\nu})$ reduziert. Bezeichnet man für ein festes ϱ die Matrix $\left(\Gamma_{\mu\nu}^{(\varrho)}\right)$ mit ω_ϱ, so reduziert sich das System (10) auf r Matrizen-Differentialgleichungen

$$(11) \qquad \frac{\partial A}{\partial x_\varrho} - \omega_\varrho A = 0,$$

unter A die gesuchte Matrix $(A_{\mu\nu})$ verstanden. Wir behaupten nun, daß für die Lösbarkeit unseres Problems notwendig ist, daß die r Operatoren

$$\frac{\partial}{\partial x_\varrho} - \omega_\varrho, \quad \varrho = 1, \ldots, r$$

1) Vgl. Weitzenböck, Palermo Rend. Bd. 34, S. 176; E. Fischer, Crelles Journal Bd. 148, S. 53.

untereinander vertauschbar sind, d. h. daß

$$\omega_{\varrho,\varrho'} \equiv \omega_\varrho \omega_{\varrho'} - \omega_{\varrho'}\omega_\varrho + \left(\frac{\partial \omega_\varrho}{\partial x_{\varrho'}} - \frac{\partial \omega_{\varrho'}}{\partial x_\varrho}\right) \equiv 0$$

für alle $\varrho \gtrless \varrho'$ in G gilt. In der Tat gilt für jede Lösungsmatrix von (11)

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_\varrho} - \omega_\varrho\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_{\varrho'}} - \omega_{\varrho'}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x_{\varrho'}} - \omega_\varrho\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_\varrho} - \omega_{\varrho'}\right)\right\} A = 0,$$

d. h. $$\omega_{\varrho\varrho'} A = 0.$$

Da aber A nach der Annahme an jeder Stelle $= (a_{\mu\nu})$ gemacht werden kann, gilt an jeder Stelle

$$\omega_{\varrho,\varrho'}(a_{\mu\nu}) = 0, \quad \text{d. h.} \quad \omega_{\varrho,\varrho'} \equiv 0.$$

— Unsere Vertauschbarkeitsbedingung ist hier die sogenannte Integrabilitätsbedingung. —

Wir beweisen nun, daß sie auch hinreichend ist, und daß, wenn sie erfüllt ist, die Matrix $(A_{\mu\nu})$ eindeutig bestimmt ist.

Wir benutzen dabei gewisse längst bekannte Resultate über Systeme von linearen Differentialgleichungen, die in der hier für uns in Betracht kommenden Gestalt so formuliert werden können:

Es läßt sich stets eine von einer Variablen x abhängige Matrix mit m^2 Elementen $A = (A_{\mu\nu})$ finden, die der Matrizen-Differentialgleichung

$$\frac{dA}{dx} = \omega A$$

in einem zusammenhängenden Wertbereich G von x genügt, wenn ω eine von x in diesem Bereich abhängige beliebig oft differenzierbare Matrix ist, und zwar kann man A in einem beliebigen Punkte von G beliebig als eine konstante Matrix mit von 0 verschiedener Determinante vorschreiben. Dann ist A in G eindeutig bestimmt und die Determinante von A verschwindet in G nicht.[1])

Man kann dieses Resultat auch in die Vektorsprache übersetzen. Dann ergibt sich: Die Vektordifferentialgleichung

$$\frac{dA}{dx} = \omega A,$$

wo A als ein Vektor mit m Komponenten gesucht wird, hat m linear unabhängige Lösungen

$$A', \ldots, A^{(m)},$$

1) Vgl. Schlesinger, a. a. O. S. 415—416; auch das Nichtverschwinden der Determinante von A ergibt sich aus der Methode von Schlesinger sehr einfach.

deren Determinante $|A_\nu^\mu|$ in G *durchweg* von 0 verschieden ist. — Und unsere Behauptung besagt, daß das *System* der Vektordifferentialgleichungen

$$\frac{\partial A}{\partial x_\varrho} = \omega_\varrho A \qquad \varrho = 1, \ldots, r \tag{11}$$

in G m linear unabhängige Lösungsvektoren besitzt, deren Determinante in G durchweg von 0 verschieden ist.

Wir betrachten nun zunächst das Gleichungssystem (11), das sich auf x_1 bezieht:

$$\frac{dA}{dx_1} - \omega_1 A = 0.$$

Es besitzt nach dem obigen m linear unabhängige Lösungen

$$A', A'', \ldots, A^{(m)};$$

die allgemeinste Lösung ist dann

$$\Gamma_1 A' + \Gamma_2 A'' + \cdots + \Gamma_m A^{(m)},$$

wo die Γ_μ nur von $x_2, \ldots, x_m$ abhängen — die $A^{(\mu)}$ hängen von allen m Variablen $x_1, x_2, \ldots$ ab. Diese Lösung setzen wir in das zweite, auf x_2 bezügliche System (11) ein:

$$\frac{d(\Gamma_1 A' + \cdots + \Gamma_m A^{(m)})}{\partial x_2} - \omega_2(\Gamma_1 A' + \cdots + \Gamma_m A^{(m)}) \tag{12}$$
$$= A' \frac{d\Gamma_1}{dx_2} + \cdots + A^{(m)} \frac{d\Gamma_m}{dx_2} + \sum_{\mu=1}^{m} \Gamma_\mu \left(\frac{dA^{(\mu)}}{dx_2} - \omega_2 A^{(\mu)}\right) = 0.$$

Die Determinante der m^2 Größen $A_\nu^{(\mu)}$ [1]) verschwindet aber im ganzen Gebiet G nicht. Daher haben wir in unseren neuen Differentialgleichungen ein Differentialsystem derselben Art, welches also m linear unabhängige Lösungssysteme besitzt:

$$\Gamma^{(\mu)} = \left(\Gamma_1^{(\mu)}, \Gamma_2^{(\mu)}, \ldots, \Gamma_m^{(\mu)}\right) \qquad \mu = 1, 2, \ldots, m.$$

Die allgemeinste Lösung von (12) hat dann die Form

$$X_1 \Gamma^{(1)} + \cdots + X_m \Gamma^{(m)}$$
$$= \left(X_1 \Gamma_1^{(1)} + \cdots + X_m \Gamma_1^{(m)}, \ \cdots, \ X_1 \Gamma_m^{(1)} + \cdots + X_m \Gamma_m^{(m)}\right),$$

wo die X_μ von $x_1, x_3, \ldots, x_m$ abhängen. Die $\Gamma_\nu^{(\mu)}$ hängen aber von allen m Variablen $x_1, \ldots, x_m$ ab. Wir können dagegen nur Lösungen brauchen, die von x_1 unabhängig sind. Wir behaupten nun, daß in der obigen Lösungsschar als Basen $\Gamma^{(\mu)}$ solche Systeme gewählt werden können, die von x_1 unabhängig sind. Zum Beweis wenden wir auf die obigen Gleichungen (12) für $\Gamma_1^{(\mu)}, \ldots, \Gamma_m^{(\mu)}$ den Prozeß

$$\frac{\partial}{\partial x_1} - \omega_1$$

1) Wir bezeichnen allgemein die Komponente des Vektors $A^{(\mu)}$ mit $A_1^{(\mu)}, \ldots, A_m^{(\mu)}$.

an und berücksichtigen die Integrabilitätsbedingungen. Dann entsteht

$$A' \frac{\partial^2 \Gamma_1^{(\mu)}}{\partial x_1 \partial x_2} + \cdots + A^{(m)} \frac{\partial^2 \Gamma_m^{(\mu)}}{\partial x_1 \partial x_2} + \sum_{\varkappa} \frac{\partial \Gamma_{\varkappa}^{(\mu)}}{\partial x_1} \left(\frac{\partial A^{(\varkappa)}}{\partial x_2} - \omega_2 A^{(\varkappa)} \right) = 0;$$

daher genügt für jedes μ auch das System

$$\frac{\partial \Gamma^{(\mu)}}{\partial x_1}$$

denselben Differentialgleichungen wie die $\Gamma^{(\mu)}$, ist also in der obigen Schar enthalten. Folglich lassen sich nach dem obigen Satz 2 $\Gamma^{(\mu)}$ frei von x_1 wählen, und man erhält alle für uns in Betracht kommende Lösungen, wenn man $X_1, \ldots, X_m$ alle beliebig oft differenzierbare Funktionen von $x_3, \ldots, x_m$ durchlaufen läßt. Man erhält schließlich als gemeinsames Lösungssystem der beiden bis jetzt betrachteten Gleichungssysteme

(13) $$C_1 B^{(1)} + C_2 B^{(2)} + \cdots + C_m B^{(m)},$$

wo $C_1, \ldots, C_m$ nur von $x_3, \ldots x_m$ abhängige Funktionen und $B^{(\mu)}$ in dem ganzen Gebiet G lineare unabhängige Vektoren sind. Setzt man dies in das dritte System von Differentialgleichungen ein, so erhält man für die Systeme $C_1, \ldots, C_m$ ein Differentialsystem m-ter Ordnung und beweist ganz analog wie oben, daß m linear unabhängige Lösungen frei von x_1, x_2 gewählt werden können. Daher erhalten wir schließlich als Lösungen unserer ersten drei Gleichungssysteme

$$C_1 B^{(1)} + \cdots + C_m B^{(m)},$$

wo die $C_1, C_2, \ldots, C_m$ jetzt von x_1, x_2, x_3 unabhängig sind, während $B^{(\mu)}$ m in G durchweg linear unabhängige Vektoren sind. Und die wiederholte Anwendung desselben Verfahrens gibt uns endlich eine Lösung in der obigen Form, wo $C_1, \ldots, C_m$ Konstanten sind.

Die Eindeutigkeit der Lösung ergibt sich aus dem linearen Charakter und den bekannten Sätzen über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen unmittelbar.

Damit ist unser Satz bewiesen.

(Eingegangen am 1. 8. 28.)

Angelegenheiten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Einweihung einer Gedenktafel für Felix Klein.



Geburtshaus Felix Kleins mit Gedenktafel.

Auf der Naturforscherversammlung in Düsseldorf 1926 war im Kreise der Deutschen Mathematiker-Vereinigung der Gedanke entstanden, das Andenken Felix Kleins durch Anbringung einer Gedenktafel an seinem Geburtshause in Düsseldorf, Jägerhofstrasse 11, zu ehren. Der Vorstand hatte demgemäß beschlossen, einen Betrag für dieses Unternehmen auszuwerfen. Nachdem auch der Oberbürgermeister von Düsseldorf, Herr Dr. Lehr, in entgegenkommendster Weise eine Beteiligung der Stadt Düsseldorf in Aussicht gestellt hatte, konnte der Auftrag zum Entwurf einer würdigen Gedenktafel an einen Düsseldorfer Bildhauer erteilt werden. Die Tafel besteht aus grünem Serpentinstein und trägt als einzigen Schmuck in hocherhabenen Bronzebuchstaben die Inschrift:

IN DIESEM HAUSE
WURDE DER
MATHEMATIKER
FELIX KLEIN
AM 25. APRIL 1849
GEBOREN

Am 12. Oktober wurde die Tafel in Gegenwart des Oberbürgermeisters, von Mitgliedern der Familie Felix Kleins, namentlich seiner Tochter, Frau Studienrätin Staiger, und seines in Düsseldorf als Justizrat lebenden Bruders, ferner einer großen Zahl von Mathematikern der Rheinprovinz und Westfalens eingeweiht. Die Festansprache hielt Blumenthal-Aachen. Sie ist unten im Wortlaut wiedergegeben. Oberbürgermeister Lehr übernahm in einer Gegenansprache die Tafel in die Obhut der Stadt und betonte dabei die hohe Verehrung, welche die Stadtverwaltung Düsseldorf dem Andenken Felix Kleins entgegenbringe, dessen Namen auch eine neu angelegte Straße tragen werde.

Es ist ein wundersamer Zufall, daß die Witwe Felix Kleins, Frau Anna Klein, noch eben die Nachricht von der Einweihung der Gedenktafel erhalten und sich an ihr gefreut hat. Am 18. Oktober ist sie gestorben.

Ansprache des Herrn Blumenthal.

„In diesem Hause wurde der Mathematiker Felix Klein geboren", lautet die Inschrift der Tafel, die wir heute einweihen wollen. Da ziemt sich wohl die Frage: Worin liegt die Berechtigung, daß wir in dieser Stadt des tätigen Lebens die Erinnerung an einen reinen Wissenschaftler, an den Vertreter einer Wissenschaft, die die Abstraktion am reinsten verkörpert, in so auffälliger Weise ehren? Dem Fachwissenschaftler, der seine Wissenschaft als Selbstzweck betreibt und nur einen kleinen Kreis von Kennern durch seine Entdeckungen erfreut und erhebt, würde ich diese Auszeichnung nicht zuerkennen. Denn wer im Gedächtnis der großen Welt leben soll, muß auf die große Welt gewirkt haben. Aber das eben hat Klein getan. Mit innerem Drang und mit klarem Blick hat er die Punkte gesucht und gefunden, wo seine Wissenschaft in dem Leben verwurzelt ist und von wo aus sie nutzbringend und umgestaltend in das Leben eingreifen kann, und an diesen Punkten hat er die Kraft seines Willens angesetzt. Dadurch hat er sich das dankbare Gedächtnis der Nachwelt gesichert.

Den großen Wissenschaftler erhebt über den Spezialisten die Fähigkeit zur Zusammenschau, zu umfassender Unterordnung der Einzeltatsachen unter allgemeine Grundsätze. Vor Kleins Augen lag das weitschichtige Gewebe der modernen Mathematik als einheitliches Bild, zusammengehalten durch die ihm eigene geometrisch-anschauliche Methode. Es war eine Zusammenfassung von schöpferischer Wirkung, die in Kleins eigenen Händen und in den Händen vieler Schüler der Mathematik glänzende Schätze gewonnen hat und noch gewinnt.

Aber in diesem Verdienst, so groß es ist, liegt nicht die Eigenart seiner Persönlichkeit. Ihn drängte es zu der tiefsten Frage, der Frage nach der Lebensbedeutung, dem Lebenswert der Mathematik.

An zwei Punkten greift die Mathematik sichtbar in das Leben ein: bei der Naturbeherrschung und bei der Jugenderziehung. Der konkrete Ausdruck der Naturbeherrschung ist die neuzeitliche Technik, das Ingenieurtum. Klein hat erkannt und verkündet: Mathematik, exakte Naturwissenschaften und Technik sind eins, sie müssen bewußt zusammenwirken zum Segen der Menschheit. Worin liegt das Neue dieser Auffassung? Gewiß hat es zu allen Zeiten und überall Mathematiker gegeben, die ihre Methoden zum Nutzen der Nachbarwissenschaften angewandt haben. Gewiß gibt es seit hundert Jahren mehr und mehr Ingenieure, die ihre Konstruktionen mit Bedacht auf Resultate der exakten Wissenschaften und mathematische Berechnung gründen. Aber dieses Entgegenkommen von beiden Seiten war mehr zufällig und geschah zaghaft. Die grundsätzliche Herausstellung der Einheit aller Betätigungen, die der exakten Naturbeherrschung dienen, war eine Neuleistung, deren Bedeutung vielleicht auch heute noch nicht in ihrer Tiefe erkannt ist. Aber wir können mit Bestimmtheit sagen, daß sie sich in bedeutendem Ausmaß schon jetzt durchgesetzt hat und noch weiter durchsetzen wird, bis die volle innere Zusammenarbeit ersteht, zu der Klein selbst in seinen Göttinger Einrichtungen nur das Modell entwerfen konnte.

In natürlichem Zusammenhang mit diesem großen Einheitsgedanken steht Kleins volkstümlichste Schöpfung, die Reform des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts an den höheren Schulen. Schon die Jugend soll den Lebenswert der Mathematik in sich aufnehmen, deshalb müssen in der Schule diejenigen mathematischen Anschauungsweisen und Methoden vermittelt werden, die in der heutigen Naturerkenntnis wirksam sind. Es war ein umstürzender Gedanke, ein Schritt gegen eine vielhundertjährige Tradition. Seinen Erfolg verdankt Klein einer bewundernswerten Mäßigung und Beschränkung auf das Notwendige. Wohl war Kleins Wille leidenschaftlich und setzte um so wuchtiger ein, je größer die Hindernisse waren. Aber die Vernunft beherrschte seinen Willen, und durch diese Selbstbemeisterung hat er einer Revolution auf friedlichem Wege zum Sieg verholfen.

Das ist der Mann, dessen Andenken die Tafel verewigen soll. An alle Lehrer und Lehrerinnen Düsseldorfs aber richte ich die Bitte: Sorgen Sie dafür, daß die Bedeutung der Tafel verstanden wird! Führen Sie Ihre Schüler hierher und erzählen Sie ihnen, die sich vielleicht von einem Mathematiker eine wenig anziehende Vorstellung machen, von diesem großen Mann mit dem vorurteilslosen, weiten Blick, mit dem beharrlichen, reinen Willen, mit dem unermüdbaren Fleiß, der Alter und Siechtum getrotzt hat, von dem Manne, der nichts für sich und alles für die Sache getan hat!

Die Stadt Düsseldorf hat sich ein Verdienst erworben, indem sie die Deutsche Mathematiker-Vereinigung in hochherziger Weise bei der Errichtung dieses Gedenkmals unterstützt hat. Ich übergebe hiermit, Herr Oberbürgermeister, die Tafel in Ihre Obhut in der Zuversicht, daß sie hier eine gute Stätte gefunden hat und verständnisvolle Ehrfurcht für die Manen Felix Kleins erwecken wird."

Vierter Deutscher Mathematikertag in Bad Kissingen, 18.—24. September 1927.

Es wurden folgende Vorträge gehalten:

1. R. Baldus, Karlsruhe: Zu Hilberts Axiomatik der Geometrie.[1])

Hilberts Vollständigkeitsaxiom. Seine Bedeutung für Hilberts Axiomensystem der Euklidischen Geometrie. Verschärfung des Vollständigkeitsaxioms: man braucht nur die Vollständigkeit der Punkte zu fordern, nicht auch die der Geraden und der Ebenen. Axiome der absoluten Geometrie: Hilberts Axiome I—III, V 1, dazu das Cantorsche Axiom. Rechtwinkelige Punktkoordinaten in der absoluten Geometrie. Beweis des Vollständigkeitssatzes der absoluten Geometrie: Die Punkte, Geraden, Ebenen der absoluten Geometrie bilden ein System von Dingen, das nicht erweiterungsfähig ist. Das Vollständigkeitsaxiom kann in Hilberts Axiomensystem der Euklidischen Geometrie vor das Parallelenaxiom und hinter die übrigen Axiome gesetzt werden. Die absolute Geometrie ist vollständig, aber nicht monomorph, d. h. nicht alle ihre Deutungen sind isomorph. Erst das Parallelenaxiom erzwingt den Isomorphismus aller Deutungen. Verschiedenes Verhalten monomorpher

1) Wird ausführlich in den Mathematischen Annalen unter dem Titel: „Zur Axiomatik der Geometrie I. Über Hilberts Vollständigkeitsaxiom" erscheinen.

und polymorpher Systeme in der Entscheidbarkeit und beim Operieren mit speziellen Deutungen. Zu große Allgemeinheit des Vollständigkeitsaxioms, da es von allen denkbaren Dingen handelt. Unmöglichkeit, ihm vorangehende Axiome auf ihre Unabhängigkeit von allen übrigen Axiomen einschließlich des Vollständigkeitsaxioms zu untersuchen. Das Axiom I 8 eine Folge des Vollständigkeitsaxioms. Verhalten des Archimedischen zum Vollständigkeitsaxiom. Das Vollständigkeitsaxiom als Axiom bedenklich, als Satz der umfassendste und beweistechnisch interessanteste Satz der Geometrie.

2. H. Behmann, Halle: Eine Bemerkung zum Pohlkeschen Satz.

Der Vortragende gibt einige methodische Anregungen zur Durchführung des Beweises und der zugehörigen Konstruktion mit Benutzung der Heumanschen Trägheitsellipse.

3. O. Blumenthal, Aachen: Über Verbiegung von Schraubenflächen (Wendeltreppen).

Untersucht wird die elastische Deformation eines dünnen Körpers (einer Schale), dessen Mittelfläche eine gerade Schraubenfläche von der Ganghöhe γ ist, der oben und unten von zwei Parallelflächen zu dieser Schraubenfläche im Abstande $\pm h$ von dieser, innen und außen von Kreiszylindern der Radien ϱ und R begrenzt wird. Die Aufgabe läßt sich nach der bekannten Schalentheorie (siehe Love, Elasticity, Kap. XXIV) behandeln, nur muß man, um Polarkoordinaten r, φ als Bezugssystem einführen zu können, die Formeln für den Zusammenhang zwischen Spannungsresultanten und -momenten einerseits, den Formänderungen der Mittelfläche andererseits neu entwickeln, weil die Formeln von Love nur für Krümmungslinien als Bezugssysteme gelten. Es wird die elastische Deformation unter Eigengewicht untersucht und insbesondere nach einem von φ unabhängigen Deformationszustand gefragt, wobei der äußere Rand eingespannt, der innere frei sein soll. Die Ergebnisse sind folgende: Die Verschiebung u in Richtung des Radius und mit ihr die Normalspannungen und Torsionsmomente verschwinden identisch, für die Verschiebung w senkrecht zur Mittelfläche ergibt sich eine lineare Differentialgleichung 3. Ordnung, die bei Einführung der dimensionslosen Größen $s = \frac{r}{\varrho}$, $\beta = \frac{\gamma}{2\pi\varrho}$ so lautet:

$$\frac{s^2+\beta^2}{s} w''' + \left(1 - \frac{\beta^2}{s^2}\right) w'' - \left(\frac{1}{s} - (4-\sigma)\frac{\beta^2}{s(s^2+\beta^2)}\right) w' - \frac{\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}\left(8 + (3-\sigma)\frac{\beta^2}{s^2}\right) w = -\frac{g}{D}\varrho^4 \int_1^s \sqrt{s^2+\beta^2}\, ds$$

(g = Gewicht pro Flächeneinheit, D = Plattenmodul, σ = Poissonsches Verhältnis $\approx \frac{1}{3}$).

Der Vortrag beschäftigte sich hauptsächlich mit der Integration dieser Differentialgleichung, wobei als Anhalt folgende numerischen Daten zugrunde gelegt wurden (Längen in m): $\varrho = 3$, $R = 5$, $\gamma = \frac{4}{3}\pi$, $h = 0{,}075$. Es zeigt sich, daß die (theoretisch möglichen) Potenzreihenentwicklungen für w praktisch wegen schlechter Konvergenz ausgeschlossen sind. Dagegen empfiehlt sich sehr die (nach einem Poincaréschen Satz konvergente) Entwicklung

nach Potenzen von β^2. Setzen wir nämlich $w = w_0 + w_1\beta^2 + w_2\beta^4 + \cdots$, so lautet die Gleichung für w_0

$$s w_0''' + w_0'' - \frac{1}{s} w_0' = -\frac{g}{D}\varrho^4 \frac{s^2-1}{2},$$

und die zugehörige homogene Gleichung hat die Integrale

$$1, \quad s^2, \quad \ln s,$$

woraus sich dann w_0 und die weiteren Funktionen $w_1, w_2, \ldots$ durch Variation der Konstanten ergeben. Aus w berechnen sich weiter die dritte Verschiebungskomponente, die Schubspannungen und Biegungsmomente durch Quadraturen und Differentiationen. Für praktische Zwecke wird bereits die zweite Näherung $w_0 + \beta^2 w_1$ genügen.

Die genaueren Entwicklungen, besonders auch die Aufstellung der Randbedingungen für w, werden in einer Aachener Dr.-Ing.-Dissertation von Dipl.-Ing. F. Wingerter veröffentlicht werden.

4. H. Brandt, Aachen: Idealtheorie in einer Dedekindschen Algebra (eine ausführliche Darstellung erscheint später).

Unter einer *Dedekindschen Algebra*[1]) wird ein in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper definiertes System hyperkomplexer Zahlen verstanden, das kein *Radikal,* also keine *eigentlich nilpotenten Elemente*[2]) enthält. Es vereinfacht die Betrachtung und bedeutet keine Einschränkung, wenn der Zahlkörper der Koeffizienten als der natürliche Rationalitätsbereich angenommen wird.

Zur Begründung der Idealtheorie in einer solchen Algebra wird nach dem Vorbild von Dedekind zunächst eine Modultheorie für Bereiche mit nicht-kommutativer Multiplikation entwickelt.[3]) Wir haben hier die Operationen der Bildung des größten gemeinsamen Teilers und des kleinsten gemeinsamen Vielfachen, der Multiplikation und der linken und rechten Division. Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei Moduln, so bezeichnen wir die drei letzten Operationen durch $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ ($\mathfrak{a}$ mal $\mathfrak{b}$), $\mathfrak{b} \backslash \mathfrak{a}$ ($\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{a}$) und $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ ($\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{b}$). Für einen beliebigen Modul $\mathfrak{a}$ werden die Quotienten $\mathfrak{a}\backslash\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}/\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^0$, $\mathfrak{a}_0/\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\backslash\mathfrak{a}^0 = \mathfrak{a}\backslash\mathfrak{a}/\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{-1}$ bzw. *Rechtsordnung (oder rechts zugehörige Ordnung), Linksordnung (oder links zugehörige Ordnung)* und *reziproker Modul* genannt. Ein Modul heißt *gleichseitig* oder *ungleichseitig*, je nachdem seine links und rechts zugehörigen Ordnungen gleich oder verschieden sind.

Ein Modul $\mathfrak{a}$ heißt *umkehrbar,* wenn $\mathfrak{a}^{-1} \times \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0$ und $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{a}^0$.

Wenn bei einer Multiplikation $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ weder $\mathfrak{a}$ noch $\mathfrak{b}$ durch einen umfassenderen Modul ersetzt werden kann, ohne daß das Produkt $\mathfrak{c}$ sich ändert, so wird die Multiplikation *eigentlich* genannt und das Produkt einfach durch $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ bezeichnet. Moduln, welche (direkt oder indirekt) durch eigentliche Multiplikation verbunden werden können, mögen *verwandt* heißen.

1) Bei Frobenius (Theorie der hyperkomplexen Größen, Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1903, S. 519 ff.) Dedekindsche Gruppe, bei Artin [Zur Arithmetik hyperkomplexer Zahlen, Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar Hamburg, Bd. 5 (1926/27) S. 261] halbeinfaches System.

2) L. E. Dickson, Algebren und ihre Zahlentheorie, Zürich 1927, S. 94.

3) Vgl. auch einen Vortrag des Verfassers in Basel am 2. 9. 27: Zur allgemeinen Idealtheorie. Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft 1927, II. Teil, S. 86—88.

Dann gelten für diejenigen endlichen Moduln, deren Basis zugleich eine Basis der Algebra ist, die folgenden Sätze:

Alle mit einer Ordnung verwandten umkehrbaren Moduln sind durch die eigentliche Multiplikation zu einem Gruppoid[4]) *miteinander verknüpft.*

Wird ein System miteinander verwandter Ordnungen beliebig ausgewählt, so bilden alle umkehrbaren Moduln, für welche sowohl die Linksordnung wie die Rechtsordnung in dem System liegen, wenn sie eigentlich multipliziert werden, ein Gruppoid.

Dann und nur dann, wenn das Komplement einer Ordnung umkehrbar ist, sind gleichzeitig alle mit der Ordnung verwandten Moduln auch umkehrbar. Diese Bedingung ist für maximale Ordnungen stets erfüllt.

Bezeichnet man Moduln, die mit einer maximalen Ordnung verwandt sind, als *Ideale,* so gilt daher der Satz: *Die Ideale einer Dedekindschen Algebra sind durch eigentliche Multiplikation zu einem Gruppoid miteinander verknüpft.*[5])

Wie in algebraischen Zahlkörpern lassen sich auch die Ideale einer Dedekindschen Algebra (nach verschiedenen Äquivalenzprinzipien) so auf Klassen verteilen, daß aus der Multiplikation der Ideale eine Komposition der Idealklassen entsteht. Durch diese Komposition sind die Klassen dann selbst wieder zu einem Gruppoid verbunden.

Von besonderem Interesse sind die Multiplikations- und Zerlegungsgesetze der ganzen Ideale. Dabei heißt ein Ideal $\mathfrak{a}$ *ganz,* wenn $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{a}$ teilbar ist.

Für die ganzen Ideale gilt der fundamentale Satz: *Wenn das Ideal* $\mathfrak{a}$ *durch das Ideal* $\mathfrak{b}$ *teilbar ist, so gibt es zwei ganze Ideale* $\mathfrak{r}$ *und* $\mathfrak{z}$, *so daß* $\mathfrak{a} = \mathfrak{r}\mathfrak{b}\mathfrak{z}$, *und wenn umgekehrt diese Gleichung gilt, so ist* $\mathfrak{a}$ *durch* $\mathfrak{b}$ *teilbar.* Daher sind wie im kommutativen Falle die Begriffe Teiler und Faktor gleichbedeutend.

Aus diesem Satze ergibt sich zunächst, daß ein Ideal dann und nur dann ganz ist, wenn es durch ein Einheitsideal (maximale Ordnung) teilbar ist. Im allgemeinen gibt es mehrere Einheitsideale, welche ein vorgegebenes ganzes Ideal teilen, wir nennen sie *zugehörige Einheitsideale* oder *zugehörige Ordnungen.*

Weiter ergeben sich aus diesem Satz (unter Benutzung der Speiserschen[6]) und Artinschen[7]) Resultate) die vollständigen Zerlegungsgesetze der ganzen Ideale.

Ein Teiler eines ganzen Ideals heißt *echter Teiler,* wenn er kein Einheitsideal und von dem ursprünglichen Ideal verschieden ist. Ideale ohne echte Teiler heißen *Primideale.* Sie sind entweder gleichseitig oder ungleichseitig.

Jedes ganze Ideal läßt sich als Produkt von Primidealen darstellen. Eine Übersicht über die verschiedenen möglichen Zerlegungen geben die folgenden Sätze.

---

4) Vgl. die Note des Verfassers „Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes", Mathematische Annalen 96 (1926) S. 360.

5) Ohne Beweis wurde dieser Satz schon im Januar 1927 in der Einleitung der kürzlich erschienenen Arbeit „Idealtheorie in Quaternionenalgebren" [Mathematische Annalen 99 (1928) S. 1] von mir ausgesprochen, einen Teil des Satzes bewies unabhängig vom Verfasser Herr Artin in der genannten Arbeit.

6) A. Speiser, Allgemeine Zahlentheorie, Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft Zürich 71 (1926), S. 8 oder auch Dickson S. 269.

7) Siehe oben unter 1).

Ein ganzes Ideal besitzt entweder für jede oder für keine zugehörige Ordnung ihr links oder rechts zugehörige echte gleichseitige Teiler. Ist daher $\mathfrak{o}$ ein beliebiges der zu dem ganzen Ideal $\mathfrak{a}$ gehörigen Einheitsideale, so kann man schreiben $\mathfrak{a} = \mathfrak{d}_1 \mathfrak{g} \mathfrak{d}_2$, wo $\mathfrak{g}$ links und rechts zu $\mathfrak{o}$ gehört und weder $\mathfrak{d}_1$ noch $\mathfrak{d}_2$ außer Ordnungen gleichseitige Teiler besitzen.

Sind $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ beliebige Einheitsideale, so hat das Ideal $(\mathfrak{e}_2 \times \mathfrak{e}_1)^{-1} = \mathfrak{d}$ die folgenden Eigenschaften: Es ist ganz und für alle links zu $\mathfrak{e}_1$ und rechts zu $\mathfrak{e}_2$ gehörenden ganzen Ideale größter gemeinsamer Linksfaktor, größter gemeinsamer Rechtsfaktor und größter gemeinsamer Teiler. Es wird *Distanzideal* oder *Distanz von* $\mathfrak{e}_1$ *nach* $\mathfrak{e}_2$ genannt. Die Distanzideale sind identisch mit den Idealen, die außer Ordnungen keine gleichseitigen Teiler besitzen.

Irgendwelche ganze von gleichseitigen Primfaktoren freien Ideale (z. B. auch alle) erzeugen ein Gruppoid, wenn man fortgesetzt die zugehörigen Ordnungen und deren Distanzen hinzufügt, und die Distanzideale liefern zugleich eine graphische Darstellung dafür. Dabei werden die Einheitsideale durch Punkte, die Primideale durch Strecken mit Pfeilsinn und die übrigen Ideale durch Streckenzüge dargestellt, und es besteht vollkommene Isomorphie zwischen dem Gruppoid der Ideale und dem der Wege.

Die sämtlichen kürzesten Wege, die in der Pfeilrichtung von einem Punkte zu einem zweiten führen, geben die sämtlichen Primidealzerlegungen des betreffenden Distanzideals, und die sämtlichen Zerlegungen eines (in dem Gruppoid enthaltenen) gleichseitigen, etwa links und rechts zu $\mathfrak{o}$ gehörigen Ideals werden durch geschlossene, in der Pfeilrichtung von $\mathfrak{o}$ zu $\mathfrak{o}$ führende Wege dargestellt; doch liefert im allgemeinen umgekehrt noch nicht jeder kürzeste geschlossene Weg eine Zerlegung. Das gilt aber in den Bildern der irreduziblen gleichseitigen Ideale[8]), die, ohne selbst Primideale zu sein, doch keine echten gleichseitigen Teiler besitzen. Bei der Konstruktion dieser Bilder (regulärer Graphen) wird man auf unendlich viele kombinatorische Probleme von der Art der Steinerschen Tripel geführt.

5. W. Cauer, Berlin: Über eine Klasse von Funktionen, die die Stieltjesschen Kettenbrüche als Sonderfall enthält.

Erscheint in diesem Jahresbericht.

6. A. Fraenkel, Marburg: Gelöste und ungelöste Probleme im Umkreis des Auswahlprinzips.

Es werden einige charakteristische Beispiele von Problemen (aus Arithmetik, Analysis und allgemeiner Mengenlehre) angeführt, die, in enger Beziehung zum Auswahlprinzip stehend, teils eine volle oder teilweise Lösung gefunden haben, teils einer solchen noch harren; in den Fällen der letzteren Art (z. B. hinsichtlich der Bedeutung einer Annahme, wonach jede Menge irgendwie geordnet werden kann[1])) würde aus einer Lösung des Problems neues und wesentliches Licht auf das Auswahlprinzip selbst fallen. Für die Einzelheiten werde außer auf schon erschienene Arbeiten (Sierpiński im Krakauer Bulletin 1918; Tarski in den Fundamenta Mathematicae 2, S. 45 ff.; Fraen-

8) Bei Speiser und Artin auch Primideale genannt.

1) Für ein neues, in Kissingen noch nicht vorgetragenes Resultat in dieser Richtung vgl. eine in den Sitzungsber. d. Preuß. Akad. 1928 erscheinende Note: „Über die Ordnungsfähigkeit beliebiger Mengen".

kel, 10 Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre, 1927, unter dem Registerstichwort „Probleme, offene") noch auf die im Druck befindliche 3. umgearbeitete Auflage der „Einleitung in die Mengenlehre" des Vortragenden verwiesen.

7. Paul Funk, Prag: Über Geometrien, in denen die Geraden die kürzesten Linien sind.

Die Hilbertsche Geometrie (vgl. Grundlagen der Geometrie, 1. Anhang) kann vom infinitesimalen Standpunkt aus durch die folgenden drei Forderungen gekennzeichnet werden:

1. Die Geraden sollen die kürzesten Linien sein.
2. Das Underhillsche Krümmungsmaß soll eine negative Konstante sein.
3. Das starke Monodromieaxiom sei erfüllt.

Unter den Geometrien, die der Forderung 1. und 2. genügen, wird noch ein Spezialfall hervorgehoben, bei der die Maßbestimmung einer Strecke AB durch die Formel

$$\widehat{AB} = l\frac{AM}{BM}$$

eingeführt wird, wobei M den Schnittpunkt der Geraden AB mit einer Eilinie in einer euklidischen Bildebene und AM bzw. BM die euklidische Entfernung in dieser Bildebene bedeuten. Diese Geometrie wird auch vom elementargeometrischen Standpunkt aus gekennzeichnet.

8. H. Geppert, Gießen: Zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels.

Erscheint in diesem Jahresbericht.

9. H. Härlen, Stuttgart: Über Vollständigkeit und Entscheidbarkeit.

1. Es wird gezeigt, daß der empirische oder logische Satz vom ausgeschlossenen Dritten nicht ohne weiteres verallgemeinert werden kann. Es bedarf deshalb jede Verallgemeinerung der Begründung. (Der transzendentale Charakter des Satzes ist zu beachten!)

2. Es ist nicht möglich, den genannten Satz für die Kontinuums-Mathematik bzw. die Mathematik nichtabzählbarer Systeme logisch zu begründen. Es kann möglich sein, Entscheidbarkeit im Sinne dieses Satzes für solche Systeme zu postulieren, ohne daß jedoch eine andere Begründung für die Berechtigung dieser Annahme gegeben werden kann als die der Widerspruchsfreiheit.

3. Jedes kategorische oder abgeschlossene Axiomensystem (Isomorphismus der Interpretationen) und ebenso jedes vollständige (Nichterweiterbarkeit der Interpretationen) ist entscheidbar im Sinne des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten.

4. Peanos Axiomensystem der Arithmetik ist kategorisch und vollständig. Hiermit ist nach 3. der Satz vom ausgeschlossenen Dritten für die Arithmetik (die Mathematik abzählbar unendlicher Systeme) begründet.

Zusatz bei der Korrektur: Die zweite Behauptung unter 3. ist nur zum Teil richtig, wie das Beispiel der absoluten Geometrie zeigt, die vollständig ist (Baldus).

Der Vortrag erscheint in diesem Jahresbericht.

10. H. Hasse, Halle: Über die komplexe Multiplikation erster Stufe.

Kurzer Bericht über die Resultate der im Journ. f. d. r. u. a. Math. 157 (1. Jub.-Bd., 1926) erschienenen Arbeit: „Neue Begründung der komplexen Multiplikation", sowie deren demnächst erscheinender Fortsetzung.

11. Eberhard Hopf, Berlin: Über die Lösungen elliptischer Differentialgleichungen.

Es sei

$$\Phi\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}; \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}; u; x_1, \ldots, x_n\right) = 0$$

eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung in n unabhängigen Variablen. Im elliptischen Falle treten bekanntlich in der Theorie dieser Gleichung besonders einfache und tiefgreifende Gesetzmäßigkeiten auf. Wie schon der einfachste Fall der Poissonschen Gleichung $\sum_1^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu^2} = f(x_1, \ldots, x_n)$ nahelegt, bestehen dann enge Zusammenhänge zwischen den Differenzierbarkeitseigenschaften von Φ als Funktion ihrer Argumente und denen der Lösung $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Der Vortragende berichtete über eine neue, elementare Methode zur Herleitung derartiger Zusammenhänge. Tieferliegende Sätze, wie etwa die Existenz einer Grundlösung im linearen Falle usw., werden dabei ganz entbehrlich.

Eine Anzahl von Theoremen, die in der erwähnten Richtung liegen, lassen sich auf die beiden folgenden Hauptsätze zurückführen:

Es sei

$$\sum_{1,1}^{n,n} a_{\nu\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu \partial x_\mu} = f$$

eine lineare partielle Differentialgleichung vom elliptischen Typus. Dann gilt:

Satz 1. Genügen die Funktionen $a_{\nu\mu} = a_{\nu\mu}(x_1, \ldots, x_n)$, $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ in einem n-dimensionalen Gebiete G einer Hölderschen Bedingung, so genügen die zweiten partiellen Ableitungen jeder in G regulären, d. h. dort überall mit stetigen zweiten Ableitungen versehenen Lösung u ebenfalls in G einer Hölderschen Bedingung.

Satz 2. Genügen die ersten partiellen Ableitungen der Funktionen $a_{\nu\mu}$ und f in G einer Hölderschen Bedingung, so besitzt jede in G reguläre Lösung u daselbst überall partielle Ableitungen dritter Ordnung. Diese genügen überdies in G notwendig einer Hölder-Bedingung.

Bei dem Beweise dieser Sätze spielen Verallgemeinerungen gewisser Tatsachen der Potentialtheorie eine wichtige Rolle. Im übrigen ist die Methode in ganz entsprechender Weise im elliptischen Falle bei Gleichungen beliebig hoher Ordnung durchführbar; man erhält dort völlig analoge Resultate.

Die ausführliche Arbeit erscheint an anderer Stelle.

12. E. Kamke, Tübingen: Über die Clairautsche Differentialgleichung.

Bei der Clairautschen Differentialgleichung

$$y = y'x + f(y')$$

hat die allein interessierende Frage nach den nichtlinearen Integralen bisher keine zulängliche Beantwortung gefunden. Es wird gezeigt, daß für die Existenz nichtlinearer Integrale notwendig und hinreichend ist, daß die Funktion $f(t)$ in einem Intervall stetig und konvex oder konkav, jedoch ohne Linearitätsintervalle ist. Unter dieser Voraussetzung läßt sich die Gesamtheit der Integrale angeben. Die Clairautsche Differentialgleichung gehört somit zu den bisher seltenen Beispielen von Differentialgleichungen, über deren Lösungsverhältnisse man restlosen Aufschluß geben kann.

Eine ausführliche Darstellung erscheint in der Math. Zeitschr., Bd. 28.

13. Wolfgang Krull, Freiburg i. Br.: Über unendliche algebraische Zahlkörper.

Der Vortrag behandelt die Grundlagen der Idealtheorie in der Hauptordnung eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers.

a) *Die Primärideale, d. h. die nur durch ein einziges Primideal teilbaren Ideale.* Im endlichen Zahlkörper sind bekanntlich die Primidealpotenzen die einzigen Primärideale. Im unendlichen Zahlkörper sind entweder sämtliche zu einem bestimmten Primideal gehörige Primärideale Primidealpotenzen oder es kann jedes Primärideal durch eine reelle Zahl, seinen „Wert", und die Angabe, ob „endlich" oder „unendlich" eindeutig, und hinsichtlich der Teilbarkeits- und Multiplikationsverhältnisse erschöpfend charakterisiert werden. Eine ausführliche Theorie der Primärideale in beliebigen Zahlkörpern erscheint demnächst in der „Mathematischen Zeitschrift".

b) *Darstellung beliebiger Ideale durch Primärkomponenten.* Jedes Ideal eines beliebigen Zahlkörpers läßt sich als Durchschnitt von endlich oder unendlich viel Primärkomponenten darstellen. Sind nur endlich viel Komponenten vorhanden, so ist die Darstellung eindeutig und kann durch die Produktdarstellung ersetzt werden. Bei unendlich viel Komponenten muß man zu „größten Primärkomponenten" übergehen, um eine eindeutig bestimmte Darstellung zu erhalten. Die bei unendlich viel Komponenten auftretenden Schwierigkeiten überwindet man am einfachsten dadurch, daß man die Primideale des Körpers als topologischen Raum auffaßt und jedem Ideal eine Funktion in diesem Raume anordnet. Der Hauptvorteil dieser Topologisierung zeigt sich, wenn man neben ganzen auch gebrochene Ideale zuläßt; man beweist dann mit ihrer Hilfe den folgenden Satz: Die Ideale mit endlicher Basis sind die einzigen „eigentlichen Moduln", d. h. die einzigen Ideale, die durch Multiplikation mit dem reziproken Ideal ins Einheitsideal übergehen.

14. F. Levi, Leipzig: Zur Theorie der vollständigen Pascalfigur.

Um eine Darstellung der vollständigen Pascalfigur zu erhalten, die alle Invarianzen gegenüber den Vertauschungen der die Figur definierenden sechs Grundpunkte erkennen läßt, wird von folgendem Verfahren Gebrauch gemacht:

Gl. des Kegelschnittes:

$$x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2 = 0; \quad \text{setze} \quad \varkappa = \frac{1}{x_1}, \ \lambda = \frac{1}{x_2}, \ \mu = \frac{1}{x_3}$$
$$\varkappa + \lambda + \mu = 0.$$

Die einzelnen Punkte werden durch an $\varkappa$, λ, μ angesetzte Indizes unterschieden. Dann ist

$$\begin{vmatrix} \varkappa_i & \lambda_i \\ \varkappa_k & \lambda_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_i & \mu_i \\ \lambda_k & \mu_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu_i & \varkappa_i \\ \mu_k & \varkappa_k \end{vmatrix} = i/k = - k/i.$$

Setzt man ferner

$$(i/m\ k/n):(i/n\ k/m) = \begin{bmatrix} i\ k \\ m\ n \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{2}(\varkappa_i\lambda_k + \varkappa_k\lambda_i) : i/k = \frac{\varkappa\lambda}{i\,k}, \quad (\varkappa_i\varkappa_k) : i/k = \frac{\varkappa}{i\,|\,k}$$

und definiert entsprechend

$$\frac{\lambda\mu}{i\,k}, \quad \frac{\mu\varkappa}{i\,k}, \quad \frac{\lambda}{i\,|\,k}, \quad \frac{\mu}{i\,|\,k},$$ so gilt

$$\begin{vmatrix} \frac{\varkappa\lambda}{ik} & \frac{\lambda\mu}{ik} \\ \frac{\varkappa\lambda}{mn} & \frac{\lambda\mu}{mn} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} i\,m \\ n\,k \end{bmatrix}\left(\frac{\lambda}{i\,|\,n} + \frac{\lambda}{k\,m}\right), \quad \begin{vmatrix} \frac{\varkappa}{i\,|\,k} & \frac{\lambda}{i\,|\,k} \\ \frac{\varkappa}{m\,|\,n} & \frac{\lambda}{m\,|\,n} \end{vmatrix} = -\begin{bmatrix} i\,m \\ n\,k \end{bmatrix}\left(\frac{\varkappa\lambda}{i\,n} + \frac{\varkappa\lambda}{k\,m}\right).$$

Ein durch N Punkte der projektiven Ebene erzeugtes Netz bestimmt einen Zahlkörper $R(\alpha, \beta, \ldots, \zeta)$ (vgl. E. Steinitz, Polyeder und Raumeinteilungen. Enzykl. d. math. Wiss. III, AB 12, S. 114) und wird von diesem — bis auf Kollineationen eindeutig — bestimmt. Im vorliegenden Falle ist dieser Körper $\mathsf{P} = R\left(\begin{bmatrix} i\ k \\ m\ n \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} \ \end{bmatrix}\right) = R\left(\begin{bmatrix} 12 \\ 34 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 \\ 35 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 \\ 36 \end{bmatrix}\right)$. Eine explizite Darstellung des Netzes bekommt man in der Form

$$\text{Netzpunkte: } (x_1, x_2, x_3) = \varrho\left(\sum a_{rs}\frac{\lambda\mu}{rs}, \sum a_{rs}\frac{\mu\varkappa}{rs}, \sum a_{rs}\frac{\varkappa\lambda}{rs}\right)$$

$$\text{Netzgerade: } (u_1, u_2, u_3) = \sigma\left(\sum b_{rs}\frac{\varkappa}{r\,|\,s}, \sum b_{rs}\frac{\lambda}{r\,|\,s}, \sum b_{rs}\frac{\mu}{r\,|\,s}\right),$$

wobei die a_{rs} und b_{rs} sämtliche Zahlen von P zu durchlaufen haben. Gibt es zwischen $\begin{bmatrix} 12 \\ 34 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 \\ 35 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 \\ 36 \end{bmatrix}$, 1 keine algebraische Beziehung mit rationalen Koeffizienten, so besteht im zugehörigen Netz keine „überflüssige" Inzidenz. Die Rechnung zeigt, daß sich in diesem Falle die Pascalgeraden nur in den bekannten Pascal-, Kirkman- und Steinerpunkten zu mehr als zweien schneiden. Die analytische Darstellung einzelner Punkte der Pascalfigur und die Handhabung der obigen Formeln zur Auffindung von Inzidenzbeziehungen wurde im Vortrag am Beispiel der Steinerpunkte erläutert.

Eine ausführliche Behandlung soll in einem in Vorbereitung befindlichen Buche des Verfassers (Geometrische Konfigurationen, bei S. Hirzel, Leipzig) geboten werden.

15. J. v. Neumann, Berlin: Eigenwertproblem symmetrischer Funktionaloperatoren.

1. Die von D. Hilbert begründete Theorie der linearen Transformationen des unendlich-viel-dimensionalen euklidischen Raumes[1]) ist bekanntlich von zentraler Wichtigkeit bei der Untersuchung fast aller Eigenwertprobleme. Die bei solchen als „Konkurrenzfunktionen" zugelassenen Funktionen bilden nämlich meistens einen Funktionenraum, welcher dem genannten unendlich-viel-dimensionalen Raume (d. h. dem Raume aller Zahlenfolgen $x_1, x_2, \ldots$ mit

1) D. Hilbert, Gött. Nachr., 1906, S. 157 f.

endlichem $\sum_{n=1}^{\infty} x^2$ — dem sog. „Hilbertschen Raume") oder einem Teile desselben isomorph ist. Man überzeugt sich hiervon bekanntlich am besten, indem man jede Funktion nach irgendeinem (festzuhaltenden!) vollständigen Orthogonalsystem von Funktionen entwickelt und die Folge der Entwicklungskoeffizienten als Punkt im Hilbertschen Raume ansieht.

Was in der Hilbertschen Theorie — und somit in allen Anwendungen auf Integral- und Differentialgleichungen — die zentrale Rolle hat, ist das sog. Eigenwertproblem der symmetrischen linearen Transformationen; d. h. die Frage der Existenz und Eindeutigkeit der Transformation (durch Einführung eines neuen, orthogonalen, Koordinatensystems) auf die Diagonal- oder Hauptachsenform. In Formeln: die Aufgabe, zu einer symmetrischen (unendlichen, quadratischen) Matrix

$$A = \{a_{\mu\nu}\}, \qquad (a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu})$$

eine orthogonale (unendliche, quadratische) Matrix

$$S = \{s_{\mu\nu}\},$$

$$\sum_{\varrho} s_{\mu\varrho} s_{\nu\varrho} = \left| 1 \text{ für } \mu = \nu \right.$$

$$\sum_{\varrho} s_{\varrho\mu} s_{\varrho\nu} = \left| 0 \text{ für } \mu \neq \nu \right.$$

aufzufinden, so daß $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

Hilbert bewies bekanntlich, daß dies für alle Matrizen, die aus der Einheit durch Addition einer sog. vollstetigen entstehen, in der Tat auf eine und nur eine Art möglich ist; ebenso für die vollstetigen Matrizen selbst. Für eine weitere Klasse von Matrizen, die sog. beschränkten, zeigte er, daß diese „Hauptachsentransformation" im allgemeinen nicht gelingt, daß aber durch eine geeignete Verallgemeinerung des Begriffes „Hauptachsentransformation" dennoch eine eindeutige Lösung des Eigenwertproblems existiert.

„Beschränkt" heißt nach Hilbert: die zugehörige (linear-symmetrische) Transformation des Hilbertschen Raumes ist stetig (im Sinne der Entfernungs-Definition: $x_1, x_2, \ldots$ und $y_1, y_2, \ldots$ haben die „Entfernung" $\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)^2}$).

O. Toeplitz[2]) zeigte sogar: jede überall sinnvolle (linear-symmetrische) Transformation ist stetig.

Alle diejenigen Transformationen des Hilbertschen Raumes, die singulären Integralgleichungen oder (beliebig regulären) Differentialgleichungen (d. h. deren Operatoren) entsprechen, sind indessen nicht-beschränkt — und somit nicht überall sinnvoll (man denke etwa an das Differenzieren!). Für diese gilt somit die Hilbertsche Theorie nicht.

Ihre Wichtigkeit ist aber bekanntlich eine große, um so mehr, als gerade in der neueren Quanten-Physik nicht-beschränkte (linear-symmetrische) Operatoren eine fundamentale Rolle spielen.

---

2) O. Toeplitz, Math. Ann. Bd. 69/3, S. 321.

2. Die Übertragung der Hilbertschen Theorie auf *alle* symmetrisch-linearen Operatoren bildet den Gegenstand dieser Zeilen. Da man bei nichtbeschränkten Operatoren solche Transformationen des Hilbertschen Raumes betrachtet, die nicht überall sinnvoll sind, muß der Definitionsbereich solcher Operatoren näher umschrieben werden.

Wir nennen einen symmetrischen Operator maximal, wenn er

A. auf einer überall dichten Teilmenge des Hilbertschen Raumes definiert ist;

B. nicht erweitert werden kann, d. h. sobald man ihm noch an weiteren Stellen des Hilbertschen Raumes (wo er bisher undefiniert war) Werte zuschreibt die Symmetrie-Bedingung[3]) notwendigerweise durchbrochen wird.

Man beweist unschwer, daß jeder symmetrische Operator zu (mindestens) einem maximalen (symmetrischen) erweitert werden kann.

Für die maximalen Operatoren gilt nun die Hilbertsche Theorie, d. h. ihr Eigenwertproblem läßt (im Sinne der im wesentlichen unveränderten Hilbertschen Definition) eine und nur eine Lösung zu.

Die Definition des Eigenwertproblems sei der Vollständigkeit halber exakt gegeben:

Wenn E eine lineare Mannigfaltigkeit im Hilbertschen Raume ist (d. h. eine Teilmenge, die mit $x_1, x_2, \ldots$ und $y_1, y_2, \ldots$ auch stets $ax_1 + by_1$, $ax_2 + by_2, \ldots$ enthält), so läßt jedes x des Hilbertschen Raumes eine und nur eine Zerlegung

$$x = y + z$$

zu, wobei y in E liegt und z zu allen Elementen von E senkrecht ist. y ist die Projektion von x in E, wir nennen es Ex, d. h. interpretieren E als Operator. Als solcher ist E linear, symmetrisch und beschränkt, und es ist $E^2 = E$.

Solche E nennen wir Einzeloperatoren, sie sind übrigens durch die letztgenannten Eigenschaften völlig charakterisiert. Wenn die lineare Mannigfaltigkeit E Teilmenge der linearen Mannigfaltigkeit F ist, schreiben wir für die Operatoren $E \leqq F$; wenn $E_n x$ für jedes x (des Hilbertschen Raumes) gegen Ex strebt, so schreiben wir $E_n \to E$. Zum Gesamtraum bzw. zu der Menge, die nur 0 enthält (diese sind lineare Mannigfaltigkeiten), gehören die Operatoren 1 bzw. 0 $(1x = x,\ 0x = 0)$.

Eine Schar von Einzeloperatoren $E(\lambda)$ (λ reell) mit den folgenden Eigenschaften:

A. Aus $\lambda \leqq \mu$ folgt $E(\lambda) \leqq E(\mu)$,

B. Aus $\lambda \geqq \mu$, $\lambda \to \mu$ folgt $E(\lambda) \to E(\mu)$,

C. Aus $\lambda \to -\infty$ bzw. $+\infty$ folgt $E(\lambda) \to 0$ bzw. 1,

nennen wir eine Zerlegung der Einheit.

Zu jeder Zerlegung der Einheit $E(\lambda)$ gibt es (genau) einen Operator T mit den folgenden Eigenschaften:

---

3) Seien $x_1, x_2, \ldots = x$ und $y_1, y_2, \ldots = y$ zwei Punkte des Hilbertschen Raumes, dann ist $(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ ihr inneres Produkt. Die Symmetrie-Bedingung für den Operator T lautet:

$$(x, Ty) = (Tx, y).$$

A. Tx ist dann und nur dann sinnvoll, wenn das Stieltjessche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(x, E(\lambda)x)$$

endlich ist ((x, y) ist das „Innere Produkt" von x und y, vgl. Fußnote [3])).

B. Wenn Ty sinnvoll ist, so gilt für alle x

$$(x, Ty) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d(x, E(\lambda)y),$$

und das Stieltjessche Integral konvergiert absolut.

Dieses T nennen wir den zur Zerlegung der Einheit $E(\lambda)$ gehörigen Operator.

Es gilt nun der Satz: Der zu $E(\lambda)$ gehörige Operator T ist stets linear-symmetrisch und maximal; und zu jedem linear-symmetrischen und maximalen T gibt es eine und nur eine Zerlegung der Einheit $E(\lambda)$, zu der er gehört.

Die nähere Ausführung erscheint demnächst in den Math. Annalen.

16. A. Ostrowski, Basel: Quasianalytische Funktionen.

17. R. Rothe, Berlin: Bericht über die Herausgabe des siebenten Bandes der Mathematischen Werke von Karl Weierstraß: Vorlesungen über Variationsrechnung.

Der Berichterstatter legt das erste Exemplar des soeben fertiggestellten Bandes VII der Mathematischen Werke von Weierstraß vor: Vorlesungen über Variationsrechnung, Leipzig 1927, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H., und berichtet über die Entstehung und den Inhalt des Bandes.

18. R. Sauer, München: Geradlinige Dreiecksnetze in der Ebene und „scheinbare" Dreiecksnetze windschiefer gerader Linien im Raume.

Auf einem Zylindroid gibt es Anordnungen von diskreten Erzeugenden, welche bei unendlich vielen Parallelprojektionen bemerkenswerte ebene Konfigurationen ergeben: Die Rißgeraden schneiden sich zu je dreien und bewerkstelligen dadurch in einem Bereich der Ebene eine Dreieckseinteilung.

Man wird so auf die beiden Probleme geführt:

1. Wie lassen sich in der Ebene in allgemeinster Weise gerade Linien anordnen, welche sich zu je dreien schneiden und dadurch ein Dreiecksnetz erzeugen mit je 6 in jedem Knotenpunkt zusammentreffenden Dreiecken? (H. Graf und R. Sauer, Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, 1924, p. 119—156.)
2. Wie lassen sich im Raum in allgemeinster Weise windschiefe gerade Linien anordnen, welche bei allen Projektionen, deren Zentrum auf einer vorgegebenen Geraden liegt, Dreiecksnetze als ebene Risse besitzen? (R. Sauer, a. a. O., 1927, p. 165—183.)

Die windschiefen Geradenanordnungen dieser Art sollen kurz als „scheinbare Dreiecksnetze" bezeichnet werden.

Sowohl die ebenen als auch die scheinbaren Dreiecksnetze können durch *lineare Konstruktionen* erzeugt werden. Die sämtlichen Geraden eines ebenen Dreiecksnetzes sind Tangenten an eine eigentliche (nicht rationale oder rationale) oder eine zerfallende Kurve 3. Klasse. Die sämtlichen Geraden eines scheinbaren Dreiecksnetzes liegen als Erzeugende auf gewissen Regelflächen 6. Grades. Die Regelflächen 6. Grades können in zwei Strahlenbüschel und eine Regelfläche 4. Grades mit zwei Doppellinien zerfallen. Dann erhält man Geradenanordnungen, welche sich stets als ebene Dreiecksnetze projizieren, wenn das Projektionszentrum sämtliche Geraden des scheinbaren Dreiecksnetzes durchläuft.

Aus den ebenen Dreiecksnetzen lassen sich durch eine einfache mechanische Deformation scheinbare Dreiecksnetze herleiten: Die Geraden eines ebenen Dreiecksnetzes werden als elastische Fädchen aufgefaßt und an zwei starre Stäbchen angeknüpft gedacht. Wenn man dann die beiden Stäbchen irgendwie im Raum gegeneinander bewegt, so bilden die elastischen Fädchen fortwährend ein scheinbares Dreiecksnetz.

19. L. Schlesinger, Gießen: Parallelverschiebung und Weylsche Metrik.

Ordnet man jedem Punkte $(t^1, t^2, \ldots, t^n)$ einer amorphen n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_n$ eine m-fach ausgedehnte Vektormannigfaltigkeit $\mathfrak{E}_m$ mit den kontravarianten Komponenten $u^1, u^2, \ldots, u^m$ zu und stellt den Zusammenhang zwischen den zu verschiedenen Punkten gehörigen Vektoren durch das Levi-Civitasche Differentialsystem der Parallelverschiebung

(1) $$du^k + \sum_{l=1}^{m} u^l \sum_{r=1}^{n} \Gamma^k_{lr}\, dt^r = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

in Verbindung mit einer Führungskurve $\mathfrak{C} : t^k = \varphi_k(s)$ her, so wird, wie ich gezeigt habe[1]), die *Änderung einer Vektorbasis*, deren Komponentenmatrix im Anfangspunkte s_0 durch $(u^k_i)_0 = U_0$ dargestellt ist, bei Parallelverschiebung längs $\mathfrak{C}$ bis zum Punkte s durch das Produktintegral

(2) $$\int_{s_0}^{s} \Big(- \sum_{r=1}^{n} \Gamma_r\, dt^r + I\Big) = U_0^{-1} U$$

gegeben, wo Γ_r die Matrix der Γ^k_{ir} und I die Einheitsmatrix bedeutet, während für eine geschlossene Kurve $\mathfrak{K}$ die dem Stokesschen Satze analoge Gleichung

(3) $$\int_{\mathfrak{K}} \Big(- \sum_{r=1}^{n} \Gamma_r\, dt^r + I\Big) = \iint_{(\mathfrak{K})} \Big(T \cdot \sum_{r<s} R_{sr} \cdot T^{-1}\, dt^r\, dt^s + I\Big)$$

gilt, wo die Matrix T die Änderung bedeutet, die einer Kurve entspricht, die von einem passend gewählten Punkte der Kurve $\mathfrak{C}$ erst längs dieser und dann längs eines „horizontalen" Schlitzes nach einem „innerhalb" $\mathfrak{C}$ gelegenen Punkte $(t^1, \ldots, t^n)$ hinführt, und R_{sr} die Matrix der Komponenten

(4) $$R^{\alpha}_{\beta s r} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta r}}{\partial t^s} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta s}}{\partial t^r} + \sum_{\lambda=1}^{m} \left(\Gamma^{\lambda}_{\beta r}\Gamma^{\alpha}_{\lambda s} - \Gamma^{\lambda}_{\beta s}\Gamma^{\alpha}_{\lambda r}\right) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m)$$

1) Mathematische Annalen, Bd. 99 (1928).

des sogenannten Riemannschen Krümmungstensors darstellt. Die Gleichung (3) erweist sich als invariant beim Übergang zu einem anderen Komponentensystem

(5) $$v^k = \sum_{\lambda=1}^{m} u^l h_{\lambda k}$$

der Vektormannigfaltigkeit $\mathfrak{E}_m$, ein Übergang, der das Differentialsystem (1) in das, wie man sagt, *zu derselben Art* gehörige Differentialsystem

(6) $$dv^k + \sum_{l=1}^{m} v^l \sum_{r=1}^{n} B^k_{lr}\, dt^r = 0$$

überführt. Allgemein kann man die Transformationen der Form (5), wo die $h_{\lambda k}$ wie auch die Γ^k_{lr}, B^k_{lr} differentiierbare Funktionen der unabhängigen Veränderlichen $t^1, \ldots, t^m$ bedeuten, wie folgt charakterisieren. Die Gesamtheit der Änderungen, die eine Vektorbasis (d. h. ihre Komponentenmatrix) erfährt, wenn man sie von einem festen Punkte aus längs aller möglicher geschlossener Kurven innerhalb $\mathfrak{M}_n$ nach diesem Punkte zurückführt, bildet eine Gruppe $\mathfrak{G}$, die die charakteristische Invariante für die Transformationen (5) ist. Analytisch bedeutet diese Gruppe, daß eine Funktion $\Phi(U)$ der Elemente einer Komponentenbasis $U = (u^k_l)$ dann und nur dann eine Funktion der unabhängigen Veränderlichen $t^1, \ldots, t^n$ darstellt, wenn sie ihren Wert nicht verändert, falls man auf U von links her die Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{G}$ anwendet. Der Wert der Funktion ist dann unabhängig von der Wahl der Führungskurve, man kann also $\mathfrak{G}$ als die *Monodromiegruppe* des Differentialsystems (1) bezeichnen. Sie hängt wesentlich von dem Krümmungstensor der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_n$ und von dem topologischen Charakter des Gebiets von $\mathfrak{M}_n$ ab, in dem sich die Untersuchung des Differentialsystems (1) abspielt.

Neben den kontravarianten Komponenten eines Vektors von $\mathfrak{E}$ betrachtet man auch die kovarianten u_k, die so definiert sind, daß bei simultaner Parallelverschiebung des Vektors mit den kontravarianten Komponenten u^k und des Vektors mit den kovarianten Komponenten u_k der Ausdruck $\sum_{k=1}^{m} u^k u_k$ absolut konstant, d. h. von den $t^1, \ldots, t^n$ unabhängig bleibt. Daraus folgt nach Levi-Civita, daß die u_k dem zu (1) *adjungierten System* von Differentialgleichungen

(7) $$du_k - \sum_{l=1}^{m} u_l \sum_{r=1}^{n} \Gamma^l_{kr}\, dt^r = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

genügen. Bedeutet U eine kontravariante Komponentenmatrix, so bildet bekanntlich $\tilde{U} = \bar{U}^{-1}$, d. h. die transponierte der inversen oder die inverse der transponierten, eine kovariante Komponentenmatrix, d. h. mit andern Worten: die Subdeterminanten $(m-1)$-ter Ordnung der Matrix U bilden eine Matrix, die aus einer kovarianten Komponentenmatrix durch Multiplikation mit der Determinante der Matrix U

(8) $$|U| = e^{-\int \sum_{k,r} \Gamma^k_{kr}\, dt^r}$$

hervorgeht. — Das führt zu einer wichtigen Verallgemeinerung der Art-

beziehung. Besteht nämlich zwischen den u^k und den v^k die Artbeziehung (5) und ist

$$(9)\qquad w^k = \lambda \cdot v^k,$$

wo aber vorausgesetzt wird, daß die w^k einem Differentialsystem von derselben Form wie (1) und (6)

$$(10)\qquad dw^k + \sum_{l=1}^{m} w^l \sum_{r=1}^{n} \Delta_{lr}^k dt^r = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

genügen, so ergibt sich durch Differentiation von (9) und Einsetzen in (10) die Gleichung

$$(11)\qquad dv^k + \sum_{l=1}^{m} v^l \sum_{r=1}^{n} \Delta_{lr}^k dt^r + \frac{d\lambda}{\lambda} v^k = 0.$$

Wenn das Differentialsystem (6), dem die v^k genügen, als irreduzibel vorausgesetzt wird, so folgt durch Vergleichung der Gleichungen (6) und (11) für λ die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$(12)\qquad d\lambda = \lambda \sum_{r=1}^{n} \varphi_r dt^r, \qquad \varphi_r = B_{kr}^k - \Delta_{kr}^k,$$

und somit für λ der wie (8) beschaffene Ausdruck

$$(13)\qquad \lambda = e^{\int \sum_{r=1}^{n} \varphi^r dt_r}.$$

Man sagt im Anschluß an Poincaré, daß das Differentialsystem (10) mit (6) und mit (1) *zu derselben Familie* gehört; die Familienbeziehung wird also durch eine Transformation der Form

$$(9\text{a})\qquad w^k = \lambda \sum_{l=1}^{m} u^l h_{lk}$$

vermittelt, wo λ durch (13) gegeben wird und die h_{lk}, φ_r Funktionen der unabhängigen Veränderlichen $t^1, \ldots, t^n$ sind. Wenn der Ausdruck $\sum_{r=1}^{n} \varphi_r dt^r$ ein totales Differential darstellt, so reduziert sich die Familienbeziehung auf die Artbeziehung, dies ist also der Fall, wenn die Gleichungen

$$(14)\qquad F_{rs} = \frac{\partial \varphi_r}{\partial t^s} - \frac{\partial \varphi_s}{\partial t^r} = 0$$

bestehen. Sondert man von den h_{lk} einen Faktor h ab, der eine Funktion der $t^1, \ldots, t^n$ ist, so treten an die Stelle der φ_r die Ausdrücke

$$(15)\qquad \varphi_r - \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial t^r}.$$

Die charakteristische Invariante der Familienbeziehung wird durch die in-

homogene (projektive) Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ gegeben, die aus der linearen homogenen Gruppe $\mathfrak{G}$ durch Quotientenbildung hervorgeht.

Mit Benutzung dieser Terminologie können wir sagen, daß das Differentialsystem, dem die Subdeterminanten $(m-1)$-ter Ordnung einer kontravarianten Komponentenmatrix U genügen, mit dem zu (1) adjungierten Differentialsystem (7) zu derselben Familie gehört. Betrachtet man statt der Subdeterminanten $(m-1)$-ter Ordnung von U die $(m_p)^2$ Subdeterminanten p-ter Ordnung, so genügen diese dem sogenannten $(m-p)$-ten *assoziierten System;* man erhält hierdurch zwischen den kovarianten und kontravarianten Komponenten noch $m-2$ Zwischenstufen, entsprechend den verschiedenen Koordinaten linearer Gebilde der analytischen Geometrie. Zufolge von elementaren Determinantenrelationen gehört das $(m-p)$-te assoziierte System mit dem adjungierten des p-ten assoziierten zu derselben Familie, insbesondere gehört für ein gerades $m = 2q$ das mittlere, q-te assoziierte System mit seinem adjungierten zu derselben Familie. — Dies legt die Frage nahe, nach den Systemen von der Form (1), die selbst mit ihren adjungierten zu derselben Familie gehören, für die also eine Transformation der Form

$$u_k = \lambda \sum_{l=1}^{m} u^l g_{lk}, \qquad d\lambda = \lambda \sum_{r=1}^{n} \varphi_r \, dt^r, \tag{16}$$

existiert, die (1) in (7) überführt. — Aus der Gegenseitigkeit der Beziehung zwischen adjungierten Systemen folgt dann, daß $g_{lk} = g_{kl}$ ist, es besteht somit in diesem Falle in der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_n$ eine *allgemeine Weylsche Metrik*, so daß also für $m = n = 4$ die g_{lk} die Gravitationspotentiale und die φ_r das Viererpotential des elektromagnetischen Feldes bedeuten können. Man erkennt hier unmittelbar und rein formal, daß bei unveränderten Feldstärken F_{rs} (siehe die Gleichungen (14)) in den Ausdrücken (15) der φ_r noch ein Gradient $\frac{\partial h}{\partial t^r}$ unbestimmt bleibt. — Wenn eine Beziehung (16) besteht, so folgt aus einem bekannten Satze von Fuchs, daß für $m = 2q$ das mittlere, q-te assoziierte System *reduzibel* ist unter Adjunktion der Lösungen der Differentialgleichung (12). Insbesondere ist also für $m = n = 4$ das zweite assoziierte System, dem die Komponenten eines Sechservektors genügen, reduzibel. Schreibt man für dieses Differentialsystem in sechs Unbekannten die Gleichung (3) hin, so wirkt sich die Reduzibilität in charakteristischer Weise aus. Man kann sich von der Art, wie das geschieht, ein Bild machen, wenn man zuvor den einfachsten Fall der Gaußschen Flächentheorie $m = n = 2$, $\lambda = 1$, ins Auge faßt; für diesen ist nämlich das Differentialsystem der Parallelverschiebung (1) selbst reduzibel, und vermöge dieser Reduzibilität ergibt die Gleichung (3) nichts anderes als den Satz von Gauß-Ossian Bonnet[1])

$$\int_{\mathfrak{R}} d\theta = \iint_{(\mathfrak{R})} K \, dw.$$

1) Siehe die bereits genannte Note, Mathematische Annalen, Bd. 99 (1928).

20. E. Schönhardt, Tübingen: Zur Theorie der endlichen Gruppen.

Ein System von endlich vielen Elementen, das den Gruppenpostulaten I. III. III* (Speiser, Th. d. Gr. endl. Ord. 1923, S. 1 u. 4.) genügt, heiße eine „Schar". Die Verknüpfungstafel ihrer Elemente ist ein Eulersches Quadrat. Das erste Feld der ersten Zeile, der „Ursprung", ist ausgezeichnet, es enthält stets das Einheitselement. Zu jedem Eulerschen Quadrat gehört eine bestimmte Schar. „Umordnung" eines Quadrats heiße jede Kombination einer Zeilen- und einer Spaltenvertauschung. Sie ist unwesentlich, wenn sie den Ursprung in Ruhe läßt, denn dann wird die zugehörige Schar nicht beeinträchtigt. Eine wesentliche Umordnung dagegen liefert ein Quadrat, zu dem eine neue, „adjungierte" Schar gehört. *Bei einer Gruppentafel sind alle adjungierten Scharen homomorph.*

Von Eigenschaften, durch welche sich die Gruppentafel von dem gewöhnlichen Eulerschen Quadrat auszeichnet, sind u. a. folgende drei notwendig und hinreichend (d. h. mit dem assoziativen Gesetz äquivalent):

1. Jede Umordnung einer Gruppentafel, welche das Element im Ursprung durch ein anderes Exemplar des Einheitselements ersetzt, liefert eine Tafel derselben Gruppe.[1])
2. Eine Gruppentafel kann durch Umordnung genau so in sich übergeführt werden, daß ein bestimmtes der n Elemente p durch irgendein anderes Exemplar desselben Elementes p ersetzt wird.
3. Bildet man aus einer Gruppentafel die Gruppendeterminante (die Elemente in üblicher Weise als unabhängige Variable aufgefaßt), so sind die zu gleichen Elementen gehörigen Unterdeterminanten (algebr. Kompl.) einander gleich in dem Sinn, daß ihre Matrizen durch „gerade" Umordnung ineinander übergeführt werden können. Daß diese Eigenschaft notwendig ist, wurde von Frobenius bemerkt. Sie ist auch hinreichend, selbst wenn sie nur bezüglich *eines* Elements vorausgesetzt wird.

Es gibt noch eine große Zahl notwendiger Eigenschaften der Gruppentafel, die, wie an Beispielen gezeigt wird, selbst in Kombinationen nicht hinreichend sind. Sie können zu einer näheren Untersuchung und Klassifikation der Scharen und damit der Eulerschen Quadrate, die nicht ohne Interesse zu sein scheint, dienen.

Die Substitutionen, durch welche die adjungierten Scharen, soweit dies möglich ist, auf die ursprüngliche homomorph bezogen werden, bilden eine Gruppe (bei Gruppen das Holomorph). Von der 5. Ordnung gibt es außer der zyklischen Gruppe fünf verschiedene Typen von Scharen. Sie geben Anlaß zu 56 „reduzierten" Eulerschen Quadraten.[2]) Gehört eine Schar einem dieser fünf Typen an, so sind in der Menge ihrer adjungierten Scharen alle vier übrigen Typen vertreten.

---

1) In der Diskussion machte Herr Brandt darauf aufmerksam, daß er eine damit gleichbedeutende Eigenschaft schon beim Gruppoid (Math. Ann. 96 S. 365) nachgewiesen hat. Vgl. auch die inzwischen erschienene 2. Aufl. von Speiser, Th. d. Gr. S. 14.)

2) In Macmahon, Combinatory Analysis I. Cambridge 1915, S. 250, wo eine allgemeine Anzahlbestimmung der reduzierten Quadrate gegeben wird, steht hierfür fälschlicherweise die Zahl 52. (Vgl. die inzwischen erschienene 2. Aufl. von Netto, Kombinatorik, Note 6 S. 312).

21. J. A. Schouten, Delft: Die Geometrien der kontinuierlichen Transformationsgruppen.

x^k seien die n Variablen, ξ^ν die r Parameter einer kontinuierlichen Transformationsgruppe

$$'x^k = \overset{k}{f}(x, \xi); \quad x^k = \overset{k}{F}('x, \xi).$$

Die ξ lassen sich auffassen als Koordinaten in der *Gruppenmannigfaltigkeit.* Alles spielt sich ab in einer singularitätenfreien endlichen Umgebung der identischen Transformation $\underset{0}{\xi^\nu}$, in dem sogenannten *Gruppenkeim* X_r.

Ausgangspunkt (I, III)[1] ist die Definition der (+)- und der (—)-Aequipollenz von Punktepaaren in X_r vermöge der Gleichungen

$$(+): TS^{-1} = BA^{-1}; \quad (-): S^{-1}T = A^{-1}B.$$

Die wichtigsten Eigenschaften der Aequipollenzen sind

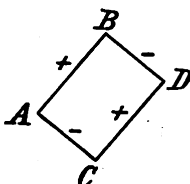


Fig. 1.

1. *Parallelogrammsatz*: Aus AB (+)-aeq. CD folgt BD (—)-aeq. AC und umgekehrt.
2. *Invarianz* beider Aequipollenzen bei beiden Parametergruppen: $T = AT$ und $T = TA$.
3. Es gibt *geodätische Linien* definiert durch die Forderung, daß zu je drei Punkten A, B, C stets auch D auftritt, so daß AC (±)-aeq. BD.

Infolge dieser Eigenschaft entstehen aus der (±)-Aequipollenz von Punktepaaren die (±)-Aequipollenz und der (±)-Parallelismus von *Strecken.*

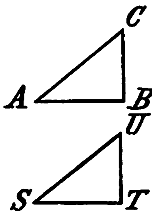


Fig. 2.

4. *Satz von den parallelen Dreiecken*: Aus $\left\{\begin{matrix} AB\ (\pm)\text{-aeq. } ST \\ BC\ (\pm)\text{-aeq. } TU \end{matrix}\right\}$ folgt AC (±)-aeq. SU. Infolge dieses Satzes bildet jede der Aequipollenzen die infinitesimale Umgebung von $\underset{0}{\xi^\nu}$ in eineindeutiger Weise *affin* ab auf die infinitesimale Umgebung jedes anderen Punktes von X_r.

Die beiden erwähnten Abbildungen erzeugen *zwei integrabele, lineare* Übertragungen (+) und (—) mit den Parametern $\overset{+}{\Gamma}{}^\nu_{\lambda\mu}$ und $\overset{-}{\Gamma}{}^\nu_{\lambda\mu}$. Beide sind *asymmetrisch,* die zugehörigen *symmetrischen* Übertragungen sind aber gleich: $\Delta^\nu_{\lambda\mu} = \overset{+}{\Gamma}{}^\nu_{(\lambda\mu)} = \overset{-}{\Gamma}{}^\nu_{(\lambda\mu)}$, $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = \overset{+}{\Gamma}{}^\nu_{[\lambda\mu]} = -\overset{-}{\Gamma}{}^\nu_{[\lambda\mu]}$. Die so entstehende symmetrische *dritte Übertragung* (0) ist im allgemeinen *nicht integrabel,* besitzt also eine nicht verschwindende *Krümmungsgröße* $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$.

Es sollen hier nur einige der wichtigsten Resultate mitgeteilt werden.

Es sei $\binom{\nu}{\lambda}$ das System der zu ξ^ν gehörigen Maßvektoren. Aus dem System $\binom{\nu}{\lambda}$ in $\underset{0}{\xi^\nu}$ wird durch (+)-aequipollente Verschiebung das System $\binom{k}{i}$ erzeugt, durch (—)-aequipollente das System $\binom{K}{J}$.

---

1) Die römischen Ziffern beziehen sich auf nachstehende Literaturangaben.

1. (I, III.) *Der erste Fundamentalsatz* bezieht sich auf die Gleichungen

$$'x^k = \overset{k}{f}(x, \xi); \quad \frac{\partial' x^k}{\partial \xi^\lambda} = \xi_i^k(x) A_\lambda^i(\xi),$$

woraus folgt $$d'x^k = \xi_i^k(x) A_\lambda^i(\xi)\, d\xi^\lambda = \xi_i^k(x)(d\xi)^i,$$

wo die Indizes i sich auf das $\binom{k}{i}$-System beziehen, die $(d\xi)^i$ sind also die Bestimmungszahlen des Linienelementes der X_r in bezug auf dieses System. Das System $\binom{K}{J}$ steht in derselben Beziehung zu den Gleichungen $x^k = \overset{k}{F}('x, \xi)$ usw.

2. (I, III.) *Eine infinitesimale Transformation* ist gegeben durch

$$d\varphi(x) = (d\xi)^i \xi_i^k(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} = (d\xi)^i X_i \varphi.$$

Folgerung: a) Jedem $(+)$-konstanten infinitesimalen Vektorfeld $e^i dt$ ist in eineindeutiger Weise eine infinitesimale Transformation $e^i X_i\, dt$ zugeordnet.

b) Affine Transformation des $\binom{k}{i}$-Systems ist gleichbedeutend mit Änderung der Wahl der r infinitesimalen Transformationen X_i.

3. (I, III.) Der *zweite Fundamentalsatz* knüpft an die Gleichung

$$(X_i X_j) = c_{ij}^{\cdot\cdot k} X_k$$

an, die Lieschen Konstanten $c_{ij}^{\cdot\cdot k}$ erscheinen als $\binom{k}{i}$-Bestimmungszahlen einer Größe dritten Grades, die folgendermaßen mit den $(\pm)$-Übertragungen zusammenhängt: $c_{ij}^{\cdot\cdot k} = 2 S_{ij}^{\cdot\cdot k}$. Eine wichtige Eigenschaft ist, daß nicht nur die $\binom{k}{i}$-Bestimmungszahlen in allen Punkten der X_r gleich sind, sondern auch noch in jedem Punkt jede $\binom{k}{i}$-Bestimmungszahl gleich der korrespondierenden $\binom{K}{J}$-Bestimmungszahl ist.

4. (I, III.) Der *dritte Fundamentalsatz* knüpft an die Identität

$$c_{[ij}^{\cdot\cdot l} c_{k]l}^{\cdot\cdot m} = 0$$

an. Es folgt:

a) Da für die Krümmungsgröße $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ der (0)-Übertragung gilt

$$R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = c_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\alpha} c_{\lambda\alpha}^{\cdot\cdot\nu},$$

ist die Identität gleichbedeutend mit der „zweiten Identität" $R_{[\omega\mu\lambda]}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 0$.

b) Die *drei* kovarianten Ableitungen von $c_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ verschwinden:

$$\overset{+}{\nabla}_\omega c_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = \overset{-}{\nabla}_\omega c_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = \overset{0}{\nabla}_\omega c_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = 0.$$

c) Es verschwinden also auch die kovarianten Ableitungen sämtlicher Komitanten von $c_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$, namentlich die von $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ und die des Tensors $g_{\lambda\mu} = c_{\alpha\lambda}^{\cdot\cdot\beta} c_{\beta\mu}^{\cdot\cdot\alpha}$.

d) Die (0)-Geometrie der X_r ordnet sich also ein in die Geometrien mit verschwindendem $\overset{0}{\nabla}_\xi R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$, die die merkwürdige Eigenschaft haben, daß sie sich in jedem Punkt in sich selbst spiegeln (III). Analytisch ist dies sehr einfach zu beweisen mit Hilfe der Veblenschen Normalkoordinaten einer A_n.

e) Ist der Rang von $g_{\lambda\mu}$ gleich r, was nach Cartan (Thèse 1894) nur auftritt bei halbeinfachen Gruppen (hier schließt die Killing-Cartansche Klassifizierung an) (VI), so ist die (0)-Geometrie eine Riemannsche und zwar eine, die einen doppelten absoluten Parallelismus besitzt (einfachstes Beispiel: Cayleyscher Parallelismus in der elliptischen S_3). Außer den Geometrien der halbeinfachen Gruppen gibt es nur noch *eine* Riemannsche Geometrie mit einem absoluten Parallelismus, die Geometrie der elliptischen S_7 (II). Cartan bestimmte sämtliche Klassen von Riemannschen Geometrien mit $\nabla_\xi R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 0$ (V).

5. (I, III.) Die *adjungierte Gruppe* fällt zusammen mit der Gruppe aller Transformationen, die ein $\binom{k}{i}$-System in ein $\binom{K}{J}$-System überführen. Die Größe $c_{ij}^{\cdot\cdot k}$ ist also eine Komitante dieser Gruppe, d. h. sie ändert ihre Bestimmungszahlen nicht. Die Komitanten von $c_{ij}^{\cdot\cdot k}$, namentlich $g_{\lambda\mu}$ und $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ sind natürlich ebenfalls Komitanten der adjungierten Gruppe. Die erste Ableitung der adjungierten Gruppe fällt zusammen mit der Holonomiegruppe der (0)-Übertragung.

6. (I, III.) Eine m-gliedrige *Untergruppe* zeichnet sich in der X_r dadurch aus, daß ihre X_m in sich sowohl (0)- als (+)- als (—)-parallel ist.

Beispiel (III): Gruppe der Drehungen in R_3. Die X_3 ist eine elliptische S_3, es gibt in sich (0)-parallele X_2, aber keine auch in sich (±)-parallele. Es gibt ja auch keine invarianten Untergruppen.

Eine *invariante m-gliedrige Untergruppe* ist dadurch ausgezeichnet, daß die zu ihrer X_m (+)-parallelen X_m auch (—)-parallel sind.

Sind in P in A_n m linear unabhängige Vektoren gegeben, so bestimmen diese eine *in* P geodätische X_m. Notwendige Bedingung für das Geodätischsein in *allen* Punkten ist, daß für irgend drei der m Vektoren u^ν, v^ν, w^ν in P stets $u^\omega v^\mu w^\lambda R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ in der A_n liegt. Ist aber $\nabla_\xi R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 0$, so ist diese Bedingung auch *hinreichend*, da die sonst nötigen Integrabilitätsbedingungen dann identisch erfüllt sind (III).

7. (III.) Jede vorgegebene A_n (= X_n mit einer *symmetrischen linearen* Übertragung) mit $\nabla_\xi R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 0$ läßt sich realisieren als geodätische Mannigfaltigkeit in der Gruppenmannigfaltigkeit ihrer eigenen Isomorphiegruppe (= Gruppe der Punkttransformationen, welche die Übertragung invariant lassen).

8. (III.) Kontinuierliche Gruppen, deren (0)-Übertragung dieselbe Projektivkrümmung besitzt, heißen *projektiv isomorph*. Cartan bestimmte alle Gruppen mit der Projektivkrümmung Null.

9. (IV.) Die Gruppen, deren (±)-Übertragung *halbsymmetrisch* ist, sind die integrabelen Gruppen, die eine invariante Abelsche Untergruppe besitzen und eine charakteristische Gleichung mit $r - 1$ gleichen Wurzeln.

Literatur.

I. Cartan und Schouten, On the geometry of the group-manifold of simple and semisimple groups. Proc. Amsterdam 19 (1926), S. 803—815.
II. Cartan und Schouten, On Riemannian geometries admitting an absolute parallelism. Proc. Amsterdam 19 (1926), S. 933—946.
III. Cartan, La géométrie des groupes de transformations. Journ. de Math. p. et appl. 6 (1927), S. 1—119.
IV. Schouten, Sur les groupes à connexion sémisymmétrique. Compte rendu Lyon 1926.
V. Cartan, Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann. Bull. de la Soc. math. de France 54 (1926), S. 214—264, 55 (1927), S. 114—134.
VI. Weyl, Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen. Math. Zeitschr. Bd. 23 und 24, insbesondere Bd. 24, S. 353—376.

22. H. Tietze, München: Über Stützeigenschaften konvexer und nichtkonvexer Figuren.

Aus der Eigenschaft einer ebenen Menge M, daß durch jeden Randpunkt wenigstens eine *Stützgerade* geht, folgt bekanntlich die Konvexheit von M unter den (hinreichenden) Zusatzbedingungen: 1. M ist abgeschlossen, 2. M besitzt innere Punkte. Die Konvexheit von M folgt aber auch aus der Eigenschaft, daß durch jeden Randpunkt P wenigstens eine *Stützstrecke* geht (d. h. eine Strecke AB mit P als Mittelpunkt, so daß wenigstens eine der beiden Halbkreisflächen über AB als Durchmesser frei von M ist) unter den weitergehenden Zusatzbedingungen, daß die Menge M_i der inneren Punkte zusammenhängend und M gleich der abgeschlossenen Hülle von M_i ist. Endlich folgt die Konvexheit von M auch aus der Existenz einer Stützstrecke *fester Länge* durch jeden Randpunkt unter den Zusatzbedingungen: 1., 2. (s. oben) und 3. M ist zusammenhängend. Wie Beispiele zeigen, sind jeweils Zusatzbedingungen nicht entbehrlich. Die entsprechenden Aussagen gelten für Mengen im $n (\geq 3)$-dimensionalen Raum.

(Erscheint in zwei Noten im Journal für Mathematik und in den Math. Annalen.)

23. B. L. van der Waerden, Göttingen: Über eine Vermutung von Herrn Baudet.

24. A. Weinstein, Zürich: Über eine Erweiterung eines Prinzips der Potentialtheorie.

25. E. A. Weiß, Bonn: Über geometrische Anwendungen hyperelliptischer Funktionen.

Der Vortragende gab den Grundgedanken seiner im Crelle-Journal erscheinenden Arbeit „Über den Zusammenhang zwischen den hyperelliptischen Parameterdarstellungen der Weddleschen Fläche und der gemeinsamen Tangenten zweier Flächen 2. Ordnung" an.

Bericht über die Geschäftssitzung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung am Mittwoch, den 21. September 1927 vormittags 9 Uhr, im Kurhaus in Bad Kissingen.

Anwesend: Schilling als Vorsitzender, Bieberbach als Schriftführer und weitere 34 Mitglieder.

1. Vor Eintritt in die Tagesordnung gedenkt der Vorsitzende der verstorbenen Mitglieder.

2. Der Schriftführer berichtet über den Stand der Vereinigung. Es waren am 1. Mai 1926 992 Mitglieder, zum Zeitpunkt der vorjährigen Tagung 1002, heute sind es 1047. Seit dem Druck des letzten Mitgliederverzeichnisses, dem 1. Mai 1926, haben wir 23 Mitglieder durch Tod oder Austritt verloren und 78 sind neu eingetreten.

3. Die verfügbaren Gelder der Deutschen Mathematiker-Vereinigung betragen augenblicklich rund 1200 *RM*.

4. Der Jahresbericht hat auch im eben gerade abgeschlossenen Band sich wieder der Druckunterstützung der Notgemeinschaft erfreut, die pro Bogen 75 *RM* beigesteuert hat. Außerdem hat auch die D. M.-V. wieder einen Beitrag geliefert als Gegenleistung für die Zusendung des 2. Teiles an alle Mitglieder. Die fertige Abrechnung für den laufenden Band liegt noch nicht vor. Es kann daher nur die Ziffer vom Band 35 angegeben werden, dieser hatte einen Umfang von 29 Bogen, die D. M.-V. steuerte rund 1400 *RM* zu den Druckkosten bei. Der jetzt gerade abgeschlossene Band hat einen Umfang von 30 Bogen, und es ist anzunehmen, daß der zu leistende Zuschuß nicht höher sein wird. Der Jahresbericht hatte sich auch insofern des besonderen Entgegenkommens des Verlages zu erfreuen, als dieser von Band 35 an seine Vertriebsspesen nur noch von dem Betrag errechnet, der sich ergibt, wenn man von den Herstellungskosten die Zuschüsse der Notgemeinschaft und der D. M.-V. abzieht. Es ist zu hoffen, daß sich auf dieser Basis noch eine weitere Erhöhung des Umfanges ohne eine Erhöhung der Abonnementspreise erzielen läßt.

5. Der Vorsitzende hat Glückwunschschreiben versandt:

Zum	80. Geburtstag	am	6. 10. 1926	an	Ludwig Kiepert in Hannover,
„	70. „	„	6. 12. 1926	„	Walter v. Dyck in München,
„	70. „	„	13. 12. 1926	„	Albert Schülke in Königsberg i. Pr.,
„	50jähr. Dr.-Jub.	„	2. 3. 1927	„	Arthur Schoenflies in Frankf. a. M.,
„	80. Geburtstag	„	6. 3. 1927	„	Johann Georg Hagen in Rom,
„	70. „	„	27. 3. 1927	„	Otto Staude in Rostock,
„	70. „	„	11. 5. 1927	„	Reinhold Müller in Darmstadt,
„	70. „	„	12. 5. 1927	„	Oskar Bolza in Freiburg i. B.,
„	70. „	„	15. 5. 1927	„	Hermann Wiener in Darmstadt,
„	70. „	„	17. 5. 1927	„	Erwin Papperitz in Freiberg i. S.,
„	70. „	„	25. 6. 1927	„	Reinhold v. Lilienthal in Münster,
„	60jähr. Dr.-Jub.	„	29. 6. 1927	„	Felix Müller in Dresden-Loschwitz,
„	70. Geburtstag	„	2. 7. 1927	„	Gabriel Souslow in Odessa,
„	70. „	„	25. 7. 1927	„	Stanislaus Jolles in Berlin,
„	70. „	„	1. 8. 1927	„	Paul Harzer in Kiel,
„	70. „	„	28. 8. 1927	„	Rudolf Mehmke in Stuttgart,
„	70. „	„	13. 9. 1927	„	Carl Schilling in Bremen.

Zum 70. Geburtstag von Hofrat Ackermann-Teubner am 31. 1. 1927 hat die D. M.-V. eine Glückwunschadresse übersandt, die im Jahresbericht Bd. 36 S. 29 abgedruckt ist. Herrn Alexander v. Brill hat die D. M.-V. anläßlich seines 85. Geburtstages am 20. 9. 1927 zum Ehrenmitglied ernannt. Beileidsschreiben sandte der Vorsitzende anläßlich des Ablebens von

Eduard Götting im Dez. 1925,
Ernst Blaschke am 30. 10. 1926,
Carl Runge am 3. 1. 1927,
Ludwig Maurer am 10. 1. 1927,
Josef Anton Gmeiner am 11. 1. 1927,
Alfred George Greenhill im Febr. 1927,
A. v. Flotow am 4. 3. 1927,
O. H. Müller am 17. 3. 1927,
Alois Walter am 14. 4. 1927,
Wilhelm Ahrens am 23. 4. 1927,
Ludwig Burmester am 27. 4. 1927,
Victor Eberhard am 28. 4. 1927,
Georg Valentin,
Emil Waelsch am 5. 6. 1927,
Gösta Mittag-Leffler am 7. 7. 1927.
Emil Müller am 1. 9. 1927.

Am Sarge von Carl Runge hat die D. M.-V. durch Herrn Trefftz einen Kranz niederlegen lassen. Bei der Gedächtnisfeier, die die T. H. Karlsruhe am 12. 2. 1927 für Adolf Krazer abhielt, war die D. M.-V. durch Herrn Baldus vertreten.

6. Zur Renovierung des Gaußturmes hat die D. M.-V. wiederum einen Beitrag von 50 *RM* bewilligt.

7. Zur Anbringung einer Gedächtnistafel am Geburtshause von Felix Klein in Düsseldorf wird die D. M.-V. bis zu 300 *RM* beitragen. Der Ausschuß hat Herrn Blumenthal beauftragt, die D. M.-V. am 12. 10. bei der Enthüllung der Tafel zu vertreten. Dazu sollen die in der Nachbarschaft Düsseldorfs wohnenden Mitglieder der D. M.-V. eingeladen werden.

8. Zum Vorsitzenden hat der Ausschuß Herrn Erhard Schmidt für die Zeit vom 1. 10. 1927 bis 30. 9. 1928 gewählt.

9. Auf Vorschlag des Ausschusses werden die Herren A. Kneser und Lorey statt der ausscheidenden Herren Trefftz und Witting für die nächsten drei Jahre zu Mitgliedern des Ausschusses gewählt.

10. Auf Vorschlag des Ausschusses werden Lorey und Schnee erneut zu Kassenrevisoren gewählt.

11. Einer Anregung des Herrn Toeplitz entsprechend, soll die D. M.-V. die Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte bitten, künftig als Tagungsorte die kleineren Städte vor den größeren zu bevorzugen, um die Zusammenarbeit und die persönliche Bezugnahme der Teilnehmer zu fördern.

Gleichzeitig tagte u. a. die Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik. Auf dieser Tagung wurden nach Bd. 7 Heft 5 (1927) der Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik folgende Vorträge gehalten:

F. Bernstein-Göttingen: Die numerische Ermittlung verborgener Periodizitäten.
A. Betz-Göttingen: Propellerfragen.
O. Föppl-Braunschweig: Angenäherte Berechnung von Schwingungszahlen mit Hilfe des Seilpolygons.
E. J. Gumbel-Heidelberg: Das Zufallsgesetz des Sterbens.
G. Hamel-Berlin: Über eine mit dem Problem der Rakete zusammenhängende Aufgabe der Variationsrechnung.

M. Herzberger-Wetzlar: Über die bestmögliche, optisch realisierbare Abbildung durch nicht homozentrische Bündel großer Apertur.
R. v. Mises-Berlin: Bemerkungen zur Hydrodynamik.
F. Noether-Breslau: Über Magnetfelder in Transformatoren.
H. Pollaczek-Geiringer-Berlin: Theorie der Statistik seltener Ereignisse.
K. Popoff-Sofia: Die Integrale der Differentialgleichungen als Funktion der auftretenden Parameter betrachtet und ihre Bedeutung für die Mechanik.
Th. Pöschl-Prag: Zur Theorie des Druckversuchs für zylindrische Körper.
W. Prager-Darmstadt: Die Formänderungen von Raumfachwerken.
L. Prandtl-Göttingen: Vorführung eines hydrodynamischen Films.
F. Rehbock-Berlin: Problemstellung einer linearen darstellenden Geometrie.
H. Reißner-Charlottenburg: Über ein Normenblatt „Gewicht und Masse".

Personalnachrichten.

Habilitationen:

Dr. F. K. Schmidt hat sich a. d. U. Erlangen habilitiert.
Dr. H. Pollaczek-Geiringer hat sich a. d. U. Berlin für angewandte Mathematik habilitiert.

Ernennungen, Auszeichnungen usw.:

E. Schönhardt, Prdzt. a. d. U. Tübingen, wurde zum n. b. ao. Prof. ernannt.
M. Krafft, Prdzt. a. d. U. Marburg, wurde zum n. b. ao. Prof. ernannt.
G. Kowalewski, Prof. a. d. T. H. Dresden, wurde zum ordentlichen Mitglied der Sächsischen Akademie der Wissenschaften gewählt.
Friedrich Hartogs, a.o. Prof. a. d. U. München, wurde Titel und Rang eines o. Prof. verliehen.
Leopold Vietoris, bisher Prdzt. a. d. U. Wien, wurde zum a.o. Prof. a. d. U. Innsbruck ernannt.
A. Hammerstein, Dr., Prdzt. a. d. U. Berlin, wurde zum n. b. a.o. Prof. ernannt.
K. Reinhardt, Dr., Prdzt. a. d. U. Greifswald, wurde zum o. ö. Prof. ebenda ernannt.
E. Doležal, Prof. in Wien, wurde von der Montanistischen Hochschule in Leoben zum Ehrendoktor ernannt.
Dr. K. Menger in Wien erhielt an der Universität daselbst einen Lehrauftrag für Geometrie und den Titel eines a.o. Professors.

Berufungen:

G. Doetsch, Prof. a. d. T. H. Stuttgart, wurde als Nachfolger von K. Th. Vahlen a. d. U. Greifswald berufen, hat aber abgelehnt.

Gestorben:

Victor Eberhard, Prof. a. d. U. Halle a./S., ist am 28. April 1927 gestorben.
Gösta Mittag-Leffler, Prof., Stockholm-Djursholm, ist am 7. Juli 1927 gestorben.
Emil Müller, Dr., *H.-R.*, Prof. a. d. T. H. Wien, ist am 1. September 1927 gestorben.
L. Schleiermacher, Dr., o. Honorarprof. a. d. T. H. in Darmstadt, ist am 10. November 1927 gestorben.

Ignaz R. Schütz, Dr., Schüler und Assistent von Boltzmann, in den neunziger Jahren Assistent von Woldemar Voigt in Göttingen, starb August 1926 in Brünn an den Folgen einer Operation. Ein vielseitig begabter, ungemein anziehender und feinsinniger Mensch, lebte er die letzten 20 Jahre in Brünn ohne wissenschaftliche Stellung. Sein Name ist als der eines Vorläufers der Relativitätstheorie in Minkowskis „Raum und Zeit" verewigt.

Emil Waelsch, o. Prof. an der deutschen Hochschule zu Brünn, ist am 5. Juni 1927 gestorben.

Kassenbericht.

Nach dem Stande vom 31. Dezember 1927.

Einnahmen	RM	Rpf	Ausgaben	RM	Rpf
An Kassenvortrag:			Per Beitrag zum Reichsverband mathematischer Gesellschaften, Berlin . .	275	—
Bar . . . . RM 59.54			„ Beitrag zur Wiederinstandsetzung des Gaußturmes	20	—
Postscheckkonto . . . „ 281 54	341	08	„ Gedenktafel Kleins	476	—
An Jahresbeiträgen der Mitglieder:			„ Zuschuß zu d. Jahresberichten Band 36, Heft 1/4, 9/12	2027	93
Für 1915 . . . . RM 1.—			„ 1 Kranz	25	—
„ 1916 . . . . „ 1.—			„ Honorar	400	—
„ 1917 . . . . „ 1.—			„ Allgemeine Deutsche Credit-Anstalt, Leipzig	1300	—
„ 1918 . . . . „ 1.—			„ Druckrechnungen, Porti, Adressenschreiben, Schreibarbeit, Adressenmappe, Postscheckgebühren	739	19
„ 1919 . . . . . . „ 1.—			„ Irrtümliche Überweisung	3	—
„ 1920 . . . . „ 1.—			„ Erlaubnis zur Anfertigung eines Klischees.	15	—
„ 1921 . . . . „ 1.50			„ Kassenbestand:		
„ 1922 . . . . „ 2.—			Bar . . . . RM 121.40		
„ 1923 . . . . „ 2.—			Postscheckkonto. . . . „ 32.95	154	35
„ 1924 . . . . „ 2.—					
„ 1925 . . . . „ 64.—					
„ 1926 . . . . „ 208.—					
„ 1927 . . . . „ 2336.57					
„ 1928 . . . . „ 205.60					
„ 1929 . . . . „ 15.—					
„ 1930 . . . . „ 15.35					
„ 1931 . . . . „ 5.—					
„ 1932 . . . . „ 5.—	2868	02			
„ Gewinn bei Versendung des Jahresberichtes Band 36, Heft 5/8 . . .	18	72			
„ Honorar-Rückzahlung.	400	—			
„ Zuschuß von der Stadt Düsseldorf für die Gedenktafel Kleins . . .	225	—			
„ Überschuß bei der Kissinger Tagung	372	50			
„ Einmalige Spende des Herrn Dr. J. G. Hagen, Rom, anläßlich seines 80jähr. Geburtstages	50	—			
„ Allgemeine Deutsche Credit-Anstalt, Leipzig	1150	—			
„ Irrtümliche Überweisung	10	15			
RM	5435	47	RM	5435	47

Vermögensbestand:

RM 637.50 Deutsche Reichsanleihe Ablösungsschuld
„ 137.50 „ „ Auslosungsscheine
„ 225.— Stadt-Ablösungs-Anleihe
„ 100.— „ Auslosungsscheine.

Allgemeine Deutsche Credit-Anstalt, Leipzig: Konto „Festes Geld" RM 800.—
„ „ „ „ Laufende Rechnung „ 1500.—.

Vorstehenden Kassenbericht und Vermögensbestand haben wir geprüft und richtig befunden.

Leipzig, den 28. Februar 1928. gez. Dr. W. Lorey, gez. Dr. W. Schnee.

Gesehen und genehmigt:

München, den 3. März 1928 gez. Dr. G. Faber, Schatzmeister der D. M.-V.

Aufgaben und Lösungen.

Aufgaben.

54. $l_1, l_2, \ldots, l_n$ sollen gegebene reelle (positive oder negative) Zahlen sein. Bildet man

$$(l_1 - l_2)^2 + (l_2 - l_3)^2 + \cdots + (l_{n-1} - l_n)^2 + (l_n - l_1)^2 = B,$$

so wird gefragt: Bei welcher Anordnung der Zahlen l_i ist B ein Minimum? (Die Frage hat eine Bedeutung für das von Abbe angegebene Kriterium des Zufalls.)

Potsdam. A. Galle.

(Eingegangen am 13. 7. 27.)

55. „Eine Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$, die keine Torse ist, ist dann und nur dann bezüglich zweier Eichflächen $\mathfrak{e}(u, v)$ und $\bar{\mathfrak{e}}(u, v)$ Relativminimalfläche im Sinne von E. Müller (Monatshefte für Math. 31, 1921, S. 3—19), wenn ihre Asymptotenlinien ein bezüglich jeder der beiden Eichflächen relativnormales Netz bilden, d. h. ein Kurvennetz, dessen Bild auf der Eichfläche ein konjugiertes Netz ist."

In diesem Satz ist ein Ergebnis von G. Thomsen (Hamburger Abhandlg. 2, 1923, S. 69—71) enthalten, das Minimalflächen betrifft, welche zugleich Affinminimalflächen sind. — Minimalflächen, die zugleich Relativminimalflächen sind, werden dadurch gekennzeichnet, daß die Bildkurven ihrer Asymptotenlinien auf der Eichfläche die Krümmungslinien sind.

W. Süss.

(Eingegangen am 4. 8. 27.)

56. Ein Vierscheitelsatz. Es sei k eine stetig gekrümmte, geschlossene Krümmungslinie, auf welcher der ihr entsprechende Hauptkrümmungsradius R sowie sein reziproker Wert stetige Funktionen sind. Durch je zwei Punkte A, B von k soll sich eine Ebene legen lassen, die keine weiteren Punkte von k enthält, zu deren beiden Seiten aber Punkte von k existieren. Dann gibt es auf k mindestens vier Stellen, wo R einen stationären Wert besitzt.

Ein analoger Satz gilt auch für geschlossene Affinkrümmungslinien auf Flächen mit regulärem Affinkrümmungsbild. W. Süss.

(Eingegangen am 23. 11. 27.)

57. Aufgabe.[1]) Unter der Anwendung der Operation O auf eine Bruchfolge

$$F\left\{\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \ldots\right\}$$

sei die Einschiebung der Medianten zwischen je zwei aufeinander folgende Brüche verstanden, also der Übergang zu der Bruchfolge

$$OF\left\{\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_1+p_2}{q_1+q_2}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_2+p_3}{q_2+q_3}, \frac{p_3}{q_3}, \ldots\right\}.$$

1) Siehe zu dieser Aufgabe die Eisensteinsche Arbeit über die höheren Reziprozitätsgesetze im Journ. f. d. r. u. a. Math. 39 (1850), Formeln (7.) auf S. 356, und Schlußbemerkung 2) auf S. 364, sowie die dort angeführte Notiz von Eisenstein in den Monatsber. d. Berl. Akad. (Märzheft 1850). — Bei der Übertragung dieser Eisensteinschen Untersuchungen auf Primzahl*potenz*exponenten kam ich auf diese Aufgabe.

Ausgehend von der Folge $F_0 \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{0}\right\}$

seien nun die Folgen $OF_0 = F_1, \quad OF_1 = F_2, \ldots$

gebildet. Es ist zu zeigen:

1. Die in F_n $(n \geqq 1)$ neu hinzukommenden Brüche sind alle und nur die positiven reduzierten Brüche, deren Kettenbruchentwicklung $a_1 + \frac{1|}{|a_2} + \cdots + \frac{1|}{|a_r}$ $(a_1 \geqq 0;\, a_2, \ldots, a_r \geqq 1)$ die Quersumme $a_1 + a_2 + \cdots + a_r = n$ hat, nach steigender Größe geordnet. (Anwendung auf die Anzahl der Zerlegungen von n in positive Summanden mit Berücksichtigung der Reihenfolge!)

2. Die vorderen (hinteren) Nachbarn dieser Brüche in F_n sind ihre vorletzten Näherungsbrüche bei gerader (ungerader) Teilnenneranzahl r der Kettenbruchentwicklung. H. Hasse.

(Eingegangen am 19. 10. 27.)

58. Es sei eine beschränkte Punktfolge $P_1, P_2, P_3, \ldots$ auf der Geraden gegeben. Ist dann die Menge der Häufungspunkte dieser Folge endlich oder abzählbar unendlich, dann gibt es stets mindestens einen Häufungspunkt H, mindestens eine gegen H konvergierende Teilfolge $P_{\lambda_1}, P_{\lambda_2}, P_{\lambda_3}, \ldots$ $(\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots)$ und mindestens eine natürliche Zahl λ, so daß der Nummernabstand $\lambda_{i+1} - \lambda_i$ unendlich oft kleiner als λ bleibt. Für mehr als abzählbar unendlich viele Häufungspunkte gilt der Satz im allgemeinen nicht mehr.

(Eingegangen am 11. 10. 27.)

Lösungen.

Lösung der Aufgabe 29. Die Aufgabe lautete:

Es enthalte eine geschlossene konvexe Fläche C den Nullpunkt im Innern, und es sei die kleinste Distanz von C vom Nullpunkt gleich ϱ. Bezeichnet man allgemein die durch Dilatation vom Nullpunkt aus im Verhältnis t entstehende Fläche mit C_t, so ist die kleinste Distanz der Punkte von C_t und C_{t_1} gleich $\varrho\,|t - t_1|$. A. Ostrowski.

Man kann die Aufgabe so fassen:

Zu beweisen, daß der Abstand der Ränder zweier ähnlich gelegenen ebenen beschränkten konvexen Punktmengen voneinander die Differenz ihrer Abstände vom Ähnlichkeitspunkt ist, falls letzterer im Innern der Mengen liegt.

Beweis: Dieser Abstand ist die untere Grenze der Entfernungen irgend zweier Punkte auf den Rändern von m und $M > m$ und wird, da Randmengen abgeschlossen sind, mindestens einmal erreicht, sagen wir in p und P bzw. auf m und M. Da der Kreis mit pP um p keinen Randpunkt von M im Innern hat und also, weil p auch Punkt von M ist, ganz M angehört, hat M in P nur eine, auf pP senkrechte Stützgerade T; und da der Kreis mit pP um P keinen Randpunkt von m im Innern und also, weil P nicht Punkt von m ist, gar keinen Punkt von m im Innern hat, ist die Senkrechte t in p auf pP Stützgerade von m. T und t sind parallel, auch bei gleichsinniger Orientierung der Ränder.

Sei der Durchschnitt der konvexen Mengen m und t die lineare konvexe Menge, d. i. Strecke ab (evt. $a = b$), aus der durch die Ähnlichkeitstransformation (O) die Berührungsstrecke AB einer parallelen und gleichlaufenden Stützgeraden von M, und da es nur eine solche gibt, von T wird; dann enthält, da die Kreise mit pP um a und b wie vorhin ganz M angehören, AB die Strecke zwischen den Berührungspunkten dieser Kreise mit T, mithin sind die $\angle\, OAB$ und $OBA \leqq \frac{\pi}{2}$, und das Lot von O auf t und T trifft diese in Randpunkten bzw. von m und M, deren Entfernung pP ist. Unter allen Punktepaaren auf Strahlen durch O haben aber offenbar diejenigen, deren Punkte zu O am nächsten liegen, den kleinsten Abstand. Th. Motzkin.

(Eingegangen am 5. 11. 27.)

Lösung der Aufgabe 36. (Dieser Jahresbericht Bd. 35, Heft 1/4, S. *48*.)

Die Aufgabe lautete:

„Von der komplexen Zahlenfolge $z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots$ sei dreierlei vorausgesetzt:

1. Die n Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} z_k, \sum_{k=1}^{\infty} z_k^2, \ldots, \sum_{k=1}^{\infty} z_k^n$ sind konvergent.
2. Es ist $|z_1| \geqq |z_2| \geqq \cdots \geqq |z_k| \geqq \cdots$.
3. Es gibt zwei reelle Zahlen α, β, so daß

$$0 < \beta - \alpha < \frac{2\pi n}{n+1}, \qquad \alpha \leqq \operatorname{arc} z_k \leqq \beta \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

Dann ist $|z_1|^n + |z_2|^n + \cdots + |z_k|^n + \cdots$ konvergent.

Der Satz bleibt bestehen, wenn in 1. anstatt Konvergenz nur die Beschränktheit der Partialsummen vorausgesetzt wird; er wird hinfällig, wenn die Voraussetzung 2. weggelassen oder wenn in 3. nur $\beta - \alpha \leqq 2\pi n (n+1)^{-1}$ vorausgesetzt wird.“ (G. Pólya.)

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf man annehmen, daß $\alpha + \beta = 2\pi$ ist mit $\frac{\pi}{n+1} < \alpha < \pi$; dann besagt Voraussetzung 3., daß alle z_k außerhalb des Winkelraums $-\alpha < \operatorname{arc} z < \alpha$ liegen.

I. Ich betrachte zunächst das Kosinuspolynom n-ter Ordnung

$$T_n(\varphi) = \frac{1 + \cos(n+1)\varphi}{\cos\varphi - \cos\frac{\pi}{n+1}} = a + a_1 \cos\varphi + \cdots + a_n \cos n\varphi$$

und behaupte, daß $a = 0$ ist. Es ist nämlich $g(z) = \dfrac{2z\left(1 + z^{n+1}\right)}{1 - 2z\cos\frac{\pi}{n+1} + z^2}$ ein algebraisches Polynom ohne konstantes Glied und man sieht leicht ein, daß $T_n(\varphi) = \Re g(e^{i\varphi})$, also $T_n(\varphi)$ dieselben Koeffizienten hat wie $g(z)$.

$$U_n(\varphi) = \frac{1 + \cos(n+1)\varphi}{\left(\cos\varphi - \cos\frac{\pi}{n+1}\right)^2} = b + b_1\cos\varphi + \cdots + b_{n-1}\cos(n-1)\varphi$$

stellt ebenfalls ein (positiv definites) Kosinuspolynom dar, da $\varphi = \frac{\pi}{n+1}$ eine zweifache Nullstelle von $1 + \cos(n+1)\varphi$ ist. Est ist dabei

$$b = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{1+\cos(n+1)\varphi}{\left(\cos\varphi - \cos\frac{\pi}{n+1}\right)^2}\,d\varphi > 0.$$

Bedeutet ferner ε die positive Konstante $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{n+1} - \cos\alpha$, so enthält das Kosinuspolynom n-ter Ordnung

$$V_n(\varphi) = -T_n(\varphi) - \varepsilon U_n(\varphi) + b\varepsilon = \frac{1+\cos(n+1)\varphi}{\left(\cos\varphi - \cos\frac{\pi}{n+1}\right)^2}(\cos\alpha - \cos\varphi) + b\varepsilon$$
$$= c_1\cos\varphi + c_2\cos 2\varphi + \cdots + c_n\cos n\varphi$$

kein konstantes Glied und es ist außerdem $V_n(\varphi) \geqq b\varepsilon$ für $\alpha \leqq \varphi \leqq 2\pi - \alpha$.

II. Es sei $z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots$ eine unendliche Zahlenfolge, die den Bedingungen 2. und 3. genügt und es existiere eine positive Konstante A, so daß

$$\left|\sum_{k=1}^{\nu} z_k^p\right| < A \quad \text{für} \quad p = 1, 2, \ldots, n \quad \text{und} \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

Setzt man noch $\quad s^{(p)} = \sum_{k=1}^{\nu} z_k^p, \quad s_0^{(p)} = 0, \quad z_k = r_k e^{i\varphi_k},$

so erhält man durch partielle Summation

$$\sum_{k=1}^{\nu} r_k^n e^{ip\varphi_k} = \sum_{k=1}^{\nu} r_k^{n-p}\left(s_k^{(p)} - s_{k-1}^{(p)}\right) = r_\nu^{n-p} s_\nu^{(p)} + \sum_{k=1}^{\nu-1}\left(r_k^{n-p} - r_{k+1}^{n-p}\right)s_k^{(p)},$$

$$\left|\sum_{k=1}^{\nu} r_k^n e^{ip\varphi_k}\right| \leqq A r_\nu^{n-p} + A\sum_{k=1}^{\nu-1}\left(r_k^{n-p} - r_{k+1}^{n-p}\right) = A r_1^{n-p}.$$

Folglich sind die Partialsummen $\sum_{k=1}^{\nu} r_k^n e^{ip\varphi_k}$, also auch die Summen $\sum_{k=1}^{\nu} r_k^n \cos p\varphi_k$ für $p = 1, 2, \ldots, n$ beschränkt. Aus

$$\sum_{p=1}^{n} c_p \sum_{k=1}^{\nu} r_k^n \cos p\varphi_k = \sum_{k=1}^{\nu} r_k^n \sum_{p=1}^{n} c_p \cos p\varphi_k = \sum_{k=1}^{\nu} V_n(\varphi_k) r_k^n \geqq b\varepsilon \sum_{k=1}^{\nu} r_k^n$$

folgt ferner, daß auch die Partialsummen der Reihe mit positiven Gliedern $\sum_{k=1}^{\infty} r_k^n$ eine feste Schranke nicht überschreiten, d. h., daß die letzte Reihe konvergiert, w. z. b. w.

III. Um zu beweisen, daß für $n > 1$ der Satz ohne Voraussetzung 2. hinfällig ist, schicke ich folgenden Hilfssatz voraus:

Es gibt $n + 2$ von Null verschiedene komplexe Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$, so daß $\sum_{k=1}^{n+2} a_k = 0$, $\sum_{k=1}^{n+2} a_k^2 = 0, \ldots, \sum_{k=1}^{n+2} a_k^n = 0$ und $\frac{\pi}{n+1} < \operatorname{arc} a_k < 2\pi - \frac{\pi}{n+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n+2)$.

Die erwähnten Eigenschaften besitzen z. B. die $n+2$ Wurzeln[1] x_1, $x_2, \ldots, x_{n+2}$ der trinomischen Gleichung

$$f(x) = x^{n+2} - (n+2)x + n + 1 = 0,$$

multipliziert mit einer geeignet gewählten komplexen Konstanten. Offenbar verschwinden die Potenzsummen $s_1 = \sum_{k=1}^{n+2} x_k$, $s_2 = \sum_{k=1}^{n+2} x_k^2, \ldots, s_n = \sum_{k=1}^{n+2} x_k^n$. Ich brauche also noch zu zeigen, daß es einen wurzelfreien Winkelraum $0 < \operatorname{arc} x < \gamma$ mit der Öffnung $\gamma > \frac{2\pi}{n+1}$ gibt. In der Tat liegen, nach dem **Kakeyaschen** Satze, alle Wurzeln von

$$\frac{f(x)}{(x-1)^2} = x^n + 2x^{n-1} + 3x^{n-2} + \cdots + n + 1 = 0$$

außerhalb des Einheitskreises und für $x = re^{i\varphi}$, $r > 1$, $0 < \varphi \leqq \frac{2\pi}{n+1}$ ist der imaginäre Teil von

$$e^{-\frac{i(n+1)\varphi}{2}} \frac{f(x)}{x-1} = e^{-\frac{i(n+1)\varphi}{2}} (x^{n+1} + x^n + \cdots + 1) - (n+2) e^{-\frac{i(n+1)\varphi}{2}}$$

positiv und zwar gleich

$$(n+2) \sin \frac{(n+1)\varphi}{2} + \sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} (r^{n+1-k} - r^k) \sin\left(\frac{n+1}{2} - k\right)\varphi.$$

Es gibt daher eine reelle Zahl $\gamma > \frac{2\pi}{n+1}$ derart, daß der Winkelraum $0 < \operatorname{arc} x < \gamma$ keine Wurzel von $f(x) = 0$ enthält. Wird noch $a_k = x_k e^{-\frac{i\gamma}{2}}$ $(k = 1, 2, \ldots, n+2)$ gesetzt, so genügen die $n+2$ Zahlen a_k allen Bedingungen des Hilfssatzes.

Nachdem ich die $m = n + 2$ Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ auf diese Weise bestimmt habe, definiere ich die unendliche Zahlenfolge folgendermaßen. Es sei $u_0, u_1, u_2, \ldots$ eine gegen Null konvergierende Folge positiver Zahlen, für welche $\sum_{k=0}^{\infty} u_k^n$ divergiert. Ich setze

$$z_{mk+1} = a_1 u_k, \quad z_{mk+2} = a_2 u_k, \quad \ldots, \quad z_{mk+m} = a_m u_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Für diese Zahlenfolge $\{z_\nu\}$ ist offenbar Voraussetzung 3. des Satzes erfüllt, wenn man $\alpha = \frac{\gamma}{2}$, $\beta = 2\pi - \frac{\gamma}{2}$ wählt. Außerdem konvergieren die n Reihen $\sum z_\nu, \sum z_\nu^2, \ldots, \sum z_\nu^n$, da für $p = 1, 2, \ldots, n$ und $k =$ ganz und positiv

$$\sum_{\nu=1}^{km} z_\nu^p = \sum_{\mu=0}^{k-1} (z_{\mu m+1}^p + z_{\mu m+2}^p + \cdots + z_{\mu m+m}^p) = 0,$$

1) Die Doppelwurzel $x = 1$ wird zweimal gezählt.

was, wegen $\lim z_\nu = 0$, die Beziehung $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{\nu=1}^{N} z_\nu^p = 0$ zur Folge hat. Trotzdem divergiert die Reihe $\sum |z_\nu|^n$, wie man aus

$$\sum_{\nu=1}^{km} |z_\nu|^n = (|a_1|^n + |a_2|^n + \cdots + |a_m|^n) \sum_{\mu=0}^{k-1} u_\mu^n > m \sum_{\mu=0}^{k-1} u_\mu^n$$

sofort entnimmt.

IV. Es sei $\alpha = \frac{\pi}{n+1}$, $\beta = \frac{(2n+1)\pi}{n+1}$, also $\beta - \alpha = \frac{2n\pi}{n+1}$. Ich bestimme jetzt die Zahlenfolge $\{z_k\}$ folgendermaßen:

$$|z_k| = k^{-\frac{1}{n}}, \qquad \operatorname{arc} z_k = \frac{(2k-1)\pi}{n+1} - 2\left[\frac{2k-1}{2n+2}\right]\pi.$$

Für diese Zahlenfolge sind die Voraussetzungen 1., 2. und die Ungleichungen $\alpha \leqq \operatorname{arc} z_k \leqq \beta$ erfüllt, die Reihe $\sum |z_k|^n$ aber divergiert. Dieses Beispiel zeigt also, daß der Satz nicht besteht, wenn man in 3. die Bedingung $0 < \beta - \alpha < \frac{2\pi n}{n+1}$ durch $0 < \beta - \alpha \leqq \frac{2\pi n}{n+1}$ ersetzt.

Varna. L. Tschakaloff.

(Eingegangen am 21. 8. 27.)

Lösung der Aufgabe 42. (Dieser Jahresbericht Bd. 35, S. *84*.)

Die Aufgabe lautete:

„Wenn ein ebener Eibereich E genau zwei Punkte (A, B) enthält, durch welche mehr als eine Sehne kleinster Länge geht, und wenn die kleinsten Sehnen in A und B gleichlang sind, so ist E sowohl zur Geraden AB als auch zur Mittelsenkrechten von AB symmetrisch. Ein entsprechender Satz gilt für die Schnittovale kleinsten Flächeninhalts in Eikörpern."

(W. Süss.)

Beweis: a) Es sei $s(P)$ das Minimum der Längen der durch P gehenden Sehnen des Eibereichs E. s nimmt innerhalb E sein Maximum s_0 an, etwa im Punkte P_0. Ich behaupte: $s(A) = s(B) = s(P_0) = s_0$. Der Beweis dieser Behauptung befindet sich in meiner Arbeit „Einige Probleme über konvexe geschlossene Kurven und Flächen".[1])

b) Man betrachte alle von A ausgehenden Strahlen und bestimme auf ihnen den jeweils A nächstgelegenen Punkt $Z(\varepsilon)$, in welchem für $0 < \varepsilon < s_0$

$$s(Z) = s_0 - \varepsilon$$

ist. Da s eine am Rande von E verschwindende, stetige Funktion des Ortes in E ist, gibt es auf jedem Strahl von A aus einen solchen Punkt $Z(\varepsilon)$. In der genannten Arbeit habe ich bewiesen, daß die Menge $\mu(\varepsilon)$ dieser Punkte $Z(\varepsilon)$ eine geschlossene konvexe Kurve ist. Nach a) muß B im Innern von $\mu(\varepsilon)$ liegen. Durch jeden Punkt von $\mu(\varepsilon)$ geht eine „Stützsehne" an $\mu(\varepsilon)$ von der Länge $s_0 - \varepsilon$, d. h. eine Sehne von E, deren Gerade eine Stützgerade von $\mu(\varepsilon)$ ist.

1) Tôhoku Math. Journal 26, S. 106ff.

c) Ich behaupte: Für $\varepsilon \to 0$ konvergiert $\mu(\varepsilon)$ gegen die Strecke $\overline{AB}$.

Nach b) liegt B innerhalb oder auf $\mu(0)$ ($\mu(0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mu(\varepsilon)$) und durch jeden Punkt von $\mu(0)$ geht eine Stützsehne an $\mu(0)$ von der Länge s_0.

Angenommen, $\mu(0)$ umgrenze ein Gebiet g. Da s_0 das Maximum aller s in E ist, gibt es wegen der Bestimmung von $\mu(\varepsilon)$ durch jeden Punkt von g eine Sehne von der Länge s_0. Diese Sehne aber würde $\mu(0)$ in zwei Punkten schneiden, durch welche je eine weitere Sehne von der Länge s_0 als Stützsehne an $\mu(0)$ ginge; diese Punkte müßten also gerade mit A und B identisch sein.

Dies ist für alle Punkte eines Gebiets g unmöglich. Also ist $\mu(0)$ als Grenzmenge von Eilinien eine Strecke, auf welcher A und B liegen.

Als Grenzlage von Stützsehnen von $\mu(\varepsilon)$ von der Länge $(s_0 - \varepsilon)$ hat die durch A und B gehende Sehne von E die Länge s_0.

Durch A und B gibt es nun nach Voraussetzung mindestens noch je eine zweite Sehne $\sigma(A)$ bzw. $\sigma(B)$ von der Länge s_0.

Wäre A nicht Endpunkt von $\mu(0)$, so gäbe es auf $\mu(0)$ einen Punkt C, so daß A zwischen B und C liegt und nach dem Brunn-Minkowskischen Satz über parallele Schnitte eines Eibereichs für die Sehnen $p(C) \parallel \sigma(A)$ und $p(B) \parallel \sigma(A)$ wegen der Voraussetzung

$$p(C) \leqq \sigma(A) = s_0 \leqq p(B)$$

ist. Da durch C nur eine kürzeste Sehne existieren soll, muß aber $p(C) > s_0$ sein, was im Widerspruch zur obigen Ungleichung steht. Also ist A und analog B Endpunkt von $\mu(0)$.

Die Kurven $\mu(\varepsilon)$ können keine Ecken besitzen, weil durch jede Ecke mindestens zwei Stützsehnen gleicher kleinster Länge $(s_0 - \varepsilon)$ gehen würden. $\mu(\varepsilon)$ besitzt also Stützsehnen von der Länge $(s_0 - \varepsilon)$ in jeder Richtung.

Daraus folgt für $\varepsilon \to 0$, daß alle Sehnen durch A und B dieselbe Länge s_0 besitzen müssen. A und B sind also sogenannte „Sehnenpunkte" (Punkte konstanter Sehnen).

e) Herr W. Süß[1]) bewies nun, daß Eibereiche mit zwei Sehnenpunkten die im Satz genannte doppelte Symmetrie besitzen, w. z. b. w.

Der analoge Satz für Sehnen kleinster Länge oder Schnittovale kleinsten Flächeninhalts in Eikörpern läßt sich nach den am selben Ort von W. Süß bewiesenen Sätzen in derselben Weise beweisen. Ein solcher Körper ist dann ein Rotationseikörper mit der Achse AB und symmetrisch zu der auf der Sehne $\overline{AB}$ mittelsenkrechten Ebene.

Berlin. Sôji Nakajima.

(Eingegangen am 1. 11. 26.)

Lösung der Aufgabe 46.

In Band 36, S. *90*, wurde eine von den Herren A. Brauer und R. Brauer gelieferte Lösung dieser von den Herren Hasse und I. Schur gestellten Aufgabe abgedruckt. Nachträglich legten Lösungen dieser Aufgabe noch vor die Herren: H. Bessel in Königsberg, A. Flechsenhaar in Frankfurt a. M. und L. Tschakaloff in Sofia.

1) Tôhoku Math. Journal 25, S. 86.

Ergänzung zur Lösung der Aufgabe 46. (Dieser Jahresbericht Bd. 36, S. *90—92.*)

1. *Eine beliebige Kette von positiven Lösungen*

$$\ldots x_{-1}, x_0, x_1, \ldots$$

enthält mindestens ein Glied x_k, *das den Ungleichungen* $0 < x_k \leqq [\sqrt{m}]$ *genügt.*

Es sei in der Tat x_k die kleinste (bzw. eine der kleinsten) unter den ganzen Zahlen x_n. Dann sind $\lambda = x_{k+1} - x_k$, $\mu = x_{k-1} - x_k$ nicht negative Zahlen, deren Produkt $< m$ ist wegen

$$\lambda\mu = (x_{k+1} - x_k)(x_{k-1} - x_k) = m - x_k(x_{k+1} - x_k) - x_k(x_{k-1} - x_k) < m.\text{[1]}$$

Mindestens eine der Zahlen λ und μ ist also $< \sqrt{m}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $0 \leqq \lambda < \sqrt{m}$. Aus

$$t = \frac{x_{k+1} + x_{k-1}}{x_k} = \frac{x_{k+1}^2 + x_k^2 + m}{x_k x_{k+1}}, \qquad t - 2 = \frac{\lambda^2 + m}{x_k x_{k+1}} = \frac{\lambda^2 + m}{x_k(x_k + \lambda)}$$

folgt, daß der letzte Bruch eine ganze positive Zahl ist, so daß $x_k^2 + \lambda x_k \leqq \lambda^2 + m$ ist. Da ferner $f(x) = x^2 + \lambda x - \lambda^2 - m$ eine monoton wachsende Funktion der positiven Veränderlichen x ist, so folgt aus $f(x_k) \leqq 0$, $f(\sqrt{m}) = \lambda(\sqrt{m} - \lambda) \geqq 0$ die Beziehung $x_k \leqq \sqrt{m}$, d. h. $x_k \leqq [\sqrt{m}]$, wie behauptet.

Die gefundene obere Schranke $[\sqrt{m}]$ des kleinsten Gliedes x_k läßt sich im allgemeinen nicht durch eine kleinere ersetzen in dem Sinne, daß sie für unendlich viele m erreicht wird. Setzt man nämlich $m = p^2 + p - 1$ (p = ganz, positiv), so ist das kleinste Glied der entsprechenden Lösungskette

$$\ldots 5p - 3,\ 2p - 1,\ p,\ p + 1,\ 2p + 3, \ldots$$

tatsächlich gleich $[\sqrt{m}] = p$.

Es ist übrigens leicht zu zeigen, daß eine Kette von positiven Lösungen höchstens zwei Glieder enthält, die $\leqq \sqrt{m}$ sind. Die Ungleichungen $x_k x_{k-2} > m$, $x_k x_{k+2} > m$, $x_{k-1} x_{k+1} > m$, in Verbindung mit $x_k \leqq \sqrt{m}$, zeigen nämlich, daß x_{k-2}, x_{k+2} und mindestens eine der Zahlen x_{k-1}, x_{k+1} größer als $\sqrt{m}$ sind; alle übrigen Glieder der Kette sind aber größer als x_{k-2} bzw. x_{k+2}, so daß mit x_k höchstens noch einer seiner Nachbarn x_{k-1}, x_{k+1} die obere Schranke $\sqrt{m}$ nicht überschreitet.

2. Es sei eine beliebige Kette $\{x_n\}$ von positiven Lösungen vorgelegt. Man kann stets durch Verschiebung und (nötigenfalls) Umkehrung der Reihenfolge der Indizes erreichen, daß x_0 das kleinste Glied der Kette darstellt und $x_1 \leqq x_{-1}$ ist. Die so „normierte" Kette erzeugt offenbar dieselben Lösungen, wie die gegebene. Zwei normierte Ketten $\{x_n\}$ und $\{x'_n\}$ sind identisch, nur wenn $x_0 = x'_0$ und $x_1 = x'_1$ ist. — Um alle normierten Ketten von positiven Lösungen zu erhalten, kann man folgendermaßen vorgehen: Man wähle zunächst eine zu m teilerfremde ganze positive Zahl $a \leqq \sqrt{m}$ und bestimme dann einen Teiler b von $a^2 + m$ derart, daß $\frac{b^2 + m}{a}$ ganz ausfällt und $a \leqq b \leqq \sqrt{a^2 + m}$

1) $x_{k-1} = x_k = x_{k+1}$ ist ausgeschlossen wegen $x_{k-1} x_{k+1} = x_k^2 + m$.

ist. *Jedem solchen Zahlenpaar* a, b *entspricht dann eine normierte Kette mit den Anfangsgliedern* $x_0 = a$, $x_1 = b$. *Auf diese Weise erzeugt man alle normierten Ketten, und zwar jede nur einmal.*

Ist nämlich $\{x_n\}$ eine normierte Kette, so genügen ihre Anfangsglieder $x_0 = a$, $x_1 = b$ den Bedingungen

$$(1)\qquad 0 < a \leqq \sqrt{m}, \quad b/a^2 + m, \quad a/b^2 + m, \quad (a, b) = (a, m) = 1$$

und es ist außerdem $\frac{a^2+m}{b} = x_{-1} \geqq x_1 = b \geqq x_0 = a$, d. h.

$$(2)\qquad a \leqq b \leqq \sqrt{a^2 + m}.$$

Es bleibt noch zu beweisen, daß die durch $x_0 = a$, $x_1 = b$, $x_{n-1}x_{n+1} = x_n^2 + m$ bestimmte Kette *normiert* ist, wenn die ganzen Zahlen a und b den Bedingungen (1) und (2) genügen. Man hat in der Tat $x_{-1} = \frac{a^2+m}{b} \geqq b = x_1 \geqq a = x_0$, also $x_0 \leqq x_1 \leqq x_{-1}$, was in Verbindung mit $x_{n+1}x_{n-1} > x_n^2$ die Ungleichungen

$$x_0 \leqq x_{-1} < x_{-2} < \cdots; \qquad x_0 \leqq x_1 < x_2 < \cdots$$

liefert. Folglich ist $x_0 = a$ das kleinste Glied der Kette und $x_1 \leqq x_{-1}$.

Sofia. L. Tschakaloff.

(Eingegangen am 9. 1. 28.)

Lösung der Aufgabe 50. (Dieser Jahresbericht Bd. 36, Heft 5/8, S. 58.)

Die Aufgabe lautete:

Zu beweisen: Ist $\varrho \geqq 1$ eine vorgeschriebene ganze Zahl, so läßt sich ein Dreieck mit dem Inkreisradius ϱ derart bestimmen, daß sämtliche Ankreisradien, der Inhalt, die Seiten, der Durchmesser des umschriebenen Kreises, die Tangente des halben größten Winkels und die Kotangenten der halben übrigen Winkel ganze Zahlen sind. Die zu verschiedenen Werten von ϱ gehörigen Dreiecke werden als nicht ähnlich vorausgesetzt.

Jena. F. Ringleb.

In dieser Aufgabe ist die Ganzzahligkeit der Ankreisradien, des Inhaltes und des Durchmessers des umschriebenen Kreises eine Folge der Ganzzahligkeit der übrigen erwähnten Größen. Es gibt außerdem mehrere Dreiecke, die den aufgestellten Bedingungen genügen; ihre Anzahl ist nämlich gleich der Anzahl verschiedener Zerlegungen der Zahl $\varrho^2 + 1$ in zwei Faktoren.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein: a, b, c für die Seiten des gesuchten Dreiecks, A, B, C für seine Winkel, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c für seine Ankreisradien, S für seinen Inhalt, D für den Durchmesser des umschriebenen Kreises, $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = k$, $\operatorname{ctg}\frac{B}{2} = k + u$, $\operatorname{ctg}\frac{C}{2} = k + v$. Es gilt

$$(1)\qquad a = \varrho\left(\operatorname{ctg}\frac{B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right) = \varrho(2k + u + v),$$

$$(2)\qquad b = \varrho\left(\operatorname{ctg}\frac{C}{2} + \operatorname{ctg}\frac{A}{2}\right) = \varrho(k + v) + \frac{\varrho}{k},$$

$$(3)\qquad c = \varrho\left(\operatorname{ctg}\frac{B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{A}{2}\right) = \varrho(k + u) + \frac{\varrho}{k}.$$

Sollen a, b, c, k, u, v ganzzahlig sein, so muß k Teiler von ϱ sein. Ferner folgt aus $A + B + C = 180^0$

$$(4) \qquad k = \operatorname{ctg}\left(\frac{C+B}{2}\right) = \frac{\operatorname{ctg}\frac{B}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{C}{2} - 1}{\operatorname{ctg}\frac{B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{C}{2}} = \frac{(k+u)(k+v)-1}{2k+u+v} \quad \text{oder}$$

$$(5) \qquad u \cdot v = k^2 + 1.$$

Ist k ein beliebiger Teiler von ϱ und $u \cdot v$ eine beliebige Zerlegung von $k^2 + 1$, so entspricht diesen Zahlen ein Dreieck, welches allen Bedingungen der Aufgabe genügt. Denn

$$(6) \qquad S = \frac{\varrho}{2}(a+b+c) = \varrho^2(2k+u+v) + \frac{\varrho^2}{k} = \frac{\varrho^2}{k}(k+u)(k+v),$$

$$(7) \qquad \varrho_a = \frac{2S}{b+c-a} = \varrho k(2k+u+v) + \varrho,$$

$$(8) \qquad \varrho_b = \frac{2S}{a+c-b} = \frac{\varrho}{k}(k+v),$$

$$(9) \qquad \varrho_c = \frac{2S}{a+b-c} = \frac{\varrho}{k} \cdot (k+u),$$

$$(10) \qquad D = \frac{a}{\sin A} = \frac{\varrho(2k+u+v)(k^2+1)}{2k}.$$

D ist ganzzahlig, da entweder $2k+u+v$ oder k^2+1 notwendig gerade ist.

Wollen wir die letzte Forderung der Aufgabe befriedigen, so müssen wir setzen $k = \varrho$.

Odessa. N. Tschebotaröw.

(Eingegangen am 29. 8. 27.)

Richtige Lösungen legten auch die Herren Gruber, Lütkemeyer und Michnik vor.

Lösung der Aufgabe 51. (Dieser Jahresbericht Bd. 36, Heft 5/8, S. *59*.)

Die Aufgabe lautete:

Man leite aus der von Herrn R. Rothe (Charlottenburg) aufgestellten Formel für das Gaußsche Krümmungsmaß (dieser Jahresbericht Bd. 35, Heft 5/8, S. *96—98*) und den zu ihr führenden Formeln folgende Lehrsätze ab:

I. Wenn ein Kurvennetz ein Gewebe ist („Netz ohne Umwege"), und die geodätischen Krümmungen der Fäden in den Knotenpunkten sind einander gleich, so ist es ein „gestreiftes" Gewebe (R. Rothe, Über die Gewebe einer Fläche, dieser Jahresbericht 17, 1908, S. 330).

II. Gibt es auf einer Fläche zwei Felder geodätischer Linien, die sich unter festem Winkel schneiden, so ist die Fläche eine Torse ($K = 0$) (W. Blaschke, Differentialgeometrie I, 1924, S. 126). W. Fiebig.

Lösung von I. Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Parameterlinien $\begin{cases} u = \text{konst} \\ v = \text{konst} \end{cases}$ auf einer analytischen Fläche ein Gewebe bilden, ist bekanntlich (vgl. z. B. Rothe, a. a. O., S. 339)

$$(1) \qquad \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}.$$

Sind ferner die geodätischen Krümmungen der Fäden in einem Knotenpunkt gleich, so ist

$$(2) \qquad g_u = g_v.$$

Herr Fiebig hat bei seinem Beweis für die Rothesche Darstellung von K (dieser Jahresbericht Bd. 35, Heft 5/8) auf S. *97* unten die Formeln aufgestellt:

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \sqrt{EG}\sin\omega\left(g_u + \frac{\partial\omega}{\partial s_2}\right) &= \frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\cos\omega - \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} \\ \sqrt{EG}\sin\omega\left(g_v + \frac{\partial\omega}{\partial s_1}\right) &= \frac{d\sqrt{G}}{\partial u}\cos\omega - \frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} \end{aligned} \right\}.$$

Aus ihnen folgt, da $\sqrt{EG}\sin\omega \neq 0$ auf einer analytischen Fläche,

$$(4) \qquad \frac{\partial\omega}{\partial s_1} = \frac{\partial\omega}{\partial s_2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\omega}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\omega}{\partial v}.$$

Wegen (1) läßt sich das allgemeine Integral der Gleichung (4) so darstellen

$$(5) \qquad \omega = \Phi\left(\int\left(\sqrt{E}du + \sqrt{G}dv\right)\right),$$

worin das innere Integral vom Wege unabhängig ist. Φ muß eine stetige erste Ableitung haben und ist sonst willkürlich.

Nun sind die Kurven

$$(6) \qquad \int\left(\sqrt{E}du + \sqrt{G}dv\right) = \text{const.}$$

auf der Fläche, d. h. die Integralkurven der Differentialgleichung

$$(7) \qquad \sqrt{E}du + \sqrt{G}dv = 0,$$

die Winkelhalbierenden des Winkels $\pi - \omega$; dies ist sofort durch eine leichte Rechnung zu bestätigen.

Danach ist der Maschenwinkel längs jeder der Kurven (6) konstant, d. h. das Gewebe der Parameterkurven ist „gestreift".

Zur Lösung von II. Die Lösung dieser Aufgabe ist schon enthalten in der von mir gegebenen Lösung der Aufgabe 47 (dieser Jahresbericht Bd. 36, Heft 9/12, S. *92*.)

Darmstadt. Jos. E. Hofmann.

(Eingegangen am 2. 8. 27.)

Lösung der Aufgaben 53 (dieser Jahresbericht Bd. 36, S. *90*) **„zur Integralrechnung" ohne Integralrechnung.**

1. Die Aufgabe lautet:

$$\text{Für } 0 < n \equiv 0\,(1) \text{ gilt } \sum_{1}^{2n-1}{}_{\lambda} \frac{(-1)^{\lambda-1}}{\binom{2n}{\lambda}} = \frac{1}{n+1}.$$

Wilhelm Maier.

Lösung:

$$\sum_{\lambda=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{\lambda-1}}{\binom{2n}{\lambda}}$$

$$= \frac{1}{(2n)!} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{\lambda=1}^{2n-1} (-1)^{\lambda-1} \lambda!\, (2n-\lambda)!\, (n+1)$$

$$= \frac{1}{(2n)!} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{\lambda=1}^{2n-1} (-1)^{\lambda-1} \lambda!\, (2n-\lambda)! \left\{(2n+1-\lambda) - (n-\lambda)\right\}$$

$$= \frac{1}{(2n)!} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \left\{ \sum_{\lambda=1}^{2n-1} (-1)^{\lambda-1} \lambda!\, (2n+1-\lambda)! - \sum_{\lambda=1}^{2n-1} (-1)^{\lambda-1} \lambda!\, (2n-\lambda)!\, (n-\lambda) \right\}$$

$$= \frac{1}{(2n)!} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \left\{ (2n)! + \sum_{\lambda=2}^{2n-1} (-1)^{\lambda-1} \lambda!\, (2n+1-\lambda)! - \sum_{\lambda=1}^{2n-1} (-1)^{\lambda-1} \lambda!\, (2n-\lambda)!\, (n-\lambda) \right\}$$

$$= \frac{1}{(2n)!} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \left\{ (2n)! + 0 - 0 \right\} = \frac{1}{n+1}.$$

Denn in jeder der beiden Summen der vorletzten Zeile heben sich je zwei von der Mitte gleichweit entfernte Glieder heraus, und in der zweiten Summe ist das Mittelglied Null.

2. Die Aufgabe lautet:

Bedeutet das arithmetische Symbol $(a, b) = 1$ wie üblich die Teilerfremdheit ganzer, nicht schwindender Zahlen, und sei $\sum' = \sum\limits^{\varkappa\lambda\mu \neq 0}$, so ist

$$\sum_{\pm\infty}^{\substack{(\varkappa,\lambda,\mu)=1 \\ \varkappa+\lambda+\mu=0}} {}_{\varkappa,\lambda,\mu}^{\prime} \frac{1}{\varkappa \cdot \lambda^2 \cdot \mu^3} = -1.$$

Wilhelm Maier.

Lösung:

$$\sum_{\substack{\varkappa+\lambda+\mu=0 \\ (\varkappa,\lambda,\mu)=1 \\ \varkappa\lambda\mu \neq 0}} \frac{1}{\varkappa\lambda^2\mu^3} = \sum_{\lambda=\mu} + \sum_{\lambda\neq\mu}$$

$$= \sum_{\lambda=\mu=\pm 1} \frac{1}{\varkappa\lambda^2\mu^3} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\varkappa+\lambda+\mu=0 \\ (\varkappa,\lambda,\mu)=1 \\ \varkappa\lambda\mu(\lambda-\mu)\neq 0}} \left(\frac{1}{\varkappa\lambda^2\mu^3} + \frac{1}{\varkappa\mu^2\lambda^3}\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \sum_{\cdots} \frac{1}{\varkappa\lambda^2\mu^2} \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda}\right)$$

und dies ist wegen $\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\lambda}=-\frac{\varkappa}{\lambda\mu}$ gleich

$$-1-\frac{1}{2}\sum_{\substack{(\lambda,\mu)=1\\ \lambda\mu(\lambda-\mu)\neq 0}}\frac{1}{\lambda^3\mu^3}=-1-0=-1.$$

3. Die Aufgabe lautet:

Sei $\begin{cases} m=2,3,\ldots\\ \varrho=1,2,\ldots,m\end{cases}$ und komplex beweglich $u_\varrho \not\equiv 0\,(1)$. Dann besteht für $u_1+u_2+\cdots+u_m=0$

$$\sum_{\pm\infty}^{\substack{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m=0\\ \lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_m}}\frac{1}{(\lambda_1-u_1)\cdots(\lambda_m-u_m)}=\frac{(2\pi i)^m}{(1-e^{2\pi i u_1})\ldots(1-e^{2\pi i u_m})}.$$

Wilhelm Maier.

Lösung: Wir verwenden vollständige Induktion.

a) Für $m=2$ ist die Behauptung richtig; denn, wenn u keine ganzrationale Zahl ist, gilt

$$\frac{(2\pi i)^2}{(1-e^{2\pi i u})(1-e^{-2\pi i u})}=-\frac{\pi^2}{(\sin\pi u)^2}=-\sum_\lambda\frac{1}{(u-\lambda)^2}$$
$$=\sum_{\lambda_1+\lambda_2=0}\frac{1}{(\lambda_1-u)(\lambda_2-(-u))},$$

und diese Reihe konvergiert bekanntlich absolut.

Die Summationsbuchstaben λ sollen hier wie im folgenden immer alle ganz-rationalen Zahlen mit den jeweils angegebenen Bedingungen durchlaufen.

b) Hilfssatz: *Ist u eine komplexe Variable und U eine komplexe, nicht ganz-rationale Zahl, so hat die Funktion*

$$\varphi(u,U)=\frac{2\pi i}{(1-e^{2\pi i u})(1-e^{-2\pi i(u-U)})}$$

die Partialbruchzerlegung:

$$\varphi(u,U)=\frac{1}{1-e^{2\pi i U}}\sum_\lambda\left\{\frac{-1}{u-\lambda}+\frac{1}{(u-U)-(\lambda-L)}\right\},$$

und die Summe konvergiert absolut für jedes u, das kein Pol der Funktion φ ist. Dabei bedeutet L eine beliebige ganz-rationale Zahl.

Beweis: Die Konvergenztatsache beweist man nach dem Vorbild des Beweises des Mittag-Lefflerschen Satzes. Aus diesem Satze folgt weiter, daß die Funktion

$$\varphi(u,U)-\frac{1}{1-e^{2\pi i U}}\sum_\lambda\left\{\frac{-1}{u-\lambda}+\frac{1}{(u-U)-(\lambda-L)}\right\}$$

ganz ist. Außerdem hat sie die Periode 1 und, wenn $u=x-iy$ mit reellen x, y gesetzt wird, strebt sie bei $y\longrightarrow\pm\infty$ gleichmäßig in x gegen Null. Folglich ist sie identisch Null. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

c) Um den eigentlichen Induktionsschluß vorzubereiten, wenden wir für $m > 2$ den Hilfssatz an mit

$$u = u_1, \qquad U = -(u_2 + \cdots + u_{m-1}).$$

Dann wird $\quad u - U = u_1 + \cdots + u_{m-1} = -u_m \quad$ und also

$$\frac{2\pi i}{(1-e^{2\pi i u_1})(1-e^{2\pi i u_m})} = \frac{1}{1-e^{2\pi i U}} \sum_{\lambda_1} \frac{L-U}{(\lambda_1 - u_1)((L-\lambda_1)-u_m)}.$$

Somit wird der zu untersuchende Ausdruck

$$\frac{(2\pi i)^m}{(1-e^{2\pi i u_1})\cdots(1-e^{2\pi i u_m})}$$

$$= \frac{(2\pi i)^{m-1}}{(1-e^{2\pi i u_2})\cdots(1-e^{2\pi i u_{m-1}})(1-e^{2\pi i U})} \sum_{\lambda_1} \frac{L-U}{(\lambda_1 - u_1)((L-\lambda_1)-u_m)}.$$

d) Zur Induktion machen wir nun die Annahme, die behauptete Formel sei für $m-1$ Variable bewiesen und die in ihr auftretende Summe sei absolut konvergent. Wegen

$$u_2 + \cdots + u_{m-1} + U = 0$$

haben wir daher $\quad \dfrac{(2\pi i)^m}{(1-e^{2\pi i u_1})\cdots(1-e^{2\pi i u_m})}$

$$= \sum_{\lambda_2+\cdots+\lambda_{m-1}+\Lambda=0} \frac{1}{(\lambda_2-u_2)\cdots(\lambda_{m-1}-u_{m-1})(\Lambda-U)} \cdot \sum_{\lambda_1} \frac{L-U}{(\lambda_1-u_1)((L-\lambda_1)-u_m)}$$

$$= \sum_{\lambda_2+\cdots+\lambda_{m-1}+\Lambda=0} \left\{ \frac{1}{(\lambda_2-u_2)\cdots(\lambda_{m-1}-u_{m-1})(\Lambda-U)} \cdot \sum_{\lambda_1} \frac{L-U}{(\lambda_1-u_1)((L-\lambda_1)-u_m)} \right\}.$$

Wir verfügen jetzt über die bisher willkürliche Zahl L, indem wir sie jedesmal gleich dem betreffenden Λ setzen, und schreiben dem Wortlaut der Aufgabe entsprechend

$$\lambda_m \quad \text{für} \quad L - \lambda_1 = \Lambda - \lambda_1 = -(\lambda_1 + \cdots + \lambda_{m-1}).$$

Dann kommt

$$\frac{(2\pi i)^m}{(1-e^{2\pi i u_1})\cdots(1-e^{2\pi i u_m})} = \sum_{\lambda_2,\ldots,\lambda_{m-1}} \left\{ \sum_{\lambda_1} \frac{1}{(\lambda_1-u_1)\cdots(\lambda_m-u_m)} \right\}.$$

Wegen der absoluten Konvergenz der nach dem Hilfssatz angesetzten $\sum_{\lambda_1}$ und der nach der Induktionsannahme bestehenden absoluten Konvergenz der $\sum_{\lambda_2+\cdots+\lambda_{m-1}+\Lambda=0}$ darf in der erhaltenen Formel statt $\sum_{\lambda_2,\ldots,\lambda_{m-1}} \left\{ \sum_{\lambda_1} \ldots \right\}$ auch $\sum_{\lambda_1+\cdots+\lambda_m=0} \ldots$ geschrieben werden, und diese Summe ist wieder absolut konvergent. Damit ist die behauptete Formel durch vollständige Induktion bewiesen.

E. Bessel-Hagen und H. Hasse.

(Eingegangen am 19. 10. 27.)

Lösungen legten auch der Aufgabensteller, K. Narischkina, W. Rogosinski und F. Gruber vor. Vgl. auch W. Maier, „Euler-Bernoullische Reihen", M. Z. 1928, demnächst erscheinend.

Mitteilungen und Nachrichten.

Geeignete Mitteilungen nimmt der Herausgeber stets mit größtem Danke entgegen.

Akademien. Gesellschaften. Vereinigungen. Versammlungen.

Berliner Mathematische Gesellschaft. *2. Februar 1927.* A. Hammerstein, Über eine direkte Methode der Variationsrechnung. L. Bieberbach, Über das Tschebychefsche Bekleidungsproblem. — *2. März 1927.* A. Korn, Die Heavisidesche Methode zur Integration der Telegraphengleichung. (Bericht.) R. Rothe, Über den Mittelwertsatz und die Taylorsche Formel. — *30. März 1927.* G. Hamel, Über eine Anwendung der elementaren Zahlentheorie auf die Theorie eines Chiffrierapparates. E. Hopf, Eine Bemerkung zur Theorie der partiellen Differentialgleichung vom elliptischen Typus. — *27. April 1927.* E. Jacobsthal, Über den Vitalischen Satz. G. Haenzel, Zur synthetischen Theorie der Mechanik starrer Körper. — *25. Mai 1927.* I. Schur, Gauß als Mathematiker. A. Kopff, Gauß als Astronom und Geodät. A. Schmidt, Gauß als Physiker. — *22. Juni 1927.* A. Hammerstein, Über die Restabschätzung des Ritzschen Verfahrens bei gewissen Variationsproblemen mit Nebenbedingungen. L. Bieberbach, Eine Bemerkung zur Flächentheorie. — *26. Oktober 1927.* R. Rothe, Bemerkungen über wiederholte Quadraturen. — *30. November 1927.* P. E. Böhmer (Dresden), Monotone, ebene Streckenzüge (mit funktionentheoretischen Anwendungen). — *14. Dezember 1927.* Haenzel, Die ganzen rationalen Funktionen n-ter Ordnung in ihrer Beziehung zur Polarentheorie der algebraischen Kurven n-ter Klasse (mit Benutzung eines hinterlassenen Entwurfes von S. Schicht). v. Bortkiewicz, Über ein statistisches Disparitätsmaß.

Schwäbisches Kolloquium (von den Mathematikern der Universität Tübingen und der Technischen Hochschule Stuttgart gemeinsam veranstaltet, Tagungsort abwechselnd Stuttgart und Tübingen). *4. Dezember 1926.* Doetsch, Über eine neue Methode bei partiellen Differentialgleichungen, insbesondere über die Gleichung der elektrischen Schwingungen. — *19. Februar 1927.* Knopp, Funktionaldeterminanten und Abhängigkeit von Funktionen. — *25. Juni 1927.* Mehmke, Neue Lösung einer viel behandelten geometrischen Minimumaufgabe. — *9. Juli 1927.* Kamke, Zur Theorie der Differentialgleichungen.

Mathematisches Kränzchen in Prag. *22. Oktober, 12., 19., 26. November 1926.* Frank, Über die Schrödingersche Wellenmechanik. — *3. Dezember 1926.* Fürth, 1. Über ein Problem der Diffusion im Schwerefelde. 2. Anwendung der Fehlerrechnung auf ein Problem unsymmetrischer Verteilung. — *10. Dezember 1926.* Carnap (Wien), Über die topologische Struktur des Raum-Zeit-Kontinuums. — *28. Januar 1927.* Frank, Optische Deutung der Carathéodoryschen Methode der Variationsrechnung. — *4. Februar 1927.* Pick, Konforme Äquivalenz von Funktionen zweier Veränderlichen. — *4. und 18. März 1927.* Berwald, Über die Arbeiten von G. Kowalewski zur natürlichen Geometrie ebener Transformationsgruppen. — *6. Mai 1927.* Winternitz, Ziele der mathematischen Grundlagenforschung. — *20. Mai 1927.* Winternitz, Bemerkungen zu Brouwers intuitionistischer

Mathematik. — *27. Mai 1927.* Pick, Über die Absolutbeträge der Wurzeln algebraischer Gleichungen.

Mathematische Gesellschaft Göttingen. *3. Mai 1927.* Ferienbericht. — *18. Mai 1927.* v. Neumann, Über die Analytizität kontinuierlicher Gruppen. Hoppe, Über die Feier von Gauß' 100. Geburtstag. — *17. Mai 1927.* van der Waerden, Literaturbericht. — *24. Mai 1927.* Alexandroff, Über das anschauliche Wesen allgemein-topologischer Gebilde. — *31. Mai 1927.* v. Neumann, Eigenwerttheorie symmetrischer Operatoren. — *14. Juni 1927.* Lewy, Literaturbericht. Friedrichs, Über die Hadamardsche und die Riemannsche Methode zur Lösung linearer hyperbolischer Differentialgleichungen. — *21. Juni 1927.* Bernstein, Ein Beispiel zur Bifurkationstheorie von Poincaré. Cohn-Vossen, Abbildung mit umgekehrter Indikatrix und Starrheit der Eiflächen. — *28. Juni 1927.* Schouten (Delft), Über Geometrie der kontinuierlichen Gruppen. — *5. Juli 1927.* E. Hille (Princeton), Nullstellenprobleme bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung. — *12. Juli 1927.* R. Schmidt (Kiel), Der Problemkreis des Fischer-Rieszschen Satzes in der Theorie der fastperiodischen Funktionen. Pfeiffer (Kiew), Partielle Differentialgleichungen und Liesche Theorie. — *19. Juli 1927.* O. Schmidt (Moskau), Über unendliche Gruppen mit endlicher Kette. Cohn-Vossen, Bemerkung zum theorema egregium der Flächentheorie. — *26. Juli 1927.* v. d. Waerden, Neue Begründung der Idealtheorie in Zahlkörpern. Sintzoff (Kiew), Flächentheorie und Pfaffsche Gleichung.

Mathematisches Kolloquium an der Technischen Hochschule Stuttgart. *23. Juni 1927.* Härlen, Über Vollständigkeit und Entscheidbarkeit. — *7. u. 14. Juli 1927.* Lösch, Eigenwertstheorie der linearen Integralgleichung mit symmetrischem Kern. — *21. Juli 1927.* Mehmke, Beiträge zur praktischen Analysis.

Mathematisches Kolloquium an der Universität Freiburg i. B. Sommersemester 1927. *10. Mai.* W. Krull, Idealtheorie im Körper aller algebraischen Zahlen. — *17. Mai.* K. Weber, Kettenbrüche und quadratische Formen. — *24. Mai.* H. Kapferer, Neuer Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes. — *31. Mai.* E. Zermelo, Über das Lebesguesche Maß. — *28. Juni.* W. Krull, Zur Theorie der Potenzreihen in zwei Variablen. — *5. Juli.* O. Becker, Sachliche und symbolische Mathematik. — Die altbekannte „axiomatische Methode" ist in der neueren Mathematik vor allem im „relativen" Sinne üblich, d. h. eine bestimmte Disziplin besteht aus Sätzen, deren Wahrheit relativ ist in bezug auf die der zugrunde gelegten Axiome. Indessen muß es gewisse „absolut" geltende Grunddisziplinen geben, die der Mechanismus der Deduktion selbst notwendig voraussetzt, wie formale Logik, Kombinatorik, elementare Mengen- und Zahlenlehre u. dgl. Diese Grunddisziplinen sind nicht ihrerseits einer deduktiven Begründung fähig, sondern beruhen auf intuitiv evidenten Axiomen. Dies ist „sachliche" Mathematik, von Hilbert „Metamathematik" genannt. Die darauf von Hilbert gegründete „formale" Mathematik besteht z. T. aus „idealen Aussagen", die des sachlichen Sinnes entbehren („transfinite Axiome" usw.). Trotzdem fordert Hilbert ihre „Widerspruchsfreiheit", die also innerhalb des puren „Formelspiels" einen Sinn haben muß. Dieser ist darin zu suchen, daß, da aus einem falschen (also a fortiori einem widerspruchsvollen) Satz *alle* Aussagen folgen, nach einem erreichten

Widerspruch die Auszeichnung beweisbarer Theoreme vor unbeweisbaren verschwände und damit das Formelspiel jedes Motiv (auch *als* Spiel) verlöre. — Widerspruchsfreiheit macht also das Formelspiel als solches zwar möglich, gibt ihm aber keinen tieferen „symbolischen" Sinn. Einen solchen will Hilbert in der harmonischen Ergänzung der „intuitiven" Mathematik durch die „transfinite" sehen. Indessen erscheint sein Vergleich seines Transfiniten mit dem Imaginären usw. verfehlt; Gauß wies nach, daß die imaginären Zahlen als „laterale" „der anschaulichsten Versinnlichung fähig" sind, während dies für die „idealen" transfiniten Aussagen Hilberts prinzipiell unmöglich ist. Das weist ihnen in ontologischer Hinsicht eine fundamental andere Stellung an als den imaginären Zahlen, idealen Punkten u. dgl. — Von Interesse ist weiterhin die Frage der Tragweite einer intuitiven Grundlegung der Mathematik, nicht nur aus philosophischen, sondern auch aus rein mathematischen Gründen. Denn nach den Sätzen von Loewenheim und Skolem kann eine übliche „finite" axiomatische Theorie das Gebiet des Abzählbaren nicht überschreiten. (Die „nicht abzählbaren" Mengen der axiomatischen Mengenlehre sind dies nur im „relativen" Sinn: Skolem, v. Neumann.) Die heute üblichen Konstruktionsarten reichen ebenfalls nicht über das („absolut") Abzählbare hinaus. Hier gewinnt das Grundproblem der „speziellen" Theorie der transfiniten Ordnungszahlen, ihre eindeutige konstruktive Kennzeichnung, eine zentrale Bedeutung, nämlich als Prototyp einer über das Abzählbare „absolut" hinausführenden Konstruktion. Das Problem einer solchen „selbsttranszendierenden" Urkonstruktion hat zwei Teile: Es ist 1. die „Offenheit", 2. die (Hausdorffsche) „Transzendenz" nachzuweisen. (1. der Fortschritt zu immer größeren Transfiniten, 2. die Erreichbarkeit *jeder* Zahl der zweiten Zahlklasse.) Die Hauptschwierigkeit des Beweises liegt in dem Fehlen einer independenten Definition der Transfiniten, wie sie für die natürlichen Zahlen im dekadischen System u. ä. vorliegt. Im finiten Gebiet kann man die „Transzendenz" einer Konstruktion leicht dadurch zeigen, daß man nachweist, daß sie nicht gegen einen endlichen Limes konvergiert. Im Transfiniten besteht aber stets die Gefahr der möglichen Überflügelung einer vorliegenden Konstruktion durch eine noch unbekannte, „weiter" reichende. Man könnte diese Schwierigkeit überwinden, wenn man die Erscheinung der Überflügelung auf das Finite abbilden könnte; dies erscheint möglich durch „isosymbolische" Abbildung. D. h.: Da jede Transfinite II. Klasse eine Funktion von ω nebst einer endlichen Anzahl von endlichen Parametern ist, so kann man ihr eine finite Zahl so zuordnen: ω wird durch die endliche Grundzahl g ersetzt und die Parameter, falls $< g$, durch sich selbst, falls $\geqq g$ durch $g - 1$. So kann man hoffen, durch die Analogie zum Finiten die „Transzendenz" einer transfiniten Konstruktion zu beweisen. (Der Beweis würde versagen, wenn es gänzlich unvergleichbare Konstruktionen und damit auch ebensolche Transfinite gäbe. Dies ist indessen schon aus dem Grunde sehr unwahrscheinlich, weil alle transfiniten Konstruktionen von denselben Konstruktionsmitteln der Addition, der Iteration und der Durchschnitts-(Diagonal-)bildung Gebrauch machen.) — *12. Juli.* W. Krull, Topologie der Potenzreihen. — *19. Juli*[1]. F. J. Feinler (Euclid, Ohio, U.S.A.), Über Bernoullische Zahlen. — *25. Juli.* H. Weyl[1] (Zürich), Bestimmung der Charaktere kontinuierlicher Gruppen.

---

1) Gemeinsam mit der Mathematischen Gesellschaft.

Mathematisches Kolloquium an der Universität Königsberg.

Wintersemester 1925/26. *14. Nov.* K. Knopp, Mengentheoretische Behandlung einiger Probleme der diophantischen Approximationen und der transfiniten Wahrscheinlichkeiten. — *21. Nov.* R. Brauer, Bericht über Gruppen linearer Substitutionen. — *28. Nov.* R. Brauer, Über die Darstellung der Drehungsgruppe durch Gruppen linearer Substitutionen. — *12. Dez.* K. Reidemeister, Knoten und Gruppen. — *19. Dez.* Th. Kaluza, Über große Primzahlen.

Sommersemester 1926. *29.* u. *30. April, 1. Mai.* O. Schreier (Hamburg), Bericht über die Weylsche Darstellungstheorie der halbeinfachen Gruppen. — *8.* u. *15. Mai.* W. Rogosinski, Bericht über die Arbeiten: W. A. Hurwitz und L. L. Silverman, On the consistency and equivalence of certain definitions of summability; Trans. of the Am. Math. Soc. 18 (1917); und L. Silverman, On the consistency and equivalence of certain generalized definitions of the limit of a function of a continuous variable; Ann. of Math. 21 (1919). — *22.* u. *26. Mai.* K. Reidemeister, Knoten und Gruppen. — *5. Juni.* A. Brauer (Berlin), Über kubische diophantische Gleichungen. — *12. Juni.* Th. Kaluza, Über vollmonotone Funktionen. — *26. Juni.* R. Brauer, Arithmetische Untersuchungen über Gruppen. — *3.* u. *10. Juli.* Th. Kaluza und W. Rogosinski, Bericht über die Arbeit von F. Hausdorff, Summationsmethoden und Momentfolgen; Math. Zeitschr. (1921).

Wintersemester 1926/27. *6. Nov.* G. Szegö, Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. (Es handelt sich um die Ergebnisse der Note in den Math. Ann. Bd. 96 (1926), S. 378—382. Darüber hinaus wird noch einiges über die „Poissonsche Summation“ der Fourierentwicklung einer fastperiodischen Funktion bemerkt.) — *20. Nov.* Th. Kaluza, Bericht über angenäherte Lösung von $\Delta u = 0$. — *4. Dez.* W. Fr. Meyer, Über einige geometrische Konfigurationen. — *11. Dez.* W. Rogosinski, Über beschränkte Potenzreihen. — *15. Jan.* G. Szegö, 1. Referat über verschiedene Beweise des Koebeschen Verzerrungssatzes. 2. Referat über einen neuen Beweis des Herrn G. Pólya für die Funktionalgleichung der Thetafunktion $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-n^2 x)$. (Inzwischen erschienen in den Sitzungsberichten der preußischen Akademie 1927.) — *22. Jan.* W. Fr. Meyer, Formentheoretisches mit geometrischen Anwendungen. — *12. Febr.* W. Neumann, Bericht über Interpolationsreihen.

Sommersemester 1927. *23., 25.* u. *26. April.* H. Behnke, Analytische Funktionen von mehreren Veränderlichen. — *14. Mai.* K. Reidemeister, Axiome der zweigliedrigen Gruppen. — *21. Mai.* R. Brauer, Über hyperkomplexe Zahlen. — *9., 10.* u. *11. Juni.* J. von Neumann, Über die Grundlagen der Mathematik. — *11. Juli.* A. Walfisz, Bericht über neuere Ergebnisse der Gitterpunktstheorie. — *18. Juli.* Th. Kaluza, Über Darstellung von Funktionen durch absolut konvergente Dirichletsche Reihen.

Preisaufgaben und gekrönte Preisschriften.

Mathematischer Preis des Königs von Schweden. Das Ergebnis des Internationalen Mathematischen Preisausschreibens, das S. M. König Gustav V. im Jahre 1913 als Protektor des geplant gewesenen, infolge des Krieges jedoch nicht zustande gekommenen Internationalen Mathematikerkongresses zu

Stockholm erlassen hatte, wird erst jetzt mit dem Erscheinen der Preisschrift im 50. Bande der Acta Mathematica bekannt. Vom König preisgekrönt wurde die Abhandlung „Allgemeine Theorie der Riemannschen Mannigfaltigkeiten (konforme Abbildung und Uniformisierung)“ von Professor Paul Koebe, Leipzig. Die Preiskommission wurde von den fachzuständigen Mitgliedern der schwedischen Akademie der Wissenschaften gebildet.

Literarisches.

Besprechungen.

F. Klein, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im neunzehnten Jahrhundert. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Band XXIV.) Band I (1926). Für den Druck bearbeitet von R. Courant und O. Neugebauer. Geh. *RM* 21.—; geb. *RM* 22.50.

Die Geschichte der Mathematik ist in den Kreisen der produktiven Mathematiker unbeliebt; nicht, als ob Kenntnisse auf diesem Gebiete so sehr Allgemeingut wären, daß sich eine nähere Befassung mit dem Gegenstand erübrigte. Es ist wohl mehr die Abneigung des produzierenden Grüblers gegen eine disziplinierte Tätigkeit und die damit verbundene Unart, sich nur für den Gegenstand des eigenen Grübelns zu interessieren. So existierte über die Geschichte des neunzehnten Jahrhunderts meiner Kenntnis nach bisher fast nichts. Um so mehr ist es zu begrüßen, daß ein Mann vom Range Kleins es trotz des allgemeinen Vorurteils gewagt hat, die reiche Erfahrung seines langen wissenschaftlichen Lebens in den Dienst einer Sache zu stellen, deren Wichtigkeit für den Hochschulunterricht so vielfach unterschätzt wird. Ich denke dabei vornehmlich an die Ausbildung der Studienräte und an die Belebung des mathematischen Schulunterrichtes; hier bietet sich eine Möglichkeit, die zwischen Schule und Wissenschaft bestehende Diskontinuität zu verringern.

Kleins Darstellung ist eine Sammlung von Fragmenten, von Einzelbildern aus der Geschichte. Gauß, die École polytechnique und ihre Gelehrten anfangs des neunzehnten Jahrhunderts, das Crellesche Journal und seine Autoren, die Weiterentwicklung der algebraischen Geometrie über Plücker und Steiner, Mechanik und mathematische Physik bis 1850, die Funktionentheorie bei Riemann und Weierstraß, und die Weiterentwicklung namentlich der Theorie der algebraischen Gebilde, das sind die Gegenstände, die in den einzelnen Kapiteln behandelt werden.

Überall wechselt die Schilderung des Wachsens der Wissenschaft, der beherrschenden Gedanken, mit der Darlegung mehr persönlicher Eindrücke ab. Es ist eine geschichtliche Darstellung, die auf die leitenden gedanklichen Hintergründe das Hauptgewicht legt, für die die Geschichte der Einzelfragen nur ein Mittel ist, die leitenden Gedanken hervortreten zu lassen.

Daß dabei den Dingen, die Klein für anschaulich hält, der Vorzug gegeben wird gegenüber vielen anderen abstrakteren, die Klein für unanschaulicher hält, versteht sich von selbst. Darin liegt der schon erwähnte fragmentarische Charakter des Ganzen. Die Abneigung gegen solche Dinge führte hie und da zu weniger sorgfältiger Darstellung. So muß Seite 56 der Eindruck

entstehen, als hätte Bolzano bereits den Begriff der reellen Zahl besessen. Im Gegenteil ist es doch gerade interessant, zu sehen, mit welchem „Salto mortale“ der Logik dieser Priester diese Lücke seiner Deduktion überwindet. Daß auch Cauchy dieser Begriff fehlt, hätte Seite 84 Erwähnung verdient. Dort ist von gleichmäßiger Konvergenz die Rede, ohne daß der Mann genannt würde, der zuerst etwas darüber veröffentlicht hat: Philipp Ludwig Seidel 1847.

Historische Feststellungen, die wie mir scheint, von besonderem Interesse sind, werden manchmal zwischen den Zeilen gemacht. So ist mir der geringe Nachdruck aufgefallen, der Seite 98 auf die Feststellung gelegt wird, daß Dirichlet als erster eine Form des Existenzbeweises angewandt hat, die auf die direkte Herstellung der fraglichen Gebilde oder die Angabe einer Methode zu ihrer Herstellung verzichtet. Hier scheint mir etwas durchaus Wesentliches für die Charakterisierung der modernen Mathematik zu liegen; ich halte es für eine ersprießliche Aufgabe der Geschichtsforschung, diese Frage weiter zu klären. Ich sage: „Weiter zu klären“; denn weder ist der Begriff des hier gemeinten Existenzbeweises klar umrissen, noch ist untersucht, ob nicht schon vor Dirichlet sich ähnliches findet.

Diese Beispiele mögen genügen; sie lehren einmal, wie anregend das Buch auch zwischen den Zeilen ist. Sie mögen andererseits lehren, daß nur ein aufmerksamer, sorgfältiger Leser den vollen Gehalt und jegliche Anregung dieses einzigartigen Buches wird ausschöpfen können. Möchte es ein Signal sein, daß die Geschichte des neunzehnten Jahrhunderts endlich so sorgsame Bearbeiter finden möchte, wie die vorausgehenden Jahrhunderte. Es läßt sich ja denken, daß mit dem weiteren Fluß der Jahre manche Quelle verschüttet wird, die heute noch frisches Wasser spenden könnte. BIEBERBACH.

C. F. Gauß und die Seinen. Festschrift zu seinem 150. Geburtstage, herausgegeben von Heinrich Mack. Mit 12 Tafeln. Braunschweig 1927, E. Appelhans & Co.

Die Schrift bringt den Abdruck einer Reihe von Briefen, die in hochinteressanter Weise die so sympathische Persönlichkeit des großen Mannes beleuchten. Es wird sicherlich allen Mathematikern höchst willkommen sein, sich an Hand der taktvollen Briefauswahl ein Bild zu machen, wie sich Gauß im Umkreis seiner Familie und im Rahmen der Zeitläufte bewegte. Es war ja eine höchst stürmische Zeit, in die sein Leben fiel. Zahlreiche Anmerkungen verweisen auf Stellen, wo bisher sonstige Briefe aus dem Kreise des Gaußschen Privatlebens veröffentlicht sind. Die mit peinlichster Sorgfalt gesammelten Nachweise erhöhen den Wert der Schrift. Einen besonderen Reiz empfängt sie durch die beigegebenen Porträttafeln und durch eine Nachfahrentafel der Gaußschen Familie. BIEBERBACH.

Die Kegelschnitte des Apollonios. Übersetzt von Dr. Arthur Czwalina. 220 S. 8°. München und Berlin 1926, R. Oldenburg. *RM* 10.—.

Es ist sehr zu begrüßen, daß hiermit eines der bedeutendsten mathematischen Werke des griechischen Altertums, ein Werk, das geradezu den Abschluß der klassischen Periode der griechischen Mathematik bedeutet, in leicht zugänglicher, bequem lesbarer und sorgfältiger, deutscher Übersetzung

vorliegt. Eine Reihe von erläuternden Anmerkungen erleichtern die Lektüre an manchen Stellen.

Allerdings sind hier von den 8 Büchern der „Kegelschnitte des Apollonios" (von denen uns bekanntlich 7 überliefert sind) nur die ersten 4 Bücher übersetzt worden, nämlich diejenigen, die allein uns in griechischer Sprache erhalten sind und die übrigens gerade die grundlegenden Teile der Theorie behandeln, gegenüber den (nach Apollonios' eigenen Worten) „weitergehenden Überlegungen" der späteren Bücher. Aber es wäre doch sehr dankenswert, wenn derselbe Verlag — gewissermaßen als Fortsetzung — auch eine neue Übersetzung der 3 folgenden, uns arabisch überlieferten Bücher veranlassen würde.

Im Vorwort sagt der Übersetzer: „Es fällt auf, daß, während die ersten drei Bücher mit großer Sorgfalt gearbeitet sind, im vierten Buch manche groben Fahrlässigkeiten enthalten sind. Hier ist augenscheinlich nicht die letzte Feile angelegt worden." Er denkt dabei wohl vor allem an den Beweis des Satzes IV, 43 (und den ganz analogen von IV, 47), den er — in Übereinstimmung mit einer Bemerkung Heibergs in dessen griechisch-lateinischer Apollonios-Ausgabe — als „völlig verfehlt" bezeichnet. Nach Ansicht des Ref. mit Unrecht. Denn: Nach S. 206, Z. 7/8 v. u. fällt die Verlängerung von EF innerhalb des Winkels AFB. *Deshalb* kann die Gerade EF den Hyperbelast DB nicht treffen (wegen II, 33), muß also wirklich den zugehörigen Hyperbelast CE berühren oder in zwei Punkten schneiden. Ferner: Als Subjekt des Satzes S. 207, Z. 1/2 v. o. ist offenbar die Verlängerung von EF gemeint.

Heidelberg. ARTUR ROSENTHAL.

H. Beck, Einführung in die Axiomatik der Algebra. (Göschens Lehrbücherei Gruppe I, Bd. 6.) X und 198 S. Berlin 1926, W. de Gruyter & Co. *RM* 9.—; geb. *RM* 10.50.

Für die Stoffauswahl der vorliegenden „Einführung in die Axiomatik der Algebra" ist wohl die Entstehung des Buches aus einer Anfängervorlesung des Verf. maßgebend gewesen. Vorlesungen dieser Art, die neuerdings zur Einführung in das Studium der Mathematik an manchen Universitäten regelmäßig gehalten werden, verfolgen einen doppelten Zweck: Es sind einerseits die Grundlagen von einem höheren Niveau aus, als es auf der Schule möglich ist, vorzutragen und andererseits diejenigen Kenntnisse zu vermitteln, die von dem Studierenden der Mathematik und Physik ständig gefordert werden, die aber vom Schulunterricht her nicht vorausgesetzt werden können — also vor allem Kenntnisse in der Theorie der Determinanten und der linearen Gleichungen. Dieser zweifachen Zielsetzung entsprechend zerfällt der Inhalt der vorliegenden Einführung in zwei nur lose miteinander zusammenhängende Teile: Der eine Teil, dessen Inhalt im wesentlichen durch den Titel des Buches charakterisiert ist, bildet Anfang und Schluß (Kap. I—III; XI, XII) des Buches; der andere, sowohl in räumlicher als auch in sachlicher Hinsicht den Kern des Buches (Kap. IV—X) bildende, enthält die Theorie der Matrizen, linearen Gleichungen und Determinanten. Diese beiden Teile sind auch in ihrem Niveau voneinander verschieden: Während der letztere von dem Verf. verhältnismäßig weit, auch bis zu feineren Untersuchungen fortgeführt ist, die man im allgemeinen nicht sämtlich in einer Anfängervorlesung vorzutragen braucht oder wagt, muß das Niveau der axiomatischen Kapitel auch für Anfänger eher für zu primitiv als für zu schwierig erachtet werden.

Was zunächst die Kap. IV—X (Matrizes, Vektoren, Lineare Gleichungen, Lineare Vektorgebilde, Bilineare und quadratische Formen, Proportionalität der Matrizes, Determinanten) betrifft, so sind sie vor den bekannten Darstellungen der Theorie der linearen Gleichungen und der Determinanten dadurch ausgezeichnet, daß der Matrizenkalkül an die Spitze und die Determinantentheorie an das Ende gestellt wird. Diese Anordnung gewährt einen guten Einblick in die wesentlichen Zusammenhänge; vor allem wird die Tatsache ersichtlich, daß die Sätze über die Lösbarkeit und über die Gesamtheit der Lösungen eines Systems linearer Gleichungen sich ohne Benutzung von Determinanten herleiten lassen und daß die Determinantentheorie nur das Mittel zur rechnerischen Bestimmung der Lösungen liefert. Trotz dieser prinzipiellen Vorzüge können die Kap. IV—X nicht vorbehaltlos anerkannt werden: Den in sachlicher Hinsicht bereits von anderer Seite (vgl. die Besprechung des Beckschen Buches durch L. Bieberbach; Deutsche Literaturzeitung 1927, Heft 4, S. 176—178) gegen diese Abschnitte erhobenen Einwendungen muß der Unterzeichnete sich durchaus anschließen. Hinsichtlich der Bezeichnungen sind einige Wünsche zu äußern: Für die aus der Matrix A durch Spiegelung an der Hauptdiagonale entstehende Matrix ist die Bezeichnung „die zu A transponierte Matrix A'" der vom Verf. gebrauchten „zu A konjugierte Matrix $\tilde{A}$" wohl vorzuziehen. Ein System von endlich vielen Zahlen (z. B. die Zeile einer Matrix) wird statt als „Vektor" vielleicht besser als „Zahlenreihe" bezeichnet. Das Wort „Fixpunkt" hat sich — namentlich durch die klassischen Arbeiten L. E. J. Brouwers — so fest in die Mathematik eingebürgert, daß es unzweckmäßig erscheint, dafür ein anderes Wort („Ruhepunkt") zu gebrauchen. Zu erwähnen ist, daß Verf. Summen durchweg in der Einsteinschen Bezeichnung, also ohne Summenzeichen, schreibt.

Die axiomatisch gehaltenen Kap. I—III, X, XI behandeln die folgenden Dinge: Zahlen und Verknüpfungen, Punktmengen, Zahlenpaare, Unabhängigkeit und Widerspruchslosigkeit, Der genetische Aufbau der Algebra. Im Kap. I wird für die reellen Zahlen ein System von Axiomen aufgestellt, das sich an das von Carathéodory in seinen Vorlesungen über reelle Funktionen gegebene anschließt. Obwohl aber ausdrücklich die *reellen* Zahlen gemeint sind, wird das Stetigkeitsaxiom ignoriert. Auch in den späteren Kapiteln findet sich keinerlei Aussage über Stetigkeit, Dichtigkeit oder dergl., und der im Schlußkapitel gegebene genetische Aufbau der Algebra macht leider bei der Einführung der rationalen Zahlen halt. Auf eine Stelle in Kap. I, die zwar ganz nebensächlicher Natur ist, aber doch mißverstanden werden könnte, muß noch hingewiesen werden: In § 3 wird als Beispiel für eine kommutative (wofür besser „symmetrische" gesagt würde) und transitive Beziehung u. a. die Beziehung der Perspektivität genannt. Wird unter Perspektivität, wie wohl allgemein üblich, eine solche Abbildung der Geraden g auf die Gerade g' verstanden, die durch eine *einzige* Zentralprojektion hergestellt wird, so ist diese Beziehung allerdings *nicht* transitiv, da zwei hintereinander ausgeführte Zentralprojektionen (von g auf g' aus einem Zentrum S und von g' auf g'' aus einem Zentrum S') im allgemeinen nicht durch eine einzige Zentralprojektion (von g auf g'') ersetzt werden können. Entgegen dem Sprachgebrauch ist daher unter Perspektivität hier wahrscheinlich die projektive, also durch *endlich viele* Zentralprojektionen bewirkte Abbildung von g auf g' verstanden, die in der Tat transitiv ist.

Das den Punktmengen gewidmete Kapitel II ist wohl in erster Linie in der Absicht eingeschaltet worden, ein Beispiel von Gebilden zu geben, die denselben Axiomen wie die Zahlen, oder wenigstens einigen von ihnen, genügen, und ist daher im Aufbau des Werkes nur von untergeordneter Bedeutung. Dennoch kann der folgende Passus nicht ohne Bemerkung hingenommen werden: „Als solche wählen wir die Punktmengen in der Ebene. Vor der Definition einer solchen Punktmenge hüten wir uns. Wir geben statt dessen Beispiele. Gemeint sind alle Punkte im Innern und auf dem Rande einer geschlossenen Figur.“ Nach der Meinung des Unterzeichneten wäre die klassische Cantorsche Mengendefinition gegenüber dieser sehr vagen, einem allzu naiven Vertrauen auf die Anschauung Vorschub leistenden Aussage, bei der es übrigens vom Standpunkt der Topologie aus gar nicht selbstverständlich wäre, ob der Durchschnitt zweier Mengen überhaupt wieder eine Menge ist, wesentlich vorzuziehen gewesen. Aus demselben Grunde scheint es dem Unterzeichneten vom pädagogischen Standpunkt aus nicht unbedenklich, wenn bei dem distributiven Gesetz für die Bildung der Vereinigungsmenge und des Durchschnitts statt des den Anfänger in der Abstraktionsfähigkeit schulenden Beweises nur eine Veranschaulichung durch eine Figur gegeben wird. Daß eine Anordnung zwischen je zwei Mengen durch die Beziehung des Enthaltenseins nicht hergestellt werden kann, wird auseinandergesetzt. Daß es aber der Mengenlehre auf anderem Wege gelungen ist, eine solche Beziehung zwischen je zwei Mengen herzustellen, wird leider nicht erwähnt; allerdings hätte Verf. alsdann die in § 52 und später gebrauchte veraltete Ausdrucksweise „Ein System homogener linearer Gleichungen vom Range r in n Unbekannten hat ∞^{n-r} Lösungen“ wohl aufgeben müssen.

In Kap. XI werden die Begriffe Gruppe und Körper axiomatisch eingeführt. Unter den für diese Begriffe genannten Beispielen fehlen leider zwei besonders wichtige: Die linearen Substitutionen mit von Null verschiedener Determinante einerseits, die rationalen Zahlen andererseits.

Der genetische Aufbau der Arithmetik (Kap. XII) wird durch die Peanoschen Axiome für die natürlichen Zahlen eingeleitet. Diesen Axiomen folgt sofort der folgende Passus: „Sind diese Axiome erfüllt, so nennen wir die Elemente natürliche Zahlen (das System 1, 3, 5, 7, ... erfüllt die Axiome ebenfalls, ebenso das System 1, 3, 6, 9, 12 usw.; wir haben in Wirklichkeit nur eine wohlgeordnete unendliche Menge vor uns).“ Dieser Passus kann vielleicht zu Mißverständnissen Anlaß geben. Abgesehen davon, daß an keiner Stelle eine Definition der wohlgeordneten Menge gegeben wird, fehlt auch eine Bemerkung darüber, ob in einer den Peanoschen Axiomen genügenden Menge jedes Element mit Ausnahme des ersten auch ein unmittelbar vorangehendes Element besitzt, eine Eigenschaft, die der Menge der natürlichen Zahlen, aber nicht jeder unendlichen wohlgeordneten Menge zukommt.

Berlin-Lankwitz. FEIGL.

A. Speiser, Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung. 2. Aufl. 251 S. Berlin 1927, Julius Springer.

Die zweite Auflage dieses Werkes weist gegenüber der ersten wesentliche Änderungen und Zusätze auf, wie schon äußerlich der von 194 auf 251 Seiten gewachsene Umfang des Buches beweist, und wir dürfen wohl gleich unser

Gesamturteil vorwegnehmen, daß durch diese Umarbeitung das Werk wesentlich gewonnen hat.

Gleich im Eingang begegnen uns zwei neue Abschnitte über die „Vorgeschichte der Gruppentheorie“ und die „Ableitung des Gruppenbegriffs aus den Permutationen“. Der erste zeigt die große Lebensnähe dieser scheinbar so abstrakt-weltfernen Disziplin, indem er die enge Verknüpfung aufweist zwischen der Gruppentheorie und dem uralten Problem der Bewegungen und Spiegelungen der regulären Figuren in sich selbst. Dabei ergeben sich interessante, bisher kaum berücksichtigte Perspektiven für die Geschichte der höheren Mathematik, deren Anfänge sich bis 1500 v. Chr. zurückverfolgen lassen. Der zweite bringt als Überleitung zum eigentlichen Thema die Herleitung des Begriffs der Permutationsgruppe aus dem allgemeineren des Gruppoids von H. Brandt an zweckmäßig gewählten, auch an sich interessanten Beispielen.

Bei der Umarbeitung des Werkes merkt man das erfolgreiche Bestreben des Verfassers heraus, die Darstellung durch übersichtlichere Anordnung, durch Ansetzen der Feile im kleinen wie im großen dem Leser möglichst zu erleichtern und wirksamer zu gestalten. So ist jetzt der Bedeutung der zyklischen Gruppen dadurch Rechnung getragen, daß ihnen ein besonderer Paragraph eingeräumt worden ist.

Ganz umgeschrieben ist die Theorie der Abelschen Gruppen. Durch eine etwas weitere Definition der Basis gelingt es, die Beziehungen zwischen den verschiedenen Basen und den Invarianten der Gruppe klar herauszuarbeiten. Sehr erwünscht ist auch die Vervollständigung der Theorie der Galoisfelder durch einen Paragraphen über ihr Existenzproblem.

Vollständig neu hinzugekommen ist das interessante Kapitel 6 über die Symmetrie der Ornamente. Auf der Basis der Theorie der Ebenensymmetrien, der ebenen Gitter wird eine Theorie der Ornamente, und zwar der Streifen- und Flächenornamente errichtet. Die Darstellung wird begleitet von bei aller Schlichtheit eindrucksvollen Skizzen, vor allem aber belebt durch ausgezeichnete, auf Kunstdruckpapier ausgeführte Illustrationsbeispiele aus der orientalischen, insbesondere der ägyptischen Kunst, denen man nur noch die Farbe zu wünschen braucht. Das Kapitel wird wirkungsvoll abgeschlossen durch einen Paragraphen über die Bewegungsgruppen der Ebene mit endlichem Fundamentalbereich.

Besonders hervorzuheben ist dann noch die Umarbeitung des früheren 10., jetzt 11. Kapitels, das in die Theorie der Substitutionsgruppen einführt. Durch die klare Herausarbeitung der wichtigen Rolle der identischen Darstellung und der invarianten Formen ist das Eindringen in dieses weite Gebiet erheblich erleichtert worden. Gerade diese wohlgelungene Umarbeitung erweckt aber vielleicht auch den Wunsch nach einer etwas volleren Behandlung der vielfach etwas skizzenhaften Kapitel 13—15. Die Behauptung auf S. 206, daß beim Übergang zum Klassenkörper das Ideal $\mathfrak{a}$ zum Hauptideal wird, ist doch nur mit Vorsicht aufzustellen; sie ist bewiesen nur für den Fall, daß der absolute Klassenkörper im engeren Sinne relativ zyklisch zum Grundkörper ist, in den übrigen Fällen ist sie Vermutung von Hilbert.

Wir sind gewiß, daß das schöne Werk sich und der Gruppentheorie die alten Freunde erhalten und manche neuen hinzuerwerben wird.

Herbert Rauter.

Kraïtchik, Théorie des nombres. Tome II (Analyse indéterminée du second degré et factorisation). IV und 251 S. gr. 8. Paris 1926, Gauthier-Villars et Cie.

Jeder, der die früheren zahlentheoretischen Bücher des Verfassers kennt (vgl. meine Besprechung in Bd. 33 dieser Zeitschrift, S. *74* ff.), wird das Erscheinen dieses neuen Bandes mit Freude begrüßt haben. Durch den Untertitel wird bereits angedeutet, daß den Hauptgegenstand die Theorie der binären quadratischen Formen, im weitesten Sinne aufgefaßt, ausmacht. Äußerlich ist der Stoff in drei Teile gegliedert, von denen jeder trotz allen Wechselbeziehungen zu den anderen ein geschlossenes Ganzes bildet.

Der erste Teil (S. 1—86) handelt von den regelmäßigen Kettenbrüchen, insbesondere denen der quadratischen Irrationalzahlen, und ihrer Anwendung auf die Auflösung diophantischer Gleichungen zweiten Grades. Im ersten Kapitel werden die allgemeinen Eigenschaften der Kettenbrüche entwickelt und sodann die bei den Kettenbruchentwickelungen quadratischer Irrationalzahlen auftretenden Gesetze erörtert. Leider ist im Streben nach Knappheit ein wenig zu viel des Guten getan, und wer nicht die Theorie bereits kennt, wird sich nur mit großer Mühe zurechtfinden, zumal durch einige kleine Ungenauigkeiten das Verständnis auch noch erschwert wird.

Kapitel II unterbricht den begonnenen Gedankengang und diskutiert in eleganter und alle Fälle umfassender Weise die Auflösung diophantischer Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten. Diese wird nicht (wie bei Gauß, Disqu. arithm., art. 216—221) in allen Fällen nach dem gleichen Schema auf die Darstellung einer ganzen Zahl durch eine binäre quadratische Form zurückgeführt, sondern je nach der individuellen Natur der vorgelegten diophantischen Gleichung wird die Lösungsmethode abgewandelt. Im Falle der „Gitterpunkte auf einer Ellipse“ wird die Ellipse auf Hauptachsen transformiert, wonach nur noch endlich viele Versuche auszuführen sind, um alle Lösungen zu gewinnen. Natürlich wären auch vor der Hauptachsentransformation nur endlich viele Versuche erforderlich gewesen; nach der Transformation wird aber ihre Durchführung leichter und übersichtlicher. Im Falle der Parabel wird die Lösung durch rationale Uniformisierung gewonnen, und im Falle der Hyperbel wird sie auf die Pellsche Gleichung zurückgeführt, die hier in der doppelten Gestalt $t^2 - Au^2 = 1$ bzw. $t^2 + tu - Au^2 = 1$ erscheint.

Kapitel III nimmt den Faden von Kapitel I wieder auf; es werden hier die Kettenbruchentwickelungen der Quadratwurzeln sämtlicher ganzer Zahlen A von 1 bis 1000 untersucht. Sie sind angeordnet nach der Anzahl der Teilnenner, die den symmetrischen Teil der Periode zusammensetzen. Für jede Periodenlänge (von 1 bis zu 17 Gliedern) wird die allgemeine Gestalt der Zahlen A untersucht, die auf sie führen können, und dann werden die Zahlen bis zu 1000 von dieser Gestalt aufgesucht. Für Perioden mit mehr als 17 Gliedern sind die Entwickelungen anscheinend direkt gewonnen. Die längste Periode hat 62 Glieder und gehört zu $\sqrt{919}$. Neu sind diese Entwickelungen nicht, man findet die Kettenbruchentwickelungen von $\sqrt{A}$ für $1 \leq A \leq 1000$ im bekannten Canon Pellianus von C. F. Degen (Kopenhagen 1817), darüber hinaus für $1001 \leq A \leq 1500$ bei C. E. Bickmore (Brit. Assoc. Report 1893, p. 73—120, abgedruckt in A. Cayley, Coll. Math. Pap. XIII, p. 430—467)

und für $1501 \leqq A \leqq 2012$ bei E. E. Whitford (The Pell Equation, New York 1912).[1]) Die Anordnung bei Kraïtchik hat den Nachteil, daß man die Entwickelung einer gegebenen Zahl $\sqrt{A}$, $A \leqq 1000$, nur schwer auffindet. Auch empfinde ich es als störend, daß die äußere Form der Tabellen ohne zwingenden Grund nicht einheitlich ist: Für Perioden mit einer geraden Anzahl von Gliedern im symmetrischen Teile wird meist die volle Periode, einschließlich des Schlußgliedes, außerdem das vorperiodische Glied mitgeteilt, für Perioden mit ungerader Gliederzahl im symmetrischen Teil nur die halbe Periode. Warum? — Das wesentlich kürzere Kapitel IV behandelt die entsprechenden Fragen für die positiven Wurzeln der Gleichungen $x^2 + x - A = 0$, gibt aber die vollständigen Entwickelungen nur bis zu $A = 99$ an.

Kapitel V enthält die vollständige Behandlung der Pellschen Gleichungen $y^2 - Ax^2 = \pm 1$ und $y^2 + yx - Ax^2 = \pm 1$ mit Hilfe der Kettenbruchentwickelungen in üblicher Weise, womit die in Kapitel II vorgetragene Theorie ihren Abschluß gewinnt. Anschließend findet sich eine kurze Diskussion der diophantischen Gleichungen $ay^2 + 2bxy + cy^2 = 1$, $ay^2 + (2b+1)xy + cx^2 = 1$, $x^2 - Ay^2 = \pm D$ $(D^2 < A)$. Lösungstabellen werden diesmal nicht dargeboten, man findet solche in den oben bei den Kettenbruchentwickelungen von $\sqrt{A}$ genannten Veröffentlichungen.

Der zweite, vier kürzere Kapitel umfassende, Teil des Buches (S. 87—120) ist der Theorie der binären quadratischen Formen gewidmet, die in der klassischen von Gauß und Dirichlet herrührenden Fassung ohne neue Gesichtspunkte recht elegant vorgetragen wird. Die Formen werden $ax^2 + bxy + cy^2$ (nicht $ax^2 + 2bxy + cy^2$) geschrieben; es scheint glücklicherweise, daß sich diese vom Standpunkt der Zahlenkörper aus allein brauchbare Schreibweise endlich allgemeine Geltung verschafft. Durch konsequenten Gebrauch abkürzender Benennungen wie „Modulsubstitutionen“, automorphe Substitutionen“ von Anfang an gewinnt die Darstellung an Kürze und Deutlichkeit. Hervorzuheben ist, daß die geometrische Deutung der Reduktion definiter Formen mittels des Fundamentalbereiches der Modulgruppe angegeben wird, ferner die Einteilung in Geschlechter, die aber nicht in der abstrakten Fassung auftritt, die man ihr seit Gauß zu geben gewohnt ist, sondern in engerer Anlehnung an die alten Arbeiten von Lagrange[2]) und Legendre[3]), in denen der Geschlechterbegriff historisch seine Wurzel hat. Einen Beweis der Tatsache, daß jedes Geschlecht gleich viele Klassen enthält, bringt Kraïtchik nicht. Wohl aber folgt als Anwendung, gewissermaßen als Überleitung zum dritten Teile, die Aufzählung der 65 Eulerschen numeri idonei, und ihre Bedeutung für das Problem der Faktorenzerlegung wird hervorgehoben.

Der dritte, umfänglichste (S. 121—235) Teil handelt von dem Lieblingsgegenstande des Verfassers, der Primfaktorenzerlegung großer Zahlen. In der Tat gehört es zu den reizvollsten Aufgaben in der Mathematik, ein einfaches Problem, dessen systematische Lösung „mit endlich vielen Schritten“

1) Errata in diesen Tafeln sind gesammelt von A. Cunningham, Messenger of Mathematics 46, 1917, p. 49—69.

2) Recherches d'arithmétique, 1773 et 1775, Œuvres, t. III, p. 695—795.

3) Recherches d'analyse indéterminée, Histoire de l'Académie Royale des sciences, année 1785, p. 465—559.

trivial, aber in Wirklichkeit infolge der ungeheuren Anzahl der Schritte für Menschen undurchführbar ist, durch Zuhilfenahme tieferer theoretischer Einsichten und Ersinnung feinster Kunstgriffe doch in den Bereich praktischer Lösbarkeit herabzuzwingen. Die Einleitung bildet ein Kapitel über quadratische Reste, in dem nach Rekapitulierung der elementaren Eigenschaften gleich die Aufgabe in Angriff genommen wird, zu einer vorgelegten Zahl, von der man nicht weiß, ob sie Primzahl ist oder nicht, quadratische Reste aufzufinden, und zwar möglichst kleine oder aus kleinen Primfaktoren zusammengesetzte. Die vom Verfasser angegebene Methode steht der ersten Gaußschen nahe (Disqu. arithm. art. 332, I); die Beispiele sind aber sehr knapp dargestellt und werden kaum dazu ausreichen, sich des Verfassers Kunstgriffe anzueignen. Den Abschluß des Kapitels bilden Bemerkungen über den Nutzen, den es gewährt, wenn man von einer Zahl weiß, daß sie durch höchstens zwei verschiedene Primzahlen teilbar ist. Diese Frage wird auch noch später wiederholt gestreift.

Das folgende Kapitel XI enthält eine kurze Darstellung der auf der Umkehrung des Fermatschen Satzes und auf den Eigenschaften der rekurrenten Zahlenreihen zweiter Ordnung beruhenden Zerlegungsmethoden.

Im XII. und XV. Kapitel — warum diese räumliche Trennung? — wird die Gleichung $x^2 - y^2 = N$ behandelt, die schon im ersten Bande eine bedeutende Rolle spielte, und zwar im zwölften unter dem Gesichtspunkt, zur Aussiebung arithmetische Progressionen aufzustellen, denen x angehören muß, während im fünfzehnten die für x und y anzunehmenden Grenzen diskutiert werden. An beiden Stellen werden mehrere feinere Kunstgriffe mitgeteilt, und es wird reiches Zahlenmaterial in Tafeln und Beispielen geboten. Kapitel XIII überträgt die eben besprochenen Fragestellungen auf die Gleichung $x^2 + Dy^2 = N$. Außerdem werden einige direkte Lösungsmethoden für diese Gleichung angegeben, unter denen die mit Kettenbrüchen vorgehende am meisten Beachtung verdient.

Etwas ganz Neues, wenn ich nicht irre, bringt Kapitel XIV, das die Überschrift „Des cycles" trägt. Sind n Kongruenzen nach einem gemeinsamen Modul N gegeben:

$$a_i x_i^2 \equiv b_i y_i^2 \pmod{N} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

wobei die a_i, b_i, x_i, y_i bestimmte zu N teilerfremde ganze Zahlen (nicht Restklassen) sein sollen, so bilden diese einen Zyklus, wenn $a_1 \cdots a_n\, b_1 \cdots b_n$ eine Quadratzahl ist. Setzt man dann

$$d = (a_1 \cdots a_n,\; b_1 \cdots b_n),$$
$$dA^2 = a_1 \cdots a_n,$$
$$dB^2 = b_1 \cdots b_n,$$

so heißt der Zyklus primitiv, falls

$$Ax_1 \cdots x_n \equiv \pm By_1 \cdots y_n \pmod{N},$$

andernfalls abgeleitet. Ist N Primzahl, so ist jeder Zyklus primitiv; kennt man dagegen einen abgeleiteten Zyklus (mod. N), so führt er unmittelbar zu einer Zerlegung von N in zwei Faktoren. Neben der Herleitung allgemeiner Eigenschaften der Zyklen und der Entwicklung einiger Sätze, die in Spezialfällen entscheiden, ob ein Zyklus abgeleitet ist oder nicht, wird eine Fülle von Beispielen nach dieser Methode zerlegter Zahlen gegeben. Allerdings

haben sämtliche Beispiele die Form $1 + k \cdot 2^n$, was vielleicht stillschweigend, aber nicht ausdrücklich ausgenutzt wird; darunter finden sich recht große Zahlen wie $861 \cdot 2^{29} + 1$ u. a. Bedauerlicherweise gibt Kraïtchik nicht an, wie er in den einzelnen Fällen die zur Zerlegung benutzten Zyklen gefunden hat; es scheint mir aber nicht tunlich, hier darüber Vermutungen auszusprechen oder aus anderen Quellen gewonnene Methoden zu erwähnen.

Das letzte Kapitel beschäftigt sich mit der Aussiebungsmethode. Während die vorangehend besprochenen Methoden zum Ziel haben, eine einzelne vorgelegte Zahl zu untersuchen, wird man ganz anders verfahren, wenn es sich darum handelt, Primzahltafeln herzustellen oder alle Primzahlen einer bestimmten Form innerhalb gegebener Grenzen aufzufinden. Dies wird sehr klar erläutert an der Aufgabe: Alle Primzahlen der Form $N = k \cdot 2^n + 1$ mit $10^8 < N < 10^{12}$ und $1 \leqq k < 1000$ aufzusuchen. Das Ergebnis ist in einer mehrere Seiten umfassenden Tafel zusammengestellt.

Endlich werden in einem kurzen Anhang Sätze und Formeln über rechtwinkelige Dreiecke mit rationalen Seiten und „Heronische" Dreiecke, d. h. solche mit rationalen Seiten und rationalem Flächeninhalt, in ansprechender Weise behandelt. Den Abschluß bilden ein Namen- und Sachregister sowie ein ausführliches Inhaltsverzeichnis.

Die äußere Ausstattung des Buches ist die gleiche gute wie bei den früheren Bänden des Verfassers. Leider ist aber auf die Beseitigung von Druckfehlern diesmal nicht genügende Sorgfalt verwandt worden; die Zahl der fehlerhaft gedruckten Formeln ist recht beträchtlich und, was schlimmer ist, es scheinen sich auch in die Zahlentabellen Druckfehler eingeschlichen zu haben. Das Vorhandensein des Canon Pellianus bietet die Möglichkeit, die Kettenbruchentwickelungen Kraïtchiks zu kontrollieren; die Zahl der Abweichungen ist ziemlich groß (mindestens 20) und in einigen Fällen, wo ich Stichproben gemacht habe, hat immer Degen recht behalten. Zur Ehre des Verfassers muß ich allerdings zugeben, daß die Abweichungen meist, mitunter ganz offensichtlich, auf Druckfehlern, nicht auf Rechenfehlern zu beruhen scheinen; nur ist mit dieser Feststellung dem Benutzer nicht gedient. Der theoretische Text hätte vielfach etwas größerer Präzision in der Ausdrucksweise bedurft; die Voraussetzungen sind nicht immer deutlich genug formuliert; ganz besonders stört es, daß man fast nie weiß, ob die in die Betrachtungen eingehenden Zahlen teilerfremd sein sollen oder nicht, und sich darüber erst a posteriori Aufschluß verschaffen kann. An einigen Stellen finden sich auch wirkliche Fehler, die aber meist leicht zu berichtigen sind; ich sehe daher von einer Aufzählung einzelner Stellen ab.

Trotz diesen Ausstellungen, die zumeist ja nur Äußerlichkeiten betreffen, ist mein Gesamturteil über das Werk ein lobendes, und bei der Hochschätzung, die ich für praktisch angewandte Zahlentheorie habe, möchte ich es nicht unterlassen, mich dem Dank des Verfassers an die Fondation Universitaire Belge anzuschließen, durch deren finanzielle Hilfe das Erscheinen des Buches erst ermöglicht wurde, und möchte gleichzeitig öffentlich der Hoffnung Ausdruck geben, daß es auch weiterhin dem Verfasser an finanzieller Unterstützung nicht fehlen möge, seine wertvollen Untersuchungen fortzuführen und bekannt zu geben.

Göttingen, den 17. August 1927. E. Bessel-Hagen.

F. Hausdorff, Mengenlehre. Zweite, neubearbeitete Auflage. 285 S. mit 12 Fig. (Göschens Lehrbücherei, Gruppe I, Band 7.) Berlin 1927, Walter de Gruyter & Co. *RM* 12.—; gebunden *RM* 13.50.

Bei der Neuherausgabe seiner wohlbekannten „Grundzüge der Mengenlehre", die jetzt in zweiter Auflage unter dem Titel „Mengenlehre" vorliegen, sah der Verf. sich vor die undankbare und unangenehme Aufgabe gestellt, an seinem Buch ganz erhebliche Streichungen vorzunehmen, da der Umfang wesentlich herabgesetzt werden sollte (die zweite Auflage umfaßt beinahe 200 Seiten weniger als die erste). Der Verf. hat sich aber nicht darauf beschränkt, gewisse Abschnitte wegzulassen, sondern er hat sich zu einer völligen Neubearbeitung entschlossen; er hat diese unter Berücksichtigung und organischer Verarbeitung der seit 1914 (dem Erscheinungsjahr der „Grundzüge") veröffentlichten wichtigen neuen Arbeiten aus der Mengenlehre so durchgeführt, daß man bei der Lektüre der zweiten Auflage und bei dem Vergleich mit der ersten den Eindruck eines ganz neuen Werkes gewinnt.

Aus der ersten Auflage ist zunächst die Theorie der geordneten Mengen zum größten Teil, soweit sie nämlich nicht in den systematischen Aufbau der Mengenlehre hineingehört, und die Theorie des Lebesgueschen Maßes und Integrals gänzlich gestrichen worden, da die letztere inzwischen auch in deutscher Sprache zum Gegenstand selbständiger Darstellungen gemacht worden ist. Weniger leichten Herzens wird man sich damit abfinden, daß der Theorie der Punktmengen von vornherein metrische Räume zugrunde gelegt und daß die für die Topologie so außerordentlich wichtige Theorie allgemeinerer Räume, deren systematische Darstellung in den „Grundzügen" eine beherrschende Stellung eingenommen hatte, ebenfalls (bis auf einen kurzen referierenden Paragraphen) beiseite gelassen worden ist. Aber auch diese Streichung wird man billigen müssen: Die abstrakte Topologie hat im letzten Jahrzehnt, namentlich durch die Arbeiten von Alexandroff und Urysohn, so gewaltige Fortschritte gemacht, daß eine einigermaßen erschöpfende Darstellung nur noch in einem besonderen Werk gegeben werden kann. Schließlich ist auch die spezielle Theorie der Euklidischen Räume unterdrückt worden; in diesen Räumen gültige Sätze finden sich nur als Sonderfälle von Sätzen, die in allgemeineren metrischen Räumen gelten.

Über die prinzipielle Einstellung des Buches ist zu bemerken, daß es den unkritischen Mengenbegriff Cantors zum Ausgangspunkt nimmt und daß es sich weder auf eine Kritik, noch auf eine axiomatische Einengung dieses Begriffs einläßt; auch auf die Antinomien der Mengenlehre geht das Buch nicht näher ein.

Die ersten vier Kapitel („Mengen und ihre Verknüpfungen", „Kardinalzahlen", „Ordnungstypen", „Ordnungszahlen") behandeln die klassische abstrakte Mengenlehre; erwähnenswert ist darin u. a. ein sehr kurzer, allerdings die positiven ganzen Zahlen voraussetzender Beweis des Äquivalenztheorems. In Kap. V („Mengensysteme") ist der Verf. über den Stoff der ersten Auflage wesentlich hinausgegangen: Die Borelschen Mengen werden ausführlicher als dort besprochen. Die in gewissem Sinn eine Verallgemeinerung der Borelschen darstellenden Suslinschen Mengen, die 1917 von dem bald darauf jung verstorbenen Russen M. Suslin eingeführt und nach ihm besonders von Lusin und Sierpiński untersucht worden sind, werden gleichfalls eingehend behandelt.

Die Theorie der Punktmengen (Kap. VI) wird, wie schon erwähnt, unter Zugrundelegung eines metrischen Raumes entwickelt. Die Darstellung ist sehr breit angelegt und berücksichtigt durchweg auch wichtige neuere Arbeiten, wobei manche Sätze, die im Original für Euklidische Räume ausgesprochen worden sind, hier für separable oder lokal zusammenhängende oder vollständige Räume verallgemeinert werden. Im folgenden Kapitel („Punktmengen und Ordnungszahlen") ist die Behandlung der Borelschen und der Suslinschen Mengen eines separablen vollständigen Raumes (die im Euklidischen Raum sonst als B-Mengen und A-Mengen bezeichnet werden) von besonderem Interesse. Alexandroff und Hausdorff haben gleichzeitig (1916) gezeigt, daß jede B-Menge entweder höchstens abzählbar oder von der Mächtigkeit des Kontinuums ist. Dieser Mächtigkeitssatz wird im vorliegenden Buch für die Suslinschen Mengen eines separablen vollständigen Raumes bewiesen. Das ist eine noch umfassendere Formulierung (und der umfassendste bisher bekannte Mächtigkeitssatz überhaupt), da jede Borelsche Menge eine Suslinsche, aber nicht jede Suslinsche Menge eine Borelsche ist. Die letztere Tatsache wird am Schluß dieses Kapitels erörtert: es werden Kriterien dafür angegeben, daß eine Suslinsche Menge speziell eine Borelsche ist.

Das achte Kapitel („Abbildung zweier Räume") ist den stetigen Abbildungen gewidmet. Zunächst werden Eigenschaften aufgesucht, die gegenüber stetigen Abbildungen invariant sind; auch die Untersuchungen Brouwers über die Struktur der perfekten Punktmengen werden hier z. T. wiedergegeben. Sodann wird die stetige Kurve behandelt. Die Besprechung der Peanoschen Kurven gibt dem Verf. Gelegenheit, das Dimensionsproblem zu streifen und den Brouwerschen Satz von der Invarianz der Dimensionenzahl zu formulieren. In den am Ende des Buches zusammengestellten Quellenangaben erwähnt Verf. nach dem Zitat dieser Brouwerschen Arbeit die großen Fortschritte, die die Dimensionstheorie neuerdings gemacht hat, und verweist dabei auf die Arbeiten von Urysohn und Menger. Der Hinweis ist in dieser Form unvollständig: Der Satz von der Invarianz der Dimensionenzahl ermöglicht gewiß noch nicht die Aufstellung einer vom topologischen Standpunkt aus befriedigenden Dimensionstheorie. Den ersten und wichtigsten Schritt dazu hat aber schon 1913 Brouwer selbst in einer leider viel zu wenig bekannten Arbeit („Über den natürlichen Dimensionsbegriff"; Crelles Journal 142, S. 146—152) getan. Brouwer gibt dort eine rekurrente, nur die inneren topologischen Eigenschaften der Menge benutzende Definition der Dimension, welche mit der später von Urysohn und Menger aufgestellten äquivalent ist, und er beweist vor allem den „Rechtfertigungssatz des Dimensionsbegriffes", welcher besagt, daß in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit jede offene Menge die Dimension n besitzt. Wenn auch Brouwer diese Theorie nicht weiter ausgebaut hat, so hätte doch eine die Arbeiten von Urysohn und Menger zitierende Quellenangabe *vor diesen* die Brouwersche Arbeit über den natürlichen Dimensionsbegriff nennen müssen. — Die Behandlung stetiger (nicht notwendig topologischer) Abbildungen erbringt noch ein wichtiges Resultat: In separablen vollständigen Räumen sind die stetigen Bilder Suslinscher Mengen wieder Suslinsche, die schlichten stetigen Bilder Borelscher Mengen wieder Borelsche Mengen. Das Kapitel geht dann zu topologischen Abbildungen über und schließt mit einem kurzen Überblick über die topologischen Räume. Das letzte Kapitel ist den reellen Funktionen

vorbehalten; es enthält u. a. eine ausführliche Darstellung der Baireschen Funktionen.

Zum Schluß einige Worte über die in dem Buch angewendeten Bezeichnungen. Bei der in der Punktmengentheorie in dieser Hinsicht herrschenden Unstimmigkeit ist es besonders zu begrüßen, daß der Verf. in einigen Fällen die in der ersten Auflage benutzten Bezeichnungen aufgegeben hat, um den Vorschlägen anderer Autoren zu folgen. So versteht der Verf. jetzt nach dem auf Weierstraß zurückgehenden Sprachgebrauch unter einem Gebiet eine offene zusammenhängende Menge, während er in der ersten Auflage jede Menge ohne Randpunkt ein Gebiet nannte. In der Bezeichnung von Summe und Durchschnitt hat der Verf. sich jetzt an Carathéodory angeschlossen (Summe $A \dotplus B$; nur bei fremden Mengen $A + B$; Durchschnitt AB). Sehr zu begrüßen ist ferner, daß der Verf. bei den stetigen bzw. topologischen Streckenbildern die Benutzung des Wortes „Jordansche Kurve“ überhaupt vermieden hat, da dieses in einem Teil der Literatur das topologische, im anderen das beliebige stetige Streckenbild bedeutet. Die vom Verf. und von anderen Autoren für das topologische Streckenbild gebrauchte Bezeichnung „einfache Kurve“ wird sich hoffentlich mehr und mehr einbürgern; auch die vom Verf. vorgeschlagene Benennung „Streckenbild“ für das bisher stetige Kurve genannte stetige Bild der abgeschlossenen Strecke ist sehr gut.

Das Hausdorffsche Buch kann wegen der Klarheit, Gründlichkeit und Eleganz der Darstellung allseitig auf das allerwärmste empfohlen werden. Für die Studierenden mittlerer und höherer Semester ist es ein überaus zuverlässiger Führer in das so sehr schöne Gebiet der Mengenlehre und ihrer geometrischen Anwendungen. Aber auch reifere Mathematiker werden das ausgezeichnete Buch mit größtem Interesse lesen, wertvolle Anregungen daraus empfangen und es stets gern als Nachschlagewerk wieder zur Hand nehmen Dem Verf. sei für diese Neubearbeitung, die neben den zahlreichen Freunden der alten Auflage sicherlich viele neue Freunde gewinnen wird, auf das herzlichste gedankt.

Berlin-Lankwitz. FEIGL.

M. Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie. 2. Aufl. Mit einem Anhang: M. Dehn, Die Grundlegung der Geometrie in historischer Entwicklung. Mit insgesamt 115 Abbildungen. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 23.) Berlin 1926, J. Springer. Geh. *RM* 16.50, geb. *RM* 18.—.

Die bekannten „Vorlesungen über neuere Geometrie“ von Moritz Pasch, die 1882 in erster Auflage erschienen und die seitdem in einer durch Zusätze erweiterten deutschen zweiten Ausgabe (1912) und in einer spanischen Übersetzung unter dem Titel „Lecciones da geometria moderna“ (1913) herausgegeben wurden, liegen nun in einer neuen Auflage vor. Diese neue Auflage unterscheidet sich von der ersten in der Hauptsache in der Einführung der uneigentlichen Elemente, die in beiden Auflagen rein geometrisch begründet, jetzt aber wesentlich vereinfacht dargestellt ist.

Das Buch ist axiomatisch aufgebaut. Die beiden ersten Paragraphen (Von der geraden Linie, Von den Ebenen) enthalten die Axiome der Verknüpfung und Anordnung; statt des Wortes Axiom gebraucht Verf. das Wort Kernsatz. Das Axiomensystem des Verf. unterscheidet sich in einer Hinsicht

grundsätzlich von dem Hilbertschen. Während bei Hilbert die ganze unbegrenzte Gerade und die ganze unbegrenzte Ebene Grundelemente sind, sind bei Pasch, der nur mit Axiomen im beschränkten Raumstück operiert, die Strecke und das ebene Flächenstück (Stab und Platte) die Grundelemente. Die Paschschen Axiome müssen die Möglichkeit der Verlängerung der Strecke und des Ebenenstücks besonders postulieren und gelten für alle drei Geometrien (elliptische, euklidische, hyperbolische) gemeinsam, während bei Hilbert die elliptische Geometrie durch das dritte Axiom der linearen Anordnung ausgeschlossen wird. Demgemäß kann die Einführung der uneigentlichen Elemente bei Pasch ohne Benutzung der Parallelentheorie und in umfassenderer Weise als etwa in der klassischen Geometrie der Lage von Staudts erfolgen. Den Ausgangspunkt bildet das Geradenbündel. Von drei Geraden, die paarweise in einer, aber nicht alle drei in derselben Ebene gelegen sind, und von drei Geraden, die in derselben Ebene gelegen sind und deren jede mit derselben, nicht dieser Ebene angehörenden Geraden in einer Ebene enthalten ist, wird ohne Rücksicht darauf, ob sie einander schneiden oder nicht, gesagt, daß sie demselben Bündel angehören. Existiert der Schnittpunkt zweier der drei Geraden, so geht auch die dritte Gerade durch diesen Punkt, und das Geradenbündel ist ein eigentliches; im anderen Falle heißt das Bündel uneigentlich und definiert einen uneigentlichen Punkt.

Der Einführung der uneigentlichen Elemente folgt der Beweis einer Reihe graphischer Sätze und eine erste Erörterung des Dualitätsprinzips. Alsdann wird durch Behandlung der Kongruenz der Maßbegriff eingeführt. Unter den Axiomen der Kongruenz findet sich auch das Archimedische Axiom, aus dem die analoge Aussage für die fortgesetzte Konstruktion des vierten harmonischen Punktes hergeleitet wird. Auf dieser Basis, also mit Hilfe des Maßbegriffs, aber ohne Benutzung der Parallelentheorie, wird dann der Beweis der „Stammsätze" der projektiven Geometrie geführt, vor allem des Fundamentalsatzes für Grundgebilde erster und zweiter Stufe und des Dualitätsprinzips. Das hauptsächliche Beweismittel bildet dabei ein projektiv konstruiertes Möbiussches Netz. Auch das Doppelverhältnis und die projektiven Koordinaten werden mit Hilfe des Netzes eingeführt; damit ist die Behandlung der projektiven Geometrie durch Begründung der analytischen Geometrie zu einem gewissen Abschluß gebracht.

Den „Vorlesungen über neuere Geometrie" von Pasch in ihrer jetzigen Gestalt ist ein ausführlicher, etwa 100 Seiten umfassender Anhang von M. Dehn „Die Grundlegung der Geometrie in historischer Entwicklung" beigegeben. Entsprechend den hauptsächlichen Fragenkomplexen, um die sich diese Entwicklung gruppiert, teilt Dehn seine Darstellung in fünf Hauptabschnitte: Das Parallelenpostulat. Grundlegung der projektiven Geometrie. Die Stetigkeit. Systeme von Postulaten. Inhaltslehre.

Die Lektüre des Buches, sowohl des in mustergültiger Klarheit abgefaßten, trotz seines Alters immer noch ein aktuelles Interesse besitzenden Hauptteiles als auch des außerordentlich fesselnd und anregend geschriebenen Anhangs, der über alle mit der Grundlegung der Geometrie zusammenhängenden Fragen einen ausgezeichneten Überblick bietet, muß allen mathematisch Interessierten auf das dringendste empfohlen werden.

Berlin-Lankwitz. FEIGL.

A. S. Eddington, Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung. XIV und 377 S. („Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften" Bd. XVIII.) Berlin 1925, Julius Springer.

Das Buch ist bisher in zwei englischen Ausgaben erschienen. In der vorliegenden einwandfreien Übersetzung durch H. Schmidt-Cöthen und A. Ostrowski-Göttingen sind die der zweiten englischen Ausgabe vom Verf. hinzugefügten Noten sowie zahlreiche Zusätze, die der Verf. für die deutsche Ausgabe zur Verfügung gestellt hat, in den Text eingearbeitet worden. Außerdem haben die Übersetzer selbst einige erläuternde Noten hinzugefügt.

Die „Relativitätstheorie" von Eddington ist ein für den Mathematiker, Physiker oder Astronomen bestimmtes Lehrbuch, das sich von anderen Lehrbüchern der Theorie vor allem dadurch unterscheidet, daß auf streng systematischem Weg die Theorie aus ihren logischen Grundlagen heraus entwickelt wird. Die historische Entwicklung wird demgemäß völlig außer Acht gelassen, und so ist von den Schwierigkeiten der klassischen Elektrodynamik, aus denen die Relativitätstheorie erwachsen ist, überhaupt nicht die Rede. Auch wird nicht etwa zunächst die spezielle, dann die allgemeine Relativitätstheorie dargestellt, sondern es werden die Grundlagen der Theorie von vornherein in solcher Allgemeinheit entwickelt, wie es die letztere erfordert.

Diese Grundlagen sind enthalten im 1. Kapitel, das die „Elemente der Theorie" (Messung räumlicher und zeitlicher Abstände und anderer physikalischer Größen, Koordinatentransformationen usw.), und im 2., das den „Tensorkalkül" behandelt. Es wird dann im 3. Kapitel das Einsteinsche Gravitationsgesetz abgeleitet, das 4. bringt die relativistische Mechanik. Das 5. Kapitel enthält unter der Überschrift „Die Krümmung des raumzeitlichen Kontinuums" hauptsächlich die kosmologischen Theorien, und erst im 6. Kapitel wird die „Elektrizität" behandelt.

Bis hierher reicht die Darstellung der Einsteinschen Relativitätstheorie. Das letzte, 7. Kapitel, „Die Weltgeometrie" überschrieben, enthält in seinem 1. Teil die Weylsche Theorie in einer dem Zusammenhang angepaßten Form, während der 2. Teil die vom Verf. selbst herrührende Verallgemeinerung dieser Theorie bringt.

Den Schluß bildet ein Aufsatz von Einstein, der „Eddingtons Theorie und das Hamiltonsche Prinzip" behandelt, und von ihm auf Aufforderung von Eddington und Courant (dem Herausgeber der „Grundlehren") für die deutsche Übersetzung des Buches geschrieben wurde. Hierin spricht allerdings Einstein seine bekannte Ansicht aus, daß er von der Vertiefung der geometrischen Grundlagen durch Weyl und Eddington keinen Fortschritt der physikalischen Erkenntnis erwartet.

Die Art der Darstellung ist das ganze Buch hindurch originell und enthält eine Fülle neuartiger Gedankengänge. Dadurch wird die Lektüre des Buches selbst für einen mit der Relativitätstheorie völlig vertrauten Leser höchst interessant und anregend. Hinzukommt die große Darstellungskunst des Verf., der es versteht, den sprödesten Stoff durch geschickt gewählte Beispiele anschaulich zu machen und in stets fesselnder, stellenweise heiterer Form vorzutragen.

So gehört das Eddingtonsche Buch neben denen von v. Laue, Weyl und Pauli zu den grundlegenden Werken über Relativitätstheorie.

G. Hettner.

Max Born, Probleme der Atomdydamik. 183 S. Mit 42 Abbildungen und einer Tafel. Berlin 1926, Julius Springer.

Der Inhalt des Buches ist eine Wiedergabe von Vorlesungen, die der Verf. im Wintersemester 1925/26 am Massachusetts Institute of Technology gehalten hat. Die deutsche Ausgabe, zu der der Verf. im April 1926 das Vorwort geschrieben hat, unterscheidet sich indessen — wie im Vorwort hervorgehoben wird — von der englischen Ausgabe erheblich. Es konnten die bis zum genannten Zeitpunkt erschienenen wichtigen Arbeiten von Uhlenbeck und Goudsmit sowie von Pauli und Heisenberg noch berücksichtigt werden, durch die die Methoden der Matrizenrechnung, die in der englischen Ausgabe nur als zu großen Hoffnungen berechtigend entwickelt wurden, sich als äußerst fruchtbringend für die Lösung zahlreicher Probleme der Atomphysik erwiesen haben. Leider konnten die Arbeiten von Schrödinger, die heute wohl als grundlegend für die Behandlung atomtheoretischer Fragen angesehen werden müssen, nicht mehr berücksichtigt werden. Trotzem behält die hier gebrachte Darstelluug des Verf. ihren großen Wert nicht allein vom formal mathematischen Standpunkte, sondern auch im Hinblick darauf, daß zwischen der Matrizenbehandlung und der Schrödingerschen Theorie gewisse verwandtschaftliche bzw. ergänzende Beziehungen bestehen. Im einzelnen sei über den Inhalt des Buches gesagt, daß er aus zwei Teilen besteht, nämlich zwanzig Vorlesungen über die Struktur des Atoms und zehn Vorlesungen über die Gittertheorie des festen Zustandes. Anschließend an das Buch „Atommechanik" des Verf. werden zunächst einige mathematische Ergebnisse angeführt, die für die folgenden Betrachtungen wichtig sind. Hierbei beschränkt sich der Verf. auf kurze Angabe der Leitgedanken, die zu den betreffenden Ergebnissen führen. Hervorgehoben zu werden verdient, daß die teilweise etwas abstrakten Methoden durch Anwendung auf einzelne praktische Beispiele dem Verständnis des Lesers näher gebracht werden, was man in anderen Darstellungen leider oft vermißt. Verf. geht sodann auf die Bohrsche Theorie, deren Anwendungen und Erfolge unter etwas schärferer Betonung ihrer Schwächen ein und entwickelt im Anschluß hieran als weiteren Schritt in der Entwicklung der Atomtheorie die Matrizenbetrachtungen. Hier werden zunächst die Grundlagen der Matrizenrechnung kurz betrachtet und sodann ihre Anwendung auf einzelne Probleme der Atomtheorie behandelt. Die Vorlesungen über Gittertheorie bilden in gewisser Hinsicht eine spezielle Anwendung der in den Vorlesungen über Atomstruktur dargestellten Methoden.

Potsdam. JOHANNES PICHT.

W. v. Ignatowsky, Die Vektoranalysis und ihre Anwendung in der theoretischen Physik. Dritte, neu bearbeitete Auflage. Zwei Teile. 110 und 123 S. (Sammlung mathematisch-physikalischer Lehrbücher.) Leipzig und Berlin 1926, B. G. Teubner.

Diese Neuauflage des bekannten Ignatowskyschen Buches über Vektoranalysis weist gegenüber den älteren Auflagen verschiedene Änderungen auf, auf die der Verf. im Vorwort besonders hinweist, auf die aber hier im einzelnen nicht näher eingegangen werden kann. Im ersten Teil wird die Vektoranalysis ohne Bezugnahme auf spezielle physikalische Probleme, also als selbständige Disziplin behandelt, da viele ihrer Ergebnisse gleichzeitig in mehreren physikalischen Gebieten wichtige Anwendung finden und eine scheinbare Verknüpfung

mit einem bestimmten physikalischen Gebiete vermieden werden sollte. Verf. geht aus von den einfachen elementaren Vektoroperationen, von denen er dann leicht zu den Differential- und weiterhin zu den Integraloperationen der Vektoren gelangt. Es folgen einige allgemeine Beziehungen zwischen den einzelnen Vektoroperationen. Nach einigen Bemerkungen über mehrfach zusammenhängende Räume, mehrdeutige Funktionen und Unstetigkeiten folgt die geometrische Darstellung der Vektorfelder sowie im Anschluß hieran die analytische Darstellung mit besonderer Berücksichtigung von krummlinigen Koordinaten. Das letzte Viertel des ersten Teiles ist den linearen Vektorfunktionen, den Affinoren und Tensoren gewidmet. Eine die wichtigsten Formeln enthaltende Tafel ist beigefügt und erleichtert die Benutzung des Buches, besonders auch im Hinblick auf den zweiten Teil, der die Anwendung der Vektoranalysis in der theoretischen Physik behandelt. Hier wird zunächst die Mechanik diskreter Massenpunkte, starrer Körper, elastischer Körper sowie der Flüssigkeiten betrachtet. Es folgen einzelne Kapitel und Beispiele aus der Elektrizitätslehre, wobei im einzelnen die Elektrostatik, die Maxwell-Hertzsche Elektrodynamik ruhender und bewegter Körper, die Lorentzsche Elektrodynamik sowie die Kristalloptik näher behandelt werden. Verf. setzt hierbei — wie zu erwarten — die Grundlagen der betreffenden physikalischen Disziplinen voraus, beschränkt sich also darauf, die sich mit Hilfe der Vektoranalysis hieraus ergebenden Folgerungen abzuleiten.

Potsdam. JOHANNES PICHT.

Heinrich Kafka, Die ebene Vektorrechnung und ihre Anwendungen in der Wechselstromtechnik. I. Teil: Grundlagen. (Sammlung mathematisch-physikalischer Lehrbücher Bd. 22.) VIII und 132 S. Leipzig und Berlin 1926, B. G. Teubner. Kart. *RM* 7.60.

Dieses Buch ist nicht, wie man dem Titel nach vermuten sollte, ein Lehrbuch der Vektorrechnung, sondern ein Lehrbuch der Elektrizitätslehre, insbesondere der Wechselstromtechnik, dargestellt mit Hilfe ebener Vektoren. Man kann die Verhältnisse im Wechselstromkreis zwar bekanntlich sehr schön mit Hilfe der komplexen Zahlen darstellen, doch soll das „auf mathematisch weniger feste Gemüter abschreckend" wirken (Kafka S. 14). Deshalb wird statt der Multiplikation mit $e^{i\alpha}$, die eine Drehung um den Winkel α bewirkt, ein neues Symbol: der Dreher $\overset{\curvearrowleft}{\alpha}$, eingeführt. Für die Drehung um 90^0, die sonst durch Multiplikation mit i erreicht wird, erscheint das neue Symbol j (das ja auch früher in der komplexen Darstellung der Elektrotechnik statt des Buchstabens i verwandt wurde, um Verwechslungen mit der Stromstärke i zu vermeiden). Vom mathematischen Standpunkte sollte man allerdings glauben, daß es viel einfacher wäre, durch eine vernünftige Begründung auch bei den „mathematisch weniger festen Gemütern" die ganz unbegründete Scheu vor dem Komplexen zu vertreiben, als die nicht gerade kleine Zahl der Symbole durch neue zu vermehren. Aber wenn die Elektrotechniker nur auf diesem Wege dazu zu bringen sind, sich der Vektorsprache zu bedienen (was der Verfasser besser wissen muß als der Referent), so ist der Zweck ja erreicht. Der Mathematiker würde natürlich noch gar viele Sachen anders machen, als es hier geschieht. So ist z. B. nicht recht einzusehen, warum das, was die Mathematik von alters her eine positive Richtung oder Achsenrichtung nennt, bei einem Elektrizitätsleiter nun „Zählpfeil" heißen muß

(S. 59). — Die Entwicklung der ebenen Vektorrechnung nimmt naturgemäß nur einen geringen Raum ein; dann folgt nach gesonderter Betrachtung der sogenannten „Oszillatoren“ (rotierende Vektoren, deren Projektionen die sinusartig veränderlichen Stromgrößen geben) eine Zusammenfassung der Grundlagen der Maxwellschen Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, sodann, die Hälfte des Buches einnehmend, eine Darstellung der Grundlagen der Wechselstromtechnik vermittels der ebenen Vektorrechnung, und zwar wird behandelt: Selbstinduktion und Kapazität im Wechselstromkreis, Parallelschaltung von Wechselstromzweigen, Strom- und Leistungskomponenten.

Stuttgart. DOETSCH.

L. Gustave Du Pasquier, Le Calcul des probabilités. Son Évolution mathématique et philosophique. XXI u. 304 S. Paris 1926, Librairie scientifique J. Hermann. Frs. 49.—.

Das vorliegende Buch soll kein Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung sein, sondern die Entwicklung der hauptsächlichsten Ideen, die der Wahrscheinlichkeitstheorie im Laufe der Zeit zugrunde gelegt wurden, darstellen. Der Verf. beginnt mit einer kurzen historischen Übersicht und gibt dann eine knappe Darstellung der elementaren Aufgaben. Mit größerer Ausführlichkeit wird das Bernoullische Problem und eine Reihe damit zusammenhängender Fragen behandelt, wobei der Verf. nicht über den Standpunkt hinausgeht, der in den landläufigen Lehrbüchern der letzten Jahrzehnte vertreten wird. Vom fünften Kapitel an wendet er sich einer eingehenden Besprechung der neueren Auffassungen zu. Er bringt, in zum Teil wörtlichen Wiedergaben aus den betreffenden Originalarbeiten, Berichte über die sog. logische Theorie von Kries, über die geistreichen Äußerungen Poincarés, über das kürzlich erschienene Buch von F. Urban, über die Häufigkeitstheorie, die v. Mises ausgebaut hat, und anderes. Auf tieferliegende mathematische Schwierigkeiten wird wenig eingegangen. Das Buch würde an Wert als Überblick über die mannigfachen Versuche zur logischen Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie gewinnen, wenn es literarisch exakter gearbeitet wäre, d. h. die Herkunft der einzelnen dargestellten Theorien und die Quellen, aus denen die Berichte geschöpft sind, deutlicher erkennen ließe. v. MISES.

J. L. Coolidge, Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Deutsche Ausgabe von F. M. Urban. IX und 212 S. (Sammlung mathematisch-physikalischer Lehrbücher Nr. 24.) Leipzig und Berlin 1927, B. G. Teubner.

Das Buch ist eine Übersetzung des Werkes „An introduction to mathematical probability“, das durch v. Mises im Jahresbericht Bd. 35, S. 72 besprochen wurde. Es ist sicher eines der ganz wenigen Bücher über Wahrscheinlichkeitsrechnung, aus denen man etwas Gründliches lernen kann, und dabei enthält es auf verhältnismäßig geringem Raum einen ausgedehnten Stoff — es läßt kaum eine Frage, die den Mathematiker, Physiker, Statistiker oder Biologen interessiert, unberührt und kann jedem, der sich in die W.-Rechnung einarbeiten will oder auch nur für spezielle Anwendungen gewisse Dinge braucht, unbedenklich empfohlen werden.

Das Werk wäre noch um Vieles erfreulicher, wenn es den Unterschied zwischen der mathematischen Theorie der W. und ihrer Anwendung klarer herausgearbeitet hätte. Obwohl der Verfasser dies der ganzen Tendenz seines

Buches nach leicht hätte durchführen können, verwischt er leider durch manche Erörterungen und Ausdrucksweisen diesen Unterschied. Das einer mathematischen Wissenschaft geradezu unwürdige unsichere Aussehen der W.-Theorie und das ihr anhaftende Odium rührt nur daher, daß man mit einer im Zeitalter der Axiomatik ganz unbegreiflichen Unentschlossenheit immer zwischen den beiden Gebieten, der mathematischen Theorie und der Anwendung, hin- und herpendelt und sie durcheinander wirft, ohne sich dessen bewußt zu sein. Die W.-Rechnung als mathematische Theorie ist eine Wissenschaft von genau dem gleichen Kaliber wie etwa die Geometrie: Sie basiert auf gewissen Axiomen und kann rein logisch, ohne jeden Seitenblick auf die physische Welt, entwickelt werden (dies dürfte besonders seit den grundlegenden Arbeiten von v. Mises klar sein). Handelt es sich nun aber darum, mit dieser Wissenschaft praktisch etwas anzufangen, so steht man vor demselben Problem, als wenn man die axiomatische (reine) Geometrie oder die mathematische (reine) Physik auf die Realität anwenden will: Die Dinge der Außenwelt sind nicht dasselbe wie die logischen Objekte der Wissenschaft, aber innerhalb gewisser Grenzen verhalten sie sich so, wie es die Axiome von den logischen Objekten postulierten, und daher werden auf sie auch die aus jenen Axiomen gezogenen Folgerungen, d. h. die Sätze jener Wissenschaft zutreffen. Tun sie das nicht, so war eben die Diskrepanz zwischen den logischen und physischen Objekten zu groß, die Theorie durfte nicht angewandt werden. Gerade bei der W.-Rechnung muß man sich dies immer vor Augen halten, da man bei keinem anderen Gebiet so leicht geneigt ist, es zu vergessen. Coolidge hätte seinen Darlegungen mit Leichtigkeit diese letzte Sauberkeit verleihen können, da er sich schon sowieso bemüht hat, alles aus seinen sogenannten „empirischen Annahmen“ abzuleiten. Er hätte sie dann bloß nicht mit diesem Namen belegen dürfen, der an die Zeiten erinnert, wo man glaubte, auch die geometrischen Axiome aus der Erfahrung abstrahieren zu müssen, sondern er hätte sie „Axiome“ nennen müssen — wobei allerdings nicht verschwiegen werden darf, daß sein Axiomensystem keineswegs vollständig ist: Es fehlt z. B., wie schon v. Mises hervorhob, ein Axiom, das die „Regellosigkeit“ der Fälle gewährleistet, und überdies bleibt das Verhältnis des durch die „erste empirische Annahme“ eingeführten Begriffs der W. als Grenzwert eines statistischen Häufigkeitsquotienten zu der durch die „zweite empirische Annahme“ eingeführten apriorischen W. ungeklärt.

Diese Mängel beeinträchtigen nicht die praktische Brauchbarkeit des Buches, sie sind jedoch geeignet, den Leser in eine falsche geistige Einstellung zur W.-Rechnung zu drängen und sollten daher in einer Neuauflage eliminiert werden. — Auch könnte es nichts schaden, wenn Erörterungen, die nur für englische bzw. amerikanische Leser Sinn und Interesse haben, in der Übersetzung wegblieben oder entsprechend geändert würden. Abgesehen davon liest sich letztere recht angenehm und flüssig.

Stuttgart. DOETSCH.

Gino Fano, Lezioni di geometria descrittiva date nel R. Politecnico di Torino. Con 123 tavole comprendenti 398 figure. XIX und 461 S. 3. Aufl. Torino-Milano-Firenze-Roma-Napoli-Palermo, G. B. Paravia & C.

Dieses Werk über darstellende Geometrie ist als Hilfsmittel für die Studierenden der Technischen Hochschulen gedacht, dürfte jedoch bei uns in

Deutschland wegen seines stark mathematischen Gehaltes hauptsächlich für die Universität in Frage kommen. Den deutschen Leser wird das Buch neben den vielen deutschen Lehrbüchern über denselben Gegenstand durch seine eigenartige Stoffeinteilung interessieren. Es zerfällt in zwei große Teile, von denen der erste im großen und ganzen die Darstellungsmethoden an sich, der zweite die Abbildung der Kurven und Flächen nach diesen Methoden behandelt. Der erste Teil geht mit großer Allgemeinheit vor — die Zentralprojektion ist für ihn das Primäre — und wird daher wohl nur bei solchen Lesern auf volles Verständnis rechnen können, die sich schon mit projektiver Geometrie etwas näher befaßt haben. Einleitungsweise werden die Grundtatsachen über Projektivitäten und Kollineationen rekapituliert, dann folgen die Haupteigenschaften der drei Darstellungsarten, die der Verfasser später immer anwendet: Zentralprojektion, Orthogonalprojektion und kotierte Projektion (in dieser Reihenfolge). Hier wird durch Behandlung der Elemente Punkt, Gerade und Ebene das Rüstzeug für alle anderen Gebilde, die aus diesen Elementen aufgebaut sind, bereit gelegt. Bevor jedoch zu diesen komplizierteren Gebilden übergegangen wird, schiebt sich je ein Abschnitt über Schattenkonstruktion und Perspektive ein, was einigermaßen befremdend wirkt, um so mehr als hier bereits Körper wie Kugel und Zylinder erscheinen, die systematisch erst später behandelt werden.

Der zweite Teil führt zunächst unter reichlicher Hinzuziehung analytischer Hilfsmittel die allgemeinen Eigenschaften der Kurven und Flächen vor: Begriff der Tangente, der Tangentenfläche, Abwickelbarkeit, die Vorkommnisse bei der Projektion von Raumkurven; Tangentialebene, Schnitt derselben mit der Fläche, Krümmungsverhältnisse; Scharen von Flächen usw. Dann folgen allgemeine Betrachtungen über die Abbildung von Kurven und Flächen in der darstellenden Geometrie, worauf schließlich in das eigentliche Detail eingetreten wird: die für die Anwendungen wichtigen geometrischen Gebilde, wobei manchmal die Abbildung in Zentral-, manchmal die in Orthogonalprojektion vorangestellt ist. Zur Behandlung gelangen: Kegel und Zylinder, die Flächen zweiter Ordnung (einschließlich stereographischer Projektion), Regelflächen, Rotationsflächen, Schraubenlinie und Schraubenflächen. Den Schluß bildet ein Kapitel über Steinschnitt.

Das Buch wird, wie gesagt, insbesondere dem mathematisch eingestellten Leser manche Anregung bringen. Zu bedauern ist nur, daß der Verfasser die Axonometrie, vor allem die orthogonale, nur flüchtig gestreift hat, da er ihr für die Praxis keine besondere Bedeutung beimißt, was wenigstens für den Maschineningenieur nicht stimmt. Was die Ausstattung des Werkes angeht, so ist der Druck ausgezeichnet, die Tafeln dagegen, die die Figuren enthalten, lassen stellenweise zu wünschen übrig. So geben die Figuren 360 und 364, welche das scharfe Gewinde und die Serpentine darstellen, wegen ihrer Kleinheit zu Mißverständnissen Anlaß: sie sehen genau so aus, als ob der Zeichner die bei diesen Figuren so häufig begangenen (auch in Büchern anzutreffenden) bekannten Fehler in der Umrißlinie gemacht hätte, obwohl im Text die richtige Konstruktion angegeben ist.

Stuttgart. DOETSCH.

Ludwig Eckhart. Konstruktive Abbildungsverfahren. Eine Einführung in die neueren Methoden der darstellenden Geometrie. 119 S. Wien 1926, Julius Springer. *RM* 5.40.

Seit einiger Zeit hat die darstellende Geometrie, vor allem infolge der Arbeiten von E. Müller, den ihr von Monge gegebenen Rahmen, den sie ungefähr ein Jahrhundert lang nicht überschritten hatte, gesprengt und sich ganz neuen Problemen zugewandt. Hatte sie bis dahin ihre Aufgabe in einer Abbildung der räumlichen geometrischen Gebilde im engsten Anschluß an den Sehprozeß, d. h. in einer Projektion der Raumpunkte durch ein Strahlenbündel auf eine Ebene, gesehen, so faßt diese neuere darstellende Geometrie den Begriff der Abbildung im allerweitesten Sinne: ihr Gegenstand ist die Zuordnung ganz beliebiger mathematischer Objekte zu beliebigen anderen. Engeengt wird dieses ungeheuer weite Feld nur durch die Forderung, daß durch die Zuordnung oder Abbildung die Verhältnisse vereinfacht und einer praktischen geometrischen Konstruktion zugänglich gemacht werden sollen.

In dem vorliegenden Büchlein hat der Verfasser eine Reihe solcher Abbildungen, die sich schon als fruchtbar erwiesen haben, zusammengestellt und ihnen das einheitliche Gewand der analytischen Darstellung gegeben. Zunächst wird an etwas ganz Bekanntes angeknüpft: Die Orthogonalprojektion in Grund- und Aufriß bildet die Raumpunkte in spezieller Weise auf Punktepaare der Ebene ab. Sieht man von dieser speziellen Art der Zuordnung ab und verlangt nur, daß die Raumpunkte so auf die Punktepaare der Ebene abgebildet werden, daß einer Geraden auch ein Geradenpaar entspricht, so erhält man die allgemeinste lineare Abbildung dieser Art, die geometrisch mit Zentralprojektionen und Kollineationen äquivalent ist. Unter dieses allgemeine Prinzip lassen sich schon alle üblichen Abbildungsverfahren subsumieren: außer der orthogonalen Zweitafelprojektion offenbar auch die schiefe Parallelprojektion, die Axonometrie, die Form der Perspektive, die den Grundriß mitabbildet, die stereoskopische Abbildung usw. — Nun wird ein Beispiel vorgeführt, wie man auch Räume höherer Dimension der darstellenden Geometrie zugänglich machen kann, nämlich eine Abbildung des vierdimensionalen Raumes auf die Punktepaare der Ebene, die z. B. für die Betrachtung der Minkowski-Einsteinschen Welt von Nutzen ist. — Dann folgt das erste Beispiel einer nichtlinearen Abbildung: die des dreidimensionalen Raumes durch eine lineare Strahlkongruenz. Bei ihr werden die Geraden des Raumes, wie man unmittelbar sieht, auf Kegelschnitte der Ebene abgebildet. — Der nächste Abschnitt bringt die Verallgemeinerung des Spur- und Fluchtpunktprinzips der Perspektive, nämlich die allgemeinste lineare Abbildung der Raumgeraden auf die orientierten Punktpaare der Ebene, worauf diese Abbildung wieder spezialisiert wird zu dem sogenannten Zweispurenprinzip. — Ein zum ersten Mal aus der eigentlichen Geometrie herausführendes Beispiel ist die kinematische Abbildung von Grünwald und Blaschke, die den Raumpunkten die Bewegungen in der Ebene zuordnet. — Ziemlich ausführlich wird sodann die Zyklographie in der ihr hauptsächlich durch E. Müller gegebenen modernen Form behandelt, die die Raumpunkte auf die orientierten Kreise der Ebene abbildet.

Das Büchlein kann zur Einführung in die neuen Gedankengänge der darstellenden Geometrie und zur Vorbereitung auf das große, im Erscheinen begriffene Werk von E. Müller und Kruppa bestens empfohlen werden.

Stuttgart. Doetsch.

Theodor Schmid, Maschinenbauliche Beispiele für Konstruktionsübungen zur darstellenden Geometrie. 2., vermehrte und verbesserte Auflage. Leipzig und Wien 1925, Franz Deuticke.

Emil Müller, Technische Übungsaufgaben für darstellende Geometrie. 6. Heft. Ebenda.

An der technischen Hochschule können die Übungen in darstellender Geometrie nicht nur rein theoretische Aufgaben behandeln, sondern müssen den lebendigen Zusammenhang mit den dem Ingenieur sonst geläufigen Gegenständen wahren. Bei der Auswahl des Übungsstoffes können die Aufgabensammlungen von Schmid und Müller, die zunächst für die Übungen an der Technischen Hochschule Wien gedacht waren, sehr wertvolle Hinweise geben und dem Lehrenden manche mühevolle Arbeit des Aufspürens geeigneter und der Praxis auch wirklich entsprechender Objekte ersparen. Die Aufgaben von Schmid wenden sich in erster Linie an die Maschinenbauer, die von Müller an die Bauingenieure. — Die Blätter sind auch einzeln zu haben, so daß dazu geeignet erscheinende direkt in den Übungen ausgegeben werden können.

Stuttgart. DOETSCH.

Richard Strohal, Die Grundbegriffe der reinen Geometrie in ihrem Verhältnis zur Anschauung. Untersuchungen zur psychologischen Vorgeschichte der Definitionen, Axiome und Postulate. (Wissenschaft und Hypothese Bd. 27.) 137 S. Leipzig und Berlin 1925, B. G. Teubner. Geb. *RM* 6.40.

Das Bestreben, das Wesen der mathematischen Deduktion ganz klar hervortreten zu lassen, zeitigte die als „Axiomatik" bezeichnete Forschungsrichtung, die darauf ausgeht, alles Anthropomorphe abzustreifen und die Geometrie aus bedeutungsfreien Elementen und postulierten Grundverknüpfungen rein logisch zu deduzieren. Dieser systematische Standpunkt bedarf aber doch einer Ergänzung, denn es ist garnicht einzusehen, warum man gerade von *diesen* Grundverknüpfungen ausgeht — irgendein anderes System hätte logisch dieselbe Berechtigung. Den Anlaß zu der speziellen Wahl bietet natürlich die Praxis. Wir haben es in unserer Sinnenwelt mit Objekten zu tun, die unserer Willkür entzogen sind, nach denen wir uns richten müssen, und so werden wir, wenn wir an ihnen mit Denkprozessen operieren wollen, auch dafür sorgen müssen, daß diese den Objekten möglichst konform bleiben. Man wird also eine psychologische Untersuchung anzustellen haben, welche Eigenschaften, Begriffe und Verknüpfungen für unser Denken über die Außenwelt fundamental sind, und diese dann nach hinreichender Läuterung zur Grundlage des Axiomensystems machen, wohl wissend, daß man von diesem Augenblick an nicht mehr in der Sinnenwelt, sondern in einer rein logischen Sphäre von eigener Gesetzlichkeit operiert. Diese psychologische Aufgabe wird durch Strohal, der sich in mathematischen und philosophischen Gedankengängen gleich gut bewandert zeigt, in anerkennenswerter Weise gelöst. Der Verfasser orientiert sich dabei an dem Werk von Lobatschefskij, gelegentlich auch an Bolyai und Euklid. Zunächst handelt es sich um die Gewinnung von Elementarbegriffen, aus denen dann später alle weiter zu verwendenden Begriffe durch synthetische Definition erzeugt werden können. Natürlich kann hierbei von „Begriff" im Sinne des Cassirerschen „Funktionsbegriffes", der durch

Angabe seiner Relationen zu anderen Begriffen hinreichend charakterisiert ist, nicht die Rede sein; denn da wir vom Psychologischen ausgehen, so müssen wir beachten, daß für die empirische Anschauung das Objekt seinen Eigenschaften und Relationen vorangeht, diese müssen aus ihm erst später abgelesen werden. Strohals Ausführungen stehen also auf dem Boden des Aristotelischen „Substanzbegriffes“ (Cassirer), der durch Abstraktion erhalten wird. (Der Verfasser will die Entstehung der Grundbegriffe allerdings nicht ganz in diesem Sinne verstanden wissen, für ihn ist die Bildung eines mathematischen Begriffes eher ein schöpferischer Akt aus „Anlaß“ eines empirischen Materials. Eine Weiterverfolgung dieses Sachverhaltes würde offenbar auf die alte Alternative: eingeborene Idee oder Begriffserwerb durch Erfahrung führen.) Die Elementarbegriffe, wie sie sich an Hand der Untersuchungen Lobatschefskijs ergeben, sind: Das Räumliche, die Berührung, das Verhältnis vom Ganzen zum Teil und die Kongruenz. Mit ihnen lassen sich nach Lobatschefskij die Dreidimensionalität des Raumes, die Begriffe Punkt, Gerade, Ebene usw. definieren. Es handelt sich nun darum, die Eigenschaften, die diesen Begriffen zukommen, festzustellen. Zunächst könnte man meinen, daß von Elementarbegriffen, d. h. von Begriffen, die gar keine Merkmale haben, sondern nur schlechthin da sind, sich garnichts mit Notwendigkeit aussagen lasse, sondern daß ganz der Willkür freie Bahn gegeben sei. Trotzdem macht Lobatschefskij solche Aussagen, und Strohal weiß das so zu rechtfertigen: Jene Elementarbegriffe haben eine ganz besondere Dignität: sie sind Relationsbegriffe. Bei der Abstraktion, die zu ihnen führt, dürfen die Objekte, die in der Relation stehen, nicht ganz verschwinden, sondern sind als wesentlich mitzudenken. So setzt z. B. der Begriff „Berührung“ zwei Körper voraus, die sich berühren; daher kann Lobatschefskij sofort den Satz aussprechen, daß bei einer Berührung oder bei einem „Schnitt“ immer zwei Seiten zu unterscheiden seien. Für diese Sätze, die aus der Natur der Elementarbegriffe mit Notwendigkeit folgen, die also Tautologien sind (richtig verstanden sind sie eigentlich ein Ersatz für die Begriffe: sie sagen aus, wie die Grundbegriffe beschaffen sein müssen, damit diese Sätze zu identischen Aussagen werden), reserviert Strohal den Namen *Axiome* (es sind die *κοιναὶ ἔννοιαι* Euklids). Nun steht aber nichts im Wege, darüber hinaus noch weitere (psychologisch fundierte) Begriffe zu definieren und Eigenschaften zu postulieren, vorausgesetzt, daß sie nicht mit den bereits bestehenden Sätzen in Widerspruch treten, was man durch die Forderung auszudrücken pflegt, daß sie „existieren“ müssen. Diese Sätze nennt Strohal *„Postulate“* (die *αἰτήματα* Euklids).

Zum Schluß stellt der Verfasser seine Theorie der üblichen Axiomatik, insbesondere Hilberts, gegenüber, wobei er einen tiefgehenden Unterschied glaubt konstatieren zu müssen. Er meint, die Axiomatik habe sich dadurch ganz von der Anschauung loslösen wollen, daß sie gewissen Zeichen durch begriffliche Verknüpfungssätze einen Sinn verleihe, was durch seine Untersuchungen als eine unerfüllbare Hoffnung dargetan sei. Das will die Axiomatik aber gar nicht, das könnte man höchstens von denjenigen Philosophen sagen, die von „impliziten Definitionen“ der Elemente durch die Axiome reden, eine in der Tat ziemlich inhaltlose und irreführende Redeweise. Der Unterschied zwischen der Strohalschen und der Hilbertschen Betrachtungsweise ist doch eigentlich nur der, daß sie sich dem Verhältnis von Empirie und mathematischer Theorie von verschiedenen Seiten nähern: Für den einen ist

die Empirie das Primäre, von der er auf psychologischem Wege zu den Fundamenten der Theorie kommt, der andere baut diese Fundamente autonom auf und muß dann natürlich, um die Anwendungsmöglichkeit seiner Theorie zu erweisen, rückwärts den Brückenschlag zur Erfahrung vollziehen (was allerdings häufig vergessen wird).

Das Büchlein zeichnet sich durch Klarheit der Sprache und der Problemstellung aus und gibt eine erfreuliche Behandlung eines Gebietes, das durch die moderne Axiomatik allzusehr in den Hintergrund gedrängt worden ist.

Stuttgart, Januar 1928. DOETSCH.

Federigo Enriques, Zur Geschichte der Logik. Grundlagen und Aufbau der Wissenschaft im Urteil der mathematischen Denker. Deutsch von L. Bieberbach. V u. 240 S. (Wissenschaft und Hypothese Bd. 26). Leipzig und Berlin 1927, B. G. Teubner. Geb. *RM* 11.—.

Das Buch bietet einen Überblick über die Entwicklung derjenigen logischen Begriffe, die für die Grundlegung und die philosophische Bewertung der Mathematik bedeutungsvoll sind, von den alten griechischen Philosophen bis auf unsere Tage, natürlich in einer durch den geringen Umfang und den persönlichen Geschmack des Verfassers bedingten Auswahl. Um die behandelten Richtungen zu charakterisieren, seien stichwortartig einige Haupttypen genannt: I. Die Eleaten wie Parmenides und Zeno (deren Verdienste um die Postulierung einer streng rationalen und in sich widerspruchslosen Wissenschaft im allgemeinen und um die Begründung einer Infinitesimalanalysis im besonderen sehr hoch veranschlagt werden), Plato, Aristoteles (dessen Gebäude sich eine scharfe Kritik gefallen lassen muß), Demokrit (dessen säkulare Bedeutung und über Jahrtausende reichender Einfluß am deutlichsten daran zu erkennen ist, daß man in seinen Thesen oft John Locke sprechen zu hören glaubt). II. Unter Übergehung des Mittelalters, in dem die Mathematik nur eine geringe Rolle spielt, vom erwachenden Rationalismus an, unter dem die Mathematik mehr und mehr an Bedeutung gewinnt: Bacon, Kepler und Galilei, Descartes und Hobbes, Leibniz und Locke, Newton und Kant. (Bei diesen Denkern kommt hauptsächlich die Idee der Beweisführung, die Beziehung zwischen Experiment und Deduktion, die Rolle der Hypothesen und Definitionen, die Frage der eingeborenen Ideen und der Verstandeskategorien in Frage.) III. Das neunzehnte Jahrhundert, das die entscheidenden mathematischen Entdeckungen der Dualität in der projektiven Geometrie und der nichteuklidischen Geometrie bringt: Gergonne und Poncelet (Dualität), Plücker und Möbius (die Möglichkeit der verschiedenartigen Deutung eines geometrischen Systems), Bolzano, Cauchy und Cantor (Kritik der Analysis des Unendlichen), Pasch und Hilbert (die Erkenntnis, daß für die mathematischen Grundbegriffe nur ihre funktionalen Beziehungen zueinander wesentlich sind), Frege, Peano und Russell (Begriffsschrift und Logikkalkül). IV. Die Entwicklung der sogenannten induktiven Logik im neunzehnten Jahrhundert vom Positivismus Auguste Comtes über J. St. Mill und Mach mit Avenarius bis zum Pragmatismus von William James; zum Schluß eine Betrachtung über die gegenseitige Ergänzung der deduktiven und induktiven Methode, die in der Erkenntnis gipfelt, daß zwar eine einzelne mathematische Theorie der Naturerscheinungen stets deduktiv vorgeht, daß aber in dem durch hinreichend weit getriebene Konfrontation der Theorie mit der Wirklichkeit immer wieder er-

folgenden Sturz der Theorie und ihrer Ablösung durch eine neue das induktive Moment zur Geltung kommt.

Wie diese kurze Inhaltsangabe zeigt, werden bei diesem Überblick über die Geschichte der Logik einige wichtige historische Gruppen übergangen, die man nur ungern vermißt. Der Übersetzer selbst nennt in seinem Vorwort schon Gauß, ich möchte vor allem noch die Scholastik und die von ihr ausstrahlende Linie hinzufügen. In bezug auf die Scholastik, die er nur mit wenigen Worten erwähnt, macht sich der Verfasser leider die bis in die neueste Zeit (infolge Unkenntnis) herrschende geringschätzige Meinung zu eigen, die auf Grund der Forschungen der letzten Jahrzehnte in philosophischen Kreisen längst nicht mehr allgemein geteilt wird. Wenn die Scholastik und die ganze mittelalterliche Philosophie auch keine typisch mathematischen Gedankengänge entwickelt hat, so wird man doch auch als Mathematiker in Zukunft nicht an einer philosophischen Richtung vorbeigehen können, in der ein Georg Cantor seinen philosophischen Stützpunkt suchte und die der Mutterboden eines Bolzano und damit indirekt eines Husserl gewesen ist, die auch in ihrer Betonung des Objektiven soviel Anklang mit dem Intuitionismus aufweist. (Es ist charakteristisch, daß Enriques weder diesen mit seinen prominenten Vertretern Brouwer und Weyl, noch Husserl, dessen „Logische Untersuchungen" doch einen Markstein in der Geschichte der Logik bilden, deren Würdigung vielleicht wichtiger ist als so manches andere gewesen wäre, mit keinem Wort erwähnt.) Noch ein anderer Einwand, der vielleicht, wie ich zugebe, etwas subjektiv ist: Der Verfasser ist ein Meister der Kritik, seine Kenntnis der philosophischen Autoren ist erstaunlich und das beigebrachte Material ist von größter Reichhaltigkeit, aber — die große Linie, die den Leser gefangen hält und ihn in Gedanken das früher Gehörte stets unwillkürlich zum augenblicklich Vorgetragenen in Beziehung setzen läßt, fehlt, die Kraft zur Synthese hält der Kraft zur Analyse nicht die Waage, und von dem geradezu dramatischen Geschehen, das die Grundlagenforschung seit fünfzig Jahren über die Mathematik gebracht hat, spürt man nur wenig, obwohl der Verfasser doch selbst dabei aktiver Teilnehmer war. Nichtsdestoweniger möchte ich das Buch nicht nur in die Hände zahlreicher Mathematiker, sondern vor allem recht vieler Philosophen wünschen, weil hier die logischen Probleme einmal ganz vom Standpunkt des Mathematikers aus gesehen sind. Gerade auf dem Gebiete der Logik hat ja der Mathematiker dem Philosophen besonders viel zu sagen, und wir sind leider noch weit davon entfernt, daß die zünftige Philosophie schon die Errungenschaften der Mathematik auf diesem Gebiet assimiliert hätte. — Dem Buche kommt sehr zustatten, daß der Übersetzer es verstanden hat, den oft nicht leichten Stil des Verfassers in eine verständliche deutsche Form zu bringen, die sich gerade wie ein Original liest. Auch die Nachweise sind durch tunlichste Zitierung deutscher Ausgaben und Übersetzungen für den deutschen Leser brauchbar gemacht.

Stuttgart. Doetsch.

A. J. Snow, Matter and gravity in Newton's physical philosophy. A study in the natural philosophy of Newton's time. 256 S. Oxford **1926**, University press.

Der Verfasser, der Lecturer in Psychology an einer amerikanischen Universität ist, gibt in seinem Buch einen historischen Bericht über den spekula-

tiven Teil von Newtons Gedankenwelt. Kapitel I handelt von der Wiedererweckung der Atomtheorie durch Pierre Gassendi (der an Epikur anknüpft) und Robert Boyle. In Kapitel II lernen wir die *atomtheoretischen Ansichten Newtons* kennen und die Gründe, warum er die Physik des Descartes abgelehnt hat: „Newton unterschied streng zwischen experimenteller und theoretischer Wissenschaft und blieb dessen stets eingedenk, wenn er irgendeine Hypothese machte, die ihrer Natur nach *nicht* experimentell verifizierbar ist. Descartes machte nie diese Unterscheidung." Außerdem aber schien Newton „die Korpuskulartheorie von Galilei besser geeignet, sowohl für eine theistische Erklärung wie auch für die mathematische Beschreibung des ganzen Universums." Nach einer kurzen Darlegung der Dynamik von Leibniz und Huygens kommt — Kapitel III — *Newtons physikalische Gravitationslehre* zur Sprache. Dem Verfasser scheint es „irrig und unverbürgt, daß Newton jemals die Ätherhypothese zur Erklärung der Gravitation und des Lichts völlig angenommen habe. Andererseits würde es aber ebenso irrig und dogmatisch sein, mit Kurt Laßwitz zu behaupten, Newton habe es für wertlos gehalten, die Erklärung der Gravitation aus der Ätherhypothese zu versuchen." Auf die Physik folgt — in Kapitel IV — die Metaphysik. Wir gelangen in das Reich der Geister, der „Äthergeister" („ethereal spirits"), welche die Ursache der Bewegung sein sollen: „Newton war direkt beeinflußt durch den Mystizismus von Jakob Boehme. Wie Brewster berichtet, war Newton ein eifriger Leser und Bewunderer von Boehme, hat manche Seite aus den Büchern dieses größten unter den protestantischen Mystikern kopiert." Im (letzten) Kapitel V wird die *Rolle der Hypothese* in Newtons Physik erörtert: „Die Grundlage der Wissenschaft ist die Erfahrung, sowohl nach der Ansicht von Newton wie auch der von Kepler und Galilei. Die Wissenschaft soll niemals von letzten oder ersten Ursachen ausgehen ... Tatsächlich war auch Newtons mathematische Physik frei von irgendeiner Hypothese über letzte oder erste Ursachen. Er ging in dem Bestreben, seine Physik vor jeglichem metaphysischen Einschlag zu bewahren, so weit, das große Wort Hypotheses non fingo auszusprechen."

Wien. Heinrich Löwy.

Arthur Jaller, Doppeldenken. Grundlagen einer neuen Weltanschauung. VII u. 204 S. Berlin 1926, C. A. Schwetschke & Sohn.

Im Vorwort erzählt der Verf., wie er zu seiner logischen Entdeckung kam: „Mir fiel die Hoffnungslosigkeit des Ringens um sichere, unanfechtbare Erkenntnis besonders auf, weil es mir immer gelang, die widersprechenden Thesen logisch gleichzeitig zu verteidigen und zu widerlegen. Meine Erkenntnisforderungen konnten darum nicht mehr durch einseitige Bejahung einer These gegenüber ihrer Gegenthese befriedigt werden. Ich konnte auch nicht mehr bei einem Erkenntnisskeptizismus stehenbleiben, weil ich auch ihn verfechten und widerlegen konnte." (S. V.) Während jeder andere hieraus den Schluß ziehen würde, daß der Verf. offenbar das Debattieren vortrefflich verstehen muß, sehen wir ihn selbst ein Opfer seiner dialektischen Künste werden. Da er imstande ist, von jedem Satz auch das Gegenteil zu beweisen, so meint er, daß *beide*, die These und die Gegenthese, wahr sein müssen.

Also sieht er sich dazu gedrängt, das Denken einer profunden Analyse zu unterwerfen. Aber er will hierbei *nicht* demselben logischen Zirkel verfallen

wie **Kant**, der das Denken mittels des Denkens analysieren wollte: „**Kant** steht bei seiner Analyse des Denkens bereits im Denken, nicht vor dem Denken.“ (S. VI.) Das Ergebnis seiner Analyse, die kein Denken sein will, ist die „Überwindung des bisherigen Denkens und der Denkgesetze, die in der bisherigen Logik vereint sind“. (S. VI.)

Worin besteht diese neue Logik? — „Das neue Denken, das das bisherige Denken erhält und zugleich aufhebt, das in sich zwei gegensätzliche Denkarten, dualistisches und monistisches Denken, trägt, beide erhält und zugleich überwindet, nenne ich Doppeldenken.“ (S. VII.) „Das monistische Denken denkt seine Objekte spaltungslos, es abstrahiert von der Spaltung, das dualistische Denken dagegen übersieht in der gegensätzlichen Spaltung die Einheit.“ (S. 10.) „Das Denken, das sowohl das monistische wie das dualistische Denken erhält und zugleich aufhebt, nennen wir Doppeldenken. Wir fordern das Doppeldenken für alle Denkobjekte. Wir müssen jedes Denkobjekt *zunächst* dualistisch denken, wir müssen ihm ein gegensätzliches Denkobjekt gegenüberstellen. Wir müssen *dann* monistisch die Einheit der Gegensätze denken. Wir heben beide Denksetzungen in der Erhaltung auf durch das Hineindenken des Gegenobjekts in jedes Denkobjekt. Doch gleichzeitig halten wir die Trennung in gegensätzliche Objekte aufrecht“. (S. 11.) Man beachte das „*zunächst*“ und das „*dann*“, die auch im folgenden Passus wiederkehren: „Es müssen *zunächst* Gegensätze aufgestellt werden. Sie müssen *dann* auseinander und ineinander, als Gegensätze und als widerspruchslose Einheit gedacht werden. Das ist das Grundgesetz des Doppeldenkens. Damit werden dualistische und monistische Denksetzungen erhalten und zugleich aufgehoben.“ (S. 15.)

Beim Doppeldenken wird also *nicht*, wie man beim ersten Anblick meinen könnte, das *Prinzip des Widerspruchs* aufgehoben, es wird *nicht* das logische Kunststück fertig gebracht, das Denkobjekt *zugleich* gespalten und spaltungslos zu denken, sondern es wird — ganz simpel — zunächst so, dann so gedacht. Auf diese Art hat man aber seit jeher „doppelt gedacht“! Neu ist hier nur die Behauptung über die *Reihenfolge:* daß die Dinge *zunächst* gespalten und *dann* spaltungslos gedacht werden. Das ist aber offenbar falsch. Die Elektrizität z. B. wurde zunächst als einheitliches Objekt gedacht, bis **Dufay** im Jahre 1733 in der Einheit die gegensätzliche Spaltung in positive und negative Elektrizität entdeckte.

Ist das „Grundgesetz des Doppeldenkens“ auch falsch, so ist es doch zu mancherlei nütze. Der Verf. wendet es sowohl auf wissenschaftliche (auch *mathematische* und *physikalische*) als auch auf praktische Probleme an. Als Probe diene das Kapitel über „*Die Gewalt im öffentlichen Leben*“, wo der Verf. den Herrschern Ratschläge erteilt.

„Die zeitlos-zeitliche sittliche Welt“, so lernen wir, „ist dualistisch-monistisch gedacht, Freiheits- und Gewaltswelt zugleich.“ (S. 173.) Die Lösung der Konflikte wird nun so bewerkstelligt: „Mit dem Doppeldenken heben wir alle absolut einseitigen Entscheidungen im sittlichen Leben auf. Wir heben damit auch die Gewalt im sittlichen Leben in der Erhaltung zugleich auf. *Zunächst* müssen wir dualistisch einseitige Ideen-Gewaltentscheidungen treffen. Wir überwinden jedoch zugleich absolute Gewaltentscheidungen im sittlichen Leben. Die einseitige Entscheidung darf die Freiheit nicht absolut aufheben. Mit jeder Entscheidung tritt darum die Forderung auf, die Gewalt wieder aus

dem sittlichen Leben auszuschalten." (S. 176.) „Die monistische sittliche Forderung, alles Leben zu entfalten, macht dem sittlichen Herrscher auch zur Aufgabe, das aus, dualistisch gedacht, sittlichen Gründen unterdrückte Leben nach der Unterdrückung wieder zu entfalten." (S. 178)

Ob den Hunderttausenden, die Tamerlan hingemetzelt hat, die Entfaltung des unterdrückten Lebens nach der Unterdrückung viel genutzt hätte? Eines ist jedenfalls gewiß: daß jener dualistisch-sittliche Herrscher sicher keinerlei politisches Bedenken gehabt hätte, in Samarkand einen Lehrstuhl für die Logik des Doppeldenkens zu errichten.

Wien. HEINRICH LÖWY.

Werner Gent, Die Philosophie des Raumes und der Zeit. Historische, kritische und analytische Untersuchungen. Die Geschichte der Begriffe des Raumes und der Zeit von Aristoteles bis zum vorkritischen Kant (1768). XI u. 273 S. Bonn 1926, Friedrich Cohen.

Der Verf. hat sich die Aufgabe gestellt, „mit Hilfe einer schlichten, erzählenden Methode und von irgendwelchen standpunktlichen Voraussetzungen nicht angekränkelt, die historischen Tatbestände an der Hand der Originale einfach in ihrem Zusammenhang aufzudecken, wohl wissend, daß man beim ‚Werten' leicht vorbeiwertet und bald den Anschein erweckt, als wisse man alles besser. Mit anderen Worten: es kam uns zunächst auf die *‚Quellenforschung'* an und dann darauf, die Resultate derselben in *einem* Zusammenhange darzulegen, was unseres Wissens bisher noch ein Desiderat war."

Seinen eigenen Standpunkt deutet er mit folgenden Worten an: „Nur ganz wenige Versuche lassen sich bis 1768 aufweisen, die dem Phänomen als solchem in seiner schmucklosen Schlichtheit auf der Spur sind; sie finden sich z. B. bei Aristoteles und Augustin. Sonst aber herrschen alle möglichen Vorurteile und Einstellungen, wie auch heute noch."

Zwischen Aristoteles und Kant scheint dem Verf. also vor allen anderen der heilige Augustin von Bedeutung zu sein. Dieser hat an dem Zeitproblem „eine vollkommen neue Saite zum Erklingen gebracht, den Bezug zum geschichtlichen Leben .. Dazu bedurfte es erst der Entdeckung des historischen Kosmos mit Hilfe des Christentums, welches denselben zunächst in der Weise konstituierte, daß es alle Völker der Erde in Beziehungen zu Gott brachte. Er schuf die Menschen, ließ sie sich frei entwickeln, einem bestimmten Ziele fortschreitend näherkommen und wird einst über sie zu Gericht sitzen. Diese Entwicklung ist etwas Einmaliges, Gerichtetes, Individuelles, die Zeit wird zu einer gerichteten Größe." Der *vektorelle Charakter der Zeit* ist aber schon von Aristoteles — ohne Hilfe des Christentums — bemerkt worden, wie man aus dem Aristoteles-Kapitel des Gentschen Buches entnehmen kann: „Entsprechend der Endlosigkeit der kosmischen Kreisbewegung muß auch die Zeit ins Endlose nach Vergangenheit und Zukunft sich ausdehnen. Denkt man sich dagegen in den fließenden Augenblick hineinversetzt, so hat man den Eindruck, als beginne mit ihm die nunmehr zunehmende und immer zunehmende Zeit." Die Zeit ist also schon nach Aristoteles „vektorell". Gent hält übrigens jene theologische Betrachtung Augustins *nicht* für sein „Hauptverdienst um das Zeitproblem", sondern das sollen seine Ansichten über

die *Meßbarkeit der Zeitstrecken* sein. Gent rühmt an Augustin, daß er hierbei „das Gebiet der Zeit nicht verläßt". Auch Aristoteles stellte wohl den Grundsatz auf, „daß man jedes Ding durch etwas ihm Gleichartiges messen müsse, die Zeit also durch einen begrenzten Zeitteil". Aber: „Einige Zeilen weiter kommt der Umfall, insofern dieser Zeitteil mit einer zeitlich begrenzten Bewegung identifiziert wird. Bei Augustin merkt man nichts dergleichen; er mißt bzw. schätzt Zeitstrecken durch Vergleichen derselben untereinander." (S. 45.) Ich glaube nicht, daß Aristoteles hier „umgefallen", d. h. von seinem oben zitierten Grundsatz abgewichen sei. Denn offenbar „identifiziert" Aristoteles nicht nur den Zeitmaßstab, sondern auch die zu messende Zeitstrecke mit Bewegungen. Es wird *eine* Bewegung (irgendein beliebiger Vorgang) mit einer *anderen* Bewegung (eines Uhrzeigers) verglichen. Das messende Vergleichen von bloß *vorgestellten* Zeitstrecken aber, das Augustin nachgerühmt wird, scheint mir ebenso unmöglich, wie das messende Vergleichen von bloß *vorgestellten* geometrischen Strecken. Ich bin *nicht* imstande, eine noch so deutlich vorgestellte Strecke mit einem noch so deutlich vorgestellten Meterstab auszumessen und glaube, daß auch der heilige Augustin dieses Wunder nicht zustande gebracht hat.

Wien. HEINRICH LÖWY.

Patenthülsen „Sphinx" zur Herstellung mathematischer, kristallographischer und anderer Modelle.[1]

Die Hilfsmittel zur Herstellung von Modellen, die die Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner unter diesem Namen in den Handel bringt, sind einige

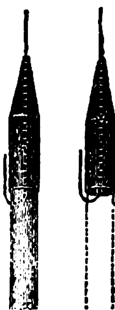


Fig. 1.

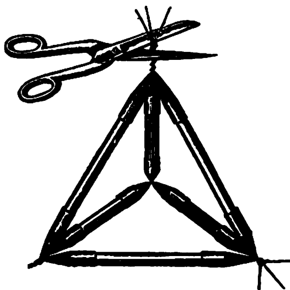


Fig. 2.

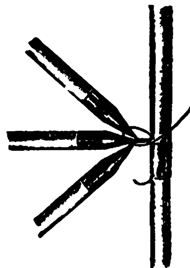


Fig. 3.

Holzstäbe, einige Blechhülsen, etwas Blumendraht, etwas gut biegsames Peddingrohr. Man kann aus diesen einfachen Mitteln aufs bequemste die mannigfachsten Modelle zur darstellenden Geometrie, zur projektiven Geometrie, zur Differentialgeometrie herstellen, wie es der Bedarf in Vorlesung oder Übung gerade verlangt oder wünschenswert erscheinen läßt. Mit Leichtigkeit verfertigt man sich reguläre Körper zur Veranschaulichung von Drehgruppen, wie reguläre Raumteilungen zur Demonstrierung kristallographischer Gruppen oder auch kubische Raumkurven oder sonstige Durchdringungsfiguren.

1) Siehe auch die Anzeige des Verlags auf der vierten Umschlagseite. Die Figuren sind einem Prospekt der Verlagsbuchhandlung entnommen.

Die Modelle werden folgendermaßen aufgebaut: Die Hülsen haben an ihrer Spitze kleine Öffnungen, durch die ein dünner Bindedraht gesteckt wird. Am anderen Ende der Hülse wird der Stab eingeschoben und so der Bindedraht festgeklemmt (Fig. 1). Die Bindedrähte mehrerer etwa von einer Ecke ausgehender Kanten eines Körpers werden zusammengedreht (Fig. 2). Soll von einem geraden Stab oder einem Kreis irgendwo ein Stab abzweigen, so bedient man sich zylindrischer Hülsen (Fig. 3).

Beigegeben wird auch ein Lötdraht, der es erlaubt, mit Hilfe einer brennenden Kerze die Verbindungen zu verlöten und sie so starr zu gestalten.

Man darf sagen, daß diese Methode zur Herstellung von Modellen das Ei des Kolumbus darstellt in allen Fällen, wo Gerade und Kreise den Grundstock der Modelle bilden können (Fig. 4). Die Kreise stellen sich nämlich automatisch her, wenn man die beiden Enden eines Stückes Peddingrohr in eine zylindrische Hülse steckt. Man kann diesem bequemen, dazu sehr wohlfeilen Konstruktionskasten nur weiteste Verbreitung wünschen.

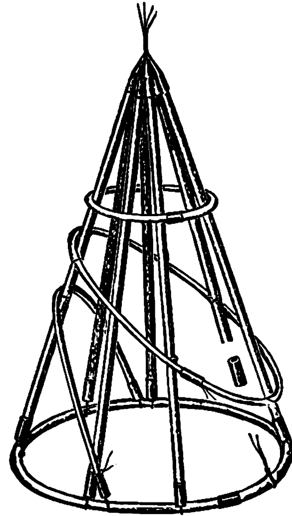


Fig. 4.

BIEBERBACH.

Zeitschriftenschau.

Proceedings of the Royal Irish Academy.

Volume XXXVI. 1922/23/24:

R. A. P. Rogers, On the simplest mode of representing a real continuous linear orthogonal transformation (with constants added) by means of rotation and translation of a rigid schema in a euclidean manifold of n dimensions. W. M. F. Orr, Solutions of systems of ordinary linear differential equations by contour integrals. A. C. O'Sullivan, Corresponding points on the curve of intersection of two quadrics.

Volume XXXVII. 1927:

J. L. Synge, Mathematical Investigation of the thrust experienced by a cylinder in a current, the motion being periodic. J. L. Synge, Time measurement in an isotropic space frame.

Science reports of the Tôhoku University.

XII (1923):

T. Kubota, Eine Bemerkung zur affinen Geometrie. T. Kubota, Einige Ungleichheitsbeziehungen über Eilinien und Eiflächen. T. Takasu, Differential Geometry of Curves in Euclidean Plane Space. II. T. Takasu, On Cylindrical Helices and Skew Circles. T. Takasu, On Bertrand Curves. Y. Okada, Some Theorems on Limits and their Applications. T. Hayashi, The Constants A's in de la Vallée Poussin's Theory of Approximate Representation of a Funktion. T. Hayashi, Some Inequalities relating to the Surface and Volume of an Ovoid Body. T. Takasu, Characteristic Properties of Space Curves, whose Curvatures and Torsions are connected by a General Relation.

XIII (1924):

M. Fujiwara, Bemerkung zur Theorie der Approximation der irrationalen Zahlen durch rationale Zahlen. M. Fujiwara, Bemerkung zur Theorie der Ap-

proximation der irrationalen Zahlen durch rationale Zahlen. II. T. Kubota, Einige Bemerkungen über die Eilinien. T. Hayashi, On Steiner's Curvature-Centroid. T. Kubota, Beiträge zur Inversionsgeometrie. T. Takasu, Differential Geometry of Surfaces in Euclidean Plane-Space. II. T. Hayashi, The Sufficient Conditions for the Differentiability of a Function of a Complex Variable.

XIV (1925):

T. Kubota, Über die konvex-geschlossenen Mannigfaltigkeiten im n-dimensionalen Raume. T. Kubota, Über die (2-2)-deutigen quadratischen Verwandtschaften. V. T. Takasu, Bemerkungen zu den geodätischen Linien auf Böschungsflächen. T. Takasu, On the Relation between the Intrinsic Equations of Analytic Functions under Linear Transformations and Curves under Inversions. T. Takasu, Geometry of Doubly Oriented Spheres in Non-Euclidean Space. T. Kubota, Über die Doppelsechs. T. Kubota, Über die Eibereiche im n-dimensionalen Raume.

Transactions of the American Mathematical Society.

Vol. 26 (1924):

H. T. Davis, An existence theorem for the characteristic numbers of a certain boundary value problem. L. L. Dines, A theorem on the factorization of polynomials of a certain type. H. M. Morse, A fundamental class of geodesics on any closed surface of genus greater than one. G. A Larew, The Hilbert integral and Mayer fields for the problem of Mayer in the calculus of variations. J. Douglas, Normal congruences and quadruply infinite systems of curves in space. L. L Silverman, The equivalence of certain regular transformations. G. Rutledge, Mac Laurin expansion of the interpolation polynomial determined by $2n + 1$ evenly spaced points. C. C. Mac Duffee, On covariants of linear algebras. D. Jackson, A generalized problem in weighted approximation. J. L. Walsh, On the expansion of analytic functions in series of polynomials. B. A Bernstein, Operations with respect to which the elements of a boolean algebra form a group. W. C. Graustein, Isometric W-surfaces. L. P. Eisenhart, Space-time continua of perfect fluids in general relativity. J. F. Ritt, Equivalent rational substitutions. E. Carlson, Extension of Bernstein's theorem to Sturm-Liouville sums. E. Hille, An existence theorem. W. E. Van de Walle, On the complete independence of the postulates for betweenness. E. V. Huntington, A new set of postulates for betweenness, with proof of complete independence. C. R. Adams, The general theory of a class of linear partial q-difference equations. B. M. Eversull, The summability of the triple Fourier series at points of discontinuity of the function developed. M H. Stone, An unusual type of expansion problem. E. B. Stouffer, On the independence of principal minors of determinants. W. C. Graustein and B. O. Koopman, A necessary and sufficient condition that two surfaces be applicable. O. Veblen and T. Y. Thomas, Extensions of relative tensors. L. P. Eisenhart, Geometries of paths for which the equations of the paths admit a quadratic first integral. D. V. Widder, A general mean-value theorem. J. H. M. Wedderburn, Algebras which do not possess a finite basis. H. A. Bender, Determination of all the prime power groups containing only one invariant subgroup of every index which exceeds this prime number. C. Gouwens, Invariants of the linear group modulo $\pi = p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \ldots p_n^{\lambda_n}$. K. P. Williams, A uniqueness theorem for the Legendre and Hermite polynomials. E. T. Bell, A new type of class number relations. R. G. D. Richardson, A new method in the equivalence of pairs of bilinear forms. R. G. D. Richardson, Relative extrema of pairs of quadratic and hermitian forms.

Vol. 27 (1925):

W. F. Osgood, On normal forms of differential equations. H. L Olson, Congruences with constant absolute invariants. C. M. Huber, On the prime divisors of the cyclotomic functions. J. I. Hutchinson, On the roots of the Riemann zeta function. J. L. Synge, A generalization of the Riemannian line-element.

J. F. Ritt, Elementary functions and their inverses. Ph. Franklin, Analytic transformations of everywhere dense point sets. E. Kasner, An algebraic solution of the Einstein equations. G. Y. Rainich, Electrodynamics in the general relativity theory. G. A. Miller, The subgroup composed of the substitutions which omit a letter of a transitive group. L. R. Ford, On the closeness of approach of complex rational fractions to a complex irrational number E. Kasner, Solutions of the Einstein equations involving functions of only one variable. M. H. Ingraham, A general theory of linear sets. H. L. Rietz, On the representation of a certain fundamental law of probability. J. Eiesland, The group of motions of an Einstein space. J. H. Taylor, A generalization of Levi-Civita's parallelism and the Frenet formulas. E. E. Libman, The linear complex of conics. A. Emch, On the Weddle surface and analogous loci. M. Castellani, Algebraic surfaces with reducible bitangent and osculating hyperplanar sections. A. J. Kempner, Polynomials of several variables and their residue systems. J. Douglas, A criterion for the conformal equivalence of a Riemann space to a euclidean space. H.W. March, The deflection of a rectangular plate fixed at the edges. A. Church, On irredundant sets of postulates. H. Hotelling, Three-dimensional manifolds of states of motion. M. Morse, Relations between the critical points of a real function of n independent variables. A. F. Carpenter, Cone cubic configurations of a ruled surface. R. L. Moore, Concerning upper semi-continuous collections of continua. W. A. Wilson, On the oscillation of a continuum at a point. J. A. Schouten, On the conditions of integrability of covariant differential equations. M. I. Logsdon, Complete groups of points on a plane cubic curve of genus one. H. L. Smith, On the existence of the Stieltjes integral. T. H. Gronwall, The mutual inductance of two square coils. J. A. Shohat, On the development of continuous functions in series of Tchebycheff polynomials. E. R. Hedrick and L. Ingold, Analytic functions in three dimensions. E. R. Hedrick and L. Ingold, The Beltrami equations in three dimensions. L. P. Eisenhart, Fields of parallel vectors in a Riemannian geometry. L. Ingold, A symbolic treatment of the geometry of hyperspace.

Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

[Die Titel der eingesandten Schriften, mit Ausnahme der Sonderabdrucke, werden hier regelmäßig veröffentlicht. Besprechungen geeigneter Bücher bleiben vorbehalten. Eine Rücksendung der eingegangenen Schriften kann nicht erfolgen.]

E. Altschul, Berechnung und Ausschaltung von Saisonschwankungen. Merkblatt II/III der Frankfurter Gesellschaft für Konjunkturforschung. Karlsruhe 1927, G. Braun. RM 1.80.

A. Baeumler und M. Schröter, Handbuch der Philosophie. Lieferung 16: F. Kuntze, Erkenntnistheorie. München 1927, R. Oldenbourg.

R. Baldus, Nichteuklidische Geometrie, hyperbolische Geometrie der Ebene. (Sammlung Göschen Band 970.) Leipzig und Berlin 1927, W. de Gruyter. RM 1.50.

W. R. Ball, Récréations mathématiques et problèmes des temps anciens et modernes. Troisième partie. Paris 1927, A. Hermann et fils. Fr. 21.

O. Becker, Mathematische Existenz. Halle 1927, M. Niemeyer. Geh. RM 18.—; geb. RM 20.50.

H. Behmann, Mathematik und Logik. (Mathematisch-Physikalische Bibliothek Bd. 71.) Leipzig 1927, B. G. Teubner. Geh. RM 1.20.

E. T. Bell, Algebraic Arithmetic. American Mathematical Society, Colloquium Publications. Volume VII. New York 1927, American Mathematical Society. $ 2.—.

O. Th. Bürklen, Mathematische Formelsammlung. (Sammlung Göschen Band 51.) Berlin 1927, Walter de Gruyter. Geb. RM 1.50.

C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen. 2. Aufl. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Geh. RM 20.—.

H. Cramer, Schmehls Rechenbuch. Teil I u. II. Gießen 1928, Emil Roth. Geb. je *RM* 2.80.

H. T. Davis, A survey of methods for the inversion of integrals of Volterra type. Indiana University Studies. Vol. XIV. Bloomington (Ind.), University Bookstore. $ 1.—.

R. Descartes, La Géométrie. Nouvelle Édition. Paris 1927, Librairie scientifique J. Hermann. Fr. 21.—.

G. C. Evans, The Logarithmic Potential. American Mathematical Society, Colloquium Publications. Volume VI. New York 1927, American Mathematical Society. $ 2.—.

K. Fladt, Euklid. (Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Bücherei Band 8.) Berlin 1927, O. Salle. *RM* 2.—.

A. Flechsenhaar, Einführung in die Finanzmathematik. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Kart. *RM* 3.20.

G. Förster, Geodäsie (Landesvermessung und Erdmessung). (Sammlung Göschen Band 102.) Berlin 1927, W. de Gruyter. Geb. *RM* 1.50.

R. Fortrat, Introduction à l'étude de la physique théorique. 1. Fascicule: Mécanique; 2. Fascicule: Les vibrations. Paris 1927, Librairie scientifique J. Hermann. Je Fr. 10.—.

H. Frank und **L. Freibüter,** Arithmetik und Algebra für die Oberstufe höherer Lehranstalten. Münster i. W. 1927, F. Coppenrath.

Ph. Frank und **R. v. Mises,** Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. Zweiter physikalischer Teil. Braunschweig 1927, Fr. Vieweg u. Sohn, Aktien-Ges. Geh. *RM* 53.—; geb. *RM* 58.—.

Srinivasa Ramanujan, Collected Papers, herausgegeben von G. H. Hardy, P. V. Seshu Ayar, B. M. Wilson. Cambridge 1927, University Press. Geb. sh 30.—.

H. Hasse, Höhere Algebra. II. Gleichungen höheren Grades. (Sammlung Göschen Band 932.) Berlin und Leipzig 1927, W. de Gruyter. *RM* 1.50.

L. Heffter und **C. Koehler,** Lehrbuch der analytischen Geometrie. 2. Aufl. Band I. Karlsruhe 1927, G. Braun. Geh. *RM* 20.—.

J. Horn, Gewöhnliche Differentialgleichungen. 2. Aufl. (Göschens Lehrbücher, I. Gruppe: Reine Mathematik, Band 10.) Berlin und Leipzig 1927, Walter de Gruyter. *RM* 9.—.

G. Julia, Cours de cinématique. Paris 1928, Gauthier-Villars et Cie. Geh. Fr. 25.—.

W. Kämmerer, Die trilineare alternierende homogene Form in acht Veränderlichen. Mitteilungen des Mathematischen Seminars der Universität Gießen. XV. Heft. Gießen 1927, Selbstverlag des Mathematischen Seminars. *RM* 1.50.

F. Kliem, Apollonius. (Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Bücherei Band 13.) Berlin 1927, O. Salle. *RM* 2.40.

F. Kliem und **G. Wolff,** Archimedes. (Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Bücherei Band 1.) Berlin 1927, O. Salle. *RM* 3.—.

G. Lamé, Exposé des méthodes pour résoudre les problèmes de Géométrie. Paris, Librairie scientifique J. Hermann. Fr. 21.—.

W. Lietzmann, Aufbau und Grundlage der Mathematik. (Mathematisches Unterrichtswerk, Ergänzungsheft 3.) Leipzig und Berlin 1927, B. G. Teubner. *RM* 2.20.

M. Lindow, Numerische Infinitesimalrechnung. Berlin 1928, Ferd. Dümmler. Geh. *RM* 15.—.

P. Luckey, Nomographie. (Mathematisch-Physikalische Bibliothek Band 59/60.) Leipzig 1927, B. G. Teubner. Geh. *RM* 2.40.

H. Mack, C. F. Gauß und die Seinen. Werkstücke aus Museum, Archiv und Bibliothek der Stadt Braunschweig. II. Braunschweig 1927, E. Appelhans & Co. Geh. *RM* 5.50.

F. Malsch, Geschichte der Mathematik. (Wissenschaft und Bildung Band 242.) Leipzig 1928, Quelle & Meyer. Geb. *RM* 1.80.

——, Zahl und Raum. Band I—VIII. Band I: Arithmetik und Algebra I. Geb. *RM* 2.20. — Band II: Arithmetik und Algebra II. Geb. *RM* 2.20. — Band III: Geometrie I. Geb. *RM* 2.20. — Band IV: Geometrie II. Geb. *RM* 2.40. — Band V: Arithmetik und Algebra III. Geb. *RM* 2.60. — Band VI: Geometrie III. Geb.

RM 3.—. — Band VII: Analytische Geometrie. Geb. RM 2.40. — Band VIII: Differential- und Integralrechnung. Geb. RM 2.80. Leipzig 1927, Quelle & Meyer.

W. Fr. Meyer und **H. Mohrmann,** Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Band III 3. Leipzig 1902—1927, B. G. Teubner. Geb. RM 41.60.

Močnik-Hočevar-Dintzl, Arithmetik für die IV. Klasse. Mathematisches Unterrichtswerk für Mittelschulen. Wien 1927, Hölder-Pichler-Tempsky, A.-G.

F. R. Moulton, Einführung in die Himmelsmechanik. Leipzig 1927, B. G. Teubner.

E. Netto, Lehrbuch der Combinatorik. 2. Aufl. (Mathematische Wissenschaften Band 7.) Leipzig 1927, B. G. Teubner. Geb. RM 14.—.

M. Pasch, Mathematik am Ursprung. Leipzig 1927, F. Meiner. Geb. RM 8.—.

A. Patzig, Politische Arithmetik. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Kart. RM 3.20.

Abbé Porton, Exercices de calcul différentiel et intégral. Second Volume. Solutions des Exercices. Paris 1927, Librairie scientifique J. Hermann. Fr. 35.—.

D. Rusu, Das Rätsel der Welt. Cernăuti, Selbstverlag. 1924. RM 1.—.

H. v. Sanden, Mathematisches Praktikum I. (Teubners technische Leitfäden Band 27.) Leipzig 1927, B. G. Teubner. Geb. RM 6.80.

C. Schaefer, Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauß und Christian Ludwig Gerling. Berlin 1927, O. Elsner. Geh. RM 35.—; geb. RM 40.—.

H. Schwerdt, Einführung in die praktische Nomographie. (Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Bücherei Band 6.) Berlin 1927, O. Salle. RM 3.—.

A. Speiser, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung. (Die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Band 5.) Zweite Auflage. Berlin 1927, J. Springer. RM 15.—; geb. RM 16.50.

K. Weierstraß, Mathematische Werke. Band VII: Vorlesungen über Variationsrechnung. Leipzig 1927, Akademische Verlagsgesellschaft. Geh. RM 45.—.

E. Wicke, Konforme Abbildungen. (Mathematisch-Physikalische Bibliothek Band 73.) Leipzig 1927, B. G. Teubner. RM 1.20.

F. Wicke, Einführung in die höhere Mathematik für Ingenieure. Band I und II. Berlin 1927, Julius Springer. Je RM 24.—.

H. Wieleitner, Mathematische Quellenbücher I: Rechnen und Algebra. (Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Bücherei Band 3.) Berlin 1927, O. Salle. RM 2.—.

——, Mathematische Quellenbücher II: Geometrie und Trigonometrie. (Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Bücherei Band 11.) Berlin 1927, O. Salle. RM 2.—.

W. Wien und **F. Harms,** Handbuch der Experimentalphysik. Band 21. Leipzig 1927, Akademische Verlagsgesellschaft. Geb. RM 47.—.

M. Zacharias und **M. Ebner,** Arithmetik und Algebra I (Unterstufe). Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Lehranstalten. Frankfurt a. M. 1927, M. Diesterweg. Geb. RM 6.40.

Mitteilungen an die Mitglieder.

Die Sternwarte in Berlin-Treptow teilt mit, daß sie bereit ist, die in ihrem Verlag erscheinende Zeitschrift für Astronomie und verwandte Gebiete „Das Weltall" den Mitgliedern der Deutschen Mathematiker-Vereinigung für RM 6.— statt jährlich RM 8.— zu liefern. Interessenten werden gebeten, sich unter Bezugnahme auf diese Anzeige direkt an die genannte Sternwarte zu wenden.

Austausch von Bänden des Jahresberichtes der D. M.-V.

Uns **fehlen** die Bände 8, 9, 10, 11. Wir haben **doppelt** die Bände 12, 13 und 15, die wir zum Austausch für die fehlenden anbieten.

Rom, Specola Vaticana. **Hagen.**

Jahrhundertfeier der Technischen Hochschule Dresden.

Vom 4.—6. Juni 1928 begeht die Technische Hochschule Dresden die Feier ihres 100jährigen Bestehens.

Bereits heute bittet die Technische Hochschule, daß **ehemalige Studierende**, die an der Festfeier teilzunehmen gedenken, ihre Anschriften und Wünsche dem Ausschuß für die Jahrhundertfeier, Dresden-A. 24, George-Bähr-Straße 1, Zimmer Nr. 77, mitteilen.

Jahresversammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1928.

Die Jahresversammlung findet im Rahmen des Kongresses der Deutschen Naturforscher und Ärzte vom 16. bis 23. September 1928 in Hamburg statt. Vortragsanmeldungen nehmen schon jetzt der Schriftführer der D. M.-V., Herr Prof. Dr. Bieberbach, Berlin-Schmargendorf, Marienbader Straße 9, sowie Herr Prof. Hecke, Hamburg 13, Rothenbaumchaussee 21, der als Einführender fungieren wird, entgegen.

Vortragende, die Wert darauf legen, kurze Auszüge ihrer Vorträge schon zum Zeitpunkt der Versammlung in den „Naturwissenschaften“ abgedruckt zu sehen, wollen solche Auszüge von höchstens 20 Zeilen Umfang bis zum 1. August an Herrn Prof. Hecke einsenden. Hiervon bleibt das für den Jahresbericht der D. M.-V. in Aussicht genommene Protokoll der Versammlung unberührt. Der Zweck dieser Auszüge ist, den Versammlungsteilnehmern von vornherein eine Andeutung über den zu erwartenden Inhalt der Vorträge zu geben.

Wegen Wohnungsbeschaffung wird Mitteilung noch ergehen.

Aufgaben und Lösungen.

Aufgaben.

59. Die aus der Elementargeometrie wohlbekannte Figur eines Dreiecks mit seinem Umkreise U und irgendeinem seiner drei Ankreise A besitzt eine bemerkenswerte, umkehrbare Eigenschaft, die noch nicht beachtet worden zu sein scheint.

Die beiden Kreise U und A treffen sich in zwei reellen Punkten und haben zwei reelle Tangenten gemein.

Sei t eine dieser beiden Tangenten und B ihr Berührungspunkt auf U, so lege man von B aus die zweite Tangente an A, dann fällt deren Berührungspunkt mit einem der beiden Kreisschnittpunkte S (und zwar dem, der den größeren Abstand von t besitzt) zusammen, und vice versa.

Umgekehrt mögen ein Ordnungskreis U und ein Klassenkreis A mit zwei reellen Schnittpunkten S_1, S_2 und damit auch zwei reellen gemeinsamen Tangenten t_1, t_2 vorliegen, so, daß die obige Eigenschaft für eines der beiden Paare (S, t) — und damit von selbst auch für das andere — erfüllt ist. Dann existiert auch ein eigentliches Dreieck und mit ihm zugleich ∞^1 solche, so daß U der Umkreis und A einer der Ankreise wird. Bedeuten ϱ, r die Radien von U, A, und φ den (inneren) Schnittwinkel beider Kreise, so gilt die einfache Relation: $\frac{\varrho}{r} = \left(2 \sin \frac{\varphi}{2}\right)^2$.

Dies ist zu beweisen, entweder elementar oder auch analytisch-geometrisch, oder auch (am besten) invarianten-theoretisch.

Königsberg i. Pr. W. Franz Meyer.

(Eingegangen am 20. 2. 28.)

60. Gegeben sei eine einteilige Fläche 2. Ordnung F_2 und eine Ebene E, nebst einem Punkte A, der auf keiner der beiden Flächen liegen soll.

Durch A lege man irgendeine Gerade g, die F_2 in den beiden Punkten P_1, P_2 und E im Punkte P_3 treffe.

Man denke sich auf g einmal die beiden, zum Tripel (P_1, P_2, P_3) äquianharmonischen Punkte H_1, H_2 bestimmt, andererseits die beiden harmonischen Punkte Q_1, Q_2, so daß (Q_1, P_1), (P_2, P_3) und (Q_2, P_2), (P_1, P_3) je harmonische Paare sind.

Variiert nun die Gerade g (durch A), so erfüllen H_1, H_2 eine Fläche H, die „äquianharmonische“, und Q_1, Q_2 eine Fläche Q, die „harmonische“. Sieht man von der Besonderheit ab, daß die Fläche H dann und nur dann reell ist, wenn der von A an F_2 gehende Berührkegel B einteilig ist, so haben die beiden Flächen H und Q die wesentlichsten Eigenschaften gemein.

Beide sind von der Ordnung Vier, haben in A einen konischen Knotenpunkt, besitzen den Schnitt k von F_2 und E als Doppelkegelschnitt, und gehen

einfach durch den Berührkegelschnitt b von F_2 und B, längs dessen sie sich, sowie F_2 und B berühren. Überdies liegen die beiden, von A an die beiden Treffpunkte von k und b gehenden Geraden ganz auf den Flächen H und Q.

Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, daß der dritte harmonische Punkt Q_3, der so liegt, daß (A, Q_3) und (P_1, P_2) harmonische Paare sind, für sich eine leicht bestimmbare Fläche 2. Ordnung erfüllt.

In dem metrisch ausgezeichneten Falle, wo F_2 eine (einteilige) Kugel ist, und E die uneigentliche Ebene E_∞, werden die beiden Flächen H und Q Rotationszykliden.

Wie lauten die entsprechenden Sätze in der Ebene, wenn an die Stelle der F_2 ein einteiliger Kegelschnitt c_2, und an die Stelle von E eine Gerade e tritt?

Obiges ist zu beweisen, entweder synthetisch, oder analytisch-geometrisch, oder (am besten) invarianten-theoretisch.

Königsberg i. Pr. W. Franz Meyer.

(Eingegangen am 20. 2. 28.)

61. Bisher weiß man nur wenig über die Konvergenz oder Divergenz der Fourierreihen der stetigen bzw. beschränkten Funktionen. Es gelten jedoch die folgenden Sätze:

1. Existiert eine beschränkte Funktion $f(x)$ $(0 \leq x \leq 2\pi)$, deren Fourierentwicklung

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{1}$$

divergiert, und zwar in der Weise, daß

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \left| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx \right| = +\infty \tag{2}$$

für jedes $0 \leq x \leq 2\pi$, so existiert auch eine stetige Funktion $g(x)$ mit denselben Eigenschaften.

2. Existiert eine beschränkte Funktion $f(x)$ $(0 \leq x \leq 2\pi)$, deren Fourierreihe (1) für jedes x, das einer Menge $\mathfrak{M}$ angehört, die Eigenschaft (2) besitzt, so existiert auch eine stetige Funktion $g(x)$ $(0 \leq x \leq 2\pi)$, die, fast überall[1]) in $\mathfrak{M}$, die, der Bedingung (2) analoge, erfüllt. A. Zygmund.

(Eingegangen am 3. 5. 28.)

Lösungen.

Lösung der Aufgabe 24. (Dieser Jahresbericht Bd. 34 (1925), S. *97*.)

Die Aufgabe lautete:

Nullstellen linearer Kombinationen von Exponentialfunktionen. Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$ reelle Zahlen,

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_l,$$

1) „Fast überall" bedeutet: mit Ausnahme einer Menge vom Maße 0.

und $m_1, m_2, \ldots, m_l$ positive ganze Zahlen,

$$m_1 \geqq 1, \ldots, m_l \geqq 1, \qquad m_1 + m_2 + \cdots + m_l = n.$$

Man bezeichne die Funktionen

$$\begin{array}{llll} e^{\lambda_1 z}, & z e^{\lambda_1 z}, & \ldots, & z^{m_1-1} e^{\lambda_1 z}, \\ e^{\lambda_2 z}, & z e^{\lambda_2 z}, & \ldots, & z^{m_2-1} e^{\lambda_2 z}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e^{\lambda_l z}, & z e^{\lambda_l z}, & \ldots, & z^{m_l-1} e^{\lambda_l z} \end{array}$$

in dieser Reihenfolge mit $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$ und die Anzahl der Nullstellen der Funktion

$$c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z) + \cdots + c_n f_n(z)$$

in dem horizontalen Streifen $\alpha \leqq \Im z \leqq \beta$

mit N. Sind die Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_n$ der Bedingung

$$|c_1| + |c_2| + \cdots + |c_{m_1}| > 0, \quad |c_{n-m_l+1}| + \cdots + |c_{n-1}| + |c_n| > 0$$

unterworfen, so ist

$$\frac{(\lambda_l - \lambda_1)(\beta - \alpha)}{2\pi} - n + 1 \leqq N \leqq \frac{(\lambda_l - \lambda_1)(\beta - \alpha)}{2\pi} + n - 1.$$

(Pólya.)

Beweis. Es ist klar, daß gemäß den Bedingungen des Satzes die Funktion $\varphi(z) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(z)$ die folgende Form hat:

$$\varphi(z) = P_1(z) e^{\lambda_1 z} + P_2(z) e^{\lambda_2 z} + \cdots + P_l(z) e^{\lambda_l z},$$

wo $P_1(z), P_2(z), \ldots, P_l(z)$ Polynome sind, von dem Grad $(m_1 - 1), (m_2 - 1), \ldots, (m_l - 1)$ bzw.; $P_1(z)$ und $P_l(z)$ sind nicht identisch gleich Null.

Wir benutzen den folgenden Hilfssatz: Wenn die Koeffizienten der Polynome $P_k(z)$, $(k = 1, 2, \ldots, l)$ reell sind, so hat die Funktion $\varphi(z)$ höchstens $n - 1$ reelle Nullstellen (G. Pólya und G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis II, 1925, Aufgabe 75, S. 48). Wir beschränken uns auf den Fall, in dem die beiden Geraden $\Im z = \alpha$ und $\Im z = \beta$ nullstellenfrei sind; hierauf läßt sich der allgemeine Fall ersichtlicherweise zurückführen. Wir betrachten die Funktion $\psi(z) = e^{-\lambda_1 z} \varphi(z)$, welche dieselben Nullstellen wie die Funktion $\varphi(z)$ hat. Es soll $ABCD$ ein Rechteck in der z-Ebene sein; entlang der Seite AB ist $z = \alpha i + t$, wo t von $-a$ bis a $(a > 0)$ wächst; entlang BC ist $z = a + iu$, u wächst von α bis β; entlang CD ist $z = \beta i + t$, t nimmt von a bis $-a$ ab; entlang DA ist $z = -a + iu$, u nimmt von β bis α ab. Es soll N_a die Anzahl der Nullstellen der Funktion $\psi(z)$ im Rechteck sein, und es soll $\psi(z) = U + iV$ sein. Bezeichnen wir weiter mit p die Anzahl der Punkte, in denen das Verhältnis $\frac{V}{U}$ so verschwindet, daß es aus dem Negativen zum Positiven übergeht, und mit q die Anzahl derjenigen Punkte, in denen es aus dem Positiven zum Negativen übergehend verschwindet,

wenn z $ABCD$ durchläuft, dann ist nach einem klassischen Satz von Cauchy $N_a = \frac{1}{2}(p - q)$.

Für AB haben wir $\psi(\alpha i + t) = U(t) + iV(t)$, wo U und V dieselbe Form wie $\psi(z)$ haben, aber mit reellen Koeffizienten, und nach obigem Hilfssatz hat jedes der Polynome U und V höchstens $n - 1$ reelle Nullstellen. Daraus folgt, daß $\frac{V}{U}$ höchstens $n - 1$ mal verschwindet, wenn z AB durchläuft. Dasselbe gilt ersichtlich für CD. Für BC wird der Wert von $\psi(z)$ durch das letzte Glied $P_l(a + iu)\, e^{(\lambda_l - \lambda_1)(a + iu)}$ gegeben, wenn a genügend groß ist. Wir können stets den Koeffizienten vor der höchsten Potenz von z im Polynom $P_l(z)$ gleich 1 setzen, wenn wir die Funktion $\psi(z)$ mit einem entsprechenden Faktor multiplizieren. Dann ist das Verhältnis $\frac{V}{U}$ für großes a, wie man leicht sieht, beliebig nahe an $\operatorname{tg}(\lambda_l - \lambda_1)u$, d. h. $\frac{V}{U}$ verschwindet $\frac{(\lambda_l - \lambda_1)(\beta - \alpha)}{\pi}$ mal, indem es vom Negativen ins Positive übergeht, wenn z BC durchläuft. Da $\lim\limits_{a=\infty} P_k(-a + iu)\, e^{(\lambda_k - \lambda_1)(-a + iu)} = 0$, $(k = 2, 3, \ldots, l)$, $\alpha \leqq u \leqq \beta$, so werden für große a U und V dasselbe Vorzeichen wie der reelle bzw. imaginäre Teil von $P_1(-a + iu)$ haben. Daraus folgt, daß U und V für große a ihre Vorzeichen beibehalten, wenn z DA durchläuft. Da $\lim\limits_{a=\infty} |\psi(\pm a + iu)| > 0$, so werden die reellen Teile der Nullstellen im Streifen $\alpha \leqq \Im z \leqq \beta$ beschränkt sein, d. h. für große a $N_a = N$. Auf diese Weise folgt

$$0 \leqq p \leqq \frac{2(\lambda_l - \lambda_1)(\beta - \alpha)}{2\pi} + 2(n - 1), \quad 0 \leqq q \leqq 2(n - 1),$$

woraus $$\frac{(\lambda_l - \lambda_1)(\beta - \alpha)}{2\pi} - n + 1 \leqq N \leqq \frac{(\lambda_l - \lambda_1)(\beta - \alpha)}{2\pi} + n - 1,$$

was zu beweisen war.

Sofia. Nikola Obreschkoff.

(Eingegangen am 10. 3. 28.)

Lösung der Aufgabe 29. Die Aufgabe lautete:

Es enthalte eine geschlossene konvexe Fläche C den Nullpunkt im Innern, und es sei die kleinste Distanz von C vom Nullpunkt gleich ϱ. Bezeichnet man allgemein die durch Dilatation vom Nullpunkt aus im Verhältnis t entstehende Fläche mit C_t, so ist die kleinste Distanz der Punkte von C_t und C_{t_1} gleich $\varrho\,|t - t_1|$. A. Ostrowski.

Beweis. Sei $t > t_1$.

Ist P_{t_1} irgendein Punkt der Fläche C_{t_1}, r seine kleinste Entfernung von C_t und P_t ein Punkt der Fläche C_t, der von P_{t_1} diese Entfernung hat, so liegt innerhalb der um P_{t_1} mit r als Radius beschriebenen Kugel $\varkappa$ sicher kein Punkt von C_t. τ sei die Tangentialebene der Kugel $\varkappa$ in P_t. Dann muß τ die Stützebene zu C_t in P_t sein, so daß der Nullpunkt O auf derselben Seite von τ liegen muß wie P_{t_1}.

Den Fall, daß die Verbindungsgerade $P_t P_{t_1}$ durch den Nullpunkt hindurchgeht, können wir als trivial übergehen.

Die Gerade OP_t durchstößt die Fläche C_{t_1} in einem zwischen O und P_t gelegenen Punkte Q_{t_1}.

Die durch Q_{t_1} gehende zu τ parallele Ebene τ_1 ist dann Stützebene zu C_{t_1} in Q_{t_1}. Daher liegt der Punkt P_{t_1} entweder auf τ_1 oder in demselben Halbraum in bezug auf τ_1 wie O selbst.

$P_t P_{t_1}$ steht auf τ und τ_1 senkrecht.

Die beigegebene Figur stellt die Schnittfigur dar, welche die durch O, P_t und P_{t_1} gelegte Ebene erzeugt.

Der Winkel, den die Gerade OP_t mit den Ebenen τ und τ_1 bildet, werde α genannt und der Normalabstand der beiden Ebenen τ und τ_1 m.

Dann ist die Distanz $\overline{P_t P_{t_1}} \geqq m = \overline{P_t Q_{t_1}} \sin\alpha$.

Das Lot von O auf τ_1 muß die Fläche C_{t_1} in einem Punkte S_{t_1} treffen, der entweder auf τ_1 oder zwischen O und τ_1 liegt. Ist d der Abstand des Nullpunktes O von τ_1, so ist also $d \geqq OS_{t_1} \geqq \varrho \cdot t_1$.

Es ist $\overline{OQ_{t_1}} = \frac{d}{\sin\alpha}$ und daher $\overline{P_t Q_{t_1}} = \frac{d}{\sin\alpha} \cdot \frac{t-t_1}{t_1}$.

Folglich $$\overline{P_t P_{t_1}} \geqq d \cdot \frac{t-t_1}{t_1} \geqq \varrho(t-t_1) \quad \text{w. z. b. w.}$$

F. Gruber.

(Eingegangen am 12. 4. 28.)

Zu Aufgabe 57. Eine vollständige Antwort auf die in Aufgabe 57 gestellten Fragen findet sich bei Halphen, Bull. de la Soc. math. de France 5 (1876/77), S. 170 (= Œuvres II, S. 102—107). Ich verdanke diesen Hinweis einer freundlichen Mitteilung von Herrn G. Pólya. H. Hasse.

(Eingegangen am 1. 4. 28.)

Bericht über die Tagung des Mathematischen Reichsverbandes in Kissingen.

Im Anschluß an die Tagung der deutschen Mathematiker und Physiker in Kissingen fand Freitag, den 23. September 1927, unter dem Vorsitz von Prof. Hamel, Berlin, eine Sitzung des M. R. statt. Auf der Tagesordnung standen folgende Punkte:

1. Vortrag des Ministerialrates Prof. Dr. Metzner „Über die Umgestaltung des mathematischen und physikalischen Unterrichtes an den höheren Schulen und einige sich daraus ergebende Folgerungen für die Vor- und Fortbildung der Lehrer".
2. Geschäftssitzung des Mathematischen Reichsverbandes.
   a) Bericht des Arbeitsausschusses.
   b) Entlastung und Neuwahl des Ausschusses.
   c) Wahl der Kassenrevisoren.
   d) Anregungen aus der Versammlung.
   e) Sonstiges.

Der Vortrag Metzner ist in der Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht (Verlag Springer, Berlin) Heft 1, 1928 erschienen und steht Interessenten als Sonderabdruck bei dem Schriftführer des M. R. zur Verfügung. (Studienrat W. Zabel, Berlin-Neutempelhof, Dreibundstr. 43.)

Herr Hamel dankte dem Vortragenden und eröffnete die Diskussion, in der nach Koebe die Herren Noether, Rothe, Emde über den Begriff der angewandten Mathematik sprachen. Hierbei betonte Noether ausdrücklich, daß angewandte Mathematik Kenntnisse der Anwendungsgebiete erfordert, nicht nur Kenntnis der Methoden. In einer Verkennung dieses Umstandes sieht er den Grund der gelegentlichen Unterschätzung der Bedeutung der angewandten Mathematik. Während Blumenthal von der Mathematik verlangt, daß sie den Schüler zur Wahrheit und zur Selbstkritik erziehen soll, weist Toeplitz auch auf die Ausbildung in Stil und Form hin. Kopff, Berlin, bemerkt folgendes:

Das Studium der Astronomie bei den zukünftigen Lehrern der Mathematik und Naturwissenschaften an höheren Schulen bedarf einer Vertiefung. Der Zwang der Teilnahme an astronomischen Vorlesungen und Übungen erscheint hierzu nicht hinreichend, es wäre vielmehr sehr erwünscht, wenn die Astronomie in der Prüfungsordnung in stärkerem Maße als bisher Berücksichtigung finden könnte.

Herr Hamel erstattete nun folgenden Bericht des Arbeitsausschusses des M. R.

Der A.-A. hat im Jahre 1926/27 sechs Sitzungen abgehalten, worüber die Rundschreiben 52—57 Näheres mitteilen. Außerdem fanden vielfache Sitzungen von U.-A. statt, zu denen auch Herren, die nicht dem A.-A. angehören, besonders von außerhalb Berlin, zugezogen wurden. Ich möchte diesen Herren unseren wärmsten Dank für ihre Mitarbeit aussprechen.

1. Ein U.-A., an dem die Herren Dr. ing. Harm (vom V. D. I.), Schilling, Willers und Zühlke mitwirkten, beschäftigte sich mit dem Unterricht in Angewandter Mathematik (mit Ausschluß der Darstellenden Geometrie). Wie Sie sich erinnern, verhandelten wir im vorigen Jahr, in Düsseldorf, über Darstellende Geometrie. Es schien nötig, auch die anderen Teile der Angewandten Mathematik, die in den amtlichen Richtlinien nicht erwähnt werden, in Betracht zu ziehen. Der U.-A. beschränkte sich zunächst auf allgemeine Gesichtspunkte. Das Ergebnis der Arbeit, dessen Fassung von den Herren Feigl, Willers und Zabel herrührt, wird in den Unterrichtsblättern, der Zeitschr. f. d. math. Unterricht und im Philologenblatt veröffentlicht werden, wie auch unsere bisherigen Arbeiten zu den Richtlinien.

2. Unsere ergänzende Arbeit zu den Richtlinien fand durch eine Ausarbeitung für die Mädchenschulen ihren vorläufigen Abschluß. An ihr ist vor allem Herr Dr. Dorner beteiligt. Sie ist im Philologenblatt Nr. 35 veröffentlicht, ferner auch bei Lietzmann und bei Wolff erschienen.

3. Der Antrag, den Herr Lorey im vorigen Jahre in Düsseldorf stellte, daraufhin zu wirken, daß die Städte für ihre Bibliotheken mehr mathematische Literatur anschaffen, fand seine Erledigung. Ein Ausschuß, bestehend aus den Herren Feigl, Fuchs, W. Jacobsthal, stellte eine Liste von solchen Büchern zusammen, die besonders zur Anschaffung empfohlen werden sollen. Das Verzeichnis wird mit einem entsprechenden Antrag den Städten zugehen

und soll auch den Beiräten zur Verfügung stehen. Hier wäre gute Gelegenheit für die Beiräte, an unserer Arbeit mitzuhelfen.

4. Zu der Denkschrift des sächsischen Ministeriums über Schulreform wurde Stellung genommen und vor allem darauf hingewiesen, daß die mathematische Ausbildung an den sprachlichen Zweigen der Gymnasien als völlig unzureichend und vor allem zur Ergreifung eines technischen Studiums als ungenügend bezeichnet werden muß. Auch wurde die Stellung des M. R. zur Frage der Mathematik an den Oberrealschulen klargelegt. Siehe „Die höhere Schule im Freistaat Sachsen“, 5. Jahrgang 1927, Heft 7, S. 103—104.

5. Der Bericht Zabel (Dresden 1926): Über die Zuverlässigkeit der mathematischen Schulbuchliteratur ist bei Wolff in den Unterrichtsblättern erschienen (XXXIII. Jahrgang 1927, Nr. 4, S. 107—110).

6. Eine Aufgabe, die wir im nächsten Jahr in Angriff nehmen werden, stellen die Arbeitsgemeinschaften für Mathematik. Vier Fragen richtete der A.-A. in Rundschreiben 55 an die Gesellschaften und die Beiräte. Wenige Antworten sind bis jetzt eingelaufen. Wir bitten um mehr Material. Die Fragen lauteten: a) Sind dieser Einrichtung Schwierigkeiten gemacht worden? b) Wo haben mathematische Arbeitsgemeinschaften stattgefunden? c) Welche Themen sind behandelt worden? d) Welche Erfahrungen wurden damit gemacht?

7. Ganz besonders beschäftigt uns die Frage der Ausbildung der Studienreferendare vor dem Assessorexamen. Die bisherige Ausbildung wird allgemein als besserungsbedürftig angesehen. Die Fragen der Konzentration an einem Ort, die Fragen einer auf das neue Humanitätsideal hinzielenden allgemeinen pädagogischen Ausbildung und dazu, was uns besonders interessiert, die Fragen des Übergangs von der Hochschulmathematik zur Schulmathematik müssen befriedigend gelöst werden. Wir werden versuchen, unter Berücksichtigung der allgemeinen pädagogischen Gesichtspunkte zunächst für unser Fach eine Antwort zu finden, die so beschaffen ist, daß anschließend im DAMNU eine Beantwortung der Frage für die ganze mathematisch-naturwissenschaftliche Frage, dann in Erweiterung für die gesamte Philologenschaft gefunden werden kann.

Zunächst beschäftigte sich ein kleiner Ausschuß, bestehend aus den Herren W. Jacobsthal, Feigl, Rothe, Behrend, Toeplitz, Lietzmann und Zühlke, mit der Frage. Auf der Tagung des F. V. in Frankfurt im April dieses Jahres traten wir mit der Fragestellung an die Versammlung heran. Dem frühen Stadium entsprechend konnte unser Auftreten nur zu unserer Orientierung dienen. Wir erweiterten dann den Ausschuß durch die Berliner Herren Fuchs, Dreetz, Oberschulrat Dr. Lamla, Direktor Matthée von der Preuß. Hauptstelle und den Unterzeichneten, ferner durch die Auswärtigen Kerst (Zwickau) und Salkowski (Hannover, ab Oktober auch Berlin). An der ersten Sitzung des ganzen Ausschusses, die im Juni in Berlin stattfand, nahmen auch die Ministerialräte Prof. Dr. Metzner (Berlin) und Dr. Freitag (München) teil. Herr Ministerialrat Dr. Löffler (Stuttgart) hat auch seine Mitarbeit in Aussicht gestellt, war aber an der Teilnahme verhindert.

Damit ist die Arbeit auf breitester Basis in die Wege geleitet, der Anfang verspricht guten Erfolg. Doch will ich hier noch nichts weiter sagen, da es sich um ein keineswegs einfaches Problem handelt, das nicht von heute auf morgen erledigt werden kann. Wir bitten unsere Beiräte sehr um Mit-

arbeit. Jede Anregung ist willkommen, zumal die Ausbildung der Referendare von Ort zu Ort wahrscheinlich verschieden gestaltet werden muß. Inzwischen ist die Arbeit des Ausschusses beendet worden, das Ergebnis wird im Philologenblatt erscheinen.

8. Geschäftlich ist noch zu berichten, daß der mathematisch-naturwissenschaftliche Verein Württembergs nicht mehr existiert. Durch Umwandlung in eine Landesgruppe des F. V. verlor er seine Selbständigkeit und schied damit aus dem M. R. aus.

Der Vorsitzende verliest darauf den Kassenbericht, der von den Herren Scheffers und P. B. Fischer geprüft und richtig befunden ist.

Kassenbericht.

Jahresabschluß über das Geschäftsjahr 1926/27.

Einnahmen.

Bestand am 1. 9. 26. . .	290.52 ℛℳ
Beiträge d. Gesellschaften	545.50 „
Bankzinsen	2.23 „
zusammen	838.25 ℛℳ

Ausgaben.

Rundschreiben	37.05 ℛℳ
Druckkosten	54.— „
Zeitungen und Bücher .	75.— „
Reisezuschüsse	369.80 „
Postscheck- und Bankgebühren	2.95 „
Auslagen der Unterausschüsse	9.53 „
Auslagen bei der Kassenführung	4.03 „
Auslagen bei dem Schriftführeramt	25.— „
zusammen	577.36 ℛℳ

Aufrechnung.

Einnahmen	838.25 ℛℳ
Ausgaben	577.36 „
Kassenbestand am 23. 8. 27	260.89 ℛℳ

Nachweis über den Kassenbestand.

Auf Postscheckkonto 15401	111.87 ℛℳ
Bei der Dresdner Bank	143.70 „
Bar in der Kasse	5.32 „
zusammen	260.89 ℛℳ

Darauf wird dem alten A.-A. Entlastung erteilt. In den neuen A.-A. werden wiedergewählt: Bieberbach, Dorner, Dreetz, Ebner, Feigl, Fuchs, Hamel, W. Jacobsthal, Neis, Schwerdt, Zabel, Zacharias.

Zu Kassenprüfern werden die Herren Scheffers und P. B. Fischer wiedergewählt.

Hamel,
Vorsitzender.

Literarisches.

Besprechungen.

Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. II. Bd. Analysis, III. Teil, 2. Hälfte, S. 675—1648. Leipzig 1923—1927, B. G. Teubner.

Der Band behandelt in sieben Artikeln fast ausschließlich Fortschritte der letzten 30 Jahre. Die Artikel sind:

Nörlund, Neuere Untersuchungen über Differenzengleichungen.
Bohr und Cramér, Die neuere Entwicklung der analytischen Zahlentheorie.
Rosenthal-Zoretti-Montel-Fréchet, Neuere Untersuchungen über Funktionen reeller Veränderlichen.
Hilb und M. Riesz, Neuere Untersuchungen über trigonometrische Reihen
Hilb und Szász, Allgemeine Reihenentwicklungen.
Lichtenstein, Neuere Entwicklung der Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus.
Hellinger und Toeplitz, Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten.

BIEBERBACH.

Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. III. Bd. Geometrie, III. Teil. Leipzig 1922—1927, B. G. Teubner.

Der Band ist der Differentialgeometrie gewidmet und enthält die Artikel:

v. Mangoldt, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Kurven und Flächen.
v. Lilienthal, Die auf einer Fläche gezogenen Kurven.
Scheffers, Besondere transzendente Kurven.
v. Lilienthal, Besondere Flächen.
Voss, Abbildung und Abwicklung zweier Flächen aufeinander.
Liebmann, Berührungstransformationen.
Liebmann, Geometrische Theorie der Differentialgleichungen.
Salkowski, Dreifach orthogonale Flächensysteme.
Weitzenböck, Neuere Arbeiten über algebraische Invariantentheorie. Differentialinvarianten.
Berwald, Differentialinvarianten in der Geometrie. Riemannsche Mannigfaltigkeiten und ihre Verallgemeinerungen.

BIEBERBACH.

Mathematische Werke von Karl Weierstraß. Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der preußischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Kommission. VII. Bd.: Vorlesungen über Variationsrechnung. 324 S. 4°. Leipzig 1927, Akademische Verlagsgesellschaft.

R. Rothe hat in vieljähriger mühevoller und hingebender Arbeit und Verwendung vieler Vorlesungsnachschriften eine schöne Darstellung des Weierstraßschen Werkes geschaffen. Ein erster für den heutigen Geschmack etwas zu langatmig und umständlich geratener Abschnitt behandelt die Theorie der Maxima und Minima von Funktionen einer und mehrerer Veränderlichen, der zweite Abschnitt in 25 Kapiteln die Variationsrechnung. Man hat in ihm eine

kaum überholte Einführung in dieses Gebiet vor sich. Vielleicht kann man heute die zweite Variation etwas kürzer behandeln. Im ganzen aber haben die seit Weierstraß' Zeiten verflossenen 50 Jahre nicht vermocht, diese Einführung veralten zu lassen. Besondere Hervorhebung verdienen noch die zahlreichen völlig durchgeführten Beispiele. BIEBERBACH.

Th. L. Heath, The thirteen books of Euclid's elements. Translated from the text of Heiberg with introduction and commentary. 2d edition. Revised with additions. 3 Bde. Cambridge 1926, University Press.

Die ersten 151 Seiten sind einer allgemeinen historischen Einleitung gewidmet. Sie enthält unter anderem die folgenden Abschnitte: Euklid und die Traditionen über ihn. Euklids andere Werke. Proclus und seine Quellen. Euklid in Arabien. Die hauptsächlichsten Ausgaben und Übersetzungen. Allgemeine Einleitung in die Elemente. Es folgt die Übersetzung, die durchweg mit einem sehr eingehenden Kommentar versehen ist. BIEBERBACH.

Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauß und Christian Ludwig Gerling. Herausgegeben im Auftrage der Gesellschaft zur Beförderung der gesamten Naturwissenschaften zu Marburg von Dr. Clemens Schäfer. Mit einem Bildnisse Gerlings und einem Faksimilebrief von Prof. Schweikart an Gauß. XX u. 820 S. Berlin 1927, Otto Elsner, Verlagsgesellschaft m. b. H. Geh. RM 35.—, geb. RM 40.—.

Man wird es gewiß verstehen, daß in Marburg gelegentlich der 400 Jahrfeier seiner Universität der Wunsch entstand, den Briefwechsel ihres Gerling mit Gauß gedruckt zu sehen. So bezieht sich denn die von Schäfer verfaßte Einleitung durchaus auf Gerling, und auch im ganzen Briefwechsel steht mehr Gerling und das was Gerling von Gauß' Schaffen näherlag, im Vordergrund. So tritt das Mathematische in den Hintergrund. Neben weitgehenden Einblicken in das Familienleben und die geodätischen Arbeiten von Gauß sind es nur wenige Seiten von eigentlich mathematischem Interesse, oft Erläuterungen, die Gauß zu von Gerling unverstandenen Stellen seiner Arbeiten gibt. Es kommt dabei zu dem in den Gaußwerken schon Publizierten kaum etwas Neues hinzu. Vielleicht wird aber manche Äußerung zum Parallelenpostulat oder zur Geometria situs oder zum Raumvolumen darüber hinaus noch interessieren. BIEBERBACH.

L. G. du Pasquier, Léonard Euler et ses amis. 125 S. Paris 1927, J. Hermann.

Gegenstand des Buches ist eine Biographie Eulers, die ihn in seinen Beziehungen zu hervorragenden Zeitgenossen zeigt. Über seine Leistungen auf den verschiedensten Gebieten der mathematischen Wissenschaften wird im Laufe der Darstellung ein knapper aber sehr instruktiver Überblick gegeben. Dem Verfasser ist die Gabe, anregend und interessant zu schreiben, in hohem Maße zu eigen. BIEBERBACH.

L. E. Dickson, Algebren und ihre Zahlentheorie. Mit einem Kapitel über Idealtheorie von A. Speiser. Zürich und Leipzig 1927, Orell Füßli.

Diese deutsche Übersetzung des 1923 in Chikago in englischer Sprache erschienenen Lehrbuchs der „Algebren und ihrer Zahlentheorie", oder — wie

wir in Deutschland zu sagen gewohnt sind — der „Theorie der hyperkomplexen Zahlsysteme", ist lebhaft zu begrüßen. Handelt es sich doch um die erste deutschsprachliche Darstellung in Buchform[1]) einer in neuerer Zeit entstandenen, hochbedeutenden Theorie, die in wachsendem Maße das Interesse der Algebraiker und Zahlentheoretiker auf sich zieht. Es ist hier nicht der Ort, auf die zahlreichen Vereinfachungen, Verbesserungen und Erweiterungen gegenüber dem englischen Text einzugehen, über die das Vorwort unterrichtet. Die deutsche Übersetzung soll vielmehr hier in Anbetracht des Umstandes, daß in diesem Jahresbericht das Original seinerzeit nicht besprochen wurde, als eine Neuerscheinung behandelt werden.

Durchweg klar und elegant geschrieben, fast überall auch leicht faßlich und durch zahlreiche, teils kurz eingestreute, teils ausführlicher erörterte Beispiele und Anwendungen belebt, führt das Buch aufbauend auf nur ganz geringen Vorkenntnissen aus der elementaren Algebra zu den großen und schönen Hauptsätzen über Algebren, an deren Auffindung sein Verfasser Dickson und dessen Landsmann Wedderburn in hervorragendem Maße beteiligt sind, und von da aus in die heute noch in vollem Fluß befindlichen Untersuchungen über die arithmetischen Eigenschaften der Algebren.

Im 1. Kapitel werden einige Begriffe und Tatsachen aus der elementaren Algebra vorangestellt, in der Hauptsache die für die Folge grundlegende Matrizentheorie. Wenn es sich hierbei um mehr als nur eine kurze Rekapitulation handeln soll, so wird dem Leser doch wohl ein wenig zu viel zugemutet; denn für eine erste Einführung genügt es meines Erachtens nicht, nur den Spezialfall der zweireihigen Matrizen ausführlich zu entwickeln und die Übertragung auf n-reihige Matrizen in so weitem Maße dem Leser zu überlassen.

Das 2. Kapitel bringt dann die Definition der Algebren durch ein System von Postulaten. Dadurch, daß die Gültigkeit des assoziativen Gesetzes der Multiplikation nicht von vornherein für den Begriff „Algebra" gefordert wird, wird einerseits demjenigen schon ein Stückchen Weges geebnet, der sich mit einer, sicher aussichtsreichen, Verallgemeinerung der Theorie auf nicht-assoziative Algebren beschäftigen will — so sind die späteren Kapitel 4 und 5, die vorbereitend die Methodik für die Strukturuntersuchung von Algebren bringen, unabhängig vom assoziativen Gesetz der Multiplikation gehalten —, andererseits auch ein gewisser formaler Vorteil für die Darstellung erreicht.

Der letztere macht sich hauptsächlich im folgenden 3. Kapitel über Divisionsalgebren geltend. Dieses verfolgt einen doppelten Zweck. Einmal sind die Divisionsalgebren grundlegend für die spätere allgemeine Theorie. Zweitens liefern sie eine große Reihe durchsichtiger Beispiele von Algebren; das 2. Kapitel gab dem Leser außer der vollständigen Matrixalgebra in einem Körper noch kein Beispielmaterial zur Hand. Nun kann eine spezielle Algebra nur durch ihr Multiplikationsschema explizit gegeben werden. Die Bedingungen, unter denen ein solches Multiplikationsschema assoziativ ist, sind aber sehr unhandlich, und die Assoziativität wird daher meist auf Umwegen (Zurückführung auf Matrizenmultiplikation) geprüft. Es ist deshalb gut, wenn man

1) Außer dem Dicksonschen englischen Werk lag bisher in Buchform nur noch das bereits 1921 erschienene italienische: M. Scorza, Corpi numerici e algebre, vor, auf das ich nachher noch kurz zu sprechen komme.

auch schon vor einer solchen Untersuchung und von ihrem Ergebnis unabhängig von einer Algebra reden darf.

Am Schluß dieses 3. Kapitels (§§ 34—44) gibt Dickson seine neueren, ziemlich komplizierten Untersuchungen wieder, die sich mit der Konstruktion von Divisionsalgebren höherer Ordnung beschäftigen. Wenn hierbei zur Ersparung von Vorkenntnissen die Anwendung der Gruppentheorie und der Galoisschen Theorie vermieden wird, so kann das wohl nicht als ein Gewinn bezeichnet werden. Demjenigen, der diese Vorkenntnisse nicht besitzt, werden jene Paragraphen so erhebliche Verständnisschwierigkeiten bereiten, daß er sie lieber überschlägt, was zum Glück ohne Schaden für das Verständnis des Folgenden geschehen kann. Der Kundige aber wird sich das volle Verständnis erst dadurch erringen können, daß er sich die Ausführungen gruppentheoretisch zurechtlegt. Es handelt sich dann darum, aus den Elementen α eines Galoisschen Erweiterungskörpers n-ten Grades des Grundkörpers K und den n Automorphismen σ der zugehörigen Galoisschen Gruppe durch geeignete Multiplikationsvorschriften eine assoziative Divisionsalgebra n^2-ter Ordnung so aufzubauen, daß insbesondere jedes Produkt $\sigma \cdot \alpha \cdot \sigma^{-1}$ gleich dem durch Anwendung von σ auf α entstehenden Körperelement α_σ wird, eine Fragestellung, die übrigens auch für die höhere algebraische Zahlentheorie von großer Bedeutung werden kann.

Nebenbei können doch die Grundlagen der Gruppentheorie nicht als Fremdkörper in der Theorie der Algebren angesehen werden, deren Heranziehung man zu vermeiden bestrebt sein muß. Im Gegenteil, mir scheint die Gruppentheorie als Algebra mit einer einzigen Verknüpfung recht eigentlich die organische Vorstufe zu der mit zwei Verknüpfungen arbeitenden Theorie der Körper und allgemeiner der Algebren zu sein. Ihr Fehlen in Dicksons Buch ist zu bedauern, besonders da an späterer Stelle (§ 127) und in dem Speiserschen Anhang doch von ihr Gebrauch gemacht wird.

Im 4.—7. Kapitel folgen die Hauptsätze über die algebraische Struktur der Algebren. Diese Kapitel bilden in ihrem in großer, einheitlicher Linie gehaltenen Aufbau und in der schönen Abgeschlossenheit ihrer Resultate das Glanzstück der ganzen Theorie. Auch vom darstellerischen Standpunkt kann man sie als die wohlgelungensten des Buches bezeichnen. Nachdem zunächst im 4. und 5. Kapitel die Methodik für die Strukturuntersuchung auseinandergesetzt ist, und zwar, wie schon hervorgehoben, unabhängig vom assoziativen Gesetz der Multiplikation, werden im 6. und 7. Kapitel, jetzt unter Zugrundelegung dieses Gesetzes, die Zerlegung einer beliebigen Algebra in ihr Radikal und eine halbeinfache Algebra, ferner die direkte Zerlegung der halbeinfachen Algebren in einfache Algebren und schließlich der Hauptsatz über einfache Algebren entwickelt, der diese Algebren auf die bereits früher zur Sprache gekommenen beiden Grundtypen: Divisionsalgebren und vollständige Matrixalgebren zurückführt, nämlich als vollständige Matrixalgebren in Divisionsalgebren charakterisiert. Diese grundlegenden Sätze, deren Schönheit und Tragweite dem Leser nicht zuletzt auch durch die elegante und leichtfaßliche Darstellung so recht nahe gebracht wird, gehen in der Hauptsache auf Wedderburn zurück, der dann auch Dickson bei der Abfassung dieser Kapitel unterstützt und dabei die Beweise seiner 1907 erschienenen Originalarbeit vervollständigt und vereinfacht hat. Das zuvor zitierte Buch von Scorza, das vor allem wegen seiner guten Literaturnachweise und seiner stärkeren Berück-

sichtigung der älteren Literatur neben dem Dicksonschen Buch seinen Wert als Einführung in die Theorie der Algebren behält, bringt diese Struktursätze noch nicht in der gleichen Vollständigkeit; merkwürdigerweise kennt nämlich Scorza die Wedderburnsche Arbeit nicht, obwohl diese 14 Jahre früher liegt.

Man könnte, gerade für die deutsche Ausgabe, daran denken, in diesen Kapiteln die in Deutschland durch E. Noether und ihre Schule gut eingebürgerte idealtheoretische Ausdrucksweise (invariante Teilalgebra = zweiseitiges Ideal usw.) einzuführen. Dadurch würde die Darstellung insofern an Plastizität verlieren, als dann die Bausteine der auf ihre Struktur zu untersuchenden Algebren nicht wieder als Algebren, sondern als Ideale, also als etwas dem Wortlaute nach Heterogenes aufträten. Daher erscheint eine Aufgabe der vom Verfasser gewählten Ausdrucksweise, als deren Vorbild man die in der abstrakten Gruppentheorie übliche ansehen kann, zugunsten der idealtheoretischen nicht wünschenswert. Wenn aber die Resultate jeweils nebeneinander in beiden Ausdrucksweisen ausgesprochen würden, so würde damit die Bedeutung dieses zentralen Teils der Theorie auch von anderer Seite in begrüßenswerter Weise beleuchtet und gleichzeitig dem Verständnis der Anwendungen dieser Strukturuntersuchungen auf die arithmetische Idealtheorie in dem Speiserschen Anhang aufs beste gedient. Zu wünschen wäre auch die ohne große Umstände mögliche Aufnahme eines Kapitels, das jene Strukturuntersuchungen mit der Theorie der irreduziblen Darstellungen von Matrizen in Beziehung setzt.

Noch einige Kleinigkeiten terminologischer Art: Daß in dem Dicksonschen Begriff „halbeinfach“ = „Nichtexistenz einer invarianten nilpotenten eigentlichen Teilalgebra“ auch der Spezialfall „Nullalgebra der Ordnung 1“ enthalten ist, ist sicherlich ein Schönheitsfehler. Ist doch der Zweck, der mit der Einführung dieses Begriffes verbunden ist, der, das „Nilpotente“ auszuschalten. Es erscheint daher zweckmäßig, den Zusatz „eigentlich“ in der obigen Definition auszulassen, so daß dann „halbeinfach“ mit „Radikal = 0“ gleichbedeutend ist, wodurch alle Sätze einen eleganteren Wortlaut erhalten, und wie es späterhin auch ausschließlich gebraucht wird. Damit dann „einfach“ = „Nichtexistenz einer invarianten eigentlichen Teilalgebra“ ein Spezialfall von „halbeinfach“ bleibt, wie es aus sprachlichen Gründen zu verlangen ist, braucht nur die Definition von „einfach“ hinter die von „halbeinfach“ gestellt und dabei „halbeinfach“ mitgefordert zu werden. Dadurch wird die gänzlich uninteressante Nullalgebra der Ordnung 1 auch aus dem Begriff „einfach“ entfernt. Es wäre ferner zur Glättung der Ausdrucksweise und der Resultate zu empfehlen, so wie es Speiser nachher in seinem Anhang tut, auch schon von vornherein den Nullfall nicht aus dem Begriff „Radikal“ auszuschließen, so daß jeder Algebra ein (eindeutig bestimmtes) Radikal zukommt. Das, was Dickson mit „Radikal“ meint, kann ja dann als „eigentliches Radikal“ oder „Radikal $\neq 0$“ bezeichnet werden. Weshalb wird das bequeme Wort „Zentrum“, das die englische Ausgabe noch hat (central), ganz vermieden? Einige Sätze werden dadurch etwas umständlich. Schließlich kann das Rudiment der altgriechischen Auffassung, die Eins sei keine Zahl, das sich in Formulierungen wie: „Eine halbeinfache Algebra, welche nicht einfach ist, ist eine direkte Summe von einfachen Algebren“ findet, heute nicht mehr gutgeheißen werden.

Mit dem 8. Kapitel beginnt die arithmetische Theorie. Ihr letztes Ziel ist, in einer beliebigen Algebra eine Zahlentheorie nach dem Vorbild der elementaren oder allgemeiner der algebraischen Zahlentheorie zu entwickeln. Daher werden im 8. Kapitel zunächst die Grundlagen der Theorie der ganzen algebraischen Zahlen kurz vorgeführt. Insbesondere werden die Fälle hervorgehoben, in denen ein Euklidischer Algorithmus vorhanden ist und somit die Arithmetik noch genau nach dem Muster der elementaren Zahlentheorie aufgebaut werden kann. Das Hervorheben dieser speziellen, einfachen Fälle ist natürlich didaktisch wertvoll. Immerhin erhält man wohl erst dann das volle Verständnis für die Besonderheit dieser Fälle, wenn man als Gegenstück dazu die allgemeine Sachlage kennenlernt. Von diesem Gesichtspunkt aus, und dann vor allem auch in Hinsicht auf die in Speisers Anhang folgende allgemeine Idealtheorie, wäre die Aufnahme der Grundlagen der Idealtheorie für die ganzen algebraischen Zahlen in diesem Kapitel zu wünschen.

Im 9. Kapitel wird dann die Arithmetik in einigen der im 3. Kapitel als Beispiele behandelten speziellen Divisionsalgebren (verallgemeinerte Quaternionen) entwickelt, nämlich in solchen, für die ein Euklidischer Algorithmus existiert, insbesondere für die gewöhnlichen Quaternionen, deren Arithmetik schon Hurwitz, wesentlich komplizierter, behandelt hatte. Auch hier wieder wäre, wie im vorigen Kapitel, die Aufnahme allgemeinerer Fälle, in denen die idealtheoretische Betrachtungsweise einsetzen muß, als Vorbereitung für den Speiserschen Anhang wünschenswert. Nicht jedermanns Geschmack werden die unverhältnismäßig breit gehaltenen Anwendungen jener arithmetischen Untersuchungen auf die Lösung von quadratischen diophantischen Gleichungen sein, und nicht jeder wird, wie man zwischen Dicksons Zeilen herauslesen kann, in solchen Anwendungen ein Hauptziel der Zahlentheorie der Algebren sehen, vielmehr in der Erkenntnis ihrer arithmetischen Struktur, deren Studium in diesem Kapitel zwar nicht gerade vernachlässigt wird, aber doch zugunsten der Anwendungen etwas beiseite gedrängt erscheint.

Um so mehr wird die letztere Geschmacksrichtung durch das nun folgende 10. Kapitel befriedigt. Hier steht zunächst die zweckmäßigste Definition der ganzen Größen einer Algebra zur Diskussion, und es wird die Überlegenheit von Dicksons organischer und invarianter Definition (maximaler, die Haupteinheit enthaltender Integritätsbereich von Größen, die ganzen algebraischen Gleichungen genügen) über frühere Definitionen klar beleuchtet. Die Dicksonsche Definition erscheint übrigens auch auf Grund der neueren axiomatischen Untersuchungen E. Noethers über ganze algebraische Zahlen als die „richtige", ebenso auch vom Standpunkt der kürzlich von H. Brandt[1]) gewonnenen grundlegenden Erkenntnisse, die ich nachher noch berühren werde. Nur darf man von diesem Standpunkt Dickson lediglich so lange folgen, als kein bestimmter unter den charakterisierten, i. a. unendlich vielen Integritätsbereichen ausgezeichnet wird, während Auszeichnungen wie die auf S. 157 nicht mehr zufriedenstellen.

Es wird sodann das arithmetische Studium beliebiger Algebren auf den Fall halbeinfacher oder sogar einfacher Algebren, d. h. also vollständiger

---

1) Verh. d. Schweiz. Nat. Ges., Freiburg 1926, II. Teil, S. 155, und Basel 1927, II. Teil, S. 86; außerdem Vortrag auf der Jahresversammlung der D. M.-V. in Kissingen 1927, dieser Jahresber. Bd. 37, S. 5.

Matrixalgebren über Divisionsalgebren, zurückgeführt. Für den Fall, daß die Divisionsalgebra einen Euklidischen Algorithmus besitzt, wird schließlich eine Arithmetik solcher vollständiger Matrixalgebren entwickelt, die als Verallgemeinerung der arithmetischen Elementarteilertheorie erscheint. Man könnte hier noch ein paar Worte über diese Beziehungen wünschen.

Das 11. Kapitel beginnt mit der Einführung des Begriffs „Zahlbereich", worunter ein abstraktes Elementsystem mit kommutativer und assoziativer Addition, assoziativer und mit der Addition distributiver Multiplikation und Null- und Einselement verstanden wird. Über die Bedeutung dieses Begriffs für die Zahlentheorie der Algebren wird nachher noch zu reden sein. Aus ihm erwächst durch die Forderungen der Unbeschränktheit von Subtraktion und Division der Begriff „Quasi-Körper" (für den v. d. Waerden die Bezeichnung „Schiefkörper" vorgeschlagen hat), und durch die weitere Forderung der Kommutativität der Multiplikation der Begriff „Körper". Es wird dann der Wedderburnsche Fundamentalsatz bewiesen, daß jeder endliche Quasi-Körper kommutativ, also ein Körper ist. Im Beweis wird die Hauptschwierigkeit leider durch ein Zitat abgetan. Das Heranziehen des hier zitierten Hilfssatzes aus der elementaren Zahlentheorie, wobei dann unliebsame Ausnahmefälle besonders erledigt werden müssen, ist durch eine kürzlich erschienene Abhandlung von E. Artin[1]) überflüssig geworden, in der ein Beweis des Wedderburnschen Satzes gegeben wird, der ohne Zweifel allen bisher vorliegenden vorzuziehen ist.

Über den in § 128, I. untergelaufenen Fehler (für die als vertauschbar mit allen Elementen des Quasi-Körpers K eingeführte Unbestimmte x darf nicht ein Element aus K eingesetzt werden) ist der Verfasser, wie ich höre, bereits von anderer Seite orientiert worden.

Im 12. Kapitel wird zunächst, anschließend an die Einführung des abstrakten Körperbegriffs im 11. Kapitel, festgestellt, daß sich die ganze in Kapitel 1—7 entwickelte Theorie (mit geringen Abweichungen für Primzahlcharakteristik) auf abstrakte Grundkörper überträgt, an Stelle der in Kapitel 1—7 ausschließlich zugelassenen Grundkörper aus komplexen Zahlen. Aus demselben Gesichtspunkt, wie vorher hinsichtlich der Gruppentheorie ausgeführt, erscheint es wünschenswert, die Theorie von vornherein in dieser Allgemeinheit zu entwickeln, was ja technisch nur ganz geringe Abänderungen der Kapitel 1—7 erfordern würde. Der Leser, den man im 2. Kapitel vor den doch reichlich abstrakten Begriff der Algebra stellen kann, verträgt auch im 1. Kapitel den abstrakten Körperbegriff, der überdies zu seiner allmählichen Heranführung an den Begriff der Algebra vorzüglich geeignet ist.

Des weiteren bringt das 12. Kapitel eine Anzahl ergänzender Sätze verschiedener Art über Algebren, teils mit ausführlichen Beweisen, teils nur Resultate mit Literaturhinweis.

Das 13. Kapitel ist der schon mehrfach erwähnte, der deutschen Übersetzung von A. Speiser beigegebene Anhang. Es behandelt die von Speiser kürzlich[2]) entwickelte Idealtheorie in rationalen Algebren und gibt damit erst den eigentlichen Abschluß der arithmetischen Kapitel Dicksons, die ja über eine allgemeine Orientierung und Grundlegung hinaus nur in Spezialfällen zur Aufstellung arithmetischer Gesetzmäßigkeiten gelangen. Speisers Ziele sind

1) Abh. a. d. Math. Sem. d. Hamb. Univ. V (1927), S. 245.
2) Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft Zürich, Bd. 71 (1926), S. 8.

die Gewinnung einer Übersicht über alle Ideale einer rationalen, halbeinfachen Algebra sowie einer Einsicht in ihre multiplikativen Beziehungen.

Das erste Ziel, eine Übersicht über die Ideale, erreicht er in aller Vollständigkeit. Seine Methode besteht darin, das Studium der Ideale auf das Studium der Restklassenbereiche der Algebra nach Primzahl- und allgemeiner Primzahlpotenzmoduln zurückzuführen. Für einen Primzahlmodul p ist dieser Restklassenbereich eine Algebra im endlichen Restklassenkörper mod. p, deren Struktur nach den im Dicksonschen Hauptteil erhaltenen Resultaten und der im 12. Kapitel angegebenen Übertragung auf abstrakte Grundkörper bekannt ist, für einen Primzahlpotenzmodul p^n aber nur ein „Zahlbereich" im Sinne des 11. Kapitels (mit unbeschränkter Subtraktion und gewissen Endlichkeitseigenschaften — E. Noetherscher Doppelkettensatz). Die Struktur dieser Restklassenbereiche liefert dann unmittelbar eine Übersicht über die Idealteiler von p bzw. von p^n. Man könnte hier wünschen, daß die erforderlichen Struktursätze für „Zahlbereiche" mit den genannten Eigenschaften, die eine naturgemäße Verallgemeinerung der in den Dicksonschen Kapiteln 6 und 7 durchgeführten Strukturuntersuchungen bilden, nicht in den Gang der Untersuchungen eingeflochten, sondern im Anschluß an die Einführung der „Zahlbereiche" im 11. Kapitel gesondert behandelt würden, etwa so wie sie E. Artin in einer kürzlich erschienenen Arbeit[1]) in völliger Allgemeinheit mit großer Eleganz entwickelt, um sie dann anschließend in einer weiteren Arbeit[2]) auf die arithmetischen Untersuchungen anzuwenden. Die sprachlich und gedanklich außerordentlich knapp gehaltene Form, die dem Leser viele nicht immer leichte Zwischenkonstruktionen selbst überläßt, hauptsächlich aber die Einflechtung jener algebraischen Strukturuntersuchungen in die arithmetischen Entwicklungen, die den Leser zu dauerndem Umstellen zwingt, bringen es mit sich, daß dieser inhaltlich so wertvolle Speisersche Anhang nur mit großen Schwierigkeiten lesbar ist.

Was das zweite Speisersche Ziel, eine Einsicht in die multiplikativen Beziehungen der Ideale, betrifft, so gelangt Speiser zwar im kommutativen Fall und für die zweiseitigen Ideale im nicht-kommutativen Fall zu befriedigenden Resultaten. Dagegen geht seine Multiplikation für einseitige Ideale nicht über die Vielfachenbildung hinaus. Hier geben wohl erst die schon erwähnten Brandtschen Erkenntnisse eine befriedigende Lösung, die dann auch Artin in seiner oben genannten arithmetischen Arbeit verwendet. Die Brandtsche Grundidee besteht darin, gleichzeitig alle maximalen Integritätsbereiche von ganzen Größen zu betrachten. Es stellt sich dann heraus, daß jedes Rechtsideal für einen bestimmten maximalen Integritätsbereich gleichzeitig Linksideal für einen anderen maximalen Integritätsbereich ist. Erst auf dieser allgemeineren Grundlage wird eine naturgemäße Definition der Multiplikation einseitiger — im Brandtschen Sinne besser „ungleichseitiger" — Ideale möglich. Auch was die multiplikativen Beziehungen der zweiseitigen Ideale betrifft, ist wohl die Methode der oben genannten arithmetischen Arbeit Artins der Speiserschen vorzuziehen, weil Artin dort ganz nach dem Muster der gewöhnlichen Idealtheorie für algebraische Zahlen (Krullscher Beweis des Fundamentalsatzes der Idealtheorie) vorgeht. Diese Brandtschen und

1) Abh. a. d. Math. Sem. d. Hamb. Univ. V (1927), S. 251.
2) Ebenda, S. 261.

Artinschen Ergebnisse liegen zeitlich nach dem Erscheinen der deutschen Ausgabe des Dicksonschen Buches, so daß ihre Erwähnung hier lediglich als Hinweis für den Leser dieser Besprechung gedacht ist. Bei einer ev. Neuauflage werden sie ja wohl auch ohnedies nicht übersehen werden.

Auf S. 298 unten findet sich ein, wie ich höre dem Verfasser schon bekannt gewordenes, Versehen: Rechts- und Linksnorm sind in halbeinfachen Algebren einander gleich.

Zum Schluß sei noch der Wunsch nach einem kurzen Eingehen auf die historische Seite ausgesprochen. Die Einleitungen zu den einzelnen Kapiteln, die in willkommener Weise jedesmal einen kurzen Vorausblick geben, könnten vielleicht in dieser Hinsicht ausgestaltet werden. Insbesondere wären im 2. Kapitel ein paar Worte über die Vorgeschichte der ganzen Theorie erwünscht, die dann gleichzeitig zur sachlichen wie terminologischen Orientierung des Lesers in der bisherigen Literatur gute Dienste leisten würden, der in dieser Hinsicht bisher noch auf das erwähnte italienische Werk von Scorza angewiesen ist.

Für zahlreiche wertvolle Hinweise und Ratschläge zu dieser Besprechung bin ich den Herren H. Brandt und H. Rauter zu großem Dank verpflichtet. Mittelbar sind auch aus einer gelegentlichen Unterhaltung mit Herrn E. Artin über die Theorie der hyperkomplexen Zahlsysteme gewonnene Anregungen der Besprechung zugute gekommen. H. Hasse.

Rudolf Rothe, Höhere Mathematik. Teil I: Differentialrechnung und Grundformeln der Integralrechnung nebst Anwendungen. 2. Aufl. VII u. 186 S. (Teubners technische Leitfäden Bd. 21.) Leipzig u. Berlin 1927, B. G. Teubner. Kart. *RM* 5.—.

Die erste Auflage dieses ausgezeichneten Werkchens wurde in diesen Berichten Bd. 34 (1926), S. *172* u. *173* angezeigt und ausführlich besprochen. Es hat seinen Charakter durchgängig beibehalten, nur einige Verbesserungen und Erweiterungen sind angebracht worden. Hoffentlich läßt der Verfasser die beiden weiteren in Aussicht genommenen Teile bald nachfolgen.

Stuttgart. Doetsch.

Fritz Wicke, Einführung in die höhere Mathematik unter besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse des Ingenieurs. Zwei Bände. VI u. 921 S. Berlin 1927, J. Springer. Geb. *RM* 48.—.

Die beiden Bände enthalten eine Einführung in die Differential- und Integralrechnung, in die analytische Geometrie der Ebene und des Raumes sowie in die Theorie der Differentialgleichungen, gegliedert in sechs Abschnitte: 1. Das Differenzieren. 2. Das Integrieren. 3. Analytische Geometrie der Ebene (hierbei die Differentialquotienten höherer Ordnung). 4. Analytische Geometrie des Raumes (hierbei partielle Differentiation und Nomographie). 5. Von den Reihen. 6. Die Differentialgleichungen. Das Werk, das aus dem Unterricht des Verfassers an der Gewerbeakademie in Chemnitz hervorgegangen ist, enthält eine große Zahl von Anwendungsbeispielen, die der Ingenieurpraxis entnommen sind, und dürfte für diejenigen unter den Technikern, die alle Begründungen möglichst rasch wieder vergessen wollen und denen es nur auf die Formeln ankommt, als Stoffsammlung und Übungsbuch ganz brauchbar

sein. Wenn der Verfasser jedoch im Vorwort die Hoffnung ausspricht, daß sein Buch auch dem Mathematikstudierenden manche Anregung bieten möge, so kann man demgegenüber nur den dringenden Wunsch hegen, daß das Buch einem solchen, wenigstens in den ersten Semestern, ja nicht in die Hände falle. In allen Dingen nämlich, die sich auf die Grundlegung der Differential- und Integralrechnung beziehen, ist das Buch nicht nur lückenhaft (das könnte man im Hinblick auf seinen Untertitel noch entschuldigen), sondern enthält fast ausschließlich Falsches. Alle die unsinnigen und von den ernsthaften Mathematikern seit Jahrzehnten bekämpften und gebrandmarkten Redewendungen und Scheinbegründungen werden hier wieder aufgewärmt. Wie soll da endlich Remedur geschaffen werden, wenn solche Sachen immer von neuem gedruckt werden, gar in einem angesehenen Verlag wie dem Springerschen! Bei der Schwere dieser meiner Anschuldigungen kann ich nicht umhin, sie etwas ausführlicher zu belegen. Zunächst ist festzustellen, daß dieses Werk von fast 1000 Seiten überhaupt keine Definition des Grenzübergangs und des Grenzwertes enthält, obwohl natürlich andauernd damit operiert wird. (Eine Begründung der Irrationalzahl wird, was im Hinblick auf das Ziel des Buches verständlich ist, nicht gegeben; aber auch der Begriff der Irrationalzahl selbst scheint für den Verf. überhaupt nicht zu existieren; denn bei der Einführung von Koordinaten schreibt er S. 281: „Wandert P von E_1 bis zum Mittelpunkte M von $E_1 E_2$, so ist λ (das Teilverhältnis) beständig positiv und ein echter *Bruch*(!); wächst also(!) von 0 bis 1".) Das erstemal treten diese Begriffe auf, als die Tangente an die Parabel $y = x^2$ bestimmt wird (S. 19). Dies wird zunächst geometrisch ausgeführt (übrigens auch herzlich schlecht: „Die bemerkenswerteste der unendlich vielen durch P gehenden Parabelsekanten ist nun die in P an die Parabel gelegte Tangente(!); sie ergibt sich, wenn der Punkt P_1 auf der Parabel wandert, bis er in unmittelbare Nachbarschaft(!) von P gelangt, bis er zum Nachbarpunkt(!) von P auf der Parabel wird") und dann analytisch folgendermaßen erklärt: Dem geometrischen Hineinrücken von P_1 nach P entspricht analytisch, daß $x_1 - x = \Delta x$ sich der Grenze Null nähert, und nun weiter mit den Worten des Verfassers: „Man schreibt dies in folgender Form: $\lim\limits_{x_1 \to x} (x_1 - x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x$ (!!). Nun ergibt sich aber für diesen Grenzwert des Differenzenquotienten der rein quadratischen Funktion $\lim\limits_{x_1 \to x} \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$." Um also den Begriff „Grenzwert des Differenzenquotienten" zu erklären, spricht man davon, daß Δx sich der Grenze 0 nähert, schreibt dies in der von mir durch (!!) gekennzeichneten unsinnigen Weise, mogelt nun unvermerkt das Wort „Grenzwert der Differenzenquotienten" ein und setzt in einer Formel, in der das für den harmlosen Leser ganz offensichtlich geht, nach berühmten Mustern einfach Δx *gleich* 0! Dabei fühlt sich der Verf. einige Seiten später (S. 33, 34) bei Gelegenheit einer Rückschau, die immerhin schon etwas besser ist, zu der Bemerkung veranlaßt: „Erklärlicherweise bieten derartige Grenzübergänge, besonders dem Anfänger, mannigfaltige Schwierigkeiten; man muß daher ganz besondere Sorgfalt auf sie verwenden", worauf er aber sofort auf der nächsten Seite, bei der Erklärung des Differentialquotienten für *beliebige* Funktionen, denselben Fehler macht, den Grenzübergang $\Delta x \longrightarrow 0$ mit der Ermittlung des Wertes für $\Delta x = 0$ zu verwechseln. Man wird so in dem Verdacht bestärkt, daß dem Verf. selber das

Wesen des Grenzüberganges nicht klar geworden ist, besonders wenn man S. 46, wo der Verf. den Leser vor der irrtümlichen Auffassung des Differentialquotienten als eines wirklichen Quotienten warnen will, folgenden Unsinn liest: „Wir haben erst . . Δy gebildet und sie dann durch . . Δx dividiert. Diese Division läßt sich wirklich ausführen (der Verf. redet von allgemeinen Funktionen!), wie die bisher angeführten Beispiele bestätigen, so daß, wenn auch die linke Seite noch in Form eines Quotienten geschrieben wird, die rechte Seite in Wirklichkeit überhaupt kein Quotient mehr ist(!). Daher(!) kann auch dem Grenzwert der linken Seite, dem Differentialquotienten, nicht die Bedeutung eines Quotienten zukommen.“ Nun wird sich niemand mehr wundern, eine halbe Seite weiter folgende Erklärung zu finden: „Aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ . . . erhält man durch formales Multiplizieren mit dx die Gleichung $dy = f'(x) \cdot dx$. Man bezeichnet hierin dx, das den Grenzwert der Differenz Δx darstellt(!), $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x = dx$(!), als das Differential der unabhängigen Veränderlichen, und ebenso $dy = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y$ als das Differential der abhängigen Veränderlichen.“ An keiner Stelle wird der Leser trotz der sonstigen Weitschweifigkeit darauf aufmerksam gemacht, daß der auf den Differenzenquotienten angewandte Grenzübergang gar keinen Grenzwert zu liefern braucht, daß es also nichtdifferenzierbare Funktionen gibt; im Gegenteil, man kann sich des Eindrucks nicht erwehren, daß der Verf. allen Ernstes glaubt, jede stetige Funktion sei auch differenzierbar. Bei allen Differentiationsregeln wird nämlich sorgfältig Stetigkeit (und nur diese) vorausgesetzt, z. B. S. 43: „Die Summe zweier stetigen Funktionen wird differenziert, indem . . .“ oder S. 45: „Das Produkt zweier stetigen Funktionen wird differenziert, indem . . .“ — Für die Kettenregel wird der übliche falsche Beweis gegeben. — Das Fehlen einer Definition des Grenzwertes und einer klaren Einsicht in das Wesen des Grenzüberganges rächt sich natürlich ganz besonders bei den unendlichen Reihen. Einen Vorgeschmack bekommt man schon in dem Abschnitt über das Differenzieren bei Gelegenheit der Exponentialfunktion (S. 134). Ohne daß vorher je von einer unendlichen Reihe und ihrer Behandlung die Rede gewesen ist, folgt auf die Formel

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} \cdot 1 + \frac{1}{2!} \cdot 1\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots$$
$$+ \frac{1}{n!} \cdot 1\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

einfach der kühne Satz: „Wenn jetzt n über alle Grenzen hinauswächst, so nähert sich $\frac{r}{n}$, wobei $r < n$ irgend eine feste endliche Zahl ist, immer mehr dem Werte Null, also der Ausdruck $1 - \frac{r}{n}$ immer mehr dem Werte 1, und es wird

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots.\text{“}$$

Aber auch in dem den unendlichen Reihen gewidmeten fünften Abschnitt sucht man vergebens nach einer Definition des Summenwertes und einer (ohne

diese natürlich unmöglichen) befriedigenden Behandlung der Konvergenzfrage. Dies alles glaubt der Verf. durch eine Betrachtung der geometrischen Reihe erledigen zu können. Dabei wird der Zusammenhang zwischen absoluter und einfacher Konvergenz sowie der Majorantensatz einfach als selbstverständlich angenommen oder, genauer gesagt, hereingemogelt (S. 622). Daß bei solchen Methoden die Behandlung der Taylorschen Reihe ganz ungenügend ausfallen mußte, liegt auf der Hand. Charakteristisch ist, daß der Mittelwertsatz der Differentialrechnung erst erscheint, als er bei der Herleitung des Lagrangeschen Restgliedes in der Reihentheorie (S. 623) sich als notwendig erweist, aber auch hier ganz unzureichend bewiesen wird. — S. 657 bringt der Verf. das Kunststück fertig, die gliedweise Integrierbarkeit jeder Reihe in aller Ausführlichkeit zu beweisen (daß es sich dabei zunächst um eine Potenzreihe handelt, spielt keine Rolle; denn das wird keineswegs benutzt). — Ein besonders deutliches Licht wird auf die Harmlosigkeit, mit der in dem Buche operiert wird, geworfen durch den allgemeinen „Beweis", daß $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ ist (S. 508): Es wird $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \left\{ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cdots}{\cdots} \right\}$ angeschrieben und dann gesagt: „Wegen der gegenseitigen Unabhängigkeit der Zuwüchse Δx und Δy kann ... die Reihenfolge der Grenzübergänge nicht von Einfluß auf das Endergebnis sein, so daß wir auch schreiben können ...."

Dies ist nur eine kleine Musterkollektion, sie könnte beträchtlich vermehrt werden. Es ist nicht bloß schade, daß die bekannte mustergültige Ausstattung des Springerschen Verlages an eine derartige Unzulänglichkeit verschwendet ist und daß die viele Arbeit, die sich der Verf. mit dem Zusammentragen der wertvollen Anwendungsbeispiele gemacht hat, durch den theoretischen Rahmen entwertet wird, sondern noch viel mehr zu bedauern, daß durch *ein* solches schlechtes Buch an dem unvorbereiteten mathematischen Publikum mehr verdorben wird, als zehn einwandfreie Bücher wieder gut machen können.

Stuttgart. DOETSCH.

L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie. Bd. 2: Moderne Funktionentheorie. Mit 44 Fig. im Text. 366 S. Leipzig 1927, B. G. Teubner.

Man muß es in unserer allzu publikationsfreudigen Zeit doppelt begrüßen, wenn ein Gelehrter von Rang darauf verzichtet, jedes Aperçu gesondert dem Publikum vorzulegen, und wenn er es statt dessen unternimmt, sein reifes Wissen um ein großes Gebiet zu einem umfassenden, von Grund aus durchdachten Gesamtbild zu gestalten. Mit dieser allgemeinen Einstellung verbindet sich bei Bieberbach ungewöhnliches didaktisches Geschick und Temperament. Es ist daher kein Wunder, daß sich schon der erste Band seines Lehrbuches der Funktionentheorie bei seinem Erscheinen 1921 rasch Anerkennung und Verbreitung erzwang und daß man dem zweiten lange mit Spannung entgegensah.

Felix Klein hat gelegentlich die Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen als das Kernstück der Analysis des vergangenen Jahrhunderts bezeichnet. In der Tat scheint dieser Ausspruch kaum übertrieben, wenn man sich vergegenwärtigt, wie durch Ausgestaltung und Verknüpfung einfacher Grundgedanken: komplexe Integration, konforme Abbildung, Ap-

proximation durch rationale Funktionen bzw. Potenzreihenentwicklung, allmählich ein Organismus mathematischer Zusammenhänge offenbar wurde, der in fast alle Gebiete der Analysis und ihrer Anwendungen hineinreicht und an dessen Klarlegung die meisten Mathematiker mehrerer Generationen gearbeitet haben. Kaum anderswo prägt sich der in der Analysis des 19. Jahrhunderts erzielte Fortschritt so deutlich aus, als in der heute selbstverständlichen — vor wenigen Jahrzehnten noch kaum erfüllbaren — Forderung, daß jeder mathematisch Gebildete sich in den Grundtatsachen der Funktionentheorie völlig zu Hause fühlt und daß auch das Interesse an funktionentheoretischen Spezialfragen heute noch immer lebendig ist, wo die allgemeine Entwicklung doch schon einen gewissen Abschluß erreicht zu haben scheint.

Bieberbach begnügt sich nicht damit, die klassische, heute zu unentbehrlichem Rüstzeug gewordene Funktionentheorie darzustellen. Diesem Zwecke diente wesentlich der erste Band. Dessen Ausführungen erfahren gewissermaßen ihre Abrundung und Krönung durch die beiden in den zweiten Band aufgenommenen Kapitel über konforme Abbildung und über Uniformisierung. Im ersten der beiden wird für den Riemannschen Abbildungssatz auf Grund der Vorarbeiten von Koebe, Carathéodory und Fejér eine besonders einfache Beweisanordnung gegeben; das zweite ist bemerkenswert durch die originelle und strenge Art, in welcher die topologische Seite der Uniformisierungstheorie behandelt wird.

Im übrigen aber geht der zweite Band weit über den Rahmen der Darstellung einer abgeschlossenen Disziplin hinaus und führt in anregender Form und mit manchen originellen Wendungen nach verschiedenen Richtungen bis an die Peripherie moderner Spezialforschung. Wenn dabei auch naturgemäß von Vollständigkeit nicht die Rede sein kann und wenn auch manche der behandelten Gegenstände im Laufe der weiteren Entwicklung vielleicht wieder etwas mehr in den Hintergrund treten werden, so wird gerade diese auf Aktualität hindrängende Tendenz des zweiten Bandes vielen reiferen Studenten und Forschern eine höchst willkommene Erleichterung und Anregung beim Eindringen in diese modernen Fragen sein.

Es ist im Rahmen einer Besprechung unmöglich, von der Fülle des behandelten Stoffes ein wirkliches Bild zu geben. So will ich nur kurz erwähnen, daß die Theorie der beschränkten Funktionen, ausgehend vom Schwarzschen Hilfssatz, entwickelt wird, daß die Theorie der ganzen Funktionen bis zu den modernsten Untersuchungen von Carleman und Denjoy dargestellt ist und daß auch die neuere Theorie der analytischen Fortsetzung und die Theorie der Zetafunktion in den Kreis der Betrachtung gezogen werden.

Gegenüber den Vorzügen und Verdiensten des Buches erübrigt sich eine Kritik von Einzelheiten. Nur in einem Punkte möchte ich eine grundsätzlich etwas abweichende Einstellung zum Ausdruck bringen. Ich kann der von Bieberbach verfochtenen und mit Konsequenz und großem Geschick in dem Buche durchgeführten funktionentheoretischen Monroedoktrin nicht zustimmen: Die Funktionentheorie den „rein funktionentheoretischen" Methoden! Eine solche kategorische Forderung trägt wohl der Tatsache zu wenig Rechnung, daß die Analysis ein in sich überall zusammenhängendes organisches Ganzes bildet, dem man die Wechselwirkung der verschiedenen Bezirke untereinander nicht durch dogmatische Verbote einengen darf.

R. Courant.

J. E. Campbell, A course of differential geometry. Prepared for the press with the assistance of E. B. Elliott. Oxford 1926, Clarendon Press.

Das Buch stellt ein knappes Kompendium dar. Sein Gegenstand ist die Differentialgeometrie der Bewegungsgruppe des dreidimensionalen euklidischen Raumes, vervollständigt durch einen gewissen Überblick über die mehrdimensionale Differentialgeometrie; es schließt sich in Auswahl und Umgrenzung des Stoffes eng an die Bücher von Darboux und Bianchi an. Es unterscheidet sich von diesen wesentlich dadurch, daß die Darstellung konsequent auf den Tensorkalkül aufgebaut ist. So können alle erforderlichen Rechnungen knapp und durchsichtig geführt werden. Dieser vorteilhafte Stenogrammstil der Rechnung hat leider zu einem Telegrammstil der Darstellung verführt. Man vermißt die Angabe der leitenden Gedanken, das Warum und den Zusammhang der Fragestellungen. Man vermißt die betonte Herausarbeitung der Ergebnisse. Doch mögen dies Äußerlichkeiten sein, die zwar den für die Benutzung in Betracht kommenden Leserkreis einschränken, die aber den inneren Wert des Dargebotenen nicht beeinflussen. Dieser liegt, wie schon bemerkt, in der konsequenten Benutzung moderner Errungenschaften auch für die Darstellung der sogenannten elementaren Differentialgeometrie. Leider hat sich der Verfasser die gerade für diesen Zweck äußerst fruchtbare Parallelverschiebung von Levi-Civita entgehen lassen. Erst sie ermöglicht eine befriedigende Behandlung der geodätischen Krümmung und z. B. der Gauß-Bonnetschen Formeln. Für die geodätische Krümmung klebt der Verfasser an einer längst veralteten, innerlich hohlen Definition, gestützt auf den Winkel, den geodätische Tangenten benachbarter Kurvenpunkte in ihrem angeblichen Schnittpunkt miteinander bilden sollen. Die natürliche Übertragung der Definition aus der Differentialgeometrie der Flächen konstanter Krümmung Null wird indessen von Levi-Civitas Parallelverschiebung geliefert, wenn man den Ausgang von dem Winkel nimmt, den der Tangentenvektor der orientierten Kurve im Punkte $s + \Delta s$ mit demjenigen Vektor des Punktes $s + \Delta s$ bildet, den man aus dem Tangentenvektor im Punkte s durch Parallelverschiebung längs der Kurve gewinnt. Von hier gelangt man fast unmittelbar zur Darbouxschen Darstellung der geodätischen Krümmung

$$\frac{1}{\varrho_g} = \frac{d\vartheta}{ds} + \frac{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}{g_{11}} \left[\frac{du^1}{ds} \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} + \frac{du^2}{ds} \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \right],$$

wo ϑ der Winkel ist, den der Tangentenvektor mit der ersten Parameterlinie im Kurvenpunkte s bildet, und wo s die Bogenlänge bedeutet. Durch die Formel der partiellen Integration gelangt man von hier sofort zur Gauß-Bonnetschen Formel

$$\int \frac{ds}{\varrho_g} = 2\pi - \iint \left[\frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}{g_{11}} \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \right) - \frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}{g_{11}} \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \right) \right] du^1 du^2,$$

wobei links über eine geschlossene eckenfreie Kurve zu integrieren ist, die ein einfach zusammenhängendes Flächenstück abgrenzt, und die so orientiert ist, daß das Innere zur Linken liegt. Nur zu dem Posten 2π ist dabei noch ein Wort zu sagen. Es ist die Gesamtänderung von ϑ bei Umlauf um den Be-

reich. Dabei kann man ϑ in der Parameterebene deuten, wenn man dort die erste Fundamentalform der Fläche zur Winkelmessung verwendet. Man deformiere diese Fundamentalform stetig, bis man zur euklidischen Winkelmessung gelangt ist. Dabei ändert sich am Vielfachen von 2π nichts. Daß bei euklidischer Winkelmessung gerade 2π herauskommt, sieht man nach Erhard Schmidt so ein: Man gehe erst von der Tangente zur orientierten Sehne über, lasse dann den Anfangspunkt auf einer innen benachbarten Kurve laufen und lasse sich diese dann auf einen Punkt zusammenziehen.

Das hier skizzierte Verfahren scheint mir vor dem des Verfassers den Vorzug zu verdienen, denn dieses bedient sich spezieller Koordinaten. Darin sehe ich einen prinzipiellen Nachteil, nicht weil mich — um mit Herrn Study zu reden — das Geklapper der Koordinatenmühle nervös machte, sondern weil ein Beweis, der sich nur an speziellen Koordinaten durchführen läßt, oft einen Umweg einschlägt und, wie im vorliegenden Fall, gedanklich fremde Elemente heranträgt.

Hier und da sind mir einige Naivitäten aufgefallen, die das schöne Gesamtbild des Buches beeinträchtigen, so z. B. gleich zu Beginn, wo von der Einbettbarkeit eines Riemannschen $n$dimensionalen Raumes in einen $\frac{n(n+1)}{2}$ dimensionalen euklidischen als von einer Selbstverständlichkeit Gebrauch gemacht wird und wo nicht einmal angenommen wird, daß die Maßbestimmung des Riemannschen Raumes positiv definit sei. Auch sonst werden im Buche selten die Voraussetzungen der Entwicklungen angegeben. Es scheint mir nicht am Platze, alles aufzuzählen, was ich bemerkt habe. Immerhin möchte ich noch auf die Karrikaturen auf S. 29 aufmerksam machen.

Bieberbach.

G. Fubini und E. Čech, Geometria proiettiva differenziale. Tomo secondo. 405 S. Bologna 1927, Nicola Zanichelli. Geh. L. 75.—.

Der zweite Band des Werkes über projektive Differentialgeometrie enthält den Rest der Entwicklungen über projektive Flächentheorie, ferner eine Darstellung der differentiellen projektiven Theorie der Geradenkomplexe und -kongruenzen in Linienkoordinaten sowie gewisser Gebilde in Überräumen. Außerdem geben in vier Anhängen G. Tzitzéica, E. Bompiani und A. Terracini zusammenfassende Berichte über ihre eigenen Untersuchungen und über andere Methoden zur projektiven Differentialgeometrie.

Das achte Kapitel des Gesamtwerkes, mit dem der Band beginnt, ist den nicht geradlinigen Flächen gewidmet, die eine kontinuierliche Gruppe von automorphen projektiven Deformationen gestatten. Zunächst werden im Anschluß an das vorhergehende Kapitel alle Flächen mit einer stetigen G_2 von solchen Deformationen bestimmt, d. h. ihre projektiven Grundformen und die endlichen Transformationen der G_2 angegeben. Es folgt ein kurzer Bericht über den Weg, den Fubini ursprünglich zur Lösung dieser Aufgabe eingeschlagen hat, sowie über die Liesche Methode zur Auffindung aller Flächen, die eine mindestens dreigliedrige stetige Gruppe von Kollineationen zulassen. Schließlich werden (nach Čech) alle nicht geradlinigen Flächen mit einer stetigen G_1 von projektiven Deformationen in sich bestimmt, und zwar im komplexen und reellen Gebiet. Das erfordert ungemein langwierige und müh-

same Rechnungen, wie schon daraus hervorgeht, daß nicht weniger als 30 verschiedene Typen solcher Flächen existieren.

Im neunten Kapitel wird zunächst bei Verwendung beliebiger Flächenparameter der Satz von Moutard bewiesen, daß der Ort der Kegelschnitte, die in einem Punkte O einer Fläche deren ebene Schnitte durch eine nichtasymptotische Flächentangente OP oskulieren, eine F_2 ist. Sodann werden gewisse gegenüber Kollineationen und Korrelationen invariante, von einem Parameter abhängende Zuordnungen zwischen dem Ebenenbündel durch O und dem Punktfelde in der Tangentenebene der Fläche in O studiert, die Čech unter dem Namen „Korrespondenzen Σ" eingeführt hat.

Mit Zuhilfenahme dieser Korrespondenzen Σ lassen sich zu einer beliebigen Geraden, welche die Tangentenebene eines Punktes O der Fläche in einem anderen Punkte P schneidet, die konjugierten Polaren in bezug auf die beiden Moutardschen F_2 konstruieren, die zur Flächentangente OP und zur konjugierten Flächentangente gehören. Man sieht leicht, daß dadurch die Konstruktion dieser Moutardschen F_2 selbst geleistet ist, so daß man auf diese Weise das Flächenelement vierter Ordnung geometrisch beherrscht. Mit der Ausführung und eingehenden Diskussion der angegebenen Konstruktion beschäftigt sich der erste Teil des zehnten Kapitels. Anschließend werden für die einfachsten projektiven Differentialinvarianten einer nicht geradlinigen Fläche geometrische Deutungen gegeben und der Zusammenhang der Moutardschen F_2 der Fläche mit den zur gleichen Flächentangente gehörigen Moutardschen F_2 der beiden asymptotischen Regelflächen erörtert. Endlich werden nochmals der Kegel von Segre sowie die Flächen mit ∞^1 ebenen pangeodätischen Linien besprochen.

Im elften Kapitel entwickelt Fubini seine Behandlungsweise der Geradenkomplexe und -kongruenzen in Linienkoordinaten. Ein Geradenkomplex, der nicht aus den Tangenten einer Fläche oder den Treffgeraden einer Kurve besteht, läßt sich gegenüber den Kollineationen durch zwei apolare quadratische Fundamentalformen völlig kennzeichnen und ist (in zweiter Ordnung) projektiv nicht deformierbar. Die projektive Theorie der Geradenkongruenzen führt Fubini nach Ausschluß der Kongruenzen, die aus den Asymptoten einer Schar einer Fläche bestehen (nebst deren Grenzfällen) auf eine quadratische und eine biquadratische Differentialform zurück. Hier werden die mit der Kongruenz zusammenhängenden Differentialinvarianten und geometrischen Elemente, die der Mehrzahl nach zuerst von Waelsch betrachtet worden sind, ausführlich behandelt und die Normierung der Koordinaten und Grundformen kurz angedeutet. Schließlich wird die projektive Abwickelbarkeit erster Ordnung der Komplexe und Kongruenzen und sehr eingehend die projektive Abwickelbarkeit zweiter Ordnung der Kongruenzen untersucht.

Mit der projektiven Differentialgeometrie in den Überräumen beschäftigt sich das letzte Kapitel. Zunächst wird die Fubinische projektive Theorie der Hyperflächen auseinandergesetzt, die ganz analog zur Theorie der Flächen im dreidimensionalen Raum verläuft. Die wesentlichsten Unterschiede bestehen darin, daß eine n dimensionale Hyperfläche ($n > 2$), die zugleich Enveloppe von ∞^n Hyperebenen ist, projektiv nicht deformierbar ist, und daß die Normierung der Koordinaten und Grundformen hier auf mehr als eine Art geschehen kann. Die Rolle der Lieschen F_2 spielt dabei eine Hyperfläche zweiter Ordnung, die Čech gefunden hat, von dem auch eine Verallgemeine-

rung des Moutardschen Satzes herrührt. Weiter werden die Methoden von Fubini für die nichtparabolischen zweidimensionalen Flächen im vierdimensionalen Raum und von Čech für die Regelflächen in mehrdimensionalen Räumen dargelegt.

Von den Anhängen enthält der erste einen Bericht G. Tzitzéicas über die leitenden Gedanken seiner Arbeiten über die *S*-Flächen (eigentlichen Affinsphären) und *R*-Netze. Im zweiten stellt E. Bompiani seine Untersuchungen zur geometrischen Grundlegung der projektiven Differentialgeometrie im Zusammenhange dar, wobei vor allem der überaus fruchtbare Gedanke im Vordergrund steht, die hier auftretenden differentiellen Bildungen vermöge infinitesimaler Doppelverhältnisse zu definieren. Außerdem werden noch die punktweisen Abbildungen zweier Flächen aufeinander, sowie die projektive Differentialgeometrie der Flächen als Gebilde des Geradenraumes betrachtet. Der letzte Gegenstand berührt sich bereits mit dem des dritten Anhanges, in dem A. Terracini über die Ergebnisse berichtet, die in der von Segre angebahnten Richtung der projektiven Differentialgeometrie in Überräumen von Bompiani, Segre und Terracini erzielt worden sind. Leider erlaubt es der zur Verfügung stehende Raum nicht, auch nur andeutungsweise den umfangreichen Stoff zu besprechen, der hier verarbeitet worden ist. Derselbe Autor referiert im letzen Anhang über seine (vorzugsweise synthetischen) Arbeiten zur Theorie der Flächen, bei denen ein System von Asymptotenlinien oder beide linearen Komplexen angehören.

Zusammenfassend muß man sagen, daß die beiden Verfasser und ihre Mitarbeiter mit dieser ersten Gesamtdarstellung einer ausgedehnten mathematischen Disziplin eine imponierende und dankenswerte Arbeit geleistet haben. Wenn auch das Buch nicht immer ganz leicht zu lesen ist, was zum Teile wohl auch an der Sache selbst liegt, so bildet es doch vermöge der Fülle des behandelten Stoffes, des Reichtums an geometrischen Gedanken, der Einheitlichkeit der Methode eine Quelle der verschiedenartigsten Anregungen für den schaffenden Geometer, ein unentbehrliches Nachschlagewerk für jeden, der sich auf dem Gebiete der projektiven Differentialgeometrie zu orientieren wünscht. Die Verwendbarkeit des Werkes nach dieser letzten Richtung könnte allerdings bei einer Neuauflage durch Hinzufügung eines Sachregisters und eines Literaturverzeichnisses noch wesentlich erhöht werden.

Prag. L. Berwald.

H. Frank und **L. Freibüter, Arithmetik und Algebra für die Oberstufe höherer Lehranstalten,** als Band III der „Mathematik für höhere Schulen“ herausgegeben von H. Frank. 340 S. Münster, Coppenrathsche Buchhandlung.

Die Vorzüge des zweiten Bandes zeichnen auch den dritten Band aus. Der Schüler wird methodisch angeleitet, sich den Stoff, soweit dies möglich ist, selber zu erarbeiten, indem ihm bestimmte Zahlenbeispiele vorgelegt werden, aus denen er durch Herstellen von Tabellen oder Kurven die Gesetzmäßigkeiten herauslesen soll. Dabei verlieren sich die Verfasser nicht in unnötige Breite, so daß auch der Lehrer das Buch vielfach mit Genuß liest. Das gilt wiederum besonders für die geschichtlichen Ausführungen sowie für die Wahrscheinlichkeitslehre. Dieser werden zusammen mit Statistik und staatsbürgerlichen Rechnungsarten fast 50 Seiten gewidmet. Die Experimentenformel und

im Anschluß daran das Gesetz der großen Zahlen und die Gaußsche Fehlerkurve werden gebracht, und wenn diese beiden Sätze auch nicht vollständig bewiesen werden, so wird dem Schüler doch nirgends die Meinung suggeriert, daß ein strenger Beweis geführt sei, wo dies nicht der Fall ist. Die einfachen Methoden der Versicherungsrechnung werden auch diejenigen Schüler zur Mitarbeit anregen, denen man mit abstrakteren Dingen schwer beikommt.

HERMANN WOLFF.

W. Lietzmann, Über die Beurteilung der Leistungen in der Schule. Mathematisches, Psychologisches, Pädagogisches. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Kart. *RM* 6.—.

Die Schrift versucht, „die Leistungsbeurteilung psychologisch und das Psychologische mathematisch zu fassen". „Es sollte eine dringende Anregung gegeben werden, das Rüstzeug der Psychologie und der Mathematik einmal auch bei einem entscheidenden Problem der Pädagogik zum Ansatz zu bringen." Was findet der Mathematiker, um mit diesem zu beginnen, in der Schrift? Die Gaußsche Kurve und den Korrelationsbegriff. Es handelt sich jedoch nicht um eine eingehende Entwicklung der Eigenschaften der Gaußschen Kurve. Das Pólyasche Straßenschema und das Galtonsche Brett führen zunächst zur Darstellung durch einen gebrochenen Linienzug. Dieser schmiegt sich mit zunehmender Ordnungszahl der dargestellten Reihe immer mehr einer stetigen Kurve an. Für diese Kurve wird durch ein anschauliches Verfahren die Gaußsche Darstellung mittels der Exponentialfunktion plausibel gemacht. Der zweite mathematische Gegenstand, der in der Schrift behandelt wird, ist die Korrelationstheorie. Aus diesem Gebiet der Wahrscheinlichkeitslehre werden die Spearman- und die Pearsonformel ebenfalls in anschaulicher Form entwickelt. Das Psychologische in dem Buche betrifft das moderne Testverfahren, von dem hier eine Reihe lehrreicher Beispiele vorgeführt werden. Der wichtigste Gesichtspunkt endlich, unter dem die Schrift betrachtet werden muß, ist der pädagogische. Es handelt sich um die Frage, ob und wie für die Beurteilung der Leistungen in der Schule ein objektiver Maßstab gewonnen werden kann. Hier liegt der Schwerpunkt der Ausführungen des Verfassers. Seine Darstellung gibt kein abschließendes Ergebnis; sie kann und soll nur zu weiteren Versuchen auf diesem noch wenig beackerten Gebiete anregen. Die Hauptarbeit in dieser Hinsicht, soviel wird jeder Leser der Lietzmannschen Schrift erkennen, dürfte in Zukunft den Mathematiklehrern der höheren Schulen zufallen. Und darum sollte jeder Mathematiklehrer sich mit den Lietzmannschen Anregungen beschäftigen und an seinem Teile durch eigene Versuche die Entwicklung des ganzen Fragenkomplexes fördern helfen. Nur wenige Anfänge sind erst vorhanden. Ein dankbares Arbeitsfeld liegt vor uns.

Berlin. MAX ZACHARIAS.

Mathematisch-naturwissenschaftlich-technische Bücherei, herausgegeben von E. Wasserloos und G. Wolff. Berlin 1927, Otto Salle.

Band 1: F. Kliem und G. Wolff, *Archimedes*. Um die rechte Würdigung der Archimedischen Leistungen zu ermöglichen, beginnen die Verfasser mit einer Darstellung der Mathematik vor Archimedes. In einem kurzen Überblick werden die Mathematik der Babylonier und Ägypter, Thales, Pythagoras,

die drei großen geometrischen Probleme des Altertums (Winkeltrisektion, Kreisquadratur, Würfelverdopplung) und das Exhaustionsverfahren behandelt. Die — eine einzige Seite umfassende — Übersicht über die Elemente Euklids ist in dieser Form wertlos: entweder hätte sie ganz gestrichen oder weiter ausgeführt werden sollen. Auf eine biographische Skizze folgt die Darstellung der Werke, die sich erfreulicherweise nicht auf die mathematischen Leistungen von Archimedes beschränkt, sondern auch seiner physikalisch-technischen Erfindungen und Entdeckungen, seiner Kriegsmaschinen, seiner Leistungen in der Mechanik und Hydrostatik gedenkt. Naturgemäß überwiegt der mathematische Teil. Er gibt einen vorzüglichen Überblick über die Summe der mathematischen Entdeckungen, die wir dem Genie des Archimedes verdanken. Auch die Art und Weise seiner Darstellung und seiner Beweisführung wird an charakteristischen Proben dargestellt, so insbesondere das Infinitesimalverfahren der „Methodenlehre". Aus der Schrift über Konoide und Sphäroide werden leider nur einige Sätze über den Ellipseninhalt gebracht.

Band 8: K. Fladt, *Euklid,* gibt nach einer geschichtlichen Einleitung, in der die Bedeutung der Elemente und ihres Verfassers dargelegt werden, einen Überblick über den Inhalt der 13 Bücher der Elemente. Dabei wird auf die Schwerfälligkeit der Form, die sich aus dem Mangel einer mathematischen Zeichensprache ergibt, wohl gelegentlich hingewiesen, die Beweise selbst aber sind, wo sie angeführt werden, in moderne Form gekleidet. Am eingehendsten ist naturgemäß das erste Buch dargestellt worden. In den späteren Büchern sind die Teile, die heute im wesentlichen als veraltet anzusehen sind und nur noch rein geschichtliche Bedeutung besitzen, kürzer behandelt. Die Beziehung der Definition der Proportion im 5. Buche zu dem modernen Begriff der Irrationalzahl und zu dem Dedekindschen Schnitt hätte eine ausführlichere Darstellung verdient; in der hier gebrauchten Kürze dürfte sie für viele Leser des Buches kaum verständlich sein. Im zweiten Teile des Buches sind die wichtigsten Definitionen und Sätze der Elemente kurz zusammengestellt. Der dritte Teil bringt eine Übersicht über die aus der Beschäftigung mit dem Aufbau der Elemente erwachsene geometrische Axiomatik, hauptsächlich im Anschluß an F. Schur, und einige Bemerkungen über die moderne Lehre vom Flächen- und Rauminhalt.

Band 13: F. Kliem, *Apollonius,* behandelt nach einer einleitenden Mitteilung über die verschiedenen Schriften von Apollonius die nach ihm benannte Berührungsaufgabe der ebenen Geometrie und das Werk über die Kegelschnitte. Die Lösung, die Apollonius selbst von der Berührungsaufgabe gegeben hat, ist uns nur durch die Darstellung bei Pappos angedeutet. Der Verfasser gibt daher in diesem Teile zwei neuere Lösungen der Aufgabe, und zwar die Lösung von Vieta in antiker Methode, fortschreitend von den einzelnen Spezialfällen zur Lösung des allgemeinen Falles, und die andere nach der Methode der neueren Geometrie, mit Benutzung der Potenzlinie und Potenzpunkte, der Ähnlichkeitspunkte und Ähnlichkeitsachsen (von Gergonne und Gaultier). Der Hauptteil des Buches enthält eine Darstellung der Kegelschnittlehre von Apollonius, besonders der ersten vier Bücher. Wichtige Sätze und Beweise werden ausführlich besprochen, im übrigen muß sich der Verfasser bei der Fülle des Stoffes natürlich auf eine gedrängte Übersicht beschränken, die aber trotz der Kürze ein gutes Bild von dem reichen Inhalte des Kegelschnittwerkes gibt.

Band 3: H. Wieleitner, *Mathematische Quellenbücher,* Rechnen und Algebra.

Band 11: H. Wieleitner, *Mathematische Quellenbücher,* Geometrie und Trigonometrie.

Die beiden vorliegenden Quellenbücher zur Elementarmathematik bilden ein vorzügliches Hilfsmittel für den Unterricht. Das erste Bändchen zeigt an kennzeichnenden Proben die allmähliche Entwicklung unserer heutigen algebraischen Formelsprache und Begriffe. Es führt uns von den alten Ägyptern bis zu Eulers Anleitung zur Algebra. Überall wird, soweit es irgend möglich ist, die Eigenart des Originales selbst in typographischer Hinsicht wiedergegeben. Das zweite Bändchen beginnt mit den Möndchen des Hippokrates, gibt einige Proben aus Euklid, Theodosios, Ptolemaios, Pappos und Heron und zeigt dann an einer Reihe von Beispielen die Entwicklung der elementaren Trigonometrie bis zum Moivreschen Satz. Die altsprachlichen Stücke sind in beiden Bändchen in deutscher Übersetzung gegeben, die Proben aus älteren deutschen Schriften, wo es nötig ist, mit sprachlichen Erläuterungen oder Übertragungen versehen. Vor allen Dingen aber ist bei jedem einzelnen Stück die geschichtliche Bedeutung kurz und treffend erläutert. Jeder Band schließt mit einem Namenverzeichnis, das zugleich bei jedem Namen die Lebensdaten und die wissenschaftlichen Leistungen des betreffenden Mathematikers angibt.

Alles in allem haben wir es in den hier besprochenen mathematischen Bändchen der neuen Sammlung mit einer wertvollen Bereicherung unserer mathematischen Schulliteratur zu tun. Nicht nur mathematisch interessierte Schüler der Oberklassen, sondern auch die Mathematiklehrer können aus ihnen Anregungen schöpfen und vielleicht sogar manches Neue aus ihnen lernen.

Berlin. MAX ZACHARIAS.

Handbuch der Experimentalphysik, herausgegeben von W. Wien und F. Harms, Bd. 21. XIII u. 562 S. 8⁰. Leipzig 1927, Akademische Verlagsgesellschaft. Geb. *RM* 49.—.

Wie es sich für einen gelungenen Band eines Handbuches der Experimentalphysik schickt, findet sich in dem vorliegenden 21. Bande des Wien-Harmsschen Handbuches nichts besonders vom mathematischen Standpunkte Interessierendes. Der Band faßt drei Teile zusammen: Über die Anregung der Spektren von Joos, Apparate und Methoden der Spektroskopie von v. Angerer und über den Starkeffekt von Stark selbst. Joos schickt seinem Teil auf 60 Seiten einen kurzen Abriß der Bohrschen Atomtheorie voraus, soweit deren Kenntnis zum Verständnis der experimentellen Spektroskopie notwendig ist; man liest ihn mit Vergnügen über die Virtuosität der knappen Darstellung. Die übrigen Kapitel heißen: 2. Quantitative Anregungsversuche (Anregung durch Elektronenstoß, Anregung durch den Stoß geladener oder ungeladener Atome, Absorptionsspektren, Anregung durch Strahlung, Anregung durch Stöße zweiter Art), 3. Breite der Spektrallinien, Leuchtdauer der Atome und Lebenszeit angeregter Zustände, Veränderung der Lage der Linien und 4. Die gebräuchlichen Lichtquellen. Auf ca. 200 Seiten handelt v. Angerer über Prismenspektroskope, Gitterspektroskope, Interferenzspektroskope und in einem letzten Kapitel über Wellenlängenmessungen, Beobachtungsmethoden und photographische Spektralphotometrie in meisterhafter Weise, die nicht nur die Beschreibung und Handhabung der Apparate bringt, sondern auch eine Unmenge

von Winken und Hinweisen auf Kunstgriffe, die der eigenen Erfahrung des Verfassers entstammen. Nur eine wohldurchdachte Konzentration auf das Wesentliche gestattet eine so eindringliche Darstellung auf verhältnismäßig engem Raume. — Der Bericht über den Starkeffekt ist von den Herausgebern dem Entdecker des Effektes anvertraut worden. Daher bringt dieser Teil eine sehr gute Darstellung der experimentellen Seite und eine umfassende Zusammenstellung der bisherigen experimentellen Daten. Der bekannten Ablehnung der Bohrschen Atomtheorie von seiten des Verfassers ist es zuzuschreiben, daß die theoretischen Auseinandersetzungen leider jeden Zusammenhang mit dem ersten Teil vermissen lassen. v. Simson.

Friedrich Hund, Linienspektren und periodisches System der Elemente. (Aus der Sammlung: Struktur der Materie in Einzeldarstellungen, herausgegeben von M. Born und J. Franck.) VI u. 221 S. 8⁰. Berlin 1927, Julius Springer.

In knapper Darstellung hat der Verfasser es verstanden, vom Einfachen zum Komplizierteren fortschreitend dem Leser ein Bild vom heutigen Stande der Erforschung der Linienspektren und ihrer quantentheoretischen Deutung zu geben, ohne besondere Ansprüche an die fachliche Vorbildung des Lesers zu stellen. Durch den Verzicht auf quantenmechanische Darstellung erreicht der Verfasser eine große Anschaulichkeit, und das Buch muß als besonders gut lesbar bezeichnet werden. Von den entfernteren Fachkollegen wird die konsequent durchgeführte moderne Termbezeichnung wohltuend empfunden werden. Der Stoff ist in sechs Kapitel folgendermaßen eingeteilt: Grundlagen; das einfache Modell des Leuchtelektrons; das Modell des Kreiselelektrons; das Zusammenwirken der Elektronen eines Atoms bei normalen Koppelungsverhältnissen; die Spektren der Elemente mit normaler Termordnung; allgemeinere Koppelungsverhältnisse. Schließlich erhöht ein ausführliches Literaturverzeichnis noch die Brauchbarkeit des Buches. v. Simson.

G. Wiedemann und **R. Franz, Über die Wärmeleitungsfähigkeit der Metalle.** Herausgegeben von A. Wehnelt. 39 S. 8⁰. (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 222.) Leipzig 1927, Akademische Verlagsgesellschaft.

Die gesonderte Herausgabe der Arbeit, durch die Wiedemann zur Erkenntnis des Zusammenhanges zwischen Wärme- und Elektrizitätsleitfähigkeit der Metalle geführt wurde, ist besonders zu begrüßen, da durch die neuesten Arbeiten von Grüneisen, Sommerfeld und Frenkel das Wiedemann-Franzsche Gesetz wiederum ein aktuelles Interesse gewonnen hat. Dem Abdruck der Arbeit sind von A. Wehnelt kurze biographische Notizen über Wiedemann vorangeschickt und als Anmerkung einige weitere Literaturhinweise zum Thema beigefügt worden. v. Simson.

Zeitschriftenschau.

Revista Matemática Hispano-Americana. Bd. 6. (1924.)

H. Weyl, Análisis situs combinatoria. F. Peña, Sobre la traslación paralela infinitesimal. J. R. Sanz, Resultante de Bézout. H. Germay, Generalización de un teorema de Jacobi. P. Pineda, Don Zoel Garcia de Galdeano. G. de Galdeano, Obras. F. Peña, Sobre la traslación paralela infinitesimal. T. M. Escobar, Acerca de la enseñanza de las matemáticas en las Escuelas Industriales. L. Koschmieder,

Nuevas expresiones de las funciones esféricas y de los polinomios con ellas relacionados. P. M. G. Quijano, Sobre algunos productos infinitos. R. H. Germay, Generalización del paréntesis de Poisson. L. Bieberbach, Investigaciones sobre la representación conforme. H. Broggi, Introducción al cálculo diferencial absoluto. J. M.ª Orts, Nota sobre una aplicación del problema de Dirichlet. C. de Losada y Puga, Acerca del gasto y de la velocidad de descenso del plano libre del liquido en los vasos provistos de un orificio y en los vasos porosos. J. M.ª Orts, Sobre una cuestión propuesta en «L'Intermédiaire des Mathématiciens». J. Hadamard, Sobre la representación gráfica del espacio de cuatro dimensiones. E. P. Carranza, Resolución de la ecuación de 2.° grado con la regla de cálculo.

Atti di Torino.

Bd. 56. 1921.

G. Sannia, Serie assolutamente sommabili col metodo di Borel generalizzato. A. Tanturri, Saggio di rappresentazioni analitiche di funzioni singolari. E. Viglezio, Aree di curve piane. C. Segre, Le superficie degli iperspazi con una doppia infinità di curve piane o spaziali. G. Colonnetti, Per una teoria generale delle coazioni elastiche. Q. Majorana, Osservazioni sulle teorie della Relatività e su due mie esperienze.

Bd. 57. 1922:

A. Alessio, La legge esponenziale della probabilità nella teoria degli errori. O. Sesini, Sul calcolo approssimato delle deformazioni di travi reticolari iperstatiche. G. Corte, Le funzioni plurisimmetriche in più gruppi di variabili e le interpretazioni in Geometria numerativa. E. G. Togliatti, Sulle varietà a k dimensioni contenenti almeno ∞^k rette. Q. Majorana, Commemorazione di Augusto Righi. C. Segre, Max Noether e Hermann Schwarz. U. Cassina, Volume, area, lunghezza e curvatura di una figura. A. Caldi, Studio del campo di forza esistente nel dielettrico polarizzato di un condensatore sferico. C. Burali-Forti, Operatori per le iperomografie. G. Sannia, Calcolo differenziale assoluto con una variabile e geometria affine delle curve piane. G. Peano, Operazioni sulle grandezze. G. Sannia, Geometria affine-differenziale delle curve sghembe. C. Segre, Le superficie degl' iperspazi con una doppia infinità di curve spaziali.

Bd. 58. 1923:

M. Lombardini, Considerazioni geometriche per l'analisi periodale. E. Viglezio, Calcolo diretto dei logaritmi decimali. C. Burali-Forti, Flessione dei raggi luminosi stellari e spostamento secolare del perielio di Mercurio. B. Segre, Genere della curva doppia per la varietà di S_4 che annulla un determinante simmetrico.

Bd. 59. 1923/24:

F. Sibirani, Sulla sfera paraosculatrice ad una curva storta. U. Cassina, Risoluzione graduale dell' equazione cubica di Leonardo Pisano. A. Terracini, Sui punti di flesso delle quartiche piane generali. C. Somigliana, Intorno ad alcune questioni di elastostatica. P. Bonanno, Contributo alla teoria delle distorsioni elastiche. C. Segre, Le curve piane d'ordine n circoscritte a un $(n+1)$-latero completo di tangenti ad una conica, e una classe particolare di superficie con doppio sistema coniugato di coni circoscritti. P. Bonanno, Sopra un caso particolare di un nuovo tipo di distorsioni elastiche che interessa alcuni problemi della pratica. F. Tavani, Intorno all' espressione d'un complesso, funzione di variabile reale, in uno spazio ad n dimensioni. O. Sesini, Sull' equilibrio di travature reticolari elastiche iperstatiche. E. Bompiani, Determinazioni proiettivo-differenziali relative ad una superficie dello spazio ordinario. A. Terracini, Sulle superficie con un sistema di asintotiche in complessi lineari. B. Segre, Una proprietà caratteristica di tre sistemi ∞^1 di superficie. M. Picone, Una proprietà delle combinazioni d'approssimazione intere e trigonometriche per le funzioni continue.

Mémoires de la Faculté des Sciences de l'Université de Lithuanie. 1923.

O. Volk, Über die Entwicklung komplexer Funktionen nach den Hermiteschen und Laguerreschen Funktionen. O. Volk, Die Abbildung $\zeta = \frac{\sqrt{z^2 - b^2} - \sqrt{z^2 - c^2}}{\sqrt{c^2 - b^2}}$. O. Volk, Studien über einige Randwertaufgaben der Potentialtheorie. O. Volk und J. Kapfer, Über Paare von isogonalen isometrischen Kurven.

Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

[Die Titel der eingesandten Schriften, mit Ausnahme der Sonderabdrucke, werden hier regelmäßig veröffentlicht. Besprechungen geeigneter Bücher bleiben vorbehalten. Eine Rücksendung der eingegangenen Schriften kann nicht erfolgen.]

R. Beyer, Einführung in die Kinematik. Leipzig 1928, Dr. M. Jänecke. Geh. *RM* 8.70.

G. Birkhoff, Dynamical systems. American Mathematical Society Colloquium Publications. Volume IX. New York 1927, American Mathematical Society. Geb. $ 3.—.

C. L. Charlier, Die Mechanik des Himmels. Band I und II. Berlin 1927, Walter de Gruyter. Geh. *RM* 54.—; geb. *RM* 60.—.

H. Detlefs, Darstellende Geometrie. Heft I und II. (Reinhardt-Zeisberg, Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Schulen.) Frankfurt a. M. 1928, Moritz Diesterweg. Kart. je *RM* 1.50.

H. Dingler, Das Experiment. München 1928, E. Reinhardt. Geh. *RM* 8.—; geb. *RM* 10.—.

Fr. Drenckhahn, Aus der Praxis des mathematischen Unterrichts auf der Mittelstufe. Halle a. d. S. 1928, Buchhandlung des Waisenhauses. Geh. *RM* 3.20.

F. J. Duarte, Nouvelles tables de log n. Genf 1927, A. Kundig.

L. Ph. Eisenhart, Non-Riemannian Geometry. American Mathematical Society Colloquium Publications. Volume VIII. New York 1927, American Mathematical Society. Geb. $ 2.50.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Band II 3 2: Analysis. Leipzig 1923—1927, B. G. Teubner. Geb. *RM* 44.20.

R. Fortrat, Introduction à l'étude de la physique théorique. VI. Fascicule: Mécanique statistique. Paris 1927, J. Hermann. Geh. Fr. 10.—.

——, ——. VII. Fascicule: Les Principes d'action et de relativité. Paris 1927, J. Hermann. Geh. Fr. 10.—; kart. Fr. 14.—.

C. F. Gauß, Anziehung eines elliptischen Ringes. (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 225.) Leipzig 1927, Akademische Verlagsgesellschaft. Geb. *RM* 11.60.

Carl Friedrich Gauß' Werke. Band XI, 1. Herausgegeben von der Gesellschaft der Wissenschaften Göttingen. Berlin 1927, Julius Springer. Geh. *RM* 47.—; geb. *RM* 48.—.

A. Haas, Materiewellen und Quantenmechanik. Leipzig 1928, Akademische Verlagsgesellschaft. Geh. *RM* 6.50; geb. *RM* 7.50.

E. Hellinger und **O. Toeplitz,** Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten. Leipzig 1928, B. G. Teubner. Geb. *RM* 16.—.

D. Hilbert und W. Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Band XXVII.) Berlin 1928, J. Springer. Geh. *RM* 7.60; geb. *RM* 8.80.

C. G. J. Jacobi, Theorie der elliptischen Funktionen. (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 224.) Leipzig 1927, Akademische Verlagsgesellschaft. Geb. *RM* 3.20.

F. Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Band III. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Band XVI.) Berlin 1928, J. Springer. Geh. *RM* 13.50; geb. *RM* 15.—.

F. Klein, Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Band XXVI.) Berlin 1928, J. Springer. Geh. *RM* 18.—; geb. *RM* 19.50.

K. Knopp, Aufgabensammlung zur Funktionentheorie. II. Teil. (Sammlung Göschen Band 878.) Berlin 1928, W. de Gruyter. Geb. *RM* 1.50.

G. Kowalewski, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. Leipzig 1928, B. G. Teubner. Geb. *RM* 16.—.

T. Levi-Civita, Der absolute Differentialkalkül. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Band XXVIII.) Berlin 1928, J. Springer. Geh. *RM* 19.60; geb. *RM* 21.—.

F. Lindemann, Untersuchungen über den Fermatschen Satz. München 1928, Selbstverlag. Geh. *RM* 2.50.

W. Müller, Mathematische Strömungslehre. Berlin 1928, J. Springer. Geh. *RM* 18.—; geb. *RM* 19.50.

L. G. du Pasquier, Léonard Euler et ses amis. Paris 1927, J. Hermann. Geh. Fr. 22.—.

M. Planck, Einführung in die allgemeine Mechanik. (Einführung in die theoretische Physik Band I.) Leipzig 1928, S. Hirzel. Geh. *RM* 6.—; geb. *RM* 8.—.

——, Einführung in die Theorie der Elektrizität und des Magnetismus. (Einführung in die theoretische Physik Band III.) Leipzig 1928, S. Hirzel. Geh. *RM* 6.—; geb. *RM* 8.—.

H. Reichenbach, Philosophie der Raum-Zeit-Lehre. Berlin 1928, W. de Gruyter. Geh. *RM* 18.—; geb. *RM* 20.—.

K. Reidemeister, Die Axiome der zweigliedrigen Gruppen. (Schriften der Königsberger Gelehrten Gesellschaft, Naturwissenschaftliche Klasse, Heft 5.) Halle a. d. S. 1927, M. Niemeyer. Geh. *RM* 1.60.

W. W. Rouse Ball, Histoire des mathématiques. Paris 1927, J. Hermann. Geh. Fr. 40.—.

Thoma, Rechenbuch für höhere Lehranstalten. Ausgabe A, Teil I, kart. *RM* 2.60; Ausgabe B, Teil I, kart. *RM* 2.20. Frankfurt a. M. 1928, M. Diesterweg.

G. Vivanti, Elementi della teoria delle funzioni analitiche e delle funzioni trascendenti intere. (Manuali Hoepli.) Milano, U. Hoepli, 1928.

Zacharias-Ebner, Trigonometrie. (Mathematisches Unterrichtswerk f. höhere Schulen.) Frankfurt a. M. 1928, Moritz Diesterweg. Geb. *RM* 2.60.

Mitteilungen an die Mitglieder.

Jahresversammlung der D. M.-V. in Hamburg, 16.—22. September 1928.

(Eine Anmeldekarte zur Teilnahme an der Versammlung liegt dem Heft bei.)

Bis 1. Juli 1928 sind folgende Vorträge angemeldet:

W. Haak-Hamburg: Affine Differentialgeometrie der Strahlensysteme. (Bericht.)

E. Haentzschel-Berlin: Zur Lösung des Diophantischen Problems:

$$z^3 = a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 + 3 a_2 x + a_3$$

in rationalen Zahlen.

M. Herzberger-Jena: Über die Eigenschaften erster Ordnung längs einem Strahl im allgemeinen Strahlensystem.

Kamke-Tübingen: Zur Theorie der Differentialgleichungen.

O. Mühlendyck-Berlin: Kinematische Einteilung der reellen analytischen Somenmannigfaltigkeiten.

G. Thomsen-Hamburg: Differentialgeometrische Untersuchungen zur Kugelgeometrie. (Bericht.)

L. Victoris-Innsbruck: Zum Homöomorphieproblem der kombinatorischen Topologie.

Weitere Vortragsanmeldungen sind dringend erwünscht.

Angelegenheiten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Cantorbüste.

Im Treppenhaus des Hauptgebäudes der Universität Halle wurde Ende Juli 1927 die Büste Georg Cantors aufgestellt.

Aufgaben und Lösungen.

Aufgaben.

62. (Verallgemeinerung der Aufgabe 54 von A. Galle.)[1] Es sollen n gegebene Punkte der Ebene durch einen geschlossenen Polygonzug derart verbunden werden, daß die Summe der Quadrate der n Seiten ein Minimum wird. Wie ist der Streckenzug zu wählen? In welchen Fällen gibt es mehr als eine Lösung? H. Liebmann.

(Eingegangen am 8. 7. 28.)

Zu Aufgabe **58:** Durch ein Versehen blieb der Name des Aufgabenstellers weg: K. Reinhardt, Greifswald.

Lösungen.

Lösung der Aufgabe 54. (Dieser Jahresbericht Bd. 37, Heft 1/4, S. 28.)

Die Aufgabe lautete:

$l_1, l_2, \ldots, l_n$ sollen gegebene reelle (positive oder negative) Zahlen sein. Bildet man

$$(l_1 - l_2)^2 + (l_2 - l_3)^2 + \cdots + (l_{n-1} - l_n)^2 + (l_n - l_1)^2 = B,$$

so wird gefragt: Bei welcher Anordnung der Zahlen l_i ist B ein Minimum? A. Galle.

Für $n = 4$ schließt man so:

Es seien $$a_1 < a_2 < a_3 < a_4$$

die Zahlen der Größe nach geordnet. B kann dann nur die drei Werte annehmen

$$B = B_2 = (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_4)^2 + (a_4 - a_3)^2 + (a_3 - a_1)^2,$$
$$B = Q_4 = (a_1 - a_4)^2 + (a_4 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_3 - a_1)^2,$$
$$B = Q_4' = (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_3 - a_4)^2 + (a_4 - a_1)^2,$$

und es ist $$B_2 - Q_4 = -2(a_4 - a_2)(a_3 - a_1) < 0,$$
$$B_2 - Q_4' = -2(a_4 - a_3)(a_2 - a_1) < 0,$$

1) Vgl. die Lösungen dieser Aufgabe auf dieser Seite und S. 115 dieses Heftes.

also die erste Anordnung — a_4 zwischen a_2 und a_3 eingeschoben — die günstigste.

Bei Behandlung des allgemeinen Falles seien

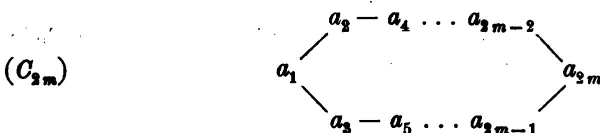
$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n$$

die gegebenen Zahlen, der Größe nach geordnet.

Die günstigsten Zyklen sind dann

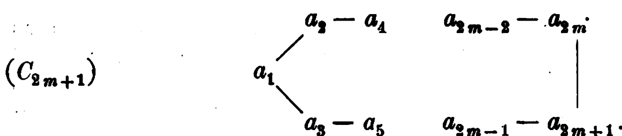
für $n = 2m$

(C_{2m})



und für $n = 2m + 1$

(C_{2m+1})



Zum Beweis (Schluß zunächst von $2m$ auf $2m + 1$) seien noch einige Abkürzungen eingeführt.

Es sollen B_{2m} und B_{2m+1} die Summe der Differenzenquadrate für die Anordnungen C_{2m} und C_{2m+1} bedeuten, P_{2m} und P_{2m+1} irgendwelche Anordnungen, Q_{2m} und Q_{2m+1} die entsprechenden Summen der Differenzenquadrate.

Dann wird also als bewiesen angenommen

$$B_{2m} \leqq Q_{2m} \ (= \text{nur für } P_{2m} \equiv C_{2m}).$$

Es ist

$$\begin{aligned} B_{2m+1} - B_{2m} &= (a_{2m+1} - a_{2m})^2 + (a_{2m+1} - a_{2m-1})^2 - (a_{2m} - a_{2m-1})^2 \\ &= 2(a_{2m+1} - a_{2m})(a_{2m+1} - a_{2m-1}). \end{aligned}$$

Schiebt man dann im Zyklus P_{2m} irgendwo a_{2m+1} ein, etwa zwischen

$$a_\mu \text{ und } a_\nu > a_\mu,$$

die in P_{2m} nebeneinander stehen und beachtet

$$a_\mu = a_{2m-1} - \delta,$$
$$a_\nu = a_{2m} - \varepsilon$$

mit $$\delta, \varepsilon \geqq 0,$$ so wird

$$Q_{2m+1} - Q_{2m} = 2(a_{2m+1} - a_{2m} + \varepsilon)(a_{2m+1} - a_{2m-1} + \delta) \geqq B_{2m+1} - B_{2m}$$

und $$Q_{2m+1} \geqq B_{2m+1},$$

wobei das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn P_{2m} mit C_{2m}, P_{2m+1} mit C_{2m+1} identisch ist.

Also folgt: Die Anordnung C_{2m+1} liefert die kleinste Summe der Differenzenquadrate.

Ganz entsprechend verläuft der Schluß von ungerader Elementarzahl auf die nächstfolgende gerade. LIEBMANN.

(Eingegangen am 10. 5. 28.)

(Die gleiche Lösung legte auch Herr Michnik vor.)

Lösung der Aufgabe 54. (Dieser Jahresbericht Bd. 37, Heft 1/4, S. *28*.)

Gegeben sind $n\,(\geqq 3)$ reelle Zahlen $l_1, \ldots, l_n$. Gefragt wird nach einer Reihenfolge $x_1, \ldots, x_n$ dieser Zahlen, für die der Ausdruck

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \cdots + (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_1)^2$$

möglichst klein ist.

Da dieser Ausdruck identisch gleich

$$2\,(x_1^2 + \cdots + x_n^2) - 2\,(x_1 x_2 + x_2 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n + x_n x_1)$$

ist und hier der erste Bestandteil bei allen Permutationen invariant ist, haben wir eine Reihenfolge zu suchen, für die der Ausdruck

$$X = x_1 x_2 + x_2 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n + x_n x_1$$

möglichst groß ist.

Es seien zunächst $x_1, \ldots, x_n$ Unbestimmte. Wie man leicht sieht, ist dann X genau bei der Gruppe $\mathfrak{G}$ invariant, die durch folgende beiden Permutationen erzeugt wird:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \ldots & n & 1 \end{pmatrix} = (1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,\ n),$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ 1 & n & n-1 & \ldots & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2,\ n)\,(3,\ n-1)\cdots.$$

Diese Gruppe $\mathfrak{G}$ hat die Ordnung $2n$ und ist vom Diedertypus, da ihre Erzeugenden S und T den Relationen genügen

$$S^n = 1, \quad T^2 = 1, \quad T^{-1} S T = S^{-1}.$$

Für $n = 3$ ist $\mathfrak{G}$ die symmetrische Gruppe von 3 Elementen und ist folglich X bei allen Permutationen invariant.

Es sei also im folgenden $n \geqq 4$. Ferner sei jetzt wieder $x_1, \ldots, x_n$ eine Reihenfolge der gegebenen Zahlen $l_1, \ldots, l_n$, welche wir zunächst als sämtlich voneinander verschieden voraussetzen. Der Gedanke unserer Lösung besteht dann darin, Permutationen anzugeben, bei deren Anwendung unter gewissen Bedingungen der Ausdruck X vergrößert wird. Die Forderung, daß diese Bedingungen nicht eintreten, führt uns zwangläufig auf die gesuchten Reihenfolgen. Es stellt sich die nicht ohne weiteres vorauszusehende Tatsache heraus, daß die gesuchten Reihenfolgen allein durch Vorschriften über die topologische Lage der Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ auf der Zahlengeraden bestimmt sind und nicht von metrischen Beziehungen abhängen.

Die Ausführung des angedeuteten Gedankens stützt sich auf folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz. *Es seien μ und ν zwei Indizes der Reihe* $1, \ldots, n$ *derart, daß die vier Indizes* $\mu, \nu, \mu - 1, \nu + 1 \bmod. n$ [1]) *voneinander verschieden sind. Wenn dann die Bedingung*

$$(x_\mu - x_\nu)(x_{\mu-1} - x_{\nu+1}) > 0$$

oder, wie wir auch sagen wollen,

$$\text{(B)} \qquad x_\mu \cdot\cdot x_\nu = x_{\mu-1} \cdot\cdot x_{\nu+1}$$

(lies: x_μ liegt zu x_ν wie $x_{\mu-1}$ zu $x_{\nu+1}$) nicht erfüllt ist, so wird der Ausdruck X durch die Permutation

$$P = \left(\begin{array}{cccc|ccc} \mu & \mu+1 & \ldots\; \nu-1 & \nu & \nu+1 & \ldots & \mu-1 \\ \nu & \nu-1 & \ldots\; \mu+1 & \mu & \nu+1 & \ldots & \mu-1 \end{array}\right) \quad \textit{vergrößert.}$$

Beweis. Der Ausdruck X kann in der Form

$$X = [x_{\mu-1}x_\mu + (x_\mu x_{\mu+1} + \cdots + x_{\nu-1}x_\nu) + x_\nu x_{\nu+1}] + [x_{\nu+1}x_{\nu+2} + \cdots + x_{\mu-2}x_{\mu-1}]$$

geschrieben werden, wo die beiden äußeren Glieder in der ersten eckigen Klammer nicht zusammenfallen, da $\mu - 1 \not\equiv \nu$, $\mu \not\equiv \nu + 1 \bmod. n$ vorausgesetzt ist. Die Permutation P führt X über in

$$X' = [x_{\mu-1}x_\nu + (x_\nu x_{\nu-1} + \cdots + x_{\mu+1}x_\mu) + x_\mu x_{\nu+1}] + [x_{\nu+1}x_{\nu+2} + \cdots + x_{\mu-2}x_{\mu-1}].$$

Es wird also
$$X - X' = x_{\mu-1}x_\mu + x_\nu x_{\nu+1} - x_{\mu-1}x_\nu - x_\mu x_{\nu+1}$$
$$= (x_\mu - x_\nu)(x_{\mu-1} - x_{\nu+1}).$$

Wenn daher die Bedingung (B) nicht erfüllt ist, so ist, weil $\mu \not\equiv \nu$, $\mu - 1 \not\equiv \nu + 1 \bmod. n$ vorausgesetzt und $l_1, \ldots, l_n$ voneinander verschieden angenommen sind,

$$X - X' < 0, \qquad X' > X,$$

so daß X durch P wirklich vergrößert wird. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Wenn also die Reihenfolge $x_1, \ldots, x_n$ die verlangte Maximaleigenschaft hat, so muß die Bedingung (B) für sämtliche im Hilfssatz zugelassenen Indexpaare μ, ν erfüllt sein.

Aus der Gesamtheit dieser Bedingungen ergibt sich die topologische Lage der $x_1, \ldots, x_n$ zwangläufig, wenn die auf Grund der Invarianzgruppe $\mathfrak{G}$ noch bestehende Willkürlichkeit durch zwei den Erzeugenden S und T entsprechende passende Normierungsvorschriften ausgeschaltet wird.

1. Annahme. Auf Grund der Invarianzpermutation S darf angenommen werden

$$x_1 < x_\nu \qquad \text{für } \nu = 2, \ldots, n.$$

Also $\boxed{x_1 < (x_2, \ldots, x_n)}$.

2a. Folgerung.
($\mu = 2$)

$$x_2 \cdot\cdot x_\nu = x_1 \cdot\cdot x_{\nu+1} \quad \text{für } \nu = 3, \ldots, n-1 \quad \text{nach der Bedingung (B)}$$
$$x_1 < x_{\nu+1} \quad \text{für } \nu = 3, \ldots, n-1 \quad \text{nach der Annahme 1.}$$
$$\overline{x_2 < x_\nu \qquad \text{für } \nu = 3, \ldots, n-1.}$$

1) Im folgenden werden alle Indizes mod. n gerechnet.

2b. **Annahme.** Auf Grund der Invarianzpermutation T darf angenommen werden

$$x_2 > x_\nu \qquad \text{für } \nu = n.$$

Nach 1.—2b. ist also

$$\boxed{x_1 < x_n < x_2 < (x_3, \ldots, x_{n-1})}.$$

3. **Folgerung.**

$(\mu = 3)$

$$\begin{array}{lll} x_3 \cdot\cdot\, x_\nu = x_2 \cdot\cdot\, x_{\nu+1} & \text{für } \nu = 4, \ldots, n-1 & \text{nach der Bedingung (B)} \\ \qquad\qquad x_2 < x_{\nu+1} & \text{für } \nu = 4, \ldots, n-2 & \text{nach der Folgerung 2a.} \\ \qquad\qquad x_2 > x_{\nu+1} & \text{für } \nu = n-1 & \text{nach der Annahme 2b.} \\ \hline x_3 < x_\nu & \text{für } \nu = 4, \ldots, n-2 & \\ x_3 > x_\nu & \text{für } \nu = n-1. & \end{array}$$

Nach 1.—3. ist also

$$\boxed{x_1 < x_n < x_2 < x_{n-1} < x_3 < (x_4, \ldots, x_{n-2})}.$$

4. **Folgerung.**

$(\mu = 4)$

$$\begin{array}{lll} x_4 \cdot\cdot\, x_\nu = x_3 \cdot\cdot\, x_{\nu+1} & \text{für } \nu = 5, \ldots, n-2 & \text{nach der Bedingung (B)} \\ \qquad\qquad x_3 < x_{\nu+1} & \text{für } \nu = 5, \ldots, n-3 & \multirow{2}{*}{\text{nach der Folgerung 3.}} \\ \qquad\qquad x_3 > x_{\nu+1} & \text{für } \nu = n-2 & \\ \hline x_4 < x_\nu & \text{für } \nu = 5, \ldots, n-3 & \\ x_4 > x_\nu & \text{für } \nu = n-2. & \end{array}$$

Nach 1.—4. ist also

$$\boxed{x_1 < x_n < x_2 < x_{n-1} < x_3 < x_{n-2} < x_4 < (x_5, \ldots, x_{n-3})}.$$

. . . .

In endlich vielen Schritten erkennt man so, daß $x_1, \ldots, x_n$ die Größenfolge

$$\boxed{x_1 < x_n < x_2 < x_{n-1} < \cdots < x_{\frac{n}{2}-1} < x_{\frac{n}{2}+2} < x_{\frac{n}{2}} < x_{\frac{n}{2}+1}} \quad \text{für gerades } n,$$

bzw.

$$\boxed{x_1 < x_n < x_2 < x_{n-1} < \cdots < x_{\frac{n+5}{2}} < x_{\frac{n-1}{2}} < x_{\frac{n+3}{2}} < x_{\frac{n+1}{2}}} \quad \text{für ungerades } n$$

haben.

Das hiermit gewonnene Ergebnis läßt sich folgendermaßen in eine von den beiden zur Normierung gemachten Annahmen unabhängige Form setzen.

Satz. *Man teile eine beliebig verbiegbare, undehnbare Kreislinie in n gleiche Teile, bringe in den Teilpunkten der Reihe nach die Symbole* $x_1, \ldots, x_n$ *an*

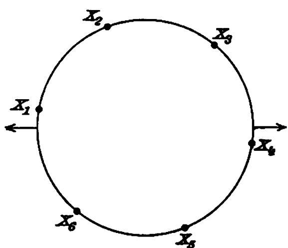
und ziehe irgend einen Durchmesser des Kreises, der weder einen der Teilpunkte, noch einen der Mittelpunkte der Teilbögen trifft. Dann verzerre man die Kreislinie durch Zug nach außen an den beiden Durchmesserenden zu einer Doppelstrecke und lege diese, mit den Symbolen $x_1, \ldots, x_n$ *belegte Doppelstrecke in irgend einer Richtung auf die Zahlengerade.*

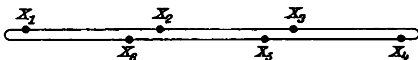
Eine Reihenfolge $x_1, \ldots, x_n$ *der* $l_1, \ldots, l_n$ *macht dann und nur dann den Ausdruck*

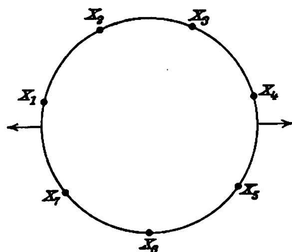
$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \cdots + (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_1)^2$$

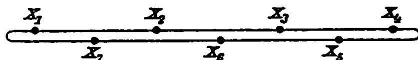
möglichst klein, wenn die Größenfolge der $x_1, \ldots, x_n$ *mit einer der durch den eben geschilderten Prozeß gelieferten Größenfolgen übereinstimmt.*

Man überzeugt sich leicht, daß die bei dem Prozeß vorhandenen beiden Willkürlichkeiten zwei geeigneten Erzeugenden der Invarianzgruppe $\mathfrak{G}$ entsprechen.









Sind die gegebenen Zahlen $l_1, \ldots, l_n$ nicht sämtlich voneinander verschieden, so tritt an die Stelle von $\mathfrak{G}$ eine umfassendere Invarianzgruppe $\bar{\bar{\mathfrak{G}}}$. Wir wollen nur kurz andeuten, wie unter Ausnutzung der dadurch bedingten weiteren Willkürlichkeiten unser Beweisverfahren auch dann noch zu einem ganz entsprechenden Ergebnis führt.

Nachdem zunächst, analog zu der Annahme 1.,

$$x_1 \leqq x_\nu \qquad \text{für } \nu = 2, \ldots, n$$

angenommen ist, liefert die Folgerung 2a. jetzt nur, daß

$$x_2 \leqq x_\nu$$

für diejenigen der $\nu = 3, \ldots, n-1$ ist, für die nicht $x_1 = x_{\nu+1}$ ist. Da für die übrigen dieser ν, mit $x_1 = x_{\nu+1}$, gilt:

$$X = [x_1 x_2 + (x_2 x_3 + \cdots + x_{\nu-1} x_\nu) + x_\nu x_1] + [x_{\nu+1} x_{\nu+2} + \cdots + x_n x_1],$$

so gehört für sie die Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots \nu - 1 & \nu & \vert & \nu + 1 \ldots n \\ 1 & \nu & \nu - 1 \ldots & 3 & 2 & \vert & \nu + 1 \ldots n \end{pmatrix}$$

zur Invarianzgruppe $\overline{\mathfrak{G}}$, und daher kann angenommen werden, daß auch für diese ν

$$x_2 \leqq x_\nu$$

ist. Schließlich kann wieder, analog zu der Annahme 2b.,

$$x_2 \geqq x_\nu \qquad \text{für } \nu = n$$

angenommen werden.

So fortfahrend erhält man, daß die Reihenfolge $x_1, \ldots, x_n$ mit der Größenfolge

$$x_1 \leqq x_n \leqq x_2 \leqq x_{n-1} \leqq \cdots$$

die verlangte Eigenschaft hat. Alle fraglichen Reihenfolgen ergeben sich aus dieser dann durch Anwendung aller Permutationen der Invarianzgruppe $\overline{\mathfrak{G}}$.

Wie man mit unserer Methode ebenfalls leicht zeigt, befriedigt die Reihenfolge $x_1, \ldots, x_n$ mit der Größenfolge

$$x_1 \leqq x_3 \leqq x_5 \leqq \cdots \leqq x_6 \leqq x_4 \leqq x_2$$

die zu der gestellten Minimalforderung analoge Maximalforderung.

E. Bessel-Hagen und H. Hasse.

(Eingegangen am 14. 5. 28.)

Weitere Lösungen legten die Herren Basch, Ehrlich, Krawtchouk, Mahlo, Nowakowski, Remes, Romberg vor.

Eine weitere Lösung des Herrn F. Gruber wird im nächsten Heft abgedruckt.

Literarisches.

Besprechungen.

Collected Papers of Srinivasa Ramanujan. Edited by G. H. Hardy, P. V. Seshu Aiyar and B. M. Wilson. XXXVI u. 355 S. Cambridge 1927, University Press.

Der vorliegende Band enthält die Gesammelten Werke des bedeutsamsten indischen Mathematikers der neueren Zeit, Srinivasa Ramanujan. Seine einzigartige menschliche und mathematische Persönlichkeit wird in einem hier wieder abgedruckten Nachrufe auf ihn, der ursprünglich von G. H. Hardy in den Proc. of the Lond. Math. Soc. Bd. 19 (1921) und in den Proc. of the Roy. Soc. Bd. 99 (1921) erschienen ist, eindrucksvoll geschildert. Ramanujan ist 1887 geboren und 1920 an Schwindsucht gestorben. Er war ein typischer Autodidakt, der in den kurzen Jahren seiner ersten Jugend zahlreiche schwierige Probleme der europäischen Mathematik ohne Lehrbücher und Lehrmeister selbständig erfaßt und gelöst hat. Seine ersten Veröffentlichungen stammen aus den Jahren 1911 und 1912 (Journal of the Indian Math. Soc.). Er hat zu dieser Zeit in seiner Heimat eine dürftige Stelle als Beamter, später als Lehrer

innegehabt. Im Jahre 1913 begann er auf Anregung von P. V. Seshu Aiyar und anderen einen Briefwechsel mit seinem späteren Lehrer Hardy anzuknüpfen, der seine erstklassige Begabung und Originalität schnell erkannt hat. Im Jahre 1914 kam er nach England und entfaltete hier in Kürze, zum Teil in fruchtbarer Zusammenarbeit mit Hardy, eine an Erfolgen reiche mathematische Tätigkeit. Im Jahre 1918 ist er zum Mitglied der Royal Society und des Trinity College gewählt worden. Er kehrte im Februar 1919 in seine Heimat zurück, wo ihm in Madras eine Professur an der Universität angeboten worden ist. Nach vergeblichem Mühen, seine bereits in England erschütterte Gesundheit wiederzuerlangen, starb er hier im April 1920.

Außer dem erwähnten Nachruf von Hardy enthält der vorliegende Band eine von P. V. Seshu Aiyar und R. Bamachaundra Rao verfaßte ausführliche und fesselnde Schilderung des leider so kurzen Lebensganges von Ramanujan. Darauf folgen seine 37 Arbeiten, von denen sieben mit Hardy zusammen geschrieben worden sind. Ferner enthält der Band eine Reihe von Aufgaben, die Ramanujan in dem Journal of the Indian Math. Soc. gestellt hat. Anhang I bringt einige kurze Bemerkungen zu den Abhandlungen und Aufgaben (zum Teil von L. J. Mordell), Anhang II einige Einzelheiten aus den Briefen Ramanujans an Hardy. Der letzte Brief ist vom 12. Januar 1920 datiert.

Königsberg i. Pr. G. Szegö.

Hans Falckenberg, Elementare Reihenlehre. (Sammlung Göschen Nr. 943.) 136 S. Berlin und Leipzig 1926, Walter de Gruyter & Co.

In diesem kleinen Büchlein wird erfreulich viel geboten. Der I. Abschnitt bringt, auf dem Dedekindschen Schnitt aufgebaut, das System der reellen Zahlen; der II. die endlichen Reihen (binomischer und polynomischer Lehrsatz, arithmetische Reihen höherer Ordnung, die endliche geometrische Reihe). Der III. Abschnitt führt in die Lehre von den unendlichen Reihen ein (Zahlenfolgen, unendliche Reihen; Konvergenz und Divergenz; $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Reihen mit positiven Gliedern, die Vergleichskriterien erster und zweiter Art, das Raabesche und Gaußsche Kriterium. Absolute Konvergenz, Umordnung, Doppelreihensatz). Der IV. Abschnitt endlich bringt die Potenzreihen (Fundamentalsatz, Identitätssatz, Differentiation. Die binomische und die hypergeometrische Reihe. Die Exponential-, cos- und sin-Reihe. Inverse Funktionen, die logarithmische Reihe, die zyklometrischen Reihen).

Dieser Stoff wird mit großem Geschick, in straffer, aber durchaus klarer und gut faßlicher Form und mit lückenloser Strenge aufgebaut. Reichliche Verweise, Randnummern usw. erleichtern die Übersicht, gutgewählte Beispiele das Verständnis. An sachlichen Fehlern ist dem Referenten nur der falsche Beweis des (allerdings fundamentalen) Satzes VII (S. 42/3) aufgefallen; an Unstimmigkeiten eine solche beim Beweis (S. 106/7) für den Wert der Binomialreihe. An Schönheitsfehlern sei hervorgehoben, daß lnn, $ln(n-1)$ für $\log n$, $\log(n-1)$ vermieden werden sollte und daß an den Seitenköpfen links die Kapitel- und rechts die Paragraphennummern stehen sollten, um das Nachschlagen der häufigen Verweise zu erleichtern.

Alles in allem aber: ein gutes Büchlein. Konrad Knopp.

O. Perron, Algebra. I. Bd.: Die Grundlagen. Geb. *ℛℳ* 11.50. II. Bd.: Theorie der algebraischen Gleichungen. Geb. *ℛℳ* 9.50. (Göschens Lehrbücherei, I. Gruppe, Bd. 8 und 9.) Berlin 1927.

Faßt man als Aufgabe der Algebra, wie es etymologisch und historisch gerechtfertigt ist, die Entwicklung der Lehre von den mittels der elementaren Rechenoperationen bildbaren Gleichungen, so gibt es zwei Auffassungen über Ziele und Aufbau dieser Disziplin, deren Unterschied zunächst in der Methode liegt, sich dann aber auch auf den Inhalt überträgt:

1. Die ältere Auffassung. Für diese steht es a priori außer jeder Diskussion, daß die Algebra, wie überhaupt jede rechnende mathematische Disziplin, im Körper der reellen oder wo nötig in dem der komplexen Zahlen betrieben wird; denn diesen Zahlkörpern kommt eine durch ihre anschauliche Beziehung zum Kontinuum und durch ihre grundlegende Bedeutung für die Anwendungen der rechnenden Mathematik auf Geometrie und Erfahrung gesichertes unantastbares Primat zu vor allen denkbaren Körpern. Dieser Grundeinstellung entsprechend wird als letztes Ziel der Algebra die handgreifliche, sei es formelmäßige, sei es numerische Bestimmung der Gleichungslösungen angesehen, und dieser Zweck heiligt die Mittel: Neben den der Aufgabe adäquaten elementaren Rechenoperationen werden auch ihr wesensfremde, dem reellen oder komplexen Kontinuum eigentümliche Hilfsmittel und Schlußweisen in Betracht gezogen. Integrierende Bestandteile der Algebra sind bei dieser Auffassung z. B. der Fundamentalsatz der Algebra, die Sätze von Sturm und Budan-Fourier, die Näherungsmethoden von Newton, Bernoulli und Graeffe. Auch Gedankenreihen, die nicht direkt in dieser Richtung liegen, wie vor allem die Galoissche Theorie, werden bei dieser Auffassung so dargestellt, daß dem Leser das genannte Endziel als — sei es auch unausgesprochener — Leitfaden durch das Ganze erscheinen muß, daß er also z. B. denken muß: Die Auflösung und Darstellung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung durch Radikale gibt diese Wurzeln in einer expliziten, insbesondere auch der numerischen Rechnung prinzipiell zugänglichen Gestalt; die Zurückführung einer algebraischen Gleichung auf Resolventen niedrigeren Grades vereinfacht deren formelmäßige oder numerische Auflösung.

2. Die moderne Auffassung. Diese kann den reellen oder komplexen Zahlen aus einem nicht durch Liebe zu Anschaulichkeit oder Anwendbarkeit getrübten Gerechtigkeitsgefühl gegenüber allem Denkbaren kein apriorisches Primat zuerkennen. Wenn sie demgemäß alle denkbaren Körper in Betracht zieht, so darf ihr daraus keineswegs der Vorwurf einer vagen Allgemeinheit gemacht werden. Denn erst in zweiter Linie ist diese größtmögliche Allgemeinheit dem Inhalte nach Motiv für die Einführung des abstrakten Körperbegriffs, in erster Linie vielmehr die weitgehendste Beschränkung der Methode nach: Die Entwicklung der Algebra in abstrakten Körpern soll von vornherein jede Möglichkeit ausschließen, sich anderer Schlußweisen und Hilfsmittel zu bedienen als der Aufgabe adäquater, also solcher, die sich nur auf die elementaren Rechenoperationen berufen. Wie dieser methodische Unterschied beider Auffassungen sich auch inhaltlich auswirkt, tritt am deutlichsten an der modernen Einstellung dem für die ältere Auffassung unentbehrlichen Fundamentalsatz der Algebra gegenüber hervor. Die moderne Auffassung muß diesen Satz schon deshalb

völlig ausschalten, weil er auf der speziellen Natur des komplexen Zahlkörpers beruht. An seine Stelle setzt sie das ihren methodischen Ansprüchen genügende Konstruktionsverfahren nach Kronecker-Steinitz für die Wurzeln einer algebraischen Gleichung. Da dies Verfahren die Wurzeln von vornherein in die Hand gibt, liegt für die moderne Auffassung keinerlei Anlaß vor, sich wie die ältere noch weiterhin mit der handgreiflichen Bestimmung der Wurzeln abzugeben. So kann sie leichten Herzens auf die oben genannten, ihr methodisch verschlossenen Sätze über die Lage der Wurzeln verzichten, und so bleibt sie ganz von selbst vor der Versuchung bewahrt, die Galoissche Theorie als Auflösungsverfahren anzusehen. Für sie ist vielmehr die Galoissche Theorie Strukturuntersuchung der algebraischen Erweiterungskörper, und das Studium der Resolventen gibt näheren Einblick in die formalen Zusammenhänge der Bausteine dieser Körper. Das Interesse für Struktur und Formel um ihrer selbst, weniger um des durch sie dargestellten Inhalts willen, ist nur die naturgemäße Verallgemeinerung der geschilderten Einstellung den reellen und komplexen Zahlen gegenüber, für manchen wohl sogar umgekehrt der letzte Grund für diese Einstellung.

Ein Blick in das Vorwort des vorliegenden Werkes genügt, um zu erkennen, daß sein Verfasser ganz auf dem Boden der modernen Auffassung steht, und die Lektüre läßt dies dann auch von Seite zu Seite klarer und schöner hervortreten. Aber der Verfasser bekennt sich zu der Ansicht, daß der moderne Standpunkt, in aller Konsequenz durchgeführt, mit dem Charakter eines Lehrbuchs in Konflikt kommt, und so macht er denn der älteren Auffassung in zweierlei Hinsicht Konzessionen:

1. Als Grundkörper werden nur zugelassen: Körper aus komplexen Zahlen und Körper rationaler Funktionen von (endlich vielen) unabhängigen Variablen darüber; später kommt dann noch die Adjunktion (endlich vieler) algebraischer Elemente als weiteres Erzeugungsprinzip hinzu.

Dieser Grundkörperkreis ist einerseits vermöge seines konstruktiven Aufbaus nicht, wie die abstrakten Grundkörper, dem Vorwurf der vagen Allgemeinheit ausgesetzt. Der Leser behält vielmehr durchweg sicheren, konkreten Boden unter den Füßen. Andererseits ist dieser Grundkörperkreis doch so allgemein, daß für die Algebra in ihm außer den auch für abstrakte unendliche Grundkörper funktionierenden allgemeinen Methoden keinerlei spezielle Hilfsmittel zur Verfügung stehen, so daß in Wahrheit genau die Algebra in abstrakten unendlichen Grundkörpern entwickelt wird. Die im Grundkörper zugelassenen unabhängigen Variablen, deren prinzipielle Verschiedenheit von Zahlvariablen im funktionentheoretischen Sinne der Verfasser sowohl ausdrücklich betont, als auch mittelbar durch den ganzen Aufbau hervortreten läßt, sorgen überdies dafür, daß dem Leser die numerische Auffassung möglichst ferngelegt und dafür die formale Auffassung möglichst nahegebracht wird.

2. Der Fundamentalsatz der Algebra sowie die oben genannten und andere Sätze über die Lage der Wurzeln im reellen oder komplexen Zahlkörper werden gleichwohl nebenbei entwickelt.

Dafür mag hauptsächlich der historische Gesichtspunkt gesprochen haben: Diese Sätze haben nun einmal Jahrhunderte lang im Bereich der Algebra gelebt und sich so ein gewisses Bürgerrecht erworben. Immerhin tastet aber der Verfasser dieses Bürgerrecht an, indem er ausdrücklich erklärt, daß jene

Sätze eigentlich nicht zur Algebra, sondern zur Funktionentheorie gehören, und indem er speziell dem Fundamentalsatz der Algebra das Beiwort „sogenannt“ verleiht, das sich natürlich auf „der Algebra“, nicht auf „Fundamentalsatz“ beziehen soll.

Über den Inhalt des Werkes mag die Angabe der Kapitelüberschriften orientieren: I. Band. 1. Grundbegriffe, 2. Polynomischer und Taylorscher Satz, 3. Determinanten, 4. Symmetrische Funktionen, 5. Teilbarkeit, 6. Existenz der Wurzeln; II. Band. 1. Numerische Auflösung von Gleichungen, 2. Gleichungen bis zum vierten Grad und reziproke Gleichungen, 3. Substitutionsgruppen, 4. Die Galoissche Gleichungstheorie, 5. Die Gleichungen fünften Grades.

Vom modernen Standpunkt ist der die Grundlagen entwickelnde I. Band als besonders gelungen zu bezeichnen, während die Gestaltung der Galoisschen Theorie im II. Band den nachwirkenden Einfluß der älteren Auffassung nicht ganz verleugnen kann. Sachlich hervorzuheben sind — neben der schon erörterten modernen Grundlegung und vielem anderen — aus I., 5. und 6. die Resultantentheorie und das Bézoutsche Theorem für beliebige (endliche) Variablenzahl, aus II., 4. die arithmetische Konstruktion von affektlosen Gleichungen im rationalen Zahlkörper.

Die Darstellung ist flüssig, anziehend und anregend, exakt bis ins Kleinste und durchweg klar und verständlich, dies nicht zuletzt dank einer systematischen, symmetrischen, vor mehrfachen Indizes nicht (wie ältere Darstellungen vielfach) zurückschreckenden Bezeichnungsweise.

Nicht nur als Einführung in die Algebra für den Studierenden kann das Werk warm empfohlen werden, sondern auch als Handbuch für den Lehrer und Nachschlagewerk für den Forscher. Für diejenigen Kapitel der Algebra, die es mit Rücksicht auf den beschränkten Raum behandeln konnte, ist es zweifellos ein willkommener Ersatz des inhaltlich in vielem unmodern gewordenen Weberschen Standardwerks, über das es sich zudem didaktisch weit erhebt. H. Hasse.

L. Bieberbach, Einführung in die konforme Abbildung. 130 S. (Sammlung Göschen N. 768.) 2., neubearbeitete Auflage. Berlin und Leipzig 1927, W. de Gruyter & Co.

Das wegen seines reichen Inhalts und seiner pädagogischen Vorzüge geschätzte Werkchen erscheint nun in einer zweiten Auflage, die die alte Linie beibehält, jedoch in manchen Partien erheblich verändert ist. Obwohl der Stoff noch reichhaltiger geworden ist dadurch, daß Neues hinzugefügt ist und Dinge, die früher nur angedeutet waren, vollständiger ausgeführt wurden, hat sich der Umfang nicht vermehrt, sondern er ist sogar um elf Seiten gesunken. Dies war deshalb möglich, weil sich manches infolge der seit Erscheinen der ersten Auflage erzielten Fortschritte in der Funktionentheorie kürzer und dabei übersichtlicher darstellen ließ.

Da es wohl kaum einen Mathematiker geben wird, der das Buch nicht schon benutzt hat, so genügt es für die vier ersten Abschnitte, welche die linearen und rationalen Funktionen, den Zusammenhang zwischen dem Charakter der zugeordneten Bereichränder und der Abbildung des Innern (Schwarzsches Spiegelungsprinzip) und einige typische spezielle Abbildungen behandeln, zu sagen, daß sie im wesentlichen die alte Form beibehalten haben. Dagegen hat der fünfte Abschnitt eine grundlegende Änderung erfahren.

Während früher der Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes (nach Carathéodory und Koebe) auf der Verwendung sukzessiver Wurzelabbildungen und dem Verzerrungssatz beruhte, wird er jetzt (nach Fejér und Riesz) auf eine Minimaleigenschaft der Kreisabbildung gegründet und mit Hilfe des Montelschen Satzes, daß eine gleichmäßig beschränkte Funktionenfolge normal ist, geführt. (Der letztere Satz wird aus dem Vitalischen Doppelreihensatz abgeleitet.) Der frühere Beweis wies zugleich einen brauchbaren Weg zur praktischen Ausführung der konformen Abbildung. Da dies bei dem jetzigen nicht oder wenigstens nicht in demselben Maße der Fall ist, so wurde hierfür das vom Verfasser angegebene und in der Praxis bewährte Verfahren eingeschoben. Dann folgt, um die Abbildung des Randes näher studieren zu können, ein Kapitel über Potentialtheorie, das in der ersten Auflage in weniger ausführlicher Form ganz am Schluß des Buches stand. Nunerst kommen die Koebeschen Verzerrungssätze (die früher wegen des Beweises des Riemannschen Fundamentalsatzes vorausgeschickt werden mußten), und zwar in der vom Verfasser herrührenden verschärften Gestalt mit genauer Bestimmung der darin vorkommenden Konstanten. Den Abschluß des Buches bilden die Kapitel über die Abbildung von nichtschlichten Bereichen und über die Probleme der Uniformisierung, die ihre frühere Form behalten haben.

So ist das Büchlein unter Bewahrung seiner alten Vorzüge auf den modernsten Standpunkt gebracht und wird wie bisher einen der besten und beliebtesten Zugänge zur Theorie der konformen Abbildung darstellen.

Stuttgart. DOETSCH.

J. Horn, Gewöhnliche Differentialgleichungen. 2. Aufl. Mit 4 Fig. VIII u. 197 S. (Göschens Lehrbücherei Gruppe I, Bd. 10.) Berlin und Leipzig 1927, Walter de Gruyter & Co. Geh. *RM* 9.—, geb. *RM* 18.50.

Das in der Sammlung Schubert erschienene, seit längerer Zeit vergriffene Werk des Verfassers „Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung" liegt in einer völlig neubearbeiteten und im Umfang verkleinerten zweiten Auflage vor. Den Streichungen, die in erster Linie Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen betreffen, stehen manche Erweiterungen und Abrundungen gegenüber. So ist auf dem kleinen Raum von zwölf Druckbogen eine nur geringe Vorkenntnisse erfordernde, ziemlich weit eindringende Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen entstanden, die wegen der Klarheit und Übersichtlichkeit der Darstellung und wegen der starken Berücksichtigung der Anwendungen vor allem Physikern und Ingenieuren, daneben natürlich auch den Studierenden der Mathematik durchaus empfohlen werden kann.

Die ersten vier Kapitel („Elementare Integrationsmethoden", „Existenzbeweise", „Numerische und graphische Näherungsmethoden", „Lineare Differentialgleichungen") behandeln die Grundzüge der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen im Reellen; in Kap. V werden speziellere Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen im Reellen angestellt. Die Existenzbeweise werden durchweg mit Hilfe sukzessiver Approximation geführt. Dieses Verfahren gelangt auch in Kap. VI („Existenzbeweise im komplexen Gebiet") zur Anwendung. Der folgende Abschnitt ist der Theorie der linearen Differentialgleichungen im Komplexen gewidmet. Als Beispiele werden die Differentialgleichungen der hypergeometrischen Reihe, des Legendreschen Polynoms

und der Besselschen Funktion besprochen. Die Streichungen, die an der ersten Auflage des Werkes vorgenommen werden mußten, werden in diesem Abschnitt fühlbar. Vor allem wird man wohl die Erwähnung und Behandlung der Monodromiegruppe vermissen. Das Kap. VIII („Abhängigkeit der Lösungen von Parametern und Anfangswerten") führt bis zu den Poincaréschen Untersuchungen der periodischen Lösungen eines Systems von Differentialgleichungen mit einem Parameter. Die Singularitäten nichtlinearer Differentialgleichungen werden im letzten Abschnitt behandelt.

Zu dem Inhalt des Buches sind noch folgende Bemerkungen zu machen: Auf S. 12/13 wird zu zwei gegebenen, der Integrabilitätsbedingung genügenden Funktionen $P(x,y)$ und $Q(x,y)$ eine Funktion $u(x,y)$ bestimmt, die die Bedingungen $u_x = P$, $u_y = Q$ erfüllt. Es ist zu bemerken, daß diese Bestimmung im allgemeinen nur dann ausführbar ist, wenn die Integrabilitätsbedingung in einem einfach zusammenhängenden Gebiet erfüllt ist. — Auf S. 39/40 wird das auf Euler zurückgehende Verfahren zur Bestimmung einer Näherungslösung einer Differentialgleichung erster Ordnung angegeben. An der Stelle, an der die Abweichung der gefundenen angenäherten Lösung von der genauen Lösung der Differentialgleichung untersucht werden soll, findet sich die folgende Fußnote: „Der Leser, dem es nur auf Näherungsmethoden ankommt, kann den Rest von § 14 übergehen." Diese Auffassung kann nach der Ansicht des Referenten nicht unwidersprochen bleiben, da eine Näherungsmethode einen wirklichen Wert erst durch die Fehlerabschätzung erhält. — In § 20 („Fundamentalsystem von Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung") würde die Darstellung an Übersichtlichkeit vielleicht noch etwas gewinnen, wenn der Begriff der linearen Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit an die Spitze statt an das Ende gestellt würde. Bei einer Erörterung über lineare Unabhängigkeit auf S. 80 (Zeile 5 von unten) fehlt übrigens der Zusatz, daß die konstanten Multiplikatoren nicht sämtlich gleich Null sein dürfen.

Berlin-Lankwitz. FEIGL.

E. Hellinger und **O. Toeplitz, Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten.** Sonderausgabe der Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. 281 S. Leipzig 1928, B. G. Teubner. Geb. *RM* 16.—.

Es dürfte kaum ein anderes Gebiet in der Mathematik geben als das der Integralgleichungen, an dessen Ausbau sich Forscher so verschiedener Richtung, vom Physiker bis zum abstrakten Algebraiker, beteiligt haben. Ein zusammenfassender Bericht kann daher leicht zu einer Sammlung von Einzeltatsachen aus den verschiedensten Gebieten werden, die, von verschiedenen Gesichtspunkten betrachtet, keinen einheitlichen Aufbau erkennen läßt. Um dem zu begegnen, haben sich die Verfasser des vorliegenden Encyklopädieartikels von vornherein eine feste Richtlinie für die Anlage gewählt. Sie lassen bewußt die weitverzweigten Anwendungen außer acht und stellen ein anderes Moment, das in gleicher Weise zur Bedeutung der Integralgleichungen beigetragen hat wie diese, in den Mittelpunkt: den Zusammenhang mit der Algebra. Dies ist um so mehr gerechtfertigt, als die Anwendungen in die anderen einschlägigen Encyklopädieartikel aufgenommen sind, und insbesondere für die Verwendungsmöglichkeiten in der theoretischen Physik in den Büchern:

Methoden der mathematischen Physik (R. Courant und D. Hilbert), Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik (A. Kneser), Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik (R. v. Mises) zusammenfassende Darstellungen bereits vorliegen.

Um weiterhin nicht durch Rücksichten auf den historischen Entwicklungsgang gehemmt zu sein, beginnen die Verfasser mit einer geschichtlichen Übersicht. Die Literatur wird hier bis zum ersten Auftreten der algebraischen Behandlungsweise analytischer Probleme bei D. Bernoulli zurückverfolgt. Man erfährt weiter, daß Integralgleichungen zweiter Art, zunächst noch für spezielle Kerne, sowie deren Auflösung durch Iteration bereits bei Liouville (1837) und ohne Konvergenzuntersuchung bei Beer (1856) vorkommen. Es wird sodann die Entstehung der Theorie etappenweise dargestellt (Volterra, Poincaré, Fredholm, Hilbert, E. Schmidt), und zwar in der Art, daß jeweils auf die Schwierigkeiten, die sich der Weiterentwicklung entgegenstellten, hingewiesen ist und dann die prinzipiell neuen Gedanken angegeben werden, die zum Fortschritt führten.

Um nur ein Beispiel herauszugreifen. Lange bekannt war der formale Zusammenhang von Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten und Integralgleichungen. Die Schwierigkeit lag in der strengen Begründung des Grenzüberganges. Sie wurde von den verschiedenen Autoren in mannigfacher Art angegriffen. Hilbert trägt ein neues Moment durch die Erkenntnis hinein, daß statt der Forderung der Konvergenz für die auftretenden Reihen die „Mittelkonvergenz“ in dem Sinne, daß das Quadratintegral über den Fehler klein wird, ausreicht; hierdurch tritt die Bedeutung der „vollständigen Funktionensysteme“ in den Vordergrund, die heute ja einen wichtigen Bestandteil der Analysis ausmachen.

Nach dieser genetischen Schilderung der Theorie gehen die Verfasser zu ihrer Darstellung in der heutigen Gestalt über. Wie bereits bemerkt, ist das Leitmotiv dabei die Herausarbeitung des Zusammenhanges zwischen den Fragenkomplexen aus der Lehre von den Integralgleichungen und den entsprechenden der Algebra.

Die Gliederung ist folgende:

I. Auflösungstheorie für Integralgleichungen zweiter Art und dementsprechend für Gleichungssysteme mit unendlichvielen Unbekannten.

II. Eigenwerttheorie der Integralgleichungen und dementsprechend der quadratischen und bilinearen Formen von unendlichvielen Variablen (Hauptachsentransformation bzw. Elementarteilertheorie).

Die Auflösungstheorie wird mit der Übertragung der geläufigsten Lösungsmethoden für lineare Gleichungen begonnen, nämlich mit den Determinantensätzen, was auf die Fredholmschen Untersuchungen hinausläuft. Sodann wird der Übergang von Lösungsformeln zu Lösungstatsachen vollzogen, d. h. die Ergebnisse werden „determinantenfrei“ formuliert und die Methoden angeschlossen, die ohne Benutzung der unendlichen Determinanten zu ihnen führen. (Insbesondere E. Schmidt, R. Courant.)

Hilberts Theorie der vollstetigen Gleichungssysteme findet eine sehr durchsichtige Wiedergabe, unter Anführung aller wesentlichen Beweismomente.

Der bekannte Schmidtsche Zerspaltungsprozeß des Kernes in einen solchen von endlichem Rang (häufig „Goursatscher Kern“, bei Courant

„ausgearteter Kern" genannt) und einem mit einer Resolvente versehenen wird nach dem Vorgang von C. A. Dixon (1901) sinngemäß auf vollstetige Bilinearformen übertragen. Hieran schließen sich Untersuchungen über Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten, die die Auflösung von Integralgleichungen nicht mehr unmittelbar zur Zielsetzung haben.

Die Voraussetzungen werden schrittweise erweitert; dabei sind folgende hauptsächlichen Etappen unterschieden, die in ihrer Tragweite verglichen werden:

1. Die Methode der unendlichen Determinanten (Hill, Helge von Koch);
2. beschränkte Gleichungssysteme (Einführung unendlicher Matrizen. Hilbert, Hellinger, Toeplitz);
3. Konvergenz der Quadratsumme der Koeffizienten jeder einzelnen Gleichung (Hilbertscher Raum. E. Schmidt).

Sodann ist die Bedeutung dieser Untersuchungen für singuläre Integralgleichungen erörtert. Endlich wird auseinandergesetzt, wie sich die linearen Integralgleichungen der Lehre von den linearen Funktionaloperationen einordnen lassen (general analysis von E. H. Moore).

Die Untersuchungen über nichtlineare Integralgleichungen und numerische Methoden haben am Ende des Abschnittes über die Auflösungstheorie Platz gefunden.

Die Eigenwerttheorie wird unter demselben Gesichtswinkel betrachtet wie die Auflösungstheorie. Die Verfasser beginnen mit der Wiedergabe der Ergebnisse für den symmetrischen Kern und denjenigen Beweismethoden, die sich hauptsächlich analytischer Hilfsmittel bedienen. Als die wichtigsten seien nur die von E. Schmidt, die funktionentheoretischen von A. Kneser sowie die sich auf das Dirichletsche Prinzip stützenden genannt.

Sodann sind die prinzipiellen Unterschiede zu unsymmetrischen Kernen herausgehoben. Die volle Analogie zu den Sätzen für den symmetrischen Kern läßt sich nur dann wahren, wenn man nach E. Schmidt von dem System der Gleichungen

$$\varphi(s) - \lambda \int K(s,t)\psi(t)\,dt = 0, \qquad \psi(s) - \lambda \int K(t,s)\varphi(t)\,dt = 0$$

ausgeht.

Im andern Fall hat das vollständige System der Hauptfunktionen an Stelle der Eigenfunktionen zu treten.

Die Verfasser gehen dann zu den entsprechenden algebraischen Fragen über: der Theorie der quadratischen und bilinearen Formen.

Die Grundlage bildet Hilberts Hauptachsentransformation für die vollstetigen quadratischen und die damit verwandten alternierenden und Hermiteschen Formen. Sie wird in übersichtlicher Form eingehend dargestellt.

Ausführlicher, als dies in der Literatur bisher geschah, sind die symmetrisierbaren Formen besprochen, auf die man durch die symmetrisierbaren Kerne geführt wird, die mit den polaren Integralgleichungen zusammenhängen.

Die zugrundeliegende algebraische Fragestellung lautet wie folgt: Es soll eine reelle quadratische Form auf die Normalform gebracht werden durch eine solche lineare Transformation, die eine andere positiv definite Form D zu-

gleich in die Normalform überführt. Diese Frage wird mit den symmetrisierbaren Formen in Zusammenhang gebracht, und es ergibt sich je nach den über D gemachten Voraussetzungen (eigentlich definit, semidefinit) ein verschiedenes Verhalten, welches ins einzelne klargelegt wird. In diesen algebraischen Tatsachen erkennen die Verfasser die Quelle für die Schwierigkeiten, die in der Theorie der symmetrisierbaren Kerne auftreten.

Schließlich gibt Toeplitz ein Beispiel einer vollstetigen symmetrisierbaren Form, die durch keine beschränkte oder vollstetige Transformation auf die Diagonalform gebracht werden kann. Das besagt aber, daß der Entwicklungssatz für symmetrisierbare Kerne sowie die zugehörige bilineare Integralform nicht gilt.

Von den vollstetigen wird sodann zu den beschränkten Formen aufgestiegen und Hilberts Theorie besprochen. Das Streckenspektrum sowie der Zusammenhang mit den Kettenbrüchen tritt hier in Erscheinung. Von da aus kehren die Verfasser wieder zur singulären Integralgleichung zurück.

Wie der Abschnitt über die Auflösungstheorie, so schließt auch der über die Eigenwerttheorie mit der Einordnung des Gegenstandes in die Lehre von den Funktionaloperationen. Die Grenzen der general analysis werden genau abgesteckt. Während die Schmidtschen Schlüsse über die Eigenwerttheorie noch eingehen, bietet sich für die auf Grund der vollstetigen Formen und Elementarteilertheorie gewonnenen Tatsachen kein Ansatzpunkt.

Zu erwähnen bleibt noch, daß die Literatur nach Angabe der Verfasser bis zum 1. Januar 1923 vollständig berücksichtigt ist; später erschienene Arbeiten sind ihrem hauptsächlichen Inhalt nach meist an den entsprechenden Textstellen in Fußnoten beigefügt.

Jedenfalls gibt der Artikel ein durchsichtiges Bild der Methoden, die der Theorie der Integralgleichungen und der Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten entsprungen sind, und zeigt die Möglichkeiten ihrer Auswirkung.

HAMMERSTEIN.

Th. De Donder, Théorie des invariants intégraux. VI u. 128 S. Paris 1927, Gauthier-Villars & Cie.

Die vorliegende Einführung in die Theorie der Integralinvarianten beschränkt sich fast ausschließlich auf die mathematische Seite des Gegenstandes, während die physikalischen Anwendungen einer eigenen Schrift vorbehalten bleiben, die im „Mémorial des Sciences physiques" erscheinen soll.

Das Bestreben des Verfassers geht dahin, den Algorithmus der Theorie der Integralinvarianten auf die gewöhnlichen Operationen: totale Ableitung, Differentiation, Multiplikation zurückzuführen. Er bevorzugt daher bei Einführung der Rechenregeln soweit als möglich algebraische Methoden, die zum Teil von ihm selbst herrühren. Dementsprechend beginnt der Band mit einer rein algebraischen Betrachtung der „Integralformen", d. h. der Integranden von m-fachen Integralen, die über eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit im ν-dimensionalen Raum erstreckt werden (Kap. 1). Es folgt (Kap. 2) der Begriff der allgemeinen Lösung und der Invarianten eines Systemes von gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$(1) \qquad \frac{d x_\alpha}{X_\alpha (t; x_1, x_2, \dots x_\nu)} = dt. \qquad (\alpha = 1, 2, \dots \nu).$$

Ein solches System definiert für jede m-dimensionale mit der Zeit veränderliche Mannigfaltigkeit A_m im ν-dimensionalen Raum die punktweise Zuordnung der Lagen der A_m für zwei benachbarte Werte der Zeit t und damit auch die zeitliche Änderung für jedes über die A_m erstreckte m-fache Integral und seinen Integranden. Man gelangt auf diese Weise zu den Begriffen der totalen Ableitung einer Integralform und eines m-fachen Integrales sowie zu dem einer absoluten Integralinvariante des Systemes (1), deren Erörterung den Inhalt des dritten Kapitels bildet. Ein m-faches Integral, erstreckt über eine geschlossene m-dimensionale Mannigfaltigkeit A_m, die eine $(m+1)$-dimensionale, A_{m+1}, begrenzt, läßt sich stets in ein $(m+1)$-faches Integral über die A_{m+1} verwandeln. Der Integrand des neuen Integrales heißt das „Integraldifferential" des ursprünglichen Integranden. Seine Bildung und Haupteigenschaften bespricht das vierte Kapitel, das schließlich zum Begriff der relativen Integralinvarianten des Systemes (1) aufsteigt. Kap. 5 ist einer vom Verfasser „Integralmultiplikation" genannten Operation gewidmet, die aus den Integranden eines m-fachen und eines p-fachen Integrales den eines $(m+p)$-fachen erzeugt; Kap. 6 der „Integralsubstitution", einer Operation, die umgekehrt den Integranden eines m-fachen Integrales auf den eines $(m-1)$-fachen reduziert. Im siebenten Kapitel studiert der Autor nacheinander den Einfluß einer Transformation der abhängigen Veränderlichen x_α, der unabhängigen t und endlich aller Veränderlichen auf das System (1) und die zugehörigen Integralinvarianten. Die folgenden Kapitel behandeln die Systeme von kontravarianten und kovarianten Funktionen in bezug auf das System (1) (Kap. 8), die Pfaffschen Formen (Kap. 9) und den vom Verfasser herrührenden Begriff der „Integralvarianten vom Grade ϱ", d. h. der Integralformen, deren $(\varrho+1)^{\text{te}}$ totale Ableitung Null ist (Kap. 10). Im Schlußkapitel werden die wichtigsten Begriffe des absoluten Differentialkalküls aus der Theorie der Integralinvarianten hergeleitet. Ein beigegebenes Literaturverzeichnis nennt 124 Arbeiten über Integralinvarianten und verwandte Theorien.

Die Darstellung ist sorgfältig, klar und präzis. Besonders zu begrüßen ist, daß sich am Ende jedes Kapitels ein kurzer orientierender Hinweis auf die wichtigsten Originalarbeiten über den Gegenstand des Abschnittes findet. Alles in allem darf man wohl sagen, daß das vom Verfasser angestrebte Ziel einer elementar gehaltenen Einleitung in die Theorie der Integralinvarianten erreicht ist.

Prag. L. Berwald.

Tullio Levi-Civita e Ugo Amaldi, Lezioni di meccanica razionale. Volume secondo: Dinamica dei sistemi con un numero finito di gradi di libertà. Parte seconda. IX u. 684 S. Bologna 1927.

Der zweite Teil des zweiten Bandes dieses Werkes, dessen erster Teil in dieser Zeitschrift bereits besprochen wurde (Bd. 36, S. *76*), bestätigt das damals geäußerte Urteil; es handelt sich um ein umfangreiches, gehaltvolles, sorgfältig durchgearbeitetes und klar geschriebenes Lehrbuch der Mechanik, das als eines der besten bezeichnet werden kann, die wir haben, und das auch in Deutschland Beachtung finden sollte.

Dieser zweite Teil enthält die Kapitel VII bis XII. Von diesen sechs Kapiteln behandeln drei die Dynamik der starren Körper. Das erste hauptsächlich

die ebene Bewegung, dabei Doppelpendel und Rollen mit Reibung. Das zweite die Bewegung um einen festen Punkt und das gyroskopische Phänomen. Also die Poinsotbewegung, den schweren symmetrischen Kreisel und den Fall der Frau Kowalewski. Besonders sei auch auf die natürlichen Gleichungen des symmetrischen Kreisels hingewiesen (Seite 185), bei denen Bogenlänge und geodätische Krümmung der Bahn der Kreiselspitze auf der umgebenden Kugel eingeführt werden. Das dritte Kapitel behandelt allgemeinere Rollprobleme, z. B. die Billardkugel, den rollenden Reifen, Körper mit eingebauten Kreiseln. Die technischen Anwendungen werden nur kurz gestreift. Das zehnte und umfangreichste Kapitel ist den kanonischen Gleichungen gewidmet. Man findet dort die Hamilton-Jacobische Theorie in ihren wesentlichen Grundzügen mit Anwendungen auf die Störungstheorie, wohl nicht so weitgehend wie in dem Spezialwerk von Whittaker, aber doch so ausführlich, daß ein volles Bild gewonnen wird. Allerdings kommt das Hamiltonsche Prinzip und das Prinzip der variierten Wirkung erst am Schlusse des folgenden Kapitels, während die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung und ihre Bedeutung für die Integrationstheorie schon im zehnten Kapitel erscheint. Vielleicht, daß die Erkenntnis des Zusammenhanges dadurch ein wenig erschwert wird. Das elfte Kapitel bespricht sonst noch gewisse allgemeine Prinzipien, es fängt an mit dem Gaußschen Prinzip und dem Hertzschen. Dann kommt das Hamiltonsche mit der Verallgemeinerung von Hölder, daran anschließend die Ausdehnung auf allgemeine Lagrangesche Variationsprobleme und dann erst das Prinzip der variierten Wirkung mit dem Theorem von Beltrami-Lipschitz über das Senkrechtstehen der Bahnkurven auf den Flächen konstanter Wirkung. Die Jacobische Form des Prinzips erscheint im Anschluß an die Hölderschen Untersuchungen, wo sie auch hingehört, doch ohne Nennung des Namens Jacobi. Das letzte Kapitel des Buches bringt noch die Stoßerscheinungen, ballistisches Pendel, Rolle der Reibung beim Stoß und das Theorem von Volterra. Jedes Kapitel enthält am Schluß größere Übungsaufgaben.

Berlin, den 5. März 1928. HAMEL.

E. T. Whittaker, Analytische Dynamik der Punkte und starren Körper. Mit einer Einführung in das Dreikörperproblem und mit zahlreichen Übungsaufgaben. Nach der zweiten Auflage übersetzt von Dr. F. und K. Mittelsten-Scheid. XII u. 462 S. Berlin 1924, Julius Springer.

Der Herausgeber der Grundlehren der mathematischen Wissenschaften und der Verlag Springer haben sich ein Verdienst erworben, daß sie dieses ausgezeichnete Lehrbuch der Mechanik in deutscher Sprache herausgegeben haben. Es war zwar schon lange in Deutschland bekannt, aber die fremde Sprache bildet doch immer noch ein Hindernis der hier wünschenswerten weiten Verbreitung. Es gibt kein anderes Lehrbuch von der besonderen Eigenart des hier vorliegenden. Es ist kein Lehrbuch der allgemeinen Mechanik, auch die Auseinandersetzung der Grundlagen ist nicht sein Ziel. Zweck ist vielmehr Darstellung der mathematischen Durcharbeitung der Mechanik, wie sie von Lagrange, Hamilton, Jacobi begonnen und durch neuere Forscher weitergeführt worden ist. Am Schlusse stehen die ersten Elemente der astronomischen Mechanik, die immer noch für diese Art Mechanik das belebendste Element bildet. Irdische und technische Mechanik treten ganz in den Hintergrund. Die Theorie der Reibung wird nur einmal kurz gestreift.

Gleichwohl ist der Grund, auf dem das Buch aufbaut, keineswegs allzu schmal und abstrakt. Der Studierende, der danach arbeitet, bekommt doch einen ziemlich weiten Einblick in die ganze Mechanik, wenigstens die der Punkte und starren Körper. Acht von den sechzehn Kapiteln, also etwa die Hälfte, dienen der allgemeinen Mechanik, den Grundlehren, der Aufstellung der Bewegungsgleichungen und den elementaren Integrationstheorien. Auch die nichtholonomen Systeme werden ausführlich behandelt, Kreiselbewegung und Schwingungstheorie werden ausreichend vorgetragen. Vier weitere Kapitel bilden dann wohl den Hauptteil des Buches, indem sie die Hamilton-Jacobische Theorie ausführlich darstellen. Auch die Theorie der Integralinvarianten, Sätze über Systeme mit Integralen besonderer Form, ein Satz von Levi-Civita fanden hier Platz. Die vier letzten Kapitel, also das letzte Viertel des Buches, ist der astronomischen Mechanik gewidmet, insbesondere dem Dreikörperproblem. Ein Kapitel behandelt die Reduktion dieses Problems mittels der bekannten allgemeinen Integrale. Das folgende Kapitel bringt die Sätze von Bruns und Poincaré und bewahrt den jungen Forscher davor, in verkehrter Richtung weiterzusuchen, ebnet die Bahn für das Folgende. Das 15. Kapitel nennt sich allgemeine Theorie der Bahnkurven, es enthält die Theorie der periodischen Lösungen und Lagranges Partikularlösung der drei Massenpunkte nebst ihren Nachbarbahnen, fernerhin die Theorie der charakteristischen Exponenten und Stabilitätsuntersuchungen. Das letzte Kapitel gibt zunächst einen Bericht über die Versuche von Poincaré, Sundman und Levi-Civita zur Regularisierung des Dreikörperproblems, ohne genauere Ausführungen, und geht dann ausführlicher auf die Entwicklung in trigonometrische Reihen ein. Damit ist der Leser so weit geführt, daß er sich in astronomische Spezialwerke vertiefen kann.

Die Darstellung ist klar und einwandfrei. Die Übersetzung liest sich gut.

Berlin, den 14. Februar 1928. HAMEL.

Ph. Frank und R. v. Mises, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. (7. Aufl. von Riemann-Webers Partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik.) II. (physikalischer) Teil, herausgegeben von Ph. Frank. XXIII u. 863 S. Braunschweig 1927, Fr. Vieweg & Sohn. Geh. $\mathcal{RM}$ 53.—, geb. $\mathcal{RM}$ 58.—.

Nun liegt auch der zweite Band des Werkes vor, das den „Riemann-Weber“ abgelöst hat. Über die Absicht der Herausgeber und die Gründe, die eine vollständige Umgestaltung oder besser Neugestaltung des Werkes nahelegten, wurde schon bei Gelegenheit der Besprechung des ersten Bandes (diese Berichte Bd. 35, 1926, S. *63—66*) berichtet. Es dürfte also diesmal nur noch auf die Verteilung des Stoffes auf die zwei Bände etwas einzugehen sein. Der Herausgeber des zweiten Bandes unterscheidet in der Physik drei Gebiete: 1. die Erfahrung, 2. das theoretische Gebäude oder Hypothesensystem, 3. den mathematischen Kalkül, der die Auswertung der in den Hypothesen liegenden Ansätze besorgt und mathematische Konsequenzen entwickelt, die an der Erfahrung überprüft werden können. Mit den beiden ersten Gebieten, der Experimentalphysik und der theoretischen Physik, hat das vorliegende Werk nichts zu tun, sein Gegenstand ist das dritte Gebiet, die „mathematische Physik“. Es handelt also von denjenigen mathematischen Methoden, die sich in Verfolgung der theoretisch-physikalischen Ansätze als brauchbar und not-

wendig erwiesen haben. Vom ersten Band könnte man sagen, daß er den reinsten Extrakt, die Quintessenz, dieser Methoden enthält, er brachte die Theorien in allgemeinster Form und gewissermaßen mit den Augen des Mathematikers gesehen. Der zweite Band dagegen geht von den speziellen Problemen der theoretischen Physik aus, wendet zwar jene allgemeinen Theorien an, sieht aber alles mit den Augen des Physikers und richtet sein Augenmerk auf die spezielle Lösung. Demgemäß ist das Buch auch, anders als der erste Band, nicht nach mathematischen Gesichtspunkten, sondern nach physikalischen Gebieten eingeteilt, wobei natürlich, sollte der Umfang nicht ins Ungemessene wachsen, nicht alle Teile der Physik zur Geltung kommen konnten; so ist z. B. die allgemeine Relativitätstheorie ganz unberücksichtigt gelassen. Diese Einteilung war wohl kaum zu umgehen, besonders da sich das Werk die Grenzen recht weit steckt und in vielen Dingen ziemlich in die physikalischen Details geht; doch ist dadurch eine Absicht vereitelt worden, die der Herausgeber dem Vorwort nach zu schließen gehabt zu haben scheint, nämlich zu zeigen, wie ein und dieselbe Theorie oft in den verschiedensten Disziplinen sich als ausgezeichnetes Werkzeug bewährt und so oft die rasche Entwicklung einer neuen Disziplin begünstigt. Man denkt da z. B. an die außerordentlich vielseitige Verwendungsmöglichkeit der Potentialtheorie oder der Methoden der konformen Abbildung oder an das Spiegelungsprinzip, das nicht nur in den mit der komplexen Funktionentheorie zusammenhängenden Gebieten wie etwa der Elektrostatik, sondern auch in der Wärmeleitung, bei den Schwingungen usf. eine große Rolle spielt. Es ist jedoch klar, daß bei diesem zweiten Band, der es mit den physikalischen Problemen unmittelbar zu tun hat, durch eine nach Methoden vorgenommene Stoffanordnung, die vielleicht an sich reizvoll und dem Wesen des Werkes, theoretisch genommen, am besten angepaßt gewesen wäre, die praktische Brauchbarkeit für den Benutzer, der sich ja meist nur für ein bestimmtes physikalisches Gebiet interessiert und sich so sein Material aus verschiedenen Kapiteln hätte zusammensuchen müssen, herabgemindert worden wäre. Bei der Einteilung nach physikalischen Gesichtspunkten war es außerdem möglich, für jeden Abschnitt als Bearbeiter einen hervorragenden Sachkenner der betreffenden Materie zu gewinnen, der nun von hoher Warte aus das behandeln konnte, was ihm mathematisch am wichtigsten dünkte. Die Entfernung vom alten Riemann-Weber ist in diesem Bande naturgemäß noch größer als in dem ersten, und es ist nicht möglich, von dem trotz Durchführung aller Entwicklungen doch sehr konzentrierten Inhalt eine vollständige Vorstellung zu geben. Es seien also nur die Hauptpunkte daraus angeführt. Im ersten Abschnitt behandelt der Herausgeber, Ph. Frank, selbst die analytische Mechanik in moderner und sehr allgemeiner Form, die eine weitgehende Anwendungsmöglichkeit auf Probleme, die heute im Mittelpunkt des Interesses stehen wie die Quantentheorie, gewährleistet. Von den im ersten Band entwickelten Theorien, vor allem der von Carathéodory dargestellten Variationsrechnung, wird ausgiebig Gebrauch gemacht. Sehr angenehm ist die reichliche Einstreuung von Beispielen, die den an sich nicht leichten Stoff dem Verständnis näher bringen. In den fünf Unterabschnitten werden behandelt: Die allgemeinen mechanischen Systeme, die kleinen Schwingungen, der starre Körper, die Störungstheorie und die Himmels-(Atom-)mechanik. Der zweite Abschnitt, verfaßt von R. Fürth, bringt die schon im ersten Band nach der mathematischen Seite ausführlich behandelte Wärmeleitung und die von derselben Diffe-

rentialgleichung beherrschte Diffusion nun unter ausdrücklicher Betonung der physikalischen Gesichtspunkte. Außer der freien Wärmeleitung und Diffusion (mit besonderer Anwendung auf die Brownsche Bewegung) kommt auch die für die Praxis sehr wichtige Wärmeleitung und Diffusion mit aufgezwungener Konvektion (z. B. Kühler und Brownsche Bewegung im Schwerefeld) zur Darstellung. Im dritten Abschnitt behandelt F. Noether das stationäre elektromagnetische Feld, gegliedert in Elektrostatik, stationäre elektrische Strömungen und Magnetostatik. Ein Kapitel über quasistationäre Ströme und Wellen bildet die Überleitung zum vierten Abschnitt, welcher, der Feder Sommerfelds entstammend, einen Ausschnitt aus dem weitausgedehnten Gebiet der elektrischen Schwingungen gibt, wobei moderne Untersuchungen und solche, die für die Praxis (z. B. Antennen) wichtig sind, in erster Linie berücksichtigt wurden. Der erste, den allgemeinen Sätzen und Integrationsmethoden gewidmete Unterabschnitt gibt bei Betrachtung der Invarianz der Maxwellschen Gleichungen gegenüber der Lorentztransformation Gelegenheit zur Einführung der speziellen Relativitätstheorie. Dann folgen: Beugung, Wechselstromwiderstand und Skineffekt, Drahtwellen und drahtlose Telegraphie. Der fünfte und letzte Abschnitt ist der Mechanik der Kontinua gewidmet und von mehreren Verfassern bearbeitet. Zunächst gibt E. Trefftz eine übersichtliche Darstellung der Elastizitätstheorie, gegliedert in mathematische Grundlagen, Probleme des elastischen Gleichgewichts (z. B. Torsion, Spannung und Druck) und dynamische Probleme (schwingende Saiten und Membrane), dann behandelt Th. v. Kármán die idealen, d. h. reibungslosen Flüssigkeiten (mit Anwendungen auf die Fluglehre), und schließlich berichten H. Faxén und C. W. Oseen über die schwierigen und besonders von dem letzteren Bearbeiter geförderten Probleme der Flüssigkeitsbewegung mit Reibung.

Man muß wohl sagen, daß die Herausgeber ihr Ziel, „für unsere Zeit die Erfüllung der Aufgabe zu suchen, die Weber so meisterhaft für die seinige gelöst hat“, erreicht haben und ihnen sowie den Bearbeitern Dank wissen dafür, daß sie der heutigen Physik ein mathematisches Kompendium geschaffen haben, auf das der Lernende sowohl wie der Forschende stets als zuverlässige Basis zurückgreifen kann. Es ist klar, daß eine solch umfangreiche Neuschöpfung mit vielen Mitarbeitern nicht gleich im ersten Wurf vollkommen ausgeglichen gelingen kann: was vielleicht entbehrt werden könnte und was etwa hinzuzufügen wäre, muß nun die praktische Benutzung zeigen.

Stuttgart, Februar 1928. DOETSCH.

Albrecht Patzig, Politische Arithmetik. VI u. 104 S. Leipzig und Berlin 1927, B. G. Teubner. Kart. RM 3.20.

Es werden in elementarer Weise folgende Dinge behandelt: I. Die verschiedenen Formen des Zinses. II. Renten und Amortisation. III. Zins- und Rententafeln, die Verhältnisse bei unterjähriger Zahlung. IV. Anleihe- und Darlehenswesen: Berechnung der Anleihe und Tilgung, die besonderen Verhältnisse bei Obligationen, Berechnung des Kurses. (Dieser zeitgemäße Abschnitt ist besonders ausführlich behandelt.) V. Die allereinfachsten Grundbegriffe der Versicherungsmathematik. — Ein brauchbarer Leitfaden für jeden, der sich mit Finanzfragen zu beschäftigen hat.

Stuttgart, Januar 1928. DOETSCH.

Eugen Altschul, Berechnung und Ausschaltung von Saisonschwankungen. (Merkblatt II/III der Frankfurter Gesellschaft für Konjunkturforschung.) 36 S. Karlsruhe, G. Braun. Geh. *RM* 1.80.

Das Heftchen berichtet über einen Ausschnitt aus der modernen Konjunkturforschung: Die rechnerische Erfassung der Saisonschwankungen im Wirtschaftsleben, einem z. B. für die im ökonomischen Interesse äußerst wünschenswerte gleichmäßige Beschäftigung der Betriebe sehr wichtigen Gebiet, dem bisher hauptsächlich nur Amerikaner sich gewidmet haben. Es werden nur die (übrigens sehr einfachen) Methoden angegeben, eine mathematische Behandlung soll später folgen. Bei stärkerer Heranziehung der mathematischen Statistik und moderner graphischer Darstellungsmethoden wie der Nomographie dürfte dies Gebiet noch sehr ausbaufähig sein.

Stuttgart, Januar 1928. DOETSCH.

Henry Lewis Rietz, Mathematical Statistics. (The Carus Mathematical Monographs Nr. 3.) XI u. 181 S. Chicago-Illinois 1927. Published for The Mathematical Association of America by The Open Court Publishing Company.

Das Büchlein legt den Hauptwert nicht auf die statistische Praxis, sondern auf die der Statistik zugrundeliegende mathematische Theorie. Die beiden ersten Kapitel bringen die wesentlichsten Tatsachen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung, an die sich im dritten Kapitel eine Darstellung der Fehlergesetze (Häufigkeitskurven) anschließt. Hier werden ausführlich die für die Praxis wichtigen Verallgemeinerungen des Gaußschen Fehlergesetzes von Pearson, die an eine Verallgemeinerung der Differentialgleichung dieses Gesetzes anknüpfen, sowie diejenigen von Gram und Charlier, die in Reihenentwicklungen nach den Ableitungen der Gaußschen Funktion bzw. nach den Differenzen der beim Gesetz der kleinen Wahrscheinlichkeiten auftretenden Poissonschen Funktion bestehen, besprochen. In diesem dritten Kapitel wird nicht weiter diskutiert, warum man gerade zu diesen Verallgemeinerungen kommt. Diese Lücke wird in dem anhangartigen 7. Kapitel ausgefüllt, wo jene Entwicklungen im Anschluß an die 1923 erschienene Arbeit von Wicksell durch Interpolation und Reihenentwicklung der Newtonschen Formel sich zwanglos ergeben. Das 4. Kapitel ist der Theorie der Korrelation gewidmet, von der die Methode der Regressionslinie (Bildung von Mittelwerten in Streifen) und die Methode der Korrelationsfläche (die zweidimensionale Verallgemeinerung der Häufigkeitskurve) dargestellt wird. Das 5. Kapitel handelt von den Schwankungen, die auftreten, wenn ein und dieselbe wahrscheinlichkeitstheoretische Größe durch mehrere Versuchsgruppen festgestellt wird. Damit hängt die andere Frage zusammen, wieviel Versuche man machen muß, um einen Wert zu bekommen, der als Annäherung an den theoretischen brauchbar ist. Das 6. Kapitel bringt die Lexissche Theorie, der verdientermaßen eine große Bedeutung beigemessen wird. — In bezug auf die Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und die prinzipielle Einstellung zu dem Verhältnis von Theorie und Praxis sind gegen das Buch dieselben Einwände geltend zu machen wie gegen das in diesen Berichten Bd. 37, S. *63* besprochene Werk von Coolidge. Der Verfasser definiert die Wahrscheinlichkeit zunächst als limes der relativen Häufigkeit, kurz darauf aber bringt er die übliche De-

finition auf Grund der gleichmöglichen Fälle, um in der Folge bald von der einen, bald von der anderen Definition auszugehen, ohne das gegenseitige Verhältnis ausreichend zu klären. Das Vermengen von Theorie und Anwendung tritt auch bei der Behandlung der Fehlergesetze und der Korrelation deutlich zutage — wegen des Prinzipiellen vgl. die erwähnte Besprechung von Coolidges Buch. Diesem Mangel steht als Vorzug gegenüber, daß der Verfasser es verstanden hat, auf bescheidenem Raum eine große Stoffülle zu bewältigen und gerade die modernsten Ergebnisse ausgiebig zu berücksichtigen. So stellt das Buch, da es auch reichlich Literaturnachweise gibt, eine gute Einführung in die mathematische Wissenschaft der Statistik dar, die zu weiteren Studien anzuregen imstande ist.

Stuttgart, Januar 1928. DOETSCH.

L. Zipperer, Technische Schwingungslehre. I. Allgemeine Schwingungsgleichungen. 111 S. II. Schwingungen in Maschinenanlagen. 123 S. (Sammlung Göschen Nr. 953 und 961.) Berlin und Leipzig 1927, W. de Gruyter & Co.

Die beiden Bändchen enthalten eine Schwingungslehre vom Standpunkt des Maschineningenieurs aus, also ohne Behandlung der elektrischen, akustischen usw. Schwingungen. Das 1. Bändchen, dem die mathematische Grundlegung obliegt, bringt zunächst in einer Einleitung eine summarische Aufzählung der physikalischen Vorgänge bei den Schwingungen einfachster idealisierter Modelle und rekapituliert zugleich die notwendigen Grundbegriffe aus der Mechanik. Sodann werden in einem ersten Teil die Differentialgleichungen für die verschiedenen Schwingungsarten eines einzelnen Massenpunktes (Eigenschwingungen und erzwungene Schwingungen, jeweils mit und ohne Einfluß einer Dämpfung) aufgestellt und integriert. Man findet hier das Grundlegende übersichtlich zusammengestellt. Nicht ganz glücklich finde ich, daß der Verfasser die linearen Differentialgleichungen zunächst durch trigonometrische Funktionen integriert und dann die übersichtlichere Methode mit Hilfe der Exponentialfunktion nur kurz erwähnt. Er verbleibt dadurch zwar im Reellen, entäußert sich aber der doch so anschaulichen Deutung des Schwingungsvorgangs im Komplexen (Vektordiagramm), die dementsprechend auch nur ganz kurz gestreift wird. Diese dem Elektriker äußerst geläufige Art der Darstellung dürfte auch für den Maschineningenieur ihre großen Vorzüge haben. Eine analoge Bemerkung gilt der Betrachtung einer periodisch wirkenden erregenden Kraft, wo die dem Elektriker so vertraute Fourierreihe ziemlich stiefmütterlich behandelt wird, obwohl sie auch für den Maschineningenieur wichtig ist (vgl. im 2. Band S. 77). Durch weiteren Ausbau des vom Verfasser gebrachten Beispiels der Zusammensetzung zweier Sinusschwingungen (Schwebung) ließe sich diese Lücke leicht beseitigen. — Ein zweiter Teil beschäftigt sich mit den Schwingungen einfacher Systeme, zunächst mit den Pendeln, sodann mit Systemen unter der Einwirkung elastischer Kräfte, speziell mit Längs- und Querschwingungen bei Stäben und Drehschwingungen bei Wellen.

Der 2. Band bringt nun die speziellen Anwendungen auf den Maschinenbau, nämlich die Vorgänge bei rasch rotierenden Wellen: die Torsionsschwingungen einer mit beliebig vielen Schwungscheiben besetzten Welle und die Biegungsschwingungen, die auftreten, wenn die Schwerpunkte der Scheiben

nicht genau auf der Drehachse liegen. Es werden eine Anzahl der brauchbarsten Verfahren mit weitgehender Durchrechnung von Beispielen sowie die Apparate zum Messen jener Schwingungen (Torsiographen, Vibrographen) besprochen. Ein kurzes Kapitel über die Beseitigung der Torsions- und Biegungsschwingungen in der Praxis sowie ein Anhang über Fundamentschwingungen beschließt den 2. Band.

Die Büchlein sind vom Praktiker für den Praktiker geschrieben. Der Mathematiker wird daher mancherlei am „Stil" auszusetzen haben. Aber für ihn sind sie auch nicht bestimmt. Der Ingenieur und der technische Physiker bekommt mit ihnen eine übersichtliche und praktisch brauchbare Zusammenstellung in die Hand, deren Benutzung ihm durch die zahlreichen Beispiele erleichtert wird.

Stuttgart. DOETSCH.

H. Schwerdt, Einführung in die praktische Nomographie. 122 S. (Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Bücherei Bd. 6.) Berlin 1927, Otto Salle. Geb. *RM* 3.—.

P. Luckey, Nomographie. 108 S. (Mathematisch-Physikalische Bibliothek Bd. 59/60.) Leipzig und Berlin 1927, B. G. Teubner. Geh. *RM* 2.40.

M. Mayer, Nomographie des Bauingenieurs. 111 S. (Sammlung Göschen Nr. 959.) Berlin und Leipzig 1927, W. de Gruyter & Co. Geb. *RM* 1.50.

Die beiden Bändchen von Schwerdt und Luckey behandeln in systematischer Form die grundlegenden Methoden der Nomographie: Funktionsleitern, Funktionsnetze (z. B. Logarithmenpapier), Netztafeln (zur Darstellung der Abhängigkeit zwischen drei Variabeln im kartesischen System), Tafeln mit drei geraden (parallelen oder einander schneidenden) Leitern, allgemeinere Leitertafeln und zusammengesetzte Netz- und Leitertafeln. Luckey bringt noch die Tafeln mit beweglichen Systemen (Rechenschieber und zweidimensionale Verallgemeinerungen), Schwerdt hat dafür noch einen Abschnitt über projektive Verzerrungen von Tafeln und das Prinzip der Dualität. Beide Büchlein sind elementar und leicht verständlich gehalten und bringen viele Beispiele, was ja bei der Nomographie die Hauptsache ist, sind daher zur Einführung recht geeignet. — Das Bändchen von Mayer läßt die Haupttypen von Nomogrammen an Aufgaben, wie sie dem Bauingenieur auf Schritt und Tritt begegnen, erwachsen und bringt dem Praktiker diese Methoden in sehr ansprechender Form entgegen. Es ist ihm unter den Technikern die weiteste Verbreitung zu wünschen, aber auch der Mathematiker wird ihm für den Unterricht manches hübsche praktische Beispiel entnehmen.

Stuttgart. DOETSCH.

Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

[Die Titel der eingesandten Schriften, mit Ausnahme der Sonderabdrucke, werden hier regelmäßig veröffentlicht. Besprechungen geeigneter Bücher bleiben vorbehalten. Eine Rücksendung der eingegangenen Schriften kann nicht erfolgen.]

F. Auerbach, Lebendige Mathematik. Breslau 1928, Ferd. Hirt. Geh. *RM* 7.80.

P. M. Batchelder, An introduction to linear difference equations. Cambridge, Mass., Harvard Univ. Press. Humphrey Milford Oxford Univ. Press. 1927. sh. 18.—.

F. Baur, Korrelationsrechnung. (Math.-phys. Bibl. Bd. 75.) Leipzig, B. G. Teubner. *RM* 1.20.

L. Bieberbach, Differential- und Integralrechnung. Bd. II: Integralrechnung. 3. Aufl. Leipzig 1928, B. G. Teubner. ℛℳ 5.80.

——, Vorlesungen über Algebra. Unter Benutzung der dritten Auflage des gleichnamigen Werkes von † Dr. Gustav Bauer in vierter, verm. Aufl. dargestellt. Leipzig 1928, B. G. Teubner. ℛℳ 20.—.

W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie III. Berlin 1929, Julius Springer. Geh. ℛℳ 26.—; geb. ℛℳ 27.60.

A. Brill, Vorlesungen über allgemeine Mechanik. München 1928, R. Oldenbourg. Geh. ℛℳ 18; geb. ℛℳ 20.—.

F. Cajori, Mathematics in liberal education. Boston (U. S. A.) 1928, The Christopher Publishing House. $ 1.50.

E. Cartan, Leçons sur la géometrie des espaces de Riemann. Paris 1928, Gauthier-Villars. Fr. 60.—.

P. Crantz, Sphärische Trigonometrie. Zweite Auflage von M. Hauptmann. (Aus Natur und Geisteswelt Bd. 605.) Leipzig 1928, B. G. Teubner. Geb. ℛℳ 2.—.

R. Courant, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Bd. II (Funktionen mehrerer Veränderlicher). 360 S. Berlin 1929, Julius Springer. Geb. ℛℳ 18.60.

Leonhard Euler, Drei Abhandlungen über die Auflösung der Gleichungen. (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 226.) ℛℳ 5.20.

Forschungsinstitut für Geschichte der Naturwissenschaften in Berlin: Erster Jahresbericht mit einer wissenschaftlichen Beilage über die Aufgaben eines Forschungsinstitutes für Geschichte der Naturwissenschaften. Berlin 1928, Julius Springer.

A. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre. Dritte Auflage. Berlin 1928, J. Springer. Geh. ℛℳ 22.60; geb. ℛℳ 24.—.

M. Fréchet, Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'analyse générale. Paris 1928, Gauthier-Villars. Fr. 50.—.

J. Gattersbacher, Prüfungsfragen aus der Mathematik. Leipzig und Wien 1928, Franz Deuticke. ℛℳ 7.20.

———, Physikalische Aufgabensammlung. Leipzig und Wien 1928, Franz Deuticke. ℛℳ 4.60.

K. Giebel, Das Pendel. Halle a./S. 1928, Zentralverband der Deutschen Uhrmacher. Geh. ℛℳ 5.20; geb. ℛℳ 6.—.

Handbuch des Unterrichtes an höheren Schulen. Band 13: Mathematik, von Ph. Männchen. Frankfurt a. M. 1928, Moritz Diesterweg. ℛℳ 9.60.

H. Hasse und H. Scholz, Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik. 72 S. Charlottenburg 2 1928, Panverlag Kurt Metzner. ℛℳ 3.50.

R. Haußner, Analytische Geometrie der Ebene. (Sammlung Göschen Band 65.) Berlin 1928, W. de Gruyter. Geb. ℛℳ 1.50.

O. Henkel, Graphische Statik II. (Sammlung Göschen 695.) Berlin 1928, W. de Gruyter. Geb. ℛℳ 1.50.

O. Hölder, Die Arithmetik in strenger Begründung. Zweite Auflage. Berlin 1929, Julius Springer. ℛℳ 3.60.

W. Immler, Flugzeugnavigation. München 1928, R. Oldenburg. Geb. ℛℳ 12.50.

G. Junge, Wesen und Wert der Mathematik. (Wissen und Wirken Bd. 56.) Karlsruhe i. B. 1928, G. Braun. Geh. ℛℳ 3.—.

Fr. Junker, Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung. Neu bearbeitet von A. Witting. (Sammlung Göschen Band 146.) ℛℳ 1.50.

Th. Kaluza, Zur Theorie der vollmonotonen Funktionen. Schriften der Königsberger gel. Ges. 4. Jahr. Heft 6. ℛℳ 1.40.

A. Kneser, Das Prinzip der kleinsten Wirkung von Leibniz bis zur Gegenwart. (Wiss. Grundfragen Bd. IX.) Leipzig 1928, B. G. Teubner. ℛℳ 4.—.

R. König und M. Krafft, Elliptische Funktionen. (Goeschens Lehrbücherei I. Gruppe, Bd. 11.) Geh. ℛℳ 13; geb. ℛℳ 14.50.

O. Kühne, Die mathematische Schule in der Nationalökonomie. Bd. I. 1. Teil: Die italienische Schule bis 1924. (Sozialwissenschaftliche Forschungen Abt. I, Heft 8.) Berlin 1928, W. de Gruyter. *RM* 15.—.

M. Lagally, Vorlesungen über Vektor-Rechnung. (Mathematik und ihre Anwendungen in Monographien und Lehrbüchern Band II.) Leipzig 1928, Akademische Verlagsgesellschaft. Geh. *RM* 21; geb. *RM* 22.—.

W. Lietzmann, Aus der Mathematik der Alten. Leipzig 1928, B. G. Teubner. *RM* 1.80.

——, Überblick über die Geschichte der Elementarmathematik. 2. Aufl. Leipzig 1928, B. G. Teubner. *RM* 2.—.

Lietzmann-Zühlke-Stracke, Aufgabensammlung und Leitfaden der Geometrie für die Oberstufe. Vierte Auflage. Leipzig 1928, B. G. Teubner. Geb. *RM* 4.80.

Lietzmann-Zühlke-Willers, Aufgabensammlung und Leitfaden für Arithmetik, Algebra und Analysis für die Oberstufe. Ausg. B. Vierte Auflage. Leipzig 1928, B. G. Teubner. Geb. *RM* 5.80.

Ph. Lötzbeyer, Vierstellige Tafeln zum logarithmischen und Zahlenrechnen. Graphische Rechentafeln. Ausg. B. Dritte Auflage. Mit Anhang: Math. Formeln. Leipzig 1928, B. G. Teubner. Kart. *RM* 1.60.

D. O. Lyon, Das periodische System in neuer Anordnung. Leipzig und Wien 1928, Franz Deuticke. *RM* 8.—.

K. Menger, Dimensionstheorie. 320 S. Leipzig 1928, B. G. Teubner. Geh. *RM* 22.—; geb. *RM* 24.—.

R. von Mises, Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit. (Schriften zur wissenschaftlichen Weltauffassung, herausg. von Ph. Frank und Mor. Schlick, Bd. 3.) Wien 1928, Julius Springer. *RM* 9.60.

N^2, Mathematischer Reimsalat. Berlin W 8 1927, Mathematischer Verein.

Franz Neumanns Gesammelte Werke. Herausgeg. von seinen Schülern. Erster Band. Leipzig 1928, B. G. Teubner. *RM* 50.—.

R. Orthner, Über physikalische und mathematische Abhängigkeit. Leipzig und Wien 1928, Franz Deuticke. *RM* 1.60.

J. Peters, Sechsstellige Tafeln der trigonometrischen Funktionen. VIII u. 293 S. 4°. Berlin 1929, Ferd. Dümmlers Verlag. Geh. *RM* 48.—; geb. *RM* 52.—.

M. Petrovitch, Leçons sur les spectres mathématiques, professées à la Sorbonne en 1928. Paris 1928, Gauthier-Villars.

E. Picard, Leçons sur quelques équations fonctionnelles avec des applications à divers problèmes d'analyse et de physique mathématique. Rédigées par M. Eugène Blanc. Paris 1928, Gauthier-Villars. Frs. 40.—.

G. Richter-Bozen, Die Kraft als fünfte Dimension. Erster Teil der Philosophie der Einmaligkeit. Wien 1928, Wilhelm Braumüller, Universitas-Verlagsbuchhandlung, Ges. m. b. H. *RM* 3.50.

E. Salkowski, Grundzüge der darstellenden Geometrie. (Mathematik und ihre Anwendungen in Monographien und Lehrbüchern Band III.) Leipzig 1928, Akademische Verlagsgesellschaft. Geh. *RM* 5.75; geb. *RM* 6.50.

Chr. Schmehl, Die Jacobische Erzeugungsweise der Flächen zweiten Grades. Gießen 1929, Emil Roth. *RM* 1.80.

E. Schrödinger, Vier Vorlesungen über Wellenmechanik. Gehalten an der Royal Institution in London im März 1928. Übersetzt von Dr. H. Koppermann. Mit 3 Abb. Berlin 1928, Julius Springer. *RM* 3.90.

W. Sierpiński, Leçons sur les nombres transfinis. Paris 1928, Gauthier-Villars. Frs. 40.—.

G. Stammler, Begriff, Urteil, Schluß. Untersuchungen über Grundlagen und Aufbau der Logik. Halle a. S. 1928, Max Niemeyer. Geh. *RM* 14.—; geb. *RM* 16.—.

H. E. Timerding, Zeichnerische Geometrie. 419 S. Mit 244 Textfiguren. (Mathematik und ihre Anwendung in Monographien und Lehrbüchern, herausg. von E. Hilb, Bd. 4.) Leipzig 1928, Akademische Verlagsgesellschaft. Geh. *RM* 25.—; geb. *RM* 26.—.

G. Vivanti, Elemente der Theorie der linearen Integralgleichungen. Übersetzt und mit Anmerkungen versehen von Fr. Schwank. Hannover 1929, Helwingsche Verlagsbuchhandlung. Geh. *RM* 15.60; geb. *RM* 16.60.

W. Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik (mit Ausschluß der Kristalloptik). Nachdruck der ersten Auflage, ergänzt durch eine spätere Arbeit des Verf. und mit einem Geleitwort von Prof. M. von Laue. Leipzig 1928, B. G. Teubner. Geh. *RM* 39.—; geb. *RM* 41.—.

Wallot, AEF. Verhandlungen des Ausschusses für Einheiten und Formelgrößen in den Jahren 1907 bis 1929. Berlin 1928, Julius Springer. Geh. *RM* 5.—.

A. Walther, Einführung in die mathematische Behandlung naturwissenschaftlicher Fragen. Erster Teil: Funktion und graphische Darstellung. Differential- und Integralrechnung. Berlin 1928, Julius Springer. Geh. *RM* 8.60; geb. *RM* 9.60.

H. Wieleitner, Analytische und synthetische Geometrie. (Math.-naturw.-technische Bücherei Bd. 49.) Berlin 1928, O. Salle. *RM* 2.50.

Fr. A. Willers, Methoden der praktischen Analysis. (Goeschens Lehrbücherei Gruppe I, Bd. 12.) Berlin 1928, W. de Gruyter. Geh. *RM* 20.—; geb. *RM* 21.50.

Angelegenheiten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Postscheckkonto der D. M.-V. 54126 Leipzig (für Mitgliederbeiträge).

Ausschuß der Deutschen Mathematiker-Vereinigung für das Jahr 1927/28.

Vorsitzender: Schmidt, E., Dr., Prof. a. d. U., Berlin NW 87, Altonaer Str. 30.
Schriftführer: Bieberbach, L., Dr., Prof. a. d. U. Berlin, Berlin-Schmargendorf, Marienbader Str. 9.
Schatzmeister: Faber, G., Dr., Prof. a. d. T. H., München, Pienzenauer Str. 12.
Herausgeber der Jahresberichte:
Bieberbach, L., Dr., Prof. a. d. U. Berlin, Berlin-Dahlem, Gelfertstr. 16.
Blumenthal, O., Dr., Prof. a. d. T. H., Aachen, Rütscherstr. 38.
Faber, G., Dr., Prof. a. d. T. H., München, Pienzenauer Str. 12.
Schilling, F., Dr., *G. R.-R.*, Prof. a. d. T. H., Danzig-Langfuhr, Heilsberger Weg 7. (M. d. A. bis 30. Sept. 1928.)
Schmidt, E., Dr., Prof. a. d. U., Berlin NW 87, Altonaer Str. 30. (M. d. A. bis 30. Sept. 1928.)
Blaschke, W., Dr., Prof. a. d. U., Hamburg 13, Math. Sem., Rothenbaumchaussee 21. (M. d. A. bis 30. Sept. 1929.)
Perron, O., Dr., Prof. a. d. U., München, Schackstr. 1. (M. d. A. bis 30. Sept. 1929.)
Kneser, A., Dr., *G. R.-R.*, Prof. a. d. U., Breslau XVI, Hohenlohestr. 11. (M. d. A. bis 30. Sept. 1930.)
Lorey, W., Dr., Prof., Ober-Studiendirektor der öffentl. Handelslehranstalt, Doz. am Institut f. Versicherungswissenschaft d. U., Leipzig S 3, Fockestr. 7. (M. d. A. bis 30. Sept. 1930.)

Kommissionen.

1. *Schröder-Kommission,* einges. 1902: F. Schur, C. Schmidt, Direktor der Karlsruher Bibliothek (seit 1916).
2. *Euler-Kommission,* einges. 1907: A. Pringsheim, F. Engel (seit 1920).
3. *Deutscher Ausschuß für den math. u. naturw. Unterricht,* einges. 1907: H. E. Timerding (seit 1912), W. Lietzmann (seit 1919), G. Hamel (seit 1924).
4. *Internationale Mathematische Unterrichtskommission,* einges. 1908: W. Lietzmann, R. Rothe, G. Wolff (seit 1920).

Verzeichnis der Mitglieder der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

nach dem Stande vom 1. Juli 1928.

Folgende Abkürzungen finden im folgenden Verwendung: U. = Universität, T. H. = Technische Hochschule, Prdzt. = Privatdozent, St. = Studienrat, St.-Ass. = Studien-Assessor, *G. R.-R* = Geheimer Regierungsrat, *G. H.-R.* = Geheimer Hofrat, *H.-R.* = Hofrat, *G. R.* = Geheimer Rat, geb. = geboren, prom. = promoviert, hab. = habilitiert.

Jahr des Eintritts

1894. Ackermann-Teubner, A., Dr., Dr.-Ing., *H.-R.*, Mitinhaber der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner, Leipzig, Poststr. 3.
Alfred A., geb. 31. 1. 1857 Leipzig, 1875/77 in Leipzig stud., 1906 Dr. phil. h. c. Greifswald, 1911 Dr.-Ing. e. h. Darmstadt.

1924. Ackermann, W., Dr., Münster i. W., Brockhoffstr. 12.

1902. d'Adhémar, Vicomte R., Dr., Prof. a. d. Faculté libre des Sciences, Lille (*Frankreich*), 87 rue de Lille à Lambersart.

1911. Airey, J. R., London E 73 (*England*), Claremont Road, Forest Gate.

1925. Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H., Leipzig, Markgrafenstr. 4.

1900. Albeggiani, M., Prof. a. R. Ist. Tecn., Palermo (*Italien*), Salita Banditore 4.

1923. Alexandroff, P., Dr., Prof. a. d. U., Moskau, Twerskajastr., Pimenowski pereulok 8, kw. 5.
Paul A., geb. 7. 4. 1896 Bogorodsk (Gouv. Moskau, Rußland), 1920/21 prom., 1921 hab. seit 1924 o. Prof. a. d. II. U. Moskau.

1899. Aley, R. J., Präsident, Butler College, Indianapolis, Indiana.

1923. Allen, E. S., Assoc. Prof. of math., Iowa state college, Ames, Iowa, (*U. S. A.*).
Edward A., geb. 12. 12. 1887 Kansas City, Missouri, 1914 prom. Harvard, 1913/14 Instructor Dartmouth College, 1914/15 Instructor Brown University, 1915/19 Instructor University of Michigan, 1919/21 Assistant Prof. West Virginia University, 1921 Associate Prof. Iowa State College.

10. 1918. Alt, H., Dr.-Ing., Prof. a. d. T. H., Dresden-Klotzsche, Georgstr. 12.
Hermann A., geb. 2. 4. 1889 Dresden, 11. 7. 1914 prom. Dresden, 1920 hab. Dresden, 1923 a.o. Prof. Dresden.

1922. Amira, B., Dr., Institute of Mathematics, Jerusalem P. O. B. 715 (*Eretz-Israel*).
Binjamin A., geb. 1896, 1924 prom. Genf (*Schweiz*), 1924 hab. Genf.

1902. Amodeo, F., Dr., Prof. a. d. U. u. a. R. Ist. Tecn., Neapel, Salita Ponte corvo 54.

1913. von Ankum, F., St., Frankfurt a. d. O., Anger 31.

1912. Arany, D., Prof., Budapest VII (*Ungarn*), Kerepescherstr. 38.

1891. Archenhold, F. S., Dr. h. c., Direktor der Treptow-Sternwarte bei Berlin.
Friedrich A., geb. 2. 10. 1861 Lichtenau i. W.

1908. Archibald, R. C., Dr., Prof. a. d. Brown Universität, Providence, Rhode Island (*U. S. A.*).
Raymond Clare A., geb. 7. 10. 1875 Nova Scotia (*Canada*), 1900 prom. Straßburg, 1900/07 Prof. Mount Allison Ladies' College, 1907/08 Acadia U. Wolfville, Nova Scotia, 1908/11 Instructor, 1911/17 Assistant Prof., 1917/23 Associate Prof., 1923 Prof. of Pure Mathematics a. d. Brown U., 1924 Prof. U. of California, 1922 Ehren-Doktor U. Padua, 1923 Mount Allison U.

1922. Aretz, C., Dr., Crefeld, Talstr. 24.

1927. Arndt, J., Dr., Lektor am Grey-University College, Bloemfontein (*Südafrika*), King-Edward-Weg 27.
Johannes G. A., geb. 3. 8. 1896 Bloemfontein, 1925 prom. Göttingen, 1927 Lektor am Grey-University College.

1922. Artin, E., Dr., Prof. a. d. U., Hamburg 13, Rothenbaumchaussee 21.

20. 1923. Axel, H., Dr., St.-Ass., Dieburg (Hessen), Mathildenstr. 17.
Hans A., geb. 11. 4. 1898 Worms, 1922. prom. Gießen.

Jahr des Eintritts

1918. **Baade**, W., Dr., Ass. a. d. Hamburger Sternwarte, Bergedorf b. Hamburg, Sternwarte.
Walter B., geb. 24. 3. 1893 Schröttinghausen, Kr. Lübbecke, 23. 7. 1919 prom. Göttingen.

1923. **Bachiller**, T. R., Dr., Madrid, Instituto nacional de Ciencias, Laboratorio matemático, Santa Teresa 8.

1928. **Baer**, R, Dr., Prdzt. a. d. U. und Ass. am Math. Sem. d. U., Freiburg i. Br., Brombergstr. 13.
Reinhold B., geb. 22. 7. 1902 Berlin, 1925 prom. Göttingen, 1928 hab. Freiburg i. Br.

1897. **Baker**, H. F., Prof. a. d. U., Cambridge (*England*), St. John's College.

1910. **Baldus**, R., Dr., Prof. a. d. T. H., Karlsruhe, Eisenlohrstr. 47.
Richard B., geb. 11. 5. 1885 Salonik, 1910 prom. Erlangen, 1911 hab. Erlangen, 1916 a.o. Prof. Erlangen, 1919 o. ö. Professor Karlsruhe.

1926. **Bálint**, E., Dr., Budapest VII, Gyarmat utca 34.
Elemer B., geb. 4. 12. 1888 Budapest, 1916 prom. Budapest.

1900. **Balser**, L., Prof. a. d. Liebig-Oberrealschule, Darmstadt, Hobrechtstr. 5.
Ludwig B., geb. 22. 8. 1865 Darmstadt, 1888/91 Ass. am Phys. Inst. Gießen, 1891/93 Oberlehrer Gießen, seitdem Liebig-Oberrealschule Darmstadt.

1910. **Barneck**, A., Dr., St., Prdzt. a. d. T. H., Berlin NW 87, Tile Wardenbergstr. 25.
Alfred B., geb. 11. 9. 1885 Berlin, 1910 prom Halle, 1919 hab. Berlin (T. H.).

1924. **Bartels**, Fr., St., Magdeburg, Schenkendorfstr. 16.

30. 1924. **Bartels**, J., Dr., Eberswalde, Neue Kreuzstr. 17.

1904. **Bartlett**, D., Prof. am Mass. Inst. of Techn., 69 Mass. Ave, Cambridge, Mass., (*U. S. A.*).
Dana B., geb. 4. 10. 1863 Boston, 1886 Instruktor, 1892/98 Asst. Professor, 1898/1905 Asso. Professor, seit 1905 Professor Mass. Inst. of Techn.

1926. **Bartsch**, Fr., Magdeburg, Schenkendorfstr. 16.

1928. **Basch**, A., Dr., Oberbaurat, Wien VIII, Fuhrmanngasse 1a.
Alfred B., geb. 1882 Prag, 1910 prom. Wien (T. H.).

1904. **Bates**, W. H., Prof. a. d. Purdue University, La Fayette, Ind., (*U. S. A.*).
William B., geb. 4. 1. 1870 Winchester, 1910 prom. Chicago, 1894/97 Instr. Battle Ground Acad. Ten., 1897/1900 Princ. Smyrna Titting School Ten., 1903/09 Instr., 1909/10 Asst. Prof., seit 1910 Asso. Prof. Purdue University.

1918. **Bauer**, D., Dr., St. am Johanneum, Lübeck, Moltkestr. 33.
Daniel B., geb. 10. 1. 1876 Diedenhofen, 1903 prom. Straßburg.

1926. **Bauer**, H., Dr., Wien, Bettlengasse 5.

1920. **Bauer**, M., Prof. a. d. T. H., Budapest VIII (*Ungarn*), Tisza Kálmán tér. 11 III/2.
Michael B., geb. 1874 Budapest, 1909 hab. Budapest (T. H.), 1918 a.o. Prof. Budapest (T. H.).

1920. **Baule**, B., Dr., Prof. a. d. T. H., Graz, Albertstr. 19.
Bernhard B., geb. 4. 5. 1891 Münden, 18. 2. 1914 prom. Göttingen, 21. 7. 1920 hab. Hamburg (U.), 11. 8. 1921 o. ö. Prof. Graz (T. H.).

1921. **Baumann**, K., Dr., St., Frankfurt a. M., Scheffelstr. 7.

40. 1898. **Bauschinger**, J., Dr., Prof. a. d. U., Leipzig, Stephanstr. 3.
Julius B., geb. 1860 Fürth, 1883 prom. München, 1888 hab. München, 1896 Prof a. d. U. Berlin, 1909 o. ö. Prof. Straßburg, seit April 1920 o. ö. Prof a. d. U. Leipzig.

1924. **Bays**, S., Dr., Prof. a. d. U., Fribourg (*Schweiz*), Le Chatelet.
Sévérin B., geb. 2. 6. 1885 La Joux, 1911 prom. Fribourg, 1919 hab. Fribourg, 1921 a.o. Prof. Fribourg, 1924 o. Prof. Fribourg.

1907. **Beck**, H., Dr., Prof. a. d. U., Bonn, Lennéstr. 36.
Hans B., geb. 16. 8. 1876 Altzarrendorf, 1905 prom. Bonn, 1901/17 Oberlehrer Dortmund, Hannover, Charlottenburg, 1917 a.o. Prof. Bonn, 1918 o. ö. Prof. Bonn.

1920. **Becker**, Dr., St.-Dir. a. d. städt. Oberrealschule, Delitzsch.

1921. **Behmann**, H., Dr., Prdzt. a. d. U., Halle (Saale), Moltkestr. 5 III.
Heinrich B., geb. 10. 1. 1891 Aumund (Hann.), 1918 prom. Göttingen, 1921 hab. Göttingen, 1925 umhab. Halle.

Jahr des Eintritts

1921. **Behnke**, H., Dr., Prof. a. d. U., Münster i. W., Math. Sem. d. U.
Heinrich B., geb. 9. 10. 1898 Hamburg, Mai 1922 prom. Hamburg, Juli 1924 hab. Hamburg, 1927 o. ö. Prof. Münster i. W.

1897. **Beke**, E., Dr., Prof. im Ruhestand, Budapest II (*Ungarn*), Bimbó utca 26.
Emanuel B., geb. 1862 in Papa (*Ungarn*), 1884 prom. Budapest, 1896 hab. Budapest, 1900 o. ö. Prof. a. d. U. Budapest.

1897. **Beman**, W. W., Prof. a. d. U., Ann Arbor, Mich. (*U. S. A.*), East Kingsley Street 813.
Wooster Woodruff B., geb. 28. 5. 1850.

1913. **Berger**, A., Dr., Versicherungstechniker, Direktor der Lebensversicherung „Phönix", Wien XIII/7, Adolfstorgasse 21.
Alfred B., geb. 16. 2. 1882 Brünn, 1906 prom. Wien.

1921. **Berger**, J., Dr., St. a. d. Realschule, Backnang, Gartenstr. 36.
Johannes B., geb. 6. 7. 1892 Ulm a. d. Donau, 1921 prom. Tübingen, 1920/22 Ass. a. d. T. H. Stuttgart.

50. 1920. **Berger**, R., Ass. am Geodätischen Institut, Potsdam, Telegraphenberg.
Rudolf B., geb. 1885 Leipzig.

1923. **Bergmann**, S., Dr., Berlin C 2, Universität, Institut f. angewandte Mathematik.

1918. **Bernays**, P., Dr., Prof. a. d. U., Assistent am Math. Institut, Göttingen, Gaußstr. 1.
Paul B., geb. 17. 10. 1888 London, 1912 prom. Göttingen, 1912 hab. Zürich, 1919 umhab. Göttingen, 1922 nicht beamteter a.o. Prof. Göttingen.

1899. **Bernstein**, F., Dr., Prof. a. d. U., Göttingen, Lotzestr. 33.
Felix B., geb. 24. 2. 1878 Halle a. S., 2. 3. 1901 prom. Göttingen, 1. 4. 1902 hab. Halle a. S. und 15. 10. 1907 Göttingen, 1. 4. 1911 a.o. Prof. Göttingen, 1921 o. ö. Prof. Göttingen.

1925. **Bernstein**, S., Prof. Dr., Charkow (*Rußland*), Technologitscheskaja 11.
Sergius B., geb. 7. 3. 1880 Odessa, Docteur ès sciences mathématiques 1904 Paris, Magister der reinen Math. 1908 Charkow, Dr. der reinen Math. 1913 Charkow, Prof. a. d. U. Charkow.

1924. **Berroth**, A., Dr.-Ing., Prof. a. d. T. H., Aachen, Försterstr. 23.

1902. **Berry**, A., King's College, Cambridge (*England*).
Arthur B., geb. 28. 12. 1862 London, 1889 Lecturer Cambridge, seit 1894 Ass. Tutor am King's Coll. Cambridge.

1909. **Berwald**, L., Dr., Prof. a. d. Deutschen U., Prag XIX, Ovenecká 43.
Ludwig B., geb. 8. 12. 1883 Prag, 1908 prom. München, 1919 hab. Prag, 1922 a.o. Prof. Prag.

1921. **Bessel-Hagen**, E., Dr., Prdzt. a. d. U., Halle a./S., Hohenzollernstr. 7.
Erich B.-H., geb. 12. 9. 1898 Charlottenburg, Juli 1920 prom. Berlin, 1925 hab. Göttingen, 1927 umhab. Halle a./S.

1927. **Beurling**, A., Fil. Kand., Uppsala (*Schweden*), Kyrkogårdsgatan 9.
Arne B.

60. 1913. **Beutel**, E., Prof. am Reform-Realgymnasium, Stuttgart, Kernerstr. 50.
Eugen B., geb. 1880 Weitmars (Württemberg).

1902. **Beyel**, C., Dr., Doz. a. d. Eidgen. T. H. Zürich, Gemeindestr. 26.
Christian B., geb. 22. 11. 1854, 1876 Dipl.-Ing. Zürich, 1882 prom., 1883 hab. Zürich.

Bibliotheken:

1905. **Bibliothek** der Technischen Hochschule, Aachen.
1921. **Preußische Staatsbibliothek**, Berlin NW 7.
1927. **Universitäts-Bibliothek**, Berlin NW 7, Dorotheenstr. 81.
1927. **Staatsbibliothek**, Bremen.
1911. **Hauptbücherei** der Technischen Hochschule, Breslau XVI, Hansastr. 1/3.
1921. **Bibliothek** der Böhmischen Technischen Hochschule, Brünn.
1904. **Bibliothek** der Deutschen Technischen Hochschule, Brünn.
1904. **Massachusetts Institute of technology library**, Cambridge (Mass.) (*U. S. A.*).
70. 1911. **Bücherei** der Staatlichen Gewerbeakademie Chemnitz.

Jahr des Eintritts

1921. General library, The university of Chicago Press, Chicago.
1902. Mathematical library of the University of Chicago, Chicago (Ill.) (*U. S. A.*).
1912. Bibliothek der Bergakademie, Clausthal i. H.
1921. Bücherei der Technischen Hochschule, Danzig-Langfuhr.
1905. Technische Hochschule, Danzig-Langfuhr.
1913. Hessische Landesbibliothek, Darmstadt.
1899. Bibliothek der Technischen Hochschule, Darmstadt.
1927. Sächsische Landesbibliothek, Dresden N 6, Wilhelmplatz 11.
1922. Universitäts-Bibliothek, Erlangen.
80. 1921. Stadtbibliothek zu Frankfurt a. M., Schöne Aussicht 2.
1901. Bibliothèque mathématique de l'Université, Genf (*Schweiz*).
1921. Universitäts-Bibliothek, Gießen, Bismarckstr. 25.
1921. Universitäts-Bibliothek, Göttingen.
1927. Universitäts-Bibliothek, Greifswald.
1923. Universitäts-Bibliothek, Halle a. d. S.
1922. Staats- und Universitätsbibliothek, Hamburg.
1923. Bibliothek der Technischen Hochschule, Hannover.
1905. Universitäts-Bibliothek, Heidelberg
1928. Universitäts-Bibliothek, Helsingfors.
90. 1924. Technische Hochschule, Helsingfors.
1899. Bibliothek der Technischen Hochschule, Karlsruhe.
1921. Universitäts-Bibliothek, Kiel.
1922. Universitäts- und Stadtbibliothek, Köln, Claudiusstr. 1.
1927. Universitäts-Bibliothek, Leipzig, Beethovenstr. 6.
1897. Bibliothek der Akademie der Wissenschaften, Leningrad (*Rußland*).
1927. The librarian of the Victoria University, Manchester.
1925. Universitäts-Bibliothek, Marburg a. d. Lahn.
1921. Universitäts-Bibliothek, München, Ludwigstr. 17 II.
1920. Universitäts-Bibliothek, Münster i. W.
100. 1901. Universitäts-Bibliothek, Oslo (*Norwegen*).
1927. Universitäts-Bibliothek, Rostock.
1897. Bibliothèque nationale et universitaire, 6 plane de la République, Strasbourg (*Frankreich*).
1925. Hauptbücherei der Technischen Hochschule, Stuttgart.
1900. Öffentliche Landesbibliothek, Stuttgart.
1921. Universitäts-Bibliothek, Tübingen.
1910. University of Illinois, Library, Urbana, Illinois (*U. S. A.*).
1895. Universitäts-Bibliothek, Utrecht (*Holland*).
1926. Bibliothek der Technischen Hochschule, Wien IV, Karlsplatz 13.
1927. Universitäts-Bibliothek, Würzburg.
110. 1902. Bibliothek der Eidgenössischen Technischen Hochschule, Zürich (*Schweiz*).

1910. Bieberbach, L., Dr., Prof. a. d. U., Berlin-Dahlem, Gelfertstr. 16.
Ludwig B., geb. 4. 12. 1886 Goddelau (Hessen), 1910 prom Göttingen, 1910 hab. Königsberg, 1913 o. ö. Prof. Basel, 1915 Frankfurt a. M., 1921 Berlin (U.).

1911. Bill, E. G., Dr., Prof. am Dartmouth College, Hanover, N. H. (*U. S. A.*).
Earl Gordon B., geb. 23. 6. 1884 Billtown, 1909 hab. Yale U.

1923. Bilz, E., Dr., St.-Ass. a. d. Oberrealschule Nürnberg, Erlangen, Hilpertstr. 13.
Ernst B., geb. 1894 Schwabach, 7. 1. 1922 prom. Erlangen.

1909. Birck, O., Dr., Prof., Potsdam, Astrophysikalisches Observatorium.
Otto B., geb. 11. 12. 1879 Aachen, 1909 prom. Göttingen, 1907/11 Ass. der Sternwarte Göttingen, seit 1911 am Astrophys. Obs. Potsdam.

1927. Birkeland, Rich., Prof., Oslo (*Norwegen*), Universität.
Richard B., geb 6. 6. 1879 Farsund (*Norwegen*), 1909 prom. Oslo, 1910 o. Prof. a. d. T. H. Drontheim, 1922 o. Prof. a. d. U. Oslo.

Jahr des Eintritts

1912. **Blaess**, V., Dr.-Ing., Reg.-Baum., Prof. a. d. T. H., Darmstadt, Heinrichstr. 140

1908. **Blaschke**, W., Dr., Prof. a. d. U., Hamburg 13, Math. Sem., Rothenbaumchaussee 21.

Wilhelm B., geb. 13. 9. 1885 Graz (*Österreich*). 1908 prom. Wien, 1910 hab. Bonn, 1911 Prdzt. Greifswald, 1913 a.o. Prof. Prag (dtsch. T. H.), 1915 a.o. Prof. Leipzig, 1917 o. ö. Prof. Königsberg i. Pr., 1919 Tübingen, 1919 Hamburg.

1902. **Bliss**, G. A., Prof. an der Chicago Universität, Chicago Ill. (*U. S. A.*).

Gilbert Ames B., geb. 9. 5. 1876 Chicago, 1900 prom. Chicago, 1900/02 Instr. Minnesota, 1903/04 Instr. Chicago, 1904/05 Asst. Prof. Missouri, 1905/08 Asst. Prof. Princeton, 1908/13 Asst. Prof. Chicago, seit 1913 Prof. Chicago.

1921. **Bluhm**, B., Dr., St., Bartenstein i. Ostpr., Feldstr. 1.

Bruno B., geb. 22. 6. 1889 Wischwill a. d. Memel, 1911 prom. Königsberg, 1913/14 Ass. Danzig, seit 1919 in obiger Stellung.

120. 1900. **Blumenthal**, O., Dr., Prof. a. d. T. H. Aachen, Rütscherstr. 38.

Otto B., geb. 20. 7. 1876 Frankfurt a. M., 1898 prom. Göttingen, 1901 hab. Göttingen, 1905 o. ö. Prof. Aachen.

1921. **Bochner**, S., Dr., Ass. am Math. Sem. d. U., München, Math. Sem. d. U., Ludwigstr. 17.

1912. **Bochow**, K., Dr., Prof., St.-Dir. a. D., Nordhausen, Meyenburgstraße 26.

1919. **Bögel**, K., Dr., St., Landesschule Pforta b. Naumburg a. S.

Karl B., geb. 21. 4. 1887 Bielau (Kr. Neiße), 1924 prom. Bonn, 1911 Staatsexamen Göttingen.

1912. **Böhm**, F., Dr., Prof. a. d. U., München, Keferstr. 8d.

Friedrich B., geb. 15. 8. 1885 Harburg, 1908 prom. München, 1911 hab. München, 1923 tit. a.o. Prof. München.

1899. **Boehm**, K., Dr., Prof. a. d. T. H. Karlsruhe, Ettlingen, Schöllbronner Str. 93.

Karl B., geb. 1873 Mannheim, 1896 prom. Heidelberg, 1900 hab. Heidelberg, 1904 a.o Prof. Heidelberg, 1913 o. ö. Prof. Königsberg, 1917 o. ö. Prof. Karlsruhe.

1925. **Böhmel**, H., Dr., Genthin, Lessingstr. 5.

Hans B., geb. 27. 9. 1894 Cöln, 29. 6. 1920 prom. Jena.

1921. **Böhmer**, P., Dr., *R.-R.*, Prof. a. d. T. H., Dresden, Ludwig-Richter-Str. 22.

Paul Eugen B., geb. 21. 2. 1877 Goschütz, 1903 prom. Göttingen, 1914 hab. Berlin (T. H.), 1912 Regierungsrat Berlin, 1919 o. ö. Prof. Dresden (T. H.).

1895. **Bohlmann**, G., Dr., Prof., Berlin-Friedenau, Wilhelmshöher Str. 22.

Georg B., geb. 22. 4. 1869, 1892 prom. Halle, 1894 hab. Göttingen, 1901 a.o. Prof. Göttingen, 1903 Mathematiker für Deutschland der New York Life Insurance Co.

1908. **Bohniček**, St., Dr., Prof. a. d. U., Zagreb (*Jugoslawien*), Duga ulica 52.

Stefan B., geb. 1872 Vinkovci, 1894 prom. Wien, 1904 hab. Zagreb, 1909 a.o. Prof. Zagreb, 1921 o. ö. Prof. Zagreb.

130. 1913. **Bohr**, H., Dr., Prof. a. d. T. H., Kopenhagen, St. Hans Torv 32.

Harald B., geb. 22. 4. 1887, 1909 hab. Kopenhagen, 1910 Doz. Kopenhagen (U.), 1915 Prof. Kopenhagen (T. H.).

1922. **Bokowski**, **Adalbert**, St.-Ass., Leer, Wilhelmstr. 19.

Adalbert B., geb. 1899 Pr. Eylau.

1924. **Boldt**, B., St., Harburg, Wilhelmsburg, Marienstr. 50.

1901. **Bolke**, G., Dr., St. a. d. Oberrealschule, Wannsee, Marienstr. 4.

1892. **Bolza**, O., Dr., Prof. a. d. U., Freiburg i. B., Marienstr. 7.

Oskar B., geb. 12. 5. 1857 Bergzabern, 1886 prom. Göttingen, 1888 Reader Johns Hopkins University Baltimore, 1889 Associate Clark University Worcester, 1893 Associate Professor University of Chicago, 1894/1910 Professor University of Chicago, seit 1910 Honorarprofessor Freiburg und Nonresident Prof. University of Chicago.

1927. **Boog**, I., Dr., Stud.-Ass., Stralsund, Rosengarten 3.

Ilse B., geb. 26. 9. 1899 Redebas (Kreis Franzburg), 24. 2. 1926 prom. Bonn, seit Ostern 1927 St.-Ref. a. d. Kaiserin Auguste-Viktoria-Schule.

Jahr des Eintritts

1914. Bopp, K., Dr., Prof. a. d. U., Heidelberg, Zähringerstr. 20.
Karl B., geb. 28. 3. 1877 Rastatt, 4. 3. 1903 prom. Heidelberg, 1906 hab. Heidelberg, 1915 nicht beamteter a.o. Prof. Heidelberg.

1913. Bortolotti, E., Prof. a. d. U., Bologna (*Italien*), Via Maggiore 100.
Ettore B., geb. 6. 3. 1866 Bologna, 3. 7. 1889 prom. Bologna, 16. 1. 1900 a.o. Prof. Modena, 1. 12. 1905 o. ö. Prof. Modena, 22. 5. 1919 o. ö. Prof. Bologna in Algebra und Geometria Analitica.

1927. Bosch, Fr., Dr., St., Aachen, Emmichstr. 145.
Franz Josef B., geb. 14. 10. 1882 Gosch (Kreis Cleve), 10. 7. 1907 prom., seit Ostern 1926 Lehrauftrag für Didaktik der Mathematik a. d. T. H. Aachen.

1921. Braband, C., cand. math., Mannheim, Goethestr. 12.

40. 1923. Brachvogel, A., St., Hameln (Weser), Finkenbornerweg 11.
Alfred B., geb. 24. 3. 1889 Hildesheim.

1916. Brandt, H., Dr., Prof. a. d. T. H., Aachen, Nizzaallee 41.
Heinrich B., geb. 8. 11. 1886 Fendingen i. W., 1912 prom. Straßburg, 1921 o. ö. Prof. Aachen.

1925. Brauer, A., Dr., Ass. am Math. Sem. d. U., Berlin-Charlottenburg, Mommsenstr. 57.
Alfred B., geb. 9. 4. 1894 Charlottenburg, 1928 prom. Berlin (U.).

1925. Brauer, R., Dr., Prdzt. a. d. U., Königsberg i. Pr., Loewestr. 2.
Richard B., geb. 10. 2. 1901 Charlottenburg, 1925 prom. Berlin, 1927 hab. Königsberg i. Pr.

1921. Breidenbach, W., St., Berlin-Lichterfelde, Zehlendorfer Str. 52.
Walter B., geb. 29. 12. 1893 Frankfurt a. M., Hilfsarbeiter im Provinzialschulkoll.

1921. Brems, H., Dipl.-Ing., Habana (Cuba), Apastado 2337.

1897. Brendel, M., Dr., Prof. a. d. U., Frankfurt a. M., Varrentrappstr. 71.
Martin B., geb. 12. 8. 1862 Berlin, 1890 prom. Berlin, 1892 hab. Greifswald, 1898 a.o. Prof. Göttingen, 1907 Dozent Frankfurt (Akademie), 1914 o. ö. Prof. Frankfurt.

1906. Brenke, W. C., Prof. a. d. Nebrasca U., Lincoln, Nebr. (*U. S. A.*), 1250 So. 21 St.
William Charles B., geb. 12. 4. 1874 Berlin, 1896/1904 Instructor Illinois, 1904/07 Harvard, seit 1907 Associate Prof. Nebrasca.

1923. Brennecke, E., Dr., Observator am Geodät. Institut, Potsdam, Weißenburger Str. 2.
Erich B., geb. 5. 2. 1885 Bockenem i. Harz, 1921 prom. Berlin, Regierungslandmesser, Assistent und Dozent an der Landw. Hochsch. Berlin.

1897. Bretschneider, W., Dr., Prof. a. D., Stuttgart, Militärstr. 26.
Wilhelm B., geb. 7. 4. 1847 Paris, März 1874 prom. Erlangen.

150. 1920. Breuer, S., Dr., Prof. u. Ass. für Math. a. d. T. H., Karlsruhe, Douglasstr. 1.
Samson B., geb. 22. 4. 1891 Frankfurt a. M., 1915 prom. Frankfurt a. M., 1921 hab. Karlsruhe i. B., 1925 n. b. a.o. Prof.

1891. Brill, A. v., Dr., Dr.-Ing., Prof. a. D., Tübingen, Eugenstr. 3.
Alexander B., geb. 20. 9. 1842 Darmstadt, 1864 prom., 1867 Prdzt. Gießen, 1869 Prof. a. d. T. H. Darmstadt, 1875 Prof. a. d. T. H. München. 1884 ord. Prof. a. d. U. Tübingen, seit 1918 im Ruhestand.

1906. Broggi, U., Dr., Prof. a. d. U. Buenos Aires und La Plata, Buenos Aires (*Argentinien*), Maipù 53.
Ugo B., geb. 29. 12. 1880 Como (*Italien*), 1907 prom. Göttingen.

1902. Bromwich, Th., Fellow and Lect. of St. John's Coll., Cambridge (*England*).
Thomas B., geb. 1875 Wolverhampton, 1908 Sc. D. Cambridge, 1902/07 Prof. am Queens College Galway, seit 1907 Cambridge.

1909. Brooke, W. E., Prof. a. Engeneering College, Minneapolis, Minn. (*U. S. A.*).

1907. Broszat, W., Dr., St., Karlshorst, Realgymnasium.
Willi B., geb. 18. 3. 1885 Stolp, 1907 prom. Greifswald, 1911 Oberlehrer am Lyzeum in Thorn.

1909. Brouwer, L. E. J., Dr., Prof. a. d. U. Amsterdam, Laren (*Nordholland*).
Egbertus B., geb. 27. 2. 1881 in Overschie, 1907 prom. Amsterdam, 1909 hab. Amsterdam, 1912 a.o. Prof. Amsterdam, 1913 o. ö. Prof. Amsterdam.

Jahr des Eintritts

1893. Brückner, M., Dr., Ober-St. a. D., Bautzen, Schloßstr. 2.
Max B., geb. 5. 8. 1860 Harthau, 1886 prom. Leipzig.

1926. Bübler, Fr., Reallehrer, St. Gallen (*Schweiz*), z. Zt. Göttingen, Feldscheideweg.
Fridolin B., geb. 11. 4. 1895 Matt (*Schweiz*).

1928. Buchner, P., Dr., Prdzt. a. d. U., Basel (*Schweiz*), Realpstr. 71.
Paul B., geb. 22. 7. 1892, 1918 prom. Basel, 1924 hab. Basel.

160. 1920. Büchner, M., St., Stendal, Nikolaistr. 62.
Max B., geb. 19. 10. 1886.

1923. Budruss, R., St., Danzig-Langfuhr, Posadowskyweg 69.
Reinhold B., geb. 5. 4. 1891 Danzig.

1900. Bullard, W., Prof. a. d. U., Syracuse, N. Y. (*U. S. A.*), South Crouse Ave 613.
Warren B., geb. Hinsdale, 1896 prom. Clark, 1896 Instructor Vermont, 1900 Instructor, seit 1901 a.o. Prof. Syracuse.

1902. Bungers, E., Dr., Prof., St. a. D., Halle a. S., Hohenzollernstr. 8.
Ernst B., geb. 28. 5. 1879 Magdeburg, 14. 5. 1902 prom. Halle.

1906. Bunickij, E., Dr., Prof., Prag VIII, Libeň, Svobodárna, p. 511.

1899. Burger, R., Direktor d. Humboldt-Realgymn., Karlsruhe, Waldhornstr. 15.
Robert B., geb. 2. 6. 1868 Aalen bei Donaueschingen i. B., 1893 Staatsprüfung, 1900/08 Prof. Freiburg i. B., 1908/11 Direktor d. Realschule Triberg, 1911/19 Direktor d. Realschule Karlsruhe, seit 1919 Direktor d. Humboldt-Realgymn. Karlsruhe.

1919. Burkhardt, F., Dr., Regierungsrat im Statist. Amt, Prdzt. a. d. T. H., Dresden-A. 19, Alemannenstr. 10.
Felix B., geb. 1888 Heringsdorf, 1916 prom. Leipzig und 1922 Frankfurt, 1922 hab. Dresden, 1926 hab. Leipzig.

1925. Burkill, J. C., Prof. a. d. U., Liverpool (*England*), The University, Dep. of pure mathematics.

1904. Burnside, W., Prof. am R. Naval College Greenwich, London, The Croft, Bromley Road, Cutford.
William B., geb. 2. 7. 1852 London, 1875/85 Lecturer Pembroke College Cambridge, seit 1885 Prof. R. Nav. Coll. Greenwich.

1900. Cajori, F., Dr. phil., Prof. of the History of Mathematics, University of California, Berkeley, California (*U. S. A.*), 2844 Webster Street.
Florian C., geb. 28. 2. 1859 St. Aignan bei Thusis, 1894 prom. Tulane, 1885/88 Prof. Tulane, 1889 Prof. Colorado Coll.

170. 1903. Carathéodory, C., Dr., Prof. a. d. U., München, Rauchstr. 8.
Constantin C., geb. 13. 9. 1873 Berlin, 1904 prom. Göttingen, 1905 hab. Göttingen und 1908 Bonn, 1909 o. ö. Prof. Hannover (T. H.), 1910 Breslau (T. H.), 1913 Göttingen, 1918 Berlin, 1920 Smyrna, 1922 Athen, 1924 München.

1901. Carda, K., Dr., Prof. a. d. Deutschen T. H., Prag, Husgasse 5.
Karl C., geb. 6. 4. 1870 Wien, 1894 prom. Wien, 1901 hab. Wien, 1905 a.o. Prof. a. d. T. H. Wien seit 1907 o. ö. Prof. a. d. Dtsch. T. H. Prag.

1921. Carlson, F., Dr., Prof. a. d. T. H., Stockholm, Karlavägen 92.
Fritz C., geb. 23. 7. 1888 Wimmerby, 1914 prom. Upsala, 1920 o. ö. Prof. Stockholm.

1908. Carmichael, R. D., Ph. D., Prof. a. d. U. of Illinois, Urbana, Ill. (*U. S. A.*) 207 W. Washington Blvd.
Robert Daniel C., geb. 1. 12. 1879, 1912 prom. Princeton, 1912 hab. Indiana.

1920. Carnap, R., Dr., Prdzt. a. d. U., Wien XVIII, Hockegasse 77a.
Rudolf C., geb. 1891 Ronsdorf, 1921 prom. Jena, 1926 hab. Wien (U.).

1909. Caspar, M., Dr., Prof. am Gymnasium, Rottweil a. N., Königstr. 29.
Max C., geb. 7. 5. 1880 Friedrichshafen a. Bodensee, 1908 prom. Tübingen.

1900. Certo, L., Prof., Rom (27) (*Italien*), Via Appennini 31.
Luigi C., geb. 19. 12. 1855 Napoli, 1882 prom. Napoli, 1882 hab. Napoli, 1883 o. ö. Prof. Jesi, 1884 Bari, 1888 Palermo, 1892 Palermo, R. Liceo Vittorio Emanuele, 1903 Napoli, 1904 Roma, seit 1923 emer.

Jahr des Eintritts

1908. **Châtelain**, E., Dr., Lehrer, La Chaux de Fonds (*Schweiz*), Rue de Doubs 32.
Eugen Ch., geb. 2. 11. 1885 La Chaux de Fonds, 1909 prom. Zürich (U.), seit 1909 in obiger Stellung.

1900. **Chaux**, A. de la, Prof., St. a. D., Berlin-Wilmersdorf, Zähringer Str. 24.
Arno Ch., geb. 22. 2. 1858 Georgenburg i. R., 1. 10. 1897 Oberlehrer Stade, 27. 1. 1906 Gymn.-Prof. Stade.

1924. **Cohn**, A., Dr., St.-Ass., Berlin-Waidmannslust, Waidmannstr. 119.
Arthur C., geb 8. 7. 1894 Berlin-Waidmannslust, 1921 prom. Berlin.

180. 1926. **Cohn-Vossen**, St., Dr., Göttingen, Math. Inst. d. U.
Stephan C.-V., geb. 28. 5. 1902 Breslau, 1924 prom. Breslau.

1905. **Costanzi**, G., Dr., Lehrer, Rieti (*Italien*), Via Garibaldi 66.
Giuseppe C., geb. 29. 5. 1861 Aquila, 1884 prom. Rom, seit 1887 in obiger Stellung.

1909. **Courant**, R., Dr., Prof. a. d. U., Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 21.
Richard C., geb. 8. 1. 1888 Lublinitz, 1910 prom. Göttingen, 1912 hab. Göttingen, 1918 a.o. Prof. Göttingen, 1920 o. ö. Prof. Münster, seit 1920 o. ö. Prof. Göttingen.

1908. **Cowley**, Frl. E. B., Dr., Prof. am Vassar College, Poughkeepsie, N. Y. (*U. S. A.*).
Elisabeth Buchanan C., geb. 22. 5. 1874, 1908 prom. Columbia.

1928. **Cramér**, H., Mörby, Stocksund (*Schweden*).

1897. **Cranz**, C., Dr., *G.R.-R.*, Prof. a. d. T. H., Berlin-Charlottenburg, Hardenbergstr. 32 A.
Carl Julius C., geb. 2. 1. 1858 Hohebach (Württemberg), 1883 prom. Tübingen, 1894 hab. Stuttgart (T. H.), 1904 o. ö. Prof. Berlin (Milit.-techn. Akademie), 1920 o. ö. Prof. Berlin (T. H.).

1909. **Crathorne**, A. R., Dr., Prof. a d. Illinois U., Champaign. Ill. (*U. S. A.*), 1113 S. Fourth Street.
Arthur R. C., geb. Scarborough (*England*), 1907 prom. Göttingen, 1907 hab. U. of Illinois, 1898/1900 Tutor Maine, 1901 Inst. Wisconsin, 1904 Ass. Prof. U. of Illinois.

1924. **Cremer**, H., Dr., Ass. am Math. Inst. d. U., Leipzig S 3, Steinstr. 65 I.
Hubert Cr., geb. 27. 12. 1897 München, 1927 prom. Berlin.

1925. **Czajkowskyj**, N., Dr. Gymnasialdirektor, Rohatyn, Galizien (*Polen*).
Nikolaus C., geb. 2. 1. 1887 Berežany (*Galizien*), 18. 7. 1911 prom. Wien (U.), 1918 hab. Kamenetz (*Ukraine*), 1922/24 Prälegent a. d. sog. „geheimen" Ukrainischen U. u. T. H. Lemberg, seit 1. 9. 1924 Direktor des Ukr. Privatgymn. Jaworow.

1918. **Dahlgreen**, Th., Dr. phil., Malmö (*Schweden*), Betanienplan 1.
Thorild D., geb. 1888 Bjuv (*Schweden*), 1918 prom. Lund (*Schweden*), Konsulent a. d. Königl. Oberschuldirektion Schwedens, Chef-Aktuar d. Feuer- und Lebensversicherungs-Gesellschaft „Skåne".

190. 1926. **Dahmen**, W., Dr., St.-Ass., Bonn, Wilhelmstr. 30.
Wilhelm D., geb. 27. 12. 1896 Wevelinghoven, 10. 7. 1926 prom. Bonn, 1923 St.-Ass. am städt. Gymnasium Rheinbach.

1898. **Dalwigk**, F. v., Dr., Prof., Starnberg (Oberbayern), Possenhofener Str.
Friedrich D., geb. 2. 10. 1864 Cassel, 1892 prom., 1897 hab. Marburg, 1922 bis 1926 am Geodät. Institut in Potsdam.

1905. **Dannmeyer**, F., Dr., St., Hamburg, Groß-Borstel, Moorweg 50.
Ferdinand D., geb. 1880 Kiel, 1904 prom. Kiel.

1927. **Dantzig**, D. van, Wiskunde leeraar, Rotterdam, 's Gravendijkwal 31.
David v. D., geb. 23. 9. 1900 Amsterdam.

1927. **Davenport**, H., Cambridge (*England*), D. 8 New Court Trinity College.
Harald D., geb. 30. 10. 1907 Arrington (Lancashire, England).

1909. **Dávid**, L. v., Dr., Prof. a. d. U., Budapest I, Budofoki-ut. 53.

1918. **Debye**, P., Dr., Prof. a. d. U., Leipzig.

1909. **Degel**, O., Dr., Studienprof., Bayreuth, Graserstr. 4.
Oskar D., geb. 5. 10. 1876 Küps (Bayern), 30. 7. 1920 prom. Erlangen.

1909. **Degenhart**, H., Dr., Studienprof., München, Hiltensbergerstr. 45.
Hans D., geb. 29. 4. 1883 Neu-Ulm, 1908 prom. München.

Jahr des Eintritts

1900. **Dehn**, M., Dr., Prof. a. d. U., Frankfurt a. M., Kettenhofweg 105.
Max D., geb. 13. 11. 1878 Hamburg, 1900 prom. Göttingen, 1901 hab. Münster i. W., 1905 Prof. Münster, 1911 a.o. Prof. Kiel, 1913 o. Prof. Breslau, 1921 o. ö. Prof. Frankfurt a. M.

200. 1902. **Deinzer**, H., Prof., München, Nibelungenstr. 3.
Heinrich D., geb. 1. 6. 1873 Burggrub, 1900 Reallehrer Weißenburg, 1903 Kreisrealschule Nürnberg, Prof. a. d. Realschule Bamberg.

1898. **Denizot**, A., Dr., Prof. a. d. U., Posen, Kolejowa 29.
Alfred D., geb. 1873 Góroczyn, 7. 8. 1897 prom. Berlin, 1910 hab. Lemberg, 1908 a.o. Prof. Lemberg (T. H.), Okt. 1909 o. ö. Prof. Lemberg, 1919 Posen.

1919. **Deutschbein**, Frau M., Dr., Prof., Marburg, Rotenberg 15a.

1893. **Dickstein**, S., Prof. a. d. U., Warschau (*Polen*), Marszałkowskastr. 117.
Samuel D., geb. 12. 5. 1851 Warschau, 1872/82 Prof. am Gymn., später Prof. und Präsident a. d. wissenschaftlichen Kursen Warschau, seit 1915 in obiger Stellung.

1919. **Dieck**, W., Dr., St., Prof. a. d. Oberrealschule, M.-Gladbach-Holt, Bahnstr. 160.
Wilhelm D., geb. 27. 4. 1880 M.-Gladbach, 14. 5. 1908 prom. Kiel.

1891. **Dingeldey**, F., Dr., *G.H.-R.*, Prof. a. d. T. H., Darmstadt, Hoffmannstr. 41.
Friedrich D., geb. 16. 12. 1859 Darmstadt, 26. 9. 1885 prom. Leipzig, 1889 hab. Darmstadt, 1894 o. Prof. Darmstadt.

1903. **Dingler**, H., Dr., Prof. a. d. U., München 38, Nördliche Auffahrtsallee 69.
Hugo D, geb. 7. 7. 1881 München, 1. 5. 1907 prom. München, 1912 hab. München, 1920 a.o. Prof. München.

1903. **Dintzl**, E., Dr., Gymnasialprof., Kritzendorf (*Österreich*), Hauptstr. 93.
Erwin D., geb. 1878 Krems (N.-Österreich), 1900 prom. Wien.

1925. **Doerge**, K., Dr., Prdzt. a. d. U., Köln, Aduchtstr. 9 II.
Karl D., geb. 5. 11. 1899 Müllersdorf b. Halle a. d. S., 1925 prom. Berlin.

1920. **Doetsch**, G., Dr. phil., Prof. a. d. T. H., Stuttgart, Seestr. 100.
Gustav D., geb. 29. 11. 1892 Köln a. Rh., 24. 3. 1920 prom. Göttingen, 17. 3. 1921 hab. Hannover, 1. 4. 1922 Lehrauftrag Halle a. d. S., 12. 8. 1924 o. ö. Prof. Stuttgart.

210. 1897. **Doležal**, E., *H.-R.*, Dr.-Ing. Ehr., Dr. techn. honoris causa, Ehrendoktor der montan. Wissenschaften, Prof. a. d. T. H., Wien XIII, Penzingerstr. 125.

1925. **Dostal**, B. F., 1358 Prospect Av., Milwaukee (Wis.) (*U. S. A.*).
Bernard F. D.

1925. **Dreetz**, W., St., Charlottenburg II, Mommsenstr. 65.
Werner D., geb. 11. 10. 1887 Berlin, Studienrat 1. 4. 1919, Honorarassistent a. d. T. H. Berlin.

1926. **Drenckhahn**, Fr., Dr., Prof. am pädag. Inst., Rostock i. M., Barenstr. 11.
Fr. D., geb. 28. 5. 1894 Frauenmark (Mecklenb.), 1917 prom. Rostock, 1916 bis 1918 Ass. am physik. Inst. d. U. Rostock, 1921 St.-Ass., 1925 St. Bremen, 1927 Prof. am päd. Inst. Rostock.

1899. **Drygalski**, E. v., Dr., Prof. a. d. U., München, Gaußstr. 6.
Erich v. D., geb. 9. 2. 1865 Königsberg i. Pr., 1887 prom. Berlin, 1898 hab. Berlin, 1899 a.o. Prof. Berlin, 1906 o. ö. Prof. München.

1909. **Dumas**, G., Dr., Prof. a. d. U. Lausanne, Cabrières, A. de Mont Charmant.
Gustav D., geb. 25. 3. 1872 Etivaz, 1904 prom. Paris, 1905 hab. Zürich (T. H.).

1922. **Duschek, Adalbert**, Dr., Prdzt. u. Ass. a. d. T. H., Wien VIII, Alserstr. 47.
Adalbert D., geb. 2. 10. 1895 Mödling, 1921 prom. Wien, 1924 hab. Wien (T. H.).

1927. **Duschin**, N., Prof. am Inst. f. Volksbildung, Mitglied des wiss. Kathedere f. Geometrie, Charkow (*Ukraine*), Kuznetskaja 9.

1891. **Dyck**, W. v., Dr., Dr.-Ing., *G.-R.*, Prof. a. d. T. H., München, Hildegardstr. 5.
Walter, Ritter v. D., geb. 6. 12. 1856 München, 1879 prom. München, 1882 hab. Leipzig, 1884 o. ö. Prof. München (T. H.), 1923 Dr.-Ing. ehrenh. Hannover.

1910. **Ebner**, F., Dr., Prof. a. d. höh. Maschinenbauschule, Aachen, Eupener Str. 133.
Franz E., geb. 1870 Rostock i. M., 1895 prom. Rostock i. M.

220. 1925. **Ebner**, M., St., Berlin-Karlshorst, Kaiser-Wilhelm-Str. 16.
Max E., geb. 16. 2. 1893 Berlin, seit Ostern 1925 in obiger Stellung.

Jahr des Eintritts

1926. **Eckhart**, L., Dr., Prdzt. a. d. T. H., Wien XIII, Hütteldorfer Str. 126.
Ludwig E., geb. 28. 3. 1890 Delletitz (*Tschechosl.*), 1918 prom. Wien, 1924 a. d. T. H. Wien, 1919 Prof. a. d. Bundeserziehungsanstalt Wien XIII.

1924. **Eckle**, H., St., Heibronn a. N., Nordbergstr. 22.
Hans E., geb. 12. 1. 1889 Geislingen, 1913 math.-phys. Staatsprüfung Stuttgart.

1924. **Edlinger**, R., Ass. a. d. T. H. Wien, Baden b. Wien, Leesdorfer Hauptstr. 28.
Robert E., geb. 7. 7. 1900 Wien, Lehramtsprüfung für Math. und darst. Geom. Wien.

1918. **Ehrenhaft**, F., Dr., Prof. a. d. U., Wien IX, Boltzmannstr. 5.

1925. **Ehrlich**, L., St., Berlin NO. 55, Marienburger Str. 36.
Leopold E., geb. 6. 4. 1882 Neustadt, Krs. Neutomischel, 6. 7. 1909 Staatspr. Berlin, Studienrat am Königstädt. Ref.-Realgymn. Berlin.

1923. **Eiesland**, I. A., Dep. of math., Westvirg. Univ., Morgantown, W.-Va. (*U. S. A.*).

1918. **Einstein**, A., Dr., Prof., Berlin W 30, Haberlandstr. 5.
Albert E., geb. 14. 3. 1879 Ulm, 1905 prom. Zürich, 1908 hab. Bern, 1909 a.o. Prof. a. d. U. Zürich, 1911 o. Prof. a. d. Dtsch. U. Prag, 1912 o. Prof. a. d. T. H. Zürich, seit 1913 Mitglied der Pr. Akademie der Wissenschaften.

1926. **Elert**, W., cand. math. et phys., Göttingen, Sternstr. 4.

1897. **Ellemann**, F., St., Cöthen, Franzstr. 49.
Fritz E., geb. 6. 3. 1870 Cöthen.

230. 1923. **Emersleben**, O., Dr., Berlin-Friedenau, Niedstr. 5.
Otto E., geb. 17. 6. 1898 Magdeburg, 1922 prom. Göttingen.

1891. **Engel**, F., Dr., Prof. a. d. U., Gießen, Ludwigsplatz 9.
Friedrich E., geb. 26. 12. 1861 Lugau b. Chemnitz i. S., 1883 prom. Leipzig, 1885 hab. Leipzig, 1889 a.o. Prof. Leipzig, 1904 o. ö. Prof. Greifswald, 1913 o. ö. Prof. Gießen.

1902. **Epsteen**, S., Dr., Prof. a. d. Colorado U., Boulder Colo. (*U. S. A.*), 1317—7th St.

1900. **Epstein**, P., Dr., Prof. a. d. U., Frankfurt a. M., Schöne Aussicht 7.
Paul E., geb. 24. 7. 1871 Frankfurt a. M., 1895 prom. Straßburg i. E., 1903 hab. Straßburg i. E., 1908 a.o. Prof. Straßburg i. E., seit 1918 Frankfurt a. M.

1926. **Errulat**, F., Dr., Prdzt. a. d. U., Königsberg (Pr.), Hinter Tragheim 59a.
Fritz E., geb. 18. 10. 1889 Heinrichswalde, 1922 prom. Königsberg, 1924 hab. Königsberg.

1909. **Eschler**, H., Realschulprof., Teplitz-Schönau (*Č. S. R.*), Wolframstr. 18.
Hans E., geb. 14. 9. 1883 Josefstadt (*Č. S. R.*).

1925. **Ettlinger**, H. J., Dr., Prof. a. d. U., Austin (*Texas*), 3110 Harris Park Avenue.

1901. **Faber**, G., Dr., Prof. a. d. T. H., München, Pienzenauer Str. 12.
Georg F., geb. 5. 4. 1877 Kaiserslautern, 1902 prom. München, 1905 hab. Karlsruhe, 1909 a.o. Prof. Tübingen, 1910 o. ö. Prof. Stuttgart, 1912 o. ö. Prof. Königsberg, 1913 o. ö. Prof. Straßburg, seit 1916 München.

1913. **Falckenberg**, H., Dr., Prof. a. d. U., Gießen, Friedrichstr. 8.
Hans F., geb. 31. 8. 1885 Jena, 1911 prom. Erlangen, 1914 hab. Braunschweig, 1919 Königsberg, 1922 a.o. Prof. Gießen.

1902. **Fano**, G., Dr., Prof. a. d. U., Turin (*Italien*), Corso Vittorio Emanuele 105.
Gino F., geb. 5. 1. 1871 Mantua, 1892 prom. Turin, 1895 hab. Rom, 1899/1901 a.o Prof. a. d. U. Messina, seit 1901 o. Prof. a. d. U. Turin, seit 1908 Prof. am Polytechnikum Turin.

240. 1912. **Fano**, G. da, Supplent a. d. Staatsrealschule, Görz (*Italien*), Corso Verdi 47.

1902. **Fanta**, E., Dr., a.o. Prof. a. d. T. H., Wien V, Brauhausgasse 11/7.
Ernst F., geb. 1878 Wien, 1900 prom. Wien, 1910 hab. Brünn, 1918 a.o. Prof. Brünn, seit 1919 in obiger Stellung.

1925. **Fanth**, L., Dr., St.-Ass., Winnweiler (Rheinpfalz).
Ludwig F., geb. 30. 5. 1897 Ludwigshafen (Rh.), prom. 1925 Würzburg.

1921. **Färber**, A., Dr. rer. nat., Prof. am Reformrealgymnasium, Stuttgart, Hohenheimer Str. 54.
Alfred F., geb. 7. 10. 1878 Stuttgart, 1902 prom. Tübingen.

Jahr des Eintritts

1897. Fehr, H., Dr., Prof. a. d. U., Genf (*Schweiz*), Florissant 110.
Henri F., geb. 2. 2. 1870 Zürich, 1899 prom. Genf, 1895 hab. Genf, 1900 o. Prof. a. d. U. Genf.

1920. Feigl, G., Dr., Prdzt. a. d. U., Berlin-Lankwitz, Kaiser-Wilhelm-Str. 139.
Georg F., geb. 13. 10. 1890 Hamburg, 1918 prom. Jena, 1927 hab. Berlin (U.)

1906. Fejér, L., Dr., Prof. a. d. U., Budapest V, Falk Miksa utca 15.
Leopold F., geb. 1880 Pécs (*Ungarn*), 1902 prom. Budapest, 1905 hab. Kolozsvár, 1911 a.o. Prof. Kolozsvár, 1911 o. ö. Prof. Budapest.

1924. Fekete, M., Dr., Budapest II, Debrői út. 7.

1928. Fenchel, W., Dr., Berlin NW 87, Wullenweberstr. 7
Werner F, geb. 3. 5. 1905 Berlin, 1928 prom. Berlin.

1922. Feyer, E., Dr., Prdzt. u. Ass. a. d. T. H., Breslau 9, Paulstr. 33.
Edwin F., geb. 15. 7. 1888 Breslau, 27. 3. 1919 prom. Breslau, 15. 12. 1921 hab. Breslau.

250. 1925. Fiebig, W., St., Charlottenburg, Pestalozzistr. 28.
Walter F., geb. 23. 4. 1890, 1. 4. 1926 Friesenschule Charlottenburg.

1923. Fillunger, P., Dr., Prof., Baurat, Wien XVIII, Bastiengasse 20.

1912. Finke, P., Dr., Ober-St. am Gymnasium, Allenstein, Langgasse 21.
Paul F., geb. 21. 9. 1885 Hammerstein, 18. 2. 1909 prom. Greifswald.

1922. Finsler, P., Dr., Prof. a. d. U., Zürich (*Schweiz*), Schanzengasse 29.
Paul F., geb. 11. 4. 1894 Heilbronn a. N., 18. 2. 1919 prom. Göttingen, 13. 11. 1922 hab. Köln, 1925 Prof. a. d. U. Zürich.

1891. Finsterwalder, S., Dr., *G. H.-R.*, Prof. a. d. T. H., München 19, Flüggenstr. 4.
Sebastian F., geb. 4. 10. 1862 Rosenheim, 1885 prom. Tübingen, 1888 hab. München (T. H.), 1891 o. ö. Prof. München (T. H.).

1912. Finzel, A., Dr., St. a. d. Treitschkeschule, Berlin-Wilmersdorf, Hohenzollerndamm 189.
Anton F., geb. 31. 10. 1887 Kirn a. d. Nahe, 1911 prom. Straßburg i. E., 1912/15 Ass. a. d. T. H. Charlottenburg.

1920. Fischer, A., Dr., Zürich 6 (*Schweiz*), Hadlaubsteig 6.

1922. Fischer, A., Ing., Göding, (*Č. S. R.*), Wavlickova 5.

1903. Fischer, E., Dr., Prof. a. d U., Köln-Marienburg, Wolfgang-Müller-Str. 26.
Ernst F., geb. 12. 7. 1875 Wien, 1899 prom. Wien, 1904 hab. Brünn, 1910 a.o. Prof. Brünn, 1911 o. ö. Prof. Erlangen, 1920 Köln.

1893. Fischer, K. T., Dr., Prof. a. d. T. H., Solln b. München, Albrecht-Dürer-Str. 15.
Karl F., geb. 18. 1. 1871 Nürnberg, 1896 prom. München, 1897 hab. München (T. H.), seit 1902 a.o. Prof. a. d. T. H. München.

260. 1927. Fischer, P. B., St. a. Gymnasium Steglitz, Berlin-Lichterfelde W, Drakestr. 36.
Paul Bernhard F., geb. 5. 6. 1879, vom 1. 4. 1905 bis 1. 4. 1924 Oberrealschule Lichterfelde, seit 1924 in obiger Stellung.

1913. Fladt, K., Dr., St. a. d. Friedrich-Eugen-Oberrealschule Stuttgart, Vaihingen a. F., Christofstr. 18.
Kuno F., geb. 9. 6. 1889 Oehringen, 1920 prom. Tübingen, 1918/26 Vorstand d. Realschule Vaihingen a. F., seitdem in obiger Stellung.

1918. Flamm, L., Dr., Prof. a. d. T. H., Wien XVIII, Haizingergasse 26.
Ludwig F., geb. 1885 Wien, 1909 prom. Wien, 1916 hab. Wien, 1919 a.o. Prof. Wien, 1922 o. ö. Prof. Wien.

1896. Flatt, R., Dr., Rektor, Prdzt. a. d. U., Basel, Margarethenstr. 77.
Robert F., geb. 27. 10. 1863 Thalwil, 1889 prom. Zürich, 1892 hab. Basel, 1886/1903 Lehrer an den beiden Realschulen Basel, seit 1903 Rektor der Oberen Realschule.

1921. Flechsenhaar, A., Dr., St., Frankfurt a. M., Friedrichstr. 48.
Adam F., geb. 5. 4. 1877 König, Dez. 1899 prom. Gießen, seit 1. 4. 1903 St. Frankfurt a. M.

1914. Föppl, L., Dr., Prof. a. d. T. H. München.

1907. Föthke, E., Dr., St., Königsberg i. Pr., Hintertragheim 13.

1914. Fraenkel, A., Dr., Prof. a. d. U. Kiel.
Adolf F., geb. 17. 2. 1891 München, 1914 prom. Marburg, 1916 hab. Marburg, 1922 nicht beamteter a.o. Prof. Marburg, 1928 o. ö. Prof. Kiel.

Jahr des Eintritts

1911. **Franck**, P., Dr., Ober-St., früher Prof. a. d. U. La Plata, Hamburg, Wolfshagen 18.
Paul F., geb. 2. 4. 1874 Ueckermünde, 1899 prom. Leipzig, 1900/09 Oberlehrer Hamburg, 1909 Prof. a. d. La Plata U. Buenos Aires, seit 1920 Hamburg.

1908. **Frank**, Ph., Dr., Prof. a. d. Deutschen U., Prag II, Weinberggasse 3.
Philipp F., geb. 20. 3. 1884 Wien, 1906 prom. Wien (U.), 1910 hab. Wien (U.), 1912 a.o. Prof. a. d. Dtsch. U. Prag, 1917 o. ö. Prof. daselbst.

270. 1921. **Freise**, W., Prof., St. a. d. O.-R., Göttingen, Bergstr. 12.
Willy F., geb. 7. 3. 1865 Göttingen.

1910. **Freundlich**, E., Dr., Prof., Neubabelsberg, Rathaus.

1891. **Fricke**, R., Dr., *G. H.-R.*, Braunschweig, Kaiser-Wilhelm-Str. 17.
Robert F., geb. 24. 9. 1861 Helmstedt, 1885 prom. Leipzig, 1891 hab. Kiel, 1894 o. Prof. a. d. T. H. Braunschweig.

1906. **Frizell**, A. B., Dr., Prof. a. d. Massachusetts Nautical school, 179 St. Botolth Str., Boston, Mass. (*U. S. A.*)
Arthur Bowes F., geb. 14. 7. 1865 Boston, 1895/96 Instr. New York, 1897/1906 Harvard, 1909 Kansas, 1908/09 Prof. Midland Coll., 1910 Ph. D. Kansas.

1926. **Fröhlich**, R., Dresden-N. 23, Burgsdorffstr. 28.
Rudolf F.

1902. **Fuchs**, R., Dr., Prof. a. d. T. H., St. am Bismarckgymn. Berlin-Wilmersdorf, Berlin-Halensee, Ringbahnstr. 7.
Richard F., geb. 5. 7. 1873 Greifswald, 28. 7. 1897 prom. Berlin, hab. T. H. Charlottenburg, Jan. 1922 a.o. Prof. a. d. T. H. Charlottenburg.

1902. **Fueter**, R., Dr., Professor a. d. U., Zürich 7 (*Schweiz*), Klosbachstr. 75.
Rudolf F., geb. 1880 Basel, 1903 prom. Göttingen, 1905 hab. Marburg, 1908 o. ö. Prof. Basel, 1913 o. ö. Prof. Karlsruhe, 1917 Zürich.

1920. **Fuhr**, H., Dr., St.-Ass. a. d. Oberrealschule Gießen, Wilhelmstr. 50.
Heinrich F., geb. 2. 6. 1897, 7. 2. 1921 prom. Gießen.

1909. **Fujiwara**, M., Prof. a. d. Tôhoku Universität, Sendai (*Japan*).

1918. **Funk**, P., Dr., Prof. a. d. D. T. H. u. Prdzt. a. d. D. U., Prag, Husgasse 5.
Paul F., geb. 14. 4. 1886 Wien, 1911 prom. Göttingen, 1915 hab. a. d. Deutschen U. Prag, 1921 a.o. Prof. Prag.

280. 1921. **Furch**, R., Dr., Prof. a. d. U., Rostock, Adolf-Becker-Str. 20.
Robert Otto F., geb. 15. 3. 1894 Unterreichenbach, Herbst 1920 prom. Tübingen, Frühjahr 1923 hab. Hamburg, 1926 a.o. Prof. Rostock.

1902. **Furtwängler**, Ph., Dr., Prof. a. d. U., Wien XVIII, Messerschmidtgasse 45.
Philipp F., geb. 21. 4. 1869 Elze, 1895 prom. Göttingen, 1904/07 und 1910/12 Prof. Bonn (Landw. Akad.), 1907/10 o. ö. Prof. Aachen, seit 1912 Wien.

1922. **Gaba**, M., Dr., Prof., University of Nebraska, Lincoln, Nebr. (*U. S. A.*).

1918. **Gaede**, E., Dr., St. am Gymnasium, Sangerhausen, Bergstr. 23.
Erich G., geb. 20. 9. 1889 Oschersleben, 12. 6. 1912 prom. Erlangen, 1918 St.-Ass. Oschersleben, 1. 10. 1926 St. Sangerhausen.

1900. **Gale**, A. S., Prof. a. d. U. Rochester, N. Y. (*U. S. A.*).
Arthur Sullivan G., geb. 26. 6. 1877 Appleton, 1901 Ph. D. Yale U., 1901 Instr. Yale Coll., 1905 Ass. Prof., 1906 Prof. a. d. Rochester U.

1912. **Galle**, A., Dr., *G. R.-R.*, Prof. im Ruhestande, Potsdam, Neue Königstr. 103.
Andreas G., geb. 22. 6. 1858 Breslau, 1883 prom. Breslau, 1900/10 Charlottenburg (T. H.), 1902 Prof. Potsdam (Geod. Inst.), 1911 Abteilungsvorsteher am Geod. Inst. Potsdam.

1924. **Gauster**, W., Dr., Wien VI, Girardigasse 1.

1912. **Gebhardt**, M., Dr., Prof., Ober-St., Dresden-A. 20, Gerh.-Hauptmann-Str. 16.
Martin G., geb. 2. 10. 1868 Leipzig, 1896 prom. Leipzig, Jan. 1894 bis Okt. 1895 Ass. am Phys. Institut der T. H. Dresden, Febr. 1894 Staatsprüfung, 1908 Prof. Dresden (Vitzthumsches Gymn.), seit 1919 Ober-St. am Vitzthumschen Gymn. Dresden.

1921. **Gebhardt**, Dr., Direktor, Bochum, Ewaldstr. 21.

Jahr des Eintritts

1909. **Geck**, E., Dr., Studiendir. am Dillmann-R.-G., Cannstatt bei Stuttgart, Moltkestr. 77.

Erwin G., geb. 20. 7. 1876 Stuttgart, 1899 prom. Tübingen.

290. 1919. **Geilen**, V., Dr., Prdzt. a. d. U. Münster i. W., beurlaubt, z. Zt. Bischofstein in Ostpreußen.

1926. **Gelfert**, Dr., Ober-St.-Dir., Prof., Zwickau, Realgymnasium.

G., geb. 29. 4. 1882 Bautzen, März 1907 prom. Leipzig, 1907/14 Oberlehrer am Realgymnasium Reichenbach i. V., 1914/21 stellv. Dir. a. d. Realschule Chemnitz, 1919 Prof., seit 1921 Rektor am Realgymnasium Zwickau.

1924. **Geppert**, H., Dr., Prdzt. a. d. U. u. Ass. am Mathem. Seminar d. U., Gießen, Bismarckstr. 16, I.

Harald G., geb. 22. 3. 1902 Breslau, 7. 7. 1923 prom. Breslau, 13. 5. 1925 hab. Gießen.

1897. **Gerbaldi**, F., Dr., Prof. a. d. U. Pavia (*Italien*), Piazza Carmine 2.

Francesco G., geb. 29. 7. 1858 Spezia, 1879 prom. Turin, 1881 hab. Pavia, 1883 hab. Rom, 1898/1908 Prof. a. d. U. Palermo, seit 1908 Pavia.

1901. **Gernet**, N. v., Frl. Dr., Dzt. an der Universität, Leningrad (*Rußland*), Sjesschinskaja 24—26.

1924. **Gerstel**, A., Dr., Wien XIX, Billrothstr. 70.

1917. **Gerstmann**, R., Dr., Wien (*Österreich*) I, Spiegelgasse 2.

Robert G., geb. 1884 Wien, 1910 prom. Wien.

1903. **Geys**, A. F., Direktor der Deutschen Schule, Madrid IV, Calle Fortuny 15.

Alexander Friedrich G., geb. 29. 10. 1878 Würzburg.

1902. **Gibson**, G. A., Prof. a. d. U., Glasgow (*Schottland*), The University.

George Alexander G., geb. 19. 4. 1858 Greenlaw, 1881 M. A. Glasgow, 1883/95 Asst. Prof. Glasgow U., 1896/1909 Prof. Glasgow and West of Scotland Technical Coll., seit 1909 Prof. Glasgow U.

1906. **Giebel**, K., Dr., Oberstudiendirektor der Uhrmacherschule, Glashütte i. Sa.

Karl G., geb. 27. 4. 1879 Barmen, 1904 prom. Göttingen.

300. 1922. **Giesecke**, K., i. Fa. B. G. Teubner, Leipzig, Poststr. 3.

Konrad G., geb. 27. 9. 1878 Leipzig.

1922. **Gil y Ruiz**, R., Madrid, Apartado 634.

Rodrigo G. y R., geb. 16. 1. 1879 Madrid, Artillerieoffizier, Vorsteher der Abt. Erdmagnetismus am Geograph. Institut.

1905. **Giorgi**, G., Beratender Elektroingenieur, Prdzt. a. d. U., Rom (*Italien*), Corso Vittorio Emanuele 39.

Giovanni G., geb. 27. 11. 1871 Lucca, 1904 hab. Rom.

1927. **Glückert**, L., stud. math., Darmstadt, Annastr. 28.

1917. **Gmelin**, O., Dr., St., Wald (Rhld.), Hauptstr. 32.

Otto G., geb. 17. 9. 1886 Karlsruhe i. B., 1917 prom. Heidelberg.

1921. **Goeb**, M., Frl., St., Hagen i. W., Mollstr. 1 I.

Margarethe G., geb. 15. 4. 1892 Gruben (H.-N.).

1921. **Görig**, A., Versicherungstechniker, Prag II, Krakovská 13.

1906. **Goldziher**, K., Dr., Prof. a. d. Bürgerschullehrerbildungshochschule und Prdzt. a. d. T. H., Budapest I (*Ungarn*), Mészáros utca 12.

Karl G., geb. 1881 Budapest, 1904 prom. Budapest, 1911 hab. Budapest (T. H.), o. ö. Prof. Budapest.

1915. **Gonggrijp**, B., Oberlehrer an der Höheren Bürgerschule, Roelofhartstraat, Amsterdam (*Holland*).

1927. **Graf**, H., Dr., Prdzt. a. d. T. H., Karlsruhe, Kaiserstr. 160.

Heinrich G., geb. 21. 9. 1897 München, 1925 prom., 1927 hab. Karlsruhe.

310. 1899. **Graham**, W. P., Prof. a. d. U., Syracuse, N. Y. (*U. S. A.*).

William Pratt G., geb. 24. 11. 1871 Oswego N. Y., 1897 prom. Berlin, 1898 hab. Syracuse, 1898/1901 Ass. Prof., seit 1901 Prof. a. d. U. Syracuse.

1925. **Grahl**, Hermann, Dr., St., Freiberg i. Sa., Weisbachstr. 23.

Jahr des Eintritts

1915. Grammel, R., Dr., Prof. a. d. T. H., Stuttgart, Ehrenhalde 3.
Richard G., geb. 3. 3. 1889 Klosterreichenbach, 1913 prom. Dr. rer. nat. Tübingen, 1915 hab. Danzig, 1917 umhab. nach Halle, 1920 o. ö. Prof. Stuttgart.

1922. Grandjot, K., Dr., Prdzt. u. Ass. am Math.-phys. Seminar, Göttingen, Schillerstraße 64.
Karl G., geb. 23. 8. 1900 Frankenberg, 1922 prom. Göttingen, 1925 hab. Göttingen.

1923. Graustein, W. C., Dr., Prof., Cambridge, Mass. (*U. S. A.*), Langdon Str. 44.
William Caspar G., geb. 15. 11. 1888 Cambridge (Mass.), 1913 prom. Bonn, 1918 Instructor und Asst. Prof. am Rice Institute, Houston, Texas, seit 1919 Asst. Prof. a. d. U. Harvard.

1926. Grell, H., Dr., Ass., Jena, Mathem. Anstalt Abt. B.
Heinrich G., geb. 3. 2. 1903 Lüdenscheid (Westf.), 1922 prom. Göttingen.

1924. Grisar, C. M., Dr., Deisenhofen bei München.
C. M. G., geb. 17. 12. 1898 Antwerpen, 5. 3. 1924 prom. München.

1912. Grötzsch, C., Dr., Oberstudiendirektor, Crimmitschau, Markt 14.
Camillo G., geb. 29. 11. 1874 Zwickau i. Sa., 1898 prom. Leipzig, jetzt Oberst.-Direktor am Realgymn. mit Realschule Crimmitschau.

1927. Großmann, J., Dr., Prof., Haifa P. O. B. 202 (*Eretz-Israel*).
Jeremias G., geb. 5. 1. 1884, 1913 prom. Göttingen, 1915 hab. Charkow, 1916 Prof. am Pol. Institut Jekaterinoslaw, 1924 Prof. am Techn. Institut Haifa.

1903. Großmann, M., Dr., ehemals Prof. a. d. Eidgen. T. H., Zürich 7, Holderstraße 14.
Marcel G., geb. 1878 Budapest, 1902 prom. Zürich, 1906 hab. Basel, 1907—1927 o. ö. Prof. Zürich.

320. 1923. Gruber, Fr., Prof., Wien XIX, Grinzinger Allee, Künstlerkolonie Baracke 13.
Friedrich G., geb. 13. 7. 1895 Bruck a. d. M.

1927. Gruder, O., Dr., Wien XVIII, Hofstattgasse 15.
Osias G., geb. 3. 4. 1887 Zloczow, 1909 prom. Wien.

1892. Grübler, M., Dr., *G. H.-R.*, Prof. a. d. T. H., Dresden-A. 27, Bernhardstr. 98.
Martin G., geb. 19. 12. 1851 Meerane i. Sa., 1921 prom. h. c. Gießen, Okt. 1880 hab. Zürich, Sept. 1886 o. ö. Prof. Riga, 1900 o. ö. Prof. Dresden.

1904. Gruhn, P., St. am Technikum, Mittweida i. S., Albertstr. 8.
Paul G., geb. 22. 8. 1866 Berlin.

1928. Grüss, G., Dr., Berlin N 65, Nazarethkirchstr. 64.
Gerhard G., geb. 16. 3. 1902 Berlin, 1927 prom., seit 1925 Ass. am Inst. f. angew. Math.

1927. Gruyter, Walter de, (Fa.), Berlin W 10, Genthiner Str. 38.

1899. Guldberg, A., Dr., Prof. a. d. U., Oslo (*Norwegen*), Heegelivei 50.
Alf G., geb. 17. 3. 1866, 1896 prom. u. hab. Oslo, seit 1913 ord. Prof. a. d. U. Oslo.

1900. Guradze, H., Dr., Magistratsrat a. Statist. Amt der Stadt, Berlin NW 87, Levetzowstr. 16.
Hans G., geb. 1875 Breslau, 1900 prom. Breslau.

1924. Gussmann, G. A., St. am RG. und OR., Heilbronn a. N., Friedensstr. 72.
Gustav Adolf G., geb. 17. 3. 89.

1897. Gysel, J., Dr., Prof., Schaffhausen (*Schweiz*), Eigerstr. 9.
Julius G., geb. 1851 Wilchingen, 1874 prom. Zürich, seit 1875 Prof. a. d. Kantonsschule Schaffhausen.

330. 1928. Haack, W., Dr., Stuttgart, Technische Hochschule, Math. Seminar.
Wolfgang H., geb. 24. 4. 1902 Gotha, 1926 prom. Jena, seit 1928 Ass. a. d. T. H. Stuttgart.

1909. Haar, A., Dr., Prof. a. d. U., Szeged (*Ungarn*), Dugonics tér 13.
Alfred H., geb. 11. 10. 1885 Budapest, 1909 prom. Göttingen, 1910 hab. Göttingen.

1918. Haas, A., Dr., Prof. a. d U., Wien III, Neulinggasse 24.
Arthur H., geb. 30. 4. 1884 Brünn, 1906 prom. Wien, 1912 hab. Wien, 1913 a.o. Prof. Leipzig, 1921 a o. Prof. a. d. U. Wien.

1893. Haas, K., Dr., Gymnasialprof., Wien VI (*Österreich*), Mittelgasse 4.
Karl H., geb. 28. 7. 1844 Wien, 1874 prom. Wien, seit 1889 in obiger Stellung.

1911. Habibur Rahman Khan, Deputy Superint. of Telegraphs, Quetta (*Indien*)

Jahr des Eintritts

1897. Häbler, Th., Dr., St., Konrektor u. Prof. a. d. Fürstenschule, Grimma i. S.

Karl Theodor H., geb. 27. 1. 1851 Gr.-Schönau, 1884 prom. Jena, seit 1875 in obiger Stellung.

1891. Haentzschel, E., Dr., Prof., Ober-St., Berlin-Tempelhof, Sachsenring.

Emil H., geb. 20. 11. 1858 Berlin, 1883 prom. Jena, 1893 hab. Berlin (T. H.), 1900 a.o. Prof. und Doz. Berlin (T. H.), 1884 Oberlehrer, 1902 Prof., 1920 Oberst., als solcher seit 1924 im Ruhestande.

1928. Haenzel, G., Dr., Berlin-Wittenau, Oranienburger Str. 278.

1895. Hagen, J. G., Dr. phil. h. c., Dr. theol. h. c., Direktor d. vatikan. Sternwarte, Rom (*Italien*), Specola Vaticana.

Johann Georg H., geb. 6. 3. 1847 Bregenz, 1906 hab. Rom, 1921 Ehrendoktor d. Philosophie Bonn, seit 1906 Dir. d. vatik. Sternwarte Rom, 1925 Ehrendoktor d. Theologie Münster.

1922. Hagge, K., Kiel, Jahnstr. 7.

340. 1912. Hahn, Frau F., geb. Nugel, Dr., Emden in Ostfriesland, Stephanplatz 4.

1908. Hahn, H., Dr., Prof. a. d. U., Wien XVII, Promenadengasse 57.

Hans H., geb. 27. 9. 1879 Wien, 1902 prom. Wien, 1905 hab. Wien, 1909 a.o. Prof. Czernowitz, 1916 a.o. Prof. Bonn, 1917 o. ö. Prof. Bonn, seit 1920 Wien.

1921. Hake, H., Dr., St., Düsseldorf-Oberkassel, Arnulfstr. 10.

Heinrich H., geb. 4. 8. 1891 Meschede, 2. 3. 1921 prom. Bonn, seit 1. 4. 1919 St. Düsseldorf.

1920. Hamburger, H., Dr., Prof. a. d. U., Köln, Alteburgerwall 18.

Hans Ludwig H., geb. 5. 8. 1889 Berlin, 1914 prom. München, 1919 hab. Berlin, 1922 a.o. Prof. Berlin, 1924 o. ö. Prof. Köln.

1901. Hamel, G., Dr., Prof. a. d. T. H., Berlin W 30, Eisenacher Str. 35.

Georg H., geb. 12. 9. 1877 Düren, 1901 prom. Göttingen, 1903 hab. Karlsruhe, 1905 o. ö. Prof. Brünn, 1912 o. ö. Prof. Aachen, 1919 Berlin (T. H.).

1924. Hammerstein, A., Dr., Prof. a. d. U., Ass. am Math. Sem. d. U., Berlin NW 87, Klopstockstr. 52.

Adolf H., geb. 7. 6. 1888 Mannheim, 1919 prom. Göttingen, 1924 hab. Berlin, 1928 n. b. a.o. Prof.

1896. Hancock, H., Dr., Prof. a. d. U., Cincinnati Ohio (*U. S. A.*), 2415 Auburn Avenue.

Harris H., geb. 14. 5. 1867 Ellerslie, prom. Berlin.

1908. Hanna, U. S., Dr., Prof. a. d. Indiana U., Bloomington, Ind. (*U. S. A.*), Atwater Ave. 828.

Ulysses Sherman H., geb. 16. 1. 1865 Selma Indiana, 1905 Ph. D. Pennsylvania, 1900 hab. Indiana, 1895/1900 Instr. Indiana, 1899/1900 Harrison Fellow Pennsylvania, 1900/10 Asst. Prof., seit 1910 Assc. Prof. Indiana.

1909. Hanni, L., Dr., Prof. a. d. U., Graz, Waltendorf, Ruckerlberggasse 39.

Lucius H., geb. 1875 Göfis, 1900 prom. Innsbruck, 1906 hab. Wien, 1923 a.o. Prof. Graz, seit 1923 Prof. a. d. U. Graz.

1912. Happel, H., Dr., Prof. a d. T. H., Breslau 16, Zimmpel, Fr.-Ebert-Str. 37.

Hans H., geb. 9. 10. 1876 Cassel, 1900 prom. Göttingen, 1906 hab. Tübingen, 1911 a.o. Prof. Tübingen, 1920 o. ö. Prof. Breslau (T. H.).

350. 1921. Hardy, G. H., Dr., Prof. a. d. U., Oxford, New College.

1925. Härlen, H., Dr. phil., Eislingen/Fils, Württemberg.

Hasso H., geb. 28. 2. 1903 Antwerpen, 1926 prom. Wien, seit 1926 in obiger Stellung.

1904. Hartogs, F., Dr., Prof. a. d. U., München, Clemensstr. 34.

Friedrich H., geb. 20. 5. 1874 Brüssel, 1903 prom. München, 1905 hab. München, 1910 a.o. Prof. München, 1912 etatmäß. a.o. Prof. München, 1927 o. ö. Prof. München.

1901. Harzer, P., Dr., *G. R.-R.*, Prof. a. d. U., Direktor der Sternwarte, Kiel.

Paul H., geb. 1. 8. 1857 Großenhain, 1878 prom. Leipzig, 1882 hab. Leipzig, 1882/84 Observator Leipzig, 1884 Ass. Stockholm, 1885/87 Adj. Astronom Pulkowa, 1887/97 Dir. der Sternwarte Gotha, seit 1897 in obiger Stellung.

1909. Haseman, Ch., Prof. a. d. Nevada U., Reno, Nevada (*U. S. A.*).

Charles H., geb. 27. 9. 1880 Limton Indiana, 1907 prom. Göttingen, 1908 hab. Indiana.

Jahr des Eintritts

1902. **Haskell**, M. W., Dr., Prof. a. d. U., Berkeley, Cal. (*U. S. A.*), P. O. Box 3.
Mellen Woodman H., geb. 17. 3. 1863 Salem, 1889 prom. Göttingen, 1889/90 Instr. Michigan, 1890/94 Ass. Prof., 1894/1906 Associate Prof., seit 1906 in obiger Stellung.

1922. **Hasse**, H., Dr., Prof. a. d. U., Halle (Saale), Kuhntstr. 17pt.
Helmut H., geb. 25. 8. 1898 Cassel, 1921 prom. Marburg (Lahn), 1922 hab. Marburg (Lahn), 1922 umhab. Kiel, 1925 o. ö. Prof. Halle (Saale)

1925. **Hassmüller**, K., Dr., Ass. a. Math. Sem. d. U., Würzburg, Friedensstr. 51.
Karl H., geb. 2. 11. 1898 Würzburg, 1925 prom. Würzburg.

1899. **Hatzidakis**, N., Dr., Prof. a. d. U., Athen (*Griechenland*), Xenokratesstr. 29.
Nikolaus H., geb. 23. 5. 1872 Berlin, 1900/04 o. ö. Prof. a. d. Militärschule, seit 1904 o. ö. Prof. a. d. U. Athen.

1911. **Haupt**, O., Dr., Prof. a. d. U., Erlangen, Spardorfer Str. 45.
Otto H., geb. 5. 3. 1887 Würzburg, 1910 prom. Würzburg, 1913 hab. Karlsruhe i. B. 1920 o. ö. Prof. Rostock, 1921 Erlangen.

360. 1926. **Hauptmann**, M. D., St. a. d. Höh. Maschinenbauschule, Leipzig-Stötteritz, Störmthaler Str. 3.
Max H., geb. 9. 9. 1876 Glogau, 1913 prom. Leipzig, 1923 Studienrat Leipzig.

1928. **Haurwitz**, B., Dr., Leipzig, Talstr. 38, Geophys. Institut.
Bernhard H.

1896. **Hausdorff**, F., Dr., Prof. a. d. U., Bonn, Hindenburgstr. 61.
Felix H., geb. 1868 Breslau, 1891 prom. Leipzig, 1895 hab. Leipzig, 1910 a.o. Prof. Bonn, 1913 o. ö. Prof. Greifswald, seit 1921 o. ö. Prof. a. d. U. Bonn.

1896. **Haussner**, R., Dr., *G. H.-R.*, Prof. a. d. U., Jena, Stoystr. 1.
Robert H., geb. 6. 2. 1863 Naumburg, 1888 prom. Göttingen, 1894 hab. Würzburg, 1898/1902 a.o. Prof. Gießen, 1902/05 o. Prof Karlsruhe, seit 1905 in obiger Stellung.

1901. **Hayashi**, T., Prof. a. d. Tôhoku U., Sendai (*Japan*), Kamoncho 10.
Tsuruichi H., geb. 13. 6. 1873 Tokushima, 1897 prom. Tokyo, 1898 hab. Kyoto, 1907 o. ö. Prof. Tokyo, seit 1911 in obiger Stellung.

1920. **Hazlett**, Miss O. C., Dr., Prof. a. Univ. of Illinois, Urbana (*U. S. A.*).

1912. **Hecke**, E., Dr., Prof. a. d. U. Hamburg-Kl. Borstel, Wellingsbütteler Landstraße 156.
Erich H., geb. 20. 9. 1887 Buk, 1910 prom. Göttingen, 1912 hab. Göttingen, 1915 a.o. Prof. Basel, 1916 o. ö. Prof. Basel, 1918 o. ö. Prof. Göttingen, seit 1919 Prof. a. d. U. Hamburg.

1903. **Hedrick**, R., Prof. a. d. U., Los Angeles, California 523 N. Mariposa.
Earl Raymond H., geb. Union City Indiana, 1901 prom. Göttingen, 1901/03 Instr. a. d. Yale U., 1903 o. Prof. a. d. Missouri U., 1923 Los Angeles.

1902. **Heegaard**, P., Dr., Prof. a. d. U. Oslo, Lilleaker (*Norwegen*).
Poul H., geb. 2. 11. 1871 Kopenhagen, 5. 5. 1898 prom. u. hab. Kopenhagen, 1910/17 o. ö. Prof. für Math. Kopenhagen, seit 1918 o. ö. Prof. a. d. U. Oslo.

1891. **Heffter**, L., Dr., *G. H.-R.*, Prof. a. d. U., Freiburg i. B., Jacobistr. 19.
Lothar H., geb. 11. 6. 1862 Cöslin, 1886 prom. Berlin, 1888 hab. Gießen, 1891 a.o. Prof. Gießen und 1897 Bonn, 1904 o. ö. Prof. Aachen, 1905 Kiel, 1911 Freiburg i. B.

370. 1924. **Heiland**, C. A., Dr. rer. nat., Prof. of Geophysics, Colorado School of Mines, Golden (Colo.) (*U. S. A.*).
Carl August H., geb. 16. 7. 1899 Hamburg, prom. 28. 7. 1923 Hamburg, wissenschaftl. Mitarbeiter der Askania-Werke Berlin-Friedenau, 1926 Prof. of Geophysics Golden (Colo.).

1908. **Hein**, B., St., Dtsch. Eylau (Westpreußen), Bahnhofstr. 90.
Bruno H., geb. 8. 3. 1883 Königsberg i. Pr., seit Ostern 1921 in obiger Stellung.

1907. **Heinecke**, G., Dr., St., Berlin-Lankwitz, Viktoriastr. 54a.
Gustav H., geb. 1. 8. 1885 Magdeburg, 1909 prom. Halle, seit 1. 4. 1913 St. am Realgymnasium Berlin-Lankwitz.

1924. **ter Hell**, H., Altona, Breite Str. 177.
Hermann ter H., geb. 25. 11. 1902, stud. Hamburg.

1910. **Heller**, S., Dr., St., Schleswig, Chemnitzerstr. 72.
Siegfried H., geb. 1. 12. 1876 Rohrbach b. Saargemünd, 1904 prom. Kiel, seit 1907 a. d. Oberrealschule 2 Kiel.

Jahr des Eintritts

1907. **Hellinger**, E., Dr., Prof. a. d. U., Frankfurt a. M., Marbachweg 339.
Ernst H., geb. 1883 Striegau, 1907 prom. Göttingen, 1909 hab. Marburg, 1914 a.o. Prof. Frankfurt, 1920 o. Prof. Frankfurt.

1922. **Helly**, Ed., Dr., Prdzt. a. d. U., Wien XIII, Jagdschloßgasse 18.
Eduard H., geb. 1884 Wien, 1907 prom. Wien, 1921 hab. Wien.

1921. **Hencky**, H., Dr., Lektor d. T. H., Delft (*Holland*), Fabritiusstraat 27.
Heinrich H., geb. 2. 11. 1885 Ansbach, 1913 prom. Darmstadt, 1919 hab. Darmstadt.

1891. **Henneberg**, L., Dr., Dr.-Ing., *G.H.-R.*, Prof., Darmstadt, Roquetteweg 51.
Lebrecht H., geb. 27. 9. 1850 Wolfenbüttel, 1875 prom. Heidelberg, 1876 hab. Zürich, 1878 a.o. Prof. Darmstadt, 1879 o. ö. Prof. Darmstadt, 1920 emeritiert.

1891. **Hensel**, K., Dr., *G. R.-R.*, Prof. a. d. U., Marburg, Breiter Weg 7.
Kurt H., geb. 29. 12. 1861 Königsberg i. Pr., 1884 prom. Berlin, 1886 hab. Berlin, 1891 a.o. Prof. Berlin, 1902 o. ö. Prof. Marburg.

380. 1906. **Herglotz**, G., Dr., Prof. a. d. U., Göttingen, Hoher Weg 12.
Gustav H., geb. 2. 2. 1881 Wallern, 1902 prom. München, 1904 hab. Göttingen, 1907/08 a.o. Prof. Göttingen, 1908/09 a.o. Prof. Wien (T. H.), 1909/25 o. Prof. Leipzig, 1925 Göttingen.

1902. **Hermann**, A., Verlagsbuchhändler, Paris, Rue de la Sorbonne 8.

1926. **Herrmann**, A., Dr., Assist. a. Friedrichs-Polytechnikum städt. Gewerbe-Hochschule, Cöthen i. Anh., Akazienstr. 13a.
Aloys H., geb. 27. 11. 1898 Bildstock (Saar), 1924 prom. Marburg a. d. L.

1918. **Hertz**, P., Dr., Prof. a. d. U., Göttingen, Riemannstr. 34.

1927. **Herzberger**, M., Dr., wiss. Mitarbeiter v. C. Zeiß, Jena, Pfaffenstieg 3.
Max H., geb. 7. 3. 1899, 1923 prom. Berlin.

1895. **Heun**, K., Dr., *G. H.-R.*, Prof. a. d. T. H., Karlsruhe, Klauprechtstr. 33.
Karl H., geb. 3. 4. 1859 Wiesbaden, 1881 prom. Göttingen, 1884 hab. München, 1890/1902 Oberlehrer Berlin, seit 1902 o. Prof. Karlsruhe.

1917. **Heymann**, F., München, Krumbacherstr. 5.
Franz H., geb. 13. 12. 1875 Posen, Versicherungstechniker und Prokurist.

1926. **Heymann**, W., Dr., St., Leipzig, Kochstr. 94 I.
Walter H.

1899. **Heyse**, M., Dr., *O.-R.-R.*, Berlin-Wilmersdorf, Pfalzburger Str. 56.
Martin H., geb. 22. 2. 1879 Stettin, 1901 prom. Halle, seit 1904 Oberlehrer a. d. Goetheschule Wilmersdorf.

1922. **Heyting**, A., Dr., Lehrer am Lyzeum, Enschede (*Holland*), Veenstraat 71.
A. H., 1925 prom. Amsterdam.

390. 1906. **Hilb**, E., Dr., Prof. a. d. U., Würzburg, Seelbergstr. 5.
Emil H., geb. 1882 Stuttgart, 1903 prom. München, 1908 hab. Erlangen, 1909 a.o. Prof. Würzburg, 1923 o. ö. Prof. Würzburg.

1891. **Hilbert**, D., Dr., *G.R.-R.*, Prof. a. d. U., Göttingen, Wilhelm-Weber-Str. 29.
David H., geb. 23. 1. 1862 Königsberg, 1884 prom., 1886 hab., 1892 a.o. Prof., 1893 o. Prof. Königsberg, seit 1895 o. Prof. Göttingen.

1906. **Hilbert**, S., Dr., Privatgelehrter, Weimar, Cranachstr. 30.
Sigismund H., geb. 27. 2. 1868 Langenbielau (Schlesien), 1900 prom. Göttingen.

1928. **Hirano**, T., Tokio (*Japan*), 50 Kasugacho Koishikawa.
Tomoharu H.

1897. **Hirsch**, A., Dr., Prof. a. d. Eidgen. T. H., Zürich VII, Reinacher Str. 8.
Arthur H., geb. 19. 7. 1866 Königsberg i. Pr., 1892 prom. Königsberg i. Pr., 1893 hab. Zürich, 1903 o. ö. Prof. Zürich.

1891. **Hölder**, O., Dr., *G. H.-R.*, Prof. a. d. U., Leipzig, Schenkendorfstr. 8.
Otto H., geb. 22. 7. 1859 Stuttgart, 1882 prom. Tübingen, 1884 hab. Göttingen, 1889 a.o. Prof. Göttingen, 1889 Tübingen, 1896 o. ö. Prof. Königsberg, 1899 Leipzig.

1912. **Hoffmann**, B., Dr., Königsberg i. Pr., Vorstädtische Realschule.

1905. **Hoffmann**, C., Dr., St., Ravensburg (*Württemberg*), Schützenstr. 19.
Curt H., geb. 22. 5. 1877 St. Petersburg, 17. 12. 1902 prom. Tübingen, 1911 Prof. a. d. Ober-Realschule Ravensburg.

1921. **Hofmann**, H., Dr., Oberstudiendirektor, Frankfurt a. M.-Süd, Holbeinstr. 21, Oberrealschule.
Heinrich H., geb. 12. 6. 83 Oberellenbach, Kr. Rotenburg a. F., 14. 2. 12 prom. Göttingen.

Jahr des Eintritts

1927. **Hofmann**, J. E., Dr., Ass. a. d. T. H., Darmstadt, Kießstr. 15.
Joseph Ehrenfried H., geb. 7. 3. 1900 München, 1927 prom. München.

400. 1921. **Hoheisel**, G., Dr., Prof. a. d. U., Breslau 10, Weinstr. 26.
Guido H., geb. 14. 7. 1894 Breslau, 1920 prom. Berlin, 1922 hab Breslau (U.), 1928 n. b. a.o. Prof.

1914. **Holdaway**, A., London, 30 Turret Grove, Clapham S. W.

1905. **Holgate**, Th. F., Prof. a. d. U., Evanston Ill. (*U. S. A.*), Library Str. 617.
Thomas Franklin H., geb. 8. 4. 1859 Ontario, 1893 Ph. D. Clark, 1893 hab.

1910. **Holmgren**, E., Dr., Prof. a. d. U., Uppsala (*Schweden*), Observatorium.
Erik H., geb. 7. 7. 1872 Stockholm, 1898 prom. und hab. Uppsala, seit 1907 o. Prof. a. d. U. Uppsala.

1927. **Hopf**, E., Dr., Berlin-Dahlem, Altensteinstr. 40, Astronom. Recheninstitut.
Eberhard H., geb. 17. 4. 1902 Salzburg, 1926 prom. Berlin.

1925. **Hopf**, H., Dr., Prdzt. a. d. U. Berlin C 2, Math. Sem. d. Univ.
Heinz H., geb. 19. 11. 94 Grübschen b. Breslau, 1925 prom. Berlin, 1926 hab. Berlin (U.).

1925. **Hopf**, L., Dr., Prof., Aachen, Eupener Str. 129.
Ludwig H., geb. 23. 10. 1884 Nürnberg, 1909 prom. München (U.), 1914 hab. Aachen, 1921 n. b. a.o. Prof. Aachen, 1923 o. ö. Prof. Aachen.

1899. **Hoppe**, E., Dr., Prof., Dzt. a. d. U., Göttingen, Schildweg 12.
Edmund H., geb. 25. 2. 1854 Burgdorf (Hannover), 15. 7. 1876 prom. Göttingen, 1. 10. 1878 Dzt. am Akadem. Gymn. Hamburg, seit 1894 Prof. am Johanneum Hamburg, und seit 1. 4. 1919 Dzt. für Geschichte der exakten Wissenschaften Göttingen.

1891. **Horn**, J., Dr., *G. H.-R.*, Prof. a. d. T. H., Darmstadt, Mathildenstr. 10.
Jakob H., geb. 14. 2. 1867 Rohbach, 1889 prom. Heidelberg, 1890 hab. Freiburg, 1892 Berlin (T. H), 1900 o. Prof. Clausthal, seit 1907 Darmstadt.

1903. **Hort**, W., Dipl.-Ing., Dr., Prof., Charlottenburg, Tegeler Weg 108.
Wilhelm H., geb. 20. 3. 1878 Madelungen, 1904 prom. Göttingen, 1917 hab. Charlottenburg (T. H.), 1923 a.o. Prof. Charlottenburg (T. H.).

410. 1923. **Hörting**, A., St., Zeitz, Richterstr. 2.
Alexander H., geb. 6. 9. 1879 Mühlhausen i. Th.

1927. **Hosokawa**, Tôyomon, Sendai (*Japan*), Komegafukuro Nakanosaka Dâri 11.

1909. **Hronec**, G., Prof. a. d. T. H., Brünn (*Tschechoslov.*), Kounicstr. 80.
Georg H., geb. 17. 5. 1881 Gočovo (*Tsch.*), 4. 8. 1912 prom. Gießen, 29. 9. 1923 hab. Prag, 1924 a.o. Prof. Brünn.

1922. **Hueber**, G., Prof., Wien II, Kl. Sperlgasse 2c.

1921. **Hückel**, E., Dr., Göttingen, Friedländerweg 46.

1918. **Humm**, P., stud. math., Zürich (*Schweiz*), Bolleystr. 38.

1901. **Huntington**, E., Dr., Prof. a. d. Harvard U., Cambridge Mass. (*U. S. A.*), 27 Everett St.
Edward H., geb. 1874 Clinton, 1901 prom. Straßburg, 1895/99 und 1901/05 Instructor Harvard und Williams Coll., seit 1905 in obiger Stellung.

1927. **Hurewicz**, W., Dr., Amsterdam (*Holland*), Universität.
Witold H., geb. 1904 Lodz (*Polen*), 1926 prom. Wien.

1922. **Hurwitz**, L., Dr., St., Berlin-Wilmersdorf, Sigmaringerstr. 23.
Lotte H., geb. 1889 Labes i. Pomm., 1914 prom. Königsberg i. Pr.

1900. **Jaccottet**, Ch., Dr., Prof. am Gymnasium in Lausanne, Lutry (*Schweiz*).
Charles J., geb. 1872 Lutry, 1895 prom. Göttingen, 1903 hab. Lausanne, seit 1895 in obiger Stellung.

420. 1907. **Jackson**, C. S., Instructor an der Militärakademie, Woolwich (*England*).

1926. **Jacob**, M., Dr., Wien II, Wolfgang-Schmälzl-Gasse 10/16.
Moses J., geb. 15. 11. 1900 Nadworna, 1925 prom. Wien.

1906. **Jacobsthal**, E., Dr., Prof. a. d. T. H., Berlin W 62, Kurfürstenstr. 78.
Ernst J., geb. 16. 10. 1882 Berlin, 1906 prom. Berlin, 1913 hab. Berlin (T. H.), 1922 a.o. Prof. Berlin (T. H.).

Jahr des Eintritts

1900. Jacobsthal, W., Dr., Prof., Studiendirektor, Berlin SW 61, Yorckstr. 89.
Walther J., geb. 18. 2. 1876 Straßburg i. E., 1899 prom. Straßburg i. E.

1923. Jaenichen, W., Dr., St., Hon.-Ass. a. d. T. H., Berlin NW 87, Elberfelder Str. 2.
Walter J., geb. 28. 12. 1882 Berlin, 1922 prom. Königsberg i. Pr., 1910 St. Berlin.

1891. Jaerisch, P., Dr., Prof., Bergedorf b. Hamburg, Ernst-Mantiusstr. 7.
Paul J., geb. 25. 3. 1853 Rosen, prom. Breslau, Oberlehrer a. D.

1921. Jaffé, G., Dr., Prof. a. d. U., Gießen, Moltkestr. 25.
George J., geb. 16. 1. 1880 Moskau, 1903 prom., 1908 hab. Leipzig, 1916 a.o. Prof. Leipzig, 1926 o. ö. Prof Gießen.

1921. Jansen, Dr., Wilhelmshaven, Hollmannstr. 9.

1922. Jaremkewycz, G. A., stud., Prag, Weinberge (Vinohrady), Milešorské 3.
Georg Arthur J., geb. 1. 5. 1901 Kroscienko (*Ostgalizien*).

1927. Ichida, Asajirô, Dr., Math. Inst. Science College, Sendai (*Japan*).

430. 1922. Ince, E. L., Dr., Prof. Department of pure Mathematics, The Egyptian University, Cairo (*Ägypten*).

Institute:

1928. Mathematisches Institut der Technischen Hochschule, Aachen.
1921. Mathematisches Seminar der Universität, Amsterdam.
1927. Mathematisches Seminar der Universität, Basel, Rheinsprung 21.
1920. Mathematisches Seminar der Universität, Berlin.
1906. Mathematisches Seminar der Universität, Bonn.
1921. Math.-physikalisches Seminar der Universität, Breslau.
1927. Math.-physikalisches Seminar der Technischen Hochschule, Breslau.
1928. Mathematisches Institut d. Deutschen Technischen Hochschule, Brünn.
1920. Mathematisches Institut der Masaryk-Universität, Brünn (*Tschechoslowakei*), (Brno), Kounicova 63.
440. 1927. Wissenschaftliches Katheder für mathematische Analyse, Institut für Volksbildung, Charkow (*Ukraine*).
1926. Mathematisches Kabinett des Instituts für Volksbildung, Charkow.
1922. Institut für angewandte Mathematik der T. H., Charlottenburg.
1927. Institut für Math. und Mechanik a. d. Bergakademie, Clausthal.
1914. Physikalisches Institut der Universität, Cluj (*Rumänien*).
1924. Mathematisches Seminar d. Friedrichs-Polytechnikums Cöthen (Anhalt).
1914. Seminar für Math. u. math. Physik a. d. U., Czernowitz (*Bukowina*).
1926. Mathematisches Lesezimmer der Technischen Hochschule, Danzig.
1927. Mathematisches Seminar der Technischen Hochschule, Darmstadt.
1921. Mathematisches Seminar der Technischen Hochschule, Dresden.
450. 1921. Mathematisches Institut der Universität, Erlangen.
1919. Mathematisches Seminar der Universität, Frankfurt a. M., Jordanstraße 17—25.
1902. Mathematisches Institut der Universität, Freiburg i. Br., Brunnenstr. 1.
1904. Mathematisches Kabinett der Universität, Gießen.
1907. Sternwarte Gotha, Jägerstr. 7, Direktor Prof. Dr. E. Anding.
1921. Mathematisches Institut d. Universität Göttingen, Weender Landstr. 2.
1922. Mathematisches Seminar der Universität, Greifswald, Bahnhofstr. 2/3.
1911. Mathematisches Seminar der Universität, Halle a. d. S.
1923. Mathematisches Seminar der Universität, Hamburg 13, Rothenbaumchaussee 21.
1923. Mathematisches Institut der Universität Heidelberg, Hauptstr. 47.
460. 1928. Mathematische Anstalt an der Universität Jena.
1926. Institute of Mathematics, the Hebrew University, Jerusalem (*Erets-Israel*).

Jahr des Eintritts

1904. Mathematisches Institut der Technischen Hochschule, Karlsruhe.
1923. Mathematisches Seminar der Universität, Kaunas (*Lit.*).
1906. Mathematisches Seminar der Universität, Kiel.
1926. Mathematisches Seminar der Universität, Köln a./Rh., Claudiusstr. 1.
1915. Math.-physikalisches Seminar der Universität, Königsberg i. Pr.
1925. Mathematisches Seminar der Universität, Laibach (Ljubljana, *Jugoslawien*).
1921. Mathematisches Institut der Universität, Leipzig, Talstr. 35.
1921. Math.-physikalische Lehrkanzelbibliothek der Montan. Hochschule, Leoben.
470. 1922. Mathematisches Seminar der Universität, Marburg (Lahn).
1897. Mathematisches Institut der Technischen Hochschule, München.
1901. Mathematisches Seminar der Universität, München.
1906. Mathematisches Seminar der Universität, Münster i. W.
1928. Mathematisches Forschungskatheder, Odessa (*Rußland*), Schriftführer Prof. Kryschanowsky, Odessa, Otradnastr. 12, w. 4.
1923. Preußisches geodätisches Institut, Potsdam.
1927. Mathematisches Institut der Deutschen Universität, Prag II, Viničná 3.
1926. Mathematisches Departement des Transvaal University College, Pretoria.
1926. Mathematisches Seminar der Universität, Rostock.
1923. Mathematische Bibliothek der Universität, Stockholm.
480. 1908. Mathematisches Seminar der Universität, Straßburg i. E.
1923. Mathematisches Seminar der Technischen Hochschule, Stuttgart.
1928. Württembergische Landesanstalt für Erziehung und Unterricht, Stuttgart, Seidenstr. 47.
1925. Sammlung für darstellende Geometrie a. d. T. H., Stuttgart.
1922. Mathematisches Seminar der Universität, Szeged (*Ungarn*).
1921. Mathematisches Seminar der Universität, Tübingen.
1924. Matematiska Seminariet Uppsala.
1903. Mathematisches Seminar der Universität, Würzburg.

1896. Jolles, St., Dr., *G. R.-R.*, Prof. a. d. T. H., Berlin, Kurfürstendamm 130.
Stanislaus J., geb. 25. 7. 1857 Berlin, 1882 prom. Straßburg, 1886 hab. Aachen (T. H.) und 1893 Berlin (T. H.), 1896 Dozent Berlin (T. H.), 1907 o. Prof. Berlin (T. H.).

1901. Jørgensen, N., Mag. sc., Fuldmægtig in Nordisk Livsforsikrings A. S. af 1897, Kopenhagen (*Dänemark*), Kongens Nytorv 8.
Niels J., geb. 30. 11. 1879 Onspjerg.

490. 1924. Ippisch, K., Prof., Wien II, Vereinsgasse 21.

1902. Juel, C., Dr., Prof., Kopenhagen, Willemoesgade 54.
Christian J., geb. 25. 1. 1855 Randers, 1885 prom. und hab. Kopenhagen, 1895 Dozent Kopenhagen, 1907 Prof. a. d. T. H. Kopenhagen, seit 1925 emeritiert.

1902. Jung, F., Dr., Prof. a. d. T. H., Wien IV., Mittersteig 3a.
Franz J., geb. 1872 Hohenelbe, 1899 prom. Prag, 1904 hab. Prag (T. H.), 1911 a.o. Prof. Wien (T. H.), 1919 o. ö. Prof. Wien (T. H.).

1905. Jung, H., Dr., Prof. a. d. U., Halle a. S., Viktoriastr. 8.
Heinrich J., geb. 4. 5. 1876 Essen, 1899 prom. Marburg, 1902 hab. Marburg, 1908 Oberlehrer Hamburg, 1913 o. ö. Prof. Kiel, vom 1. 9. bis 1. 12. 1918 o. ö. Prof. Dorpat, seit Ostern 1920 o. ö. Prof. a. d. U. Halle.

1906. Jung, F. X., *R.-R.*, Prof., Stuttgart, Viergiebelweg 5.
Franz Xaver J., geb. 17. 12. 1881 Mengen.

1918. Junge, G., Dr., Prof., St. a. D., Berlin-Lichterfelde, Zeisigweg 8.

1917. Junius, P., Prof., Oberst.-Dir., Recklinghausen, Hohenzollernstr. 18.
P. J., geb. Hörde.

Jahr des Eintritts

1923. Jüttner, F., Dr., St., Prof., Prdzt. a. d. U., Breslau X, Friesenstr. 33.
Ferencz J., geb 28. 2. 1878 Berlin, 1901 prom. Breslau, 1921 hab. Breslau, Prof. am Johannes-Gymnasium Breslau.

1922. Iversen, F., Dr., Helsingfors, Kaptensgatan 3 C.

1927. Izumi, S., Tôhoku Imperial University, Sendai (*Japan*).
Shiu-ichi S., geb. 2. 7. 1904 Sendai.

500. 1900. Kagan, B., Prof. a. d. U., Moskau (*Rußland*), Gr. Polianka 48, 4.
Benjamin K., geb. 1869 im Gouvernement Kowno, 1892 prom. Kiew, 1897 hab. Odessa.

1907. Kaiser, J., Dr., St., Berlin-Zehlendorf, Burggrafenstr. 28.
Johannes K., geb 1887 Magdeburg, 1909 prom. Halle a. S., Studienrat an der Oberrealschule Zehlendorf.

1915. Kaluza, Th., Dr., Prof. a. d. U., Königsberg i. Pr., Steinmetzstr. 34.

1926. Kaminishi, H., Dr., Tôhoku Imperial University, Sendai (*Japan*).
Hatsuso K., geb. 24. 12. 1901 Sendai (*Japan*), 1926 prom. Sendai.

1921. Kamke, E., Dr., St., Prof. a. d. U., Tübingen, Hölderlinstr. 29.
Erich K., geb. 18. 8. 1890 Marienburg, 1919 prom Göttingen, 1920 St. Hagen i. W. und seit 1922 Prdzt. a. d. U. Münster i. W., 1926 a.o. Prof. Tübingen.

1921. Kämmerer, Fr., Dr., St.-Ass., Büdingen (Hessen), Hindenburgstr. 25.
Friedrich K., geb. 19. 5. 1894 Büdingen, 21. 7. 1922 prom. Gießen.

1924. Kämmerer, W., stud. math. et phys., Büdingen (Hessen).

1921. Kämpfe, B., Prof. Dr., Ober-St. a. D. und Dozent an der Handelshochschule, Leipzig, Gustav-Adolfstr. 25
Bruno K., geb. 21. 1. 1860 Schkeuditz (Prov. Sachsen), 1893 prom. Leipzig.

1922. Kannengießer, W., Dr., St.-Ass., Dresden-N 6, Tieckstr. 21.
Walter K., geb. 30. 5. 1900 Weinböhla, Juli 1922 prom. Dresden (Dr. rer. techn.), Studienreferendar Dresden.

1921. Kanning, O., St., Landsberg a. Warthe, Steinstr. 24.
Otto K., geb. 14. 6. 1894 Frankfurt a. M., St.-Ass. a. d. Staatlichen Bildungsanstalt Berlin-Lichterfelde, seit 15. 5. 1926 in obiger Stellung.

510. 1922. Kapferer, Heinrich, Dr., Prdzt. a. d. U., Freiburg i. Br., Hermannstr. 17.
Heinrich K., geb. 28. 10. 1888 Donaueschingen, 1914 prom. Freiburg i. B., St.-Ass. a. D., 1926 Prdzt. a. d. U. Freiburg i. Br.

1903. Kapteyn, W., Dr., Prof. a. d. U., Utrecht (*Holland*), Wilhelminapark 34.
Willem K., geb. 16. 8. 1849 Barnveld, 1872 prom. Utrecht, 1872/75 Lehrer am Lyz. Maastricht, 1875/78 a. d. Höheren Bürgerschule Middelburg, seit 1878 in obiger Stellung.

1906. Kármán, Th. v., Dr., Prof. a. d. T. H., Aachen, Technische Hochschule.

1903. Karpinski, L., Dr., Prof. a. d. U. Michigan (*U. S. A.*), Ann Arbor Mich. (*U. S. A.*), 1315 Cambridge Road.
Louis K., geb. 5. 8. 1878 Rochester (New York), 1903 Dr. phil. nat. Straßburg, 1904 hab. Michigan, 1911 a.o. Prof. Michigan, 1918 o. ö. Prof. Michigan.

1926. Kashiwagi, H., Prof. of Mathematics in the higher technical school of Kyoto, Kyoto (*Japan*), Techn. Hochschule.
Hidetoshi K., 1919 prom. Kyoto (*Japan*), 1919 Prof. a. d. T. H. Kyoto.

1918. Kasperowicz, W., Ingenieur, Zürich (*Schweiz*), Konradstr. 66.

1920. Katz, W., Direktor der Hamburg-Leipziger Lebensversicherungsgesellschaft, Leipzig S 3, Fockestr. 7.
Wilhelm K., geb. 3. 12. 1887 Cassel.

1925. Kawaguchi, A., Dr., Tokyo-Shigai, Takinogawamachi, Nakasato 320 (*Japan*).
Akitsugu K., geb. 1902 Kumamoto, 1925 prom. Sendai.

1913. Keisker, L., Dr., Stadtrat und Stadtschulrat, Erfurt.
Ludwig K., geb. 27. 10. 1878 Aschendorf, 11. 12. 1910 prom. Münster i. W.

1923. Kellogg, O. D., Dr., assoc. prof. a. d. Harvard-U., 20. Craigie St., Cambridge (Mass.) (*U. S. A.*).

Jahr des Eintritts

520. 1922. Kerékjártó, B. v., Dr., Prof. a. d. U., Szeged (*Ungarn*), Dugonics tér 13.

1892. Kerschensteiner, G., Dr., Prof. a. d. U., München, Möhlstr. 39.
Georg Michael K., geb. 29. 7. 1854 München, 1883 prom. München, seit Oktober 1918 Prof. h. c. a. d. U. München.

1919. Kerst, B., St. am Realgymnasium, Zwickau, Moltkestr. 11.
Bruno K., geb. 1883 Colditz i. Sa.

1920. Kienast, A., Dr., Prdzt. a. d. Eidgen. T. H., Küsnacht bei Zürich.
Alfred K., geb. 1879 Horgen, 1906 prom. Zürich, 1909 hab. a. d. E. T. H. Zürich.

1891. Kiepert, L., Dr., *G. R.-R.*, Prof. a. d. T. H., Hannover, Herrenhäuser Kirchweg 20.
Ludwig K., geb. 6. 10. 1846 Breslau, 16. 11. 1870 prom. Berlin, 1871 hab. Freiburg i. B., 1872 a.o. Prof. Freiburg i. B., 1877 o. ö. Prof. Darmstadt, 1879 o. ö. Prof. Hannover.

1900. Killermann, A., Dr., Konrektor des Gymnasiums, Schweinfurt.
Anton K., geb. 30. 1. 1870, 1899 prom. München.

1906. Kiseljak, M., Dr., Prof. und Vorstand des Instituts für angewandte Mathematik a. d. T. H. Zagreb (*SHS*), Gajeva ulica 53.
Marius K., geb. 21. 9. 1882 Fiume, 1905 prom. Wien, seit 1910 in obiger Stellung.

1893. Kleiber, J., Prof. a. d. städt. Handelsschule, München, Thierschstr. 21.
Johann K., geb. 15. 4. 1865 München, seit 1910 in obiger Stellung.

1920. Klein, F., Dr., St.-Ass., Barmen, Viktorstr. 35.
Fritz K., geb. 18. 2. 1892 Barmen, 18. 5. 1925 prom. Jena.

1927. Kline, J. R., Ass. Prof. a. d. U. Bennet-Hall, U. of Pennsylvania, Philadelphia (Pa.) (*U. S. A.*).
J. R. Kl., geb. 1. 12. 1891 Quakertown (Pa.) (*U. S. A.*), 1916 prom. Philadelphia, seit 1920 in obiger Stellung.

530. 1923. Kloosterman, H. D., Dr., Ass. am Math. Sem. d. U. Münster i. W.
Hendrik Douwe K., geb. 1900 Rottevalle (*Niederlande*), 1924 prom. Leiden.

1897. Klug, L., Dr., Prof. im Ruhestand, Budapest, Kertész ut. 38.
Leopold K., geb. 1854 Gyöngyös, 1881 prom. Budapest, 1891 hab. Budapest, 1900 o. ö. Prof. Kolozsvár.

1922. Knebel, H., Lehrer, Dresden-Leubnitz-Neuostra, Brunnenstr. 2.

1892. Kneser, A., Dr., *G. R.-R.*, Prof. a. d. U., Breslau XVI, Hohenlohestr. 11.
Adolf K., geb. 19. 3. 1862 Grüssow (Mecklenburg), 1884 prom. Berlin, 1884 hab. Marburg, 1886 Breslau, 1889 a.o. Prof. Dorpat, 1890 o. Prof. Dorpat, 1900 Prof. a. d. Bergakademie Berlin, 1905 o. Prof. Breslau.

1921. Kneser, H., Dr., Prof. a. d. U., Greifswald, St. Georgsfeld 44.
Hellmuth K., geb. 1898 Dorpat, 1921 prom. Göttingen, 1922 hab. Göttingen, 1925 o. ö. Prof. Greifswald.

1923. Kniebes, W., Dr., St., Saarbrücken 1, Zum Triller 9.
Walter K., geb. 16. 4. 1898 Dudweiler, 1921 prom. Bonn.

1900. Knoblauch, E., Dr., Prof., Berlin W 30, Motzstr. 71.
Emil K., geb. 2. 12. 1864 Groß-Karnitten, 1888 prom. Königsberg, 1895 hab. Gießen, 1900 Oberlehrer, 1920 St., seit 1921 im Ruhestande.

1923. Knoll, Franz, Dr., Ass. a. d. T. H., Wien VI, Webgasse 28.
Franz K., geb. 2. 5. 1895 Eisenstatt, 23. 5. 1919 prom. Wien.

1907. Knopp, K., Dr., Prof. a. d. U., Tübingen, Neckarhalde 55.
Konrad K., geb. 22. 7. 1882 Berlin, 1907 prom. Berlin, 1911 hab. Berlin, 1915 a.o. Prof. Berlin, 1919 o. ö. Prof. Königsberg, 1926 Tübingen.

1922. Kober, H., Dr., St., Breslau, Opitzstr. 68.

540. 1906. Koebe, P., Dr., Prof. a. d. U., Leipzig S 3, Fockestr. 9.
Paul K., geb. 15. 2. 1882 Luckenwalde, 1905 prom. Berlin, 1907 hab. Göttingen, 1910 a. o. Prof. Leipzig, 1914 o. ö. Prof. Jena, 1926 Leipzig.

1924. Köbele, G. A., Prof., St. am RG. und OR., Heilbronn a. N., Oststr. 120.
Gustav Adolf K., geb. 8. 1. 1880.

Jahr des Eintritts

1898. **Koch**, K., Ober-St. a. d. Oberrealschule Rosenheim, Enzensperger Str. 9.
Karl K., geb. 4. 2. 1873 Ebersberg (Bayern).

1891. **Koehler**, C., Dr., *G. H-R.*, Prof. a. d. U., Heidelberg, Treitschkestr. 3.
Carl K., geb. 1855 Mannheim, 1879 prom. Heidelberg, 1882 hab. Heidelberg, 1888 a.o. Prof. Heidelberg, 1914 o. Honorarprof. Heidelberg.

1900. **Kollros**, L., Dr., Prof. a. d. Eidg. T. H., Zürich, Stolzestr. 14.
Louis K., geb. 7. 5. 1878 La Chaux-de-Fonds, 1904 prom. Zürich, 1901/09 Prof. am Gymn. und a. d. Ecole d'Horlogerie, 1907/09 Doz. a. d. U. Neuchâtel.

1911. **Kommerell**, K., Dr., Prof. a. d. U., Tübingen, Neckarhalde 52.
Karl K., geb. 19. 8. 1871 Achern, 1897 prom. Tübingen, 1911 hab. Stuttgart, 1922 a.o. Prof. Tübingen, 1925 o. ö. Prof. Tübingen.

1922. **König**, D., Dr., Doz. a. d. T. H., Budapest I, Horthy Miklós ut. 35.
Dénes K., geb. 1884 Budapest, 1907 prom. Budapest, 1911 hab. Budapest, seit 1912 Doz. a. d. T. H. Budapest.

1921. **König**, H., Dr., Prof. a. d. Bergakademie, Clausthal, Zellbach 61.
Hermann K., geb. 25. 10. 1892 Berlin, 1919 prom. Göttingen, 1920 hab. Göttingen, 1922 o. ö. Prof. Clausthal.

1907. **König**, R., Dr., Prof. a. d. U., Jena, Reichardstieg 5.
Robert K., geb. 11. 4. 1885 Linz (*Ob.-Österreich*). prom. 1907 Göttingen, 1911 hab. Leipzig, 1914 a.o. Prof. Tübingen, 1922 o. ö. Prof. Münster i. W., 1927 Jena.

1918. **Koenigsberger**, J., Dr., Prof. a. d. U., Freiburg i. B., Günthersthalstr. 47.
Johann K., geb. 7. 5. 1874 Heidelberg, 1897 prom. Berlin, 1900 hab. Freiburg, 1904 a.o. Prof. Freiburg.

550. 1891. **Köpcke**, A., Dr., Prof., Altona, Bülowstr. 2.
Alfred K., geb. 22. 2. 1852 Hamburg, 24. 2. 1875 prom. Heidelberg, Studienrat a. D.

1922. **Kopečný**, J., Prokurist d. Slov. Vers.-Ges. Bratislava, Palaský Promenade 11.
Josef K., geb. 1877 in Trnava.

1907. **Korn**, A., Dr., Prof. a. d. T. H., Berlin-Charlottenburg, Schlüterstr. 25.
Arthur K., geb. 1870 Breslau, 1890 prom. Leipzig, 1895 hab. München, 1903 a.o. Prof. München, 1913 o. Honorarprofessor Berlin (T. H.).

1923. **Körner**, K., Dr., Prof., Prag III, Novodvorska I.
Kamillo K., geb. 1868 Linz a. D., 1905 o. ö. Prof. a. d. Deutschen T. H. Prag.

1916. **Körner**, K., Dr., Direktor der Deutschen Schule, Swakopmund (*Südafrika*).
Karl K., geb. 12. 12. 1885 Velpke, 1912 prom. Göttingen.

1901. **Korselt**, A., Dr., Prof., Ob.-St. a. D., Plauen i. V., Jahnstr. 25.
Alvin K., geb. 17. 3. 1864 Mittelherwigsdorf, 1902 prom. Leipzig.

1920. **Koschmieder**, L., Dr., Prof. a. d. Deutschen T. H., Brünn (*Tschechoslowakei*), Landwirtschaftsgasse 36.
Lothar K., geb. 1890 Liegnitz, 1913 prom. Breslau, 1919 hab. Breslau, 1924 nichtbeamteter a.o. Prof. Breslau, 1927 o. ö. Prof. Brünn (Deutsche T. H.).

1923. **Kostitzin**, V., Dr., Prof. a. d. I. U., Vize-Direktor d. Staatl. geophysik. Inst., Moskau (*Rußland*) Telegraphny Pereulok 9, Wohn. 4.
Vladimir K., geb. 28. 5. 1883 Efremoff (*Rußland*), 1912 prom. Paris, 1919 hab. Moskau, 1922 o. ö. Prof. Moskau.

1902. **Köstlin**, E., Dr., St. am Reformrealgymnasium Stuttgart.
Eberhard K., geb. 11. 9. 1877 Langenbeutingen, 1907 prom. Tübingen, seit 1911 in obiger Stellung.

1922. **Kottler**, Fr., Dr., Prof. a. d. U., Wien III, Streichergasse 4.
Friedrich K., geb. 1886 Wien, 1912 prom. Wien, 1916 hab. Wien, 1921 a.o. Prof. Wien.

560. 1899. **Kowalewski**, G., Dr., Prof. a. d. T. H., Dresden-A., Kaitzerstr. 80.
Gerhard K., geb. 27. 3. 1876 Järshagen, 1898 prom. Leipzig, 1899 hab. Leipzig, 1901 a.o. Prof. Greifswald, 1904 a.o. Prof. Bonn, 1909 o. ö. Prof. Prag (D. T. H.), 1912 Prag (D. U.), 1920 Dresden.

1928. **Kowallik**, U., cand. math., Breslau 23, Kantstr. 7.
Ulrich K. geb. 23. 2. 1904 Thierberg.

Jahr des Eintritts

1922. **Krafft**, M., Dr., Prof. a. d. U., Marburg a. d. Lahn.
Maximilian K., geb. 3. 11. 1889 Pyrbaum i. Oberpf., 1914 prom. Marburg, 1923 hab. Münster i. W., 1927 n. b. a.o. Prof. Marburg.

1925. **Kraft**, A., St.-Dir. d. Ref.-Realgymn. mit Oberrealschule Vacha (Rhön).
Artur K., geb. 3. 6. 1891 Greußen (Thür.), 1922 St. Gotha, 1925 St.-Dir. Vacha.

1904. **Kragh**, O. C., Dr., Adjunkt an der Kathedralschule, Nyköbing F. (*Dänemark*).
Oluf Christian K., geb. Hals, 1902 prom. und hab. Kopenhagen.

1925. **Krämer**, E., St.-Ref., Halle a. d. S., Hohenzollernstr. 2.

1924. **Krames**, J. L., Dr., Prdzt., Ass. a. d. T. H., Wien V, Gürtel 16.
Josef Leopold K.

1927. **Krause**, M., St.-Ass. am Lyzeum I, Charlottenburg, Grolmanstr. 59.
Marta Kr., geb. 14. 11. 1890 Gumbinnen, 1914 St. Danzig, 1919/25 Privatlyzeum Charlottenburg, seit 1925 in obiger Stellung.

1926. **Krauss**, Fr., Prdzt. a. d. T. H., Aachen, Weberstr. 39.
Franz Kr., geb. 22. 1. 1889 Köln, 1921 prom. Bonn, 1924 hab. Aachen.

1926. **Krawtschouk**, M., Dr., Prof. a. d. polytechn. H., Kiew (*Ukraine*).
Michael Kr., geb. 29. 9. 1892 Tschownytzja (*Wolhynien*), 1924 prom. Kiew, seit 1926 in obiger Stellung.

570. 1921. **Krichler**, O., St. a. d. Staatl. Oberrealschule, Suhl, Sandstr. 14.

1923. **Kröner**, Fr., Dr., Immermanzing (*Niederösterreich*).

1921. **Krull**, W., Dr., Prof. a. d. U., Freiburg, Katharinenstr. 26.
Wolfgang K., geb. 26 8. 1899 Baden-Baden, 1921 prom. Freiburg i. B., 1922 hab. Freiburg i. B., 1926 n. b. a.o. Prof. Freiburg i. B.

1911. **Kruppa**, E., Dr., Prof. a. d. T. H., Wien III, Klimschg. 4.
Erwin K., geb. 1885 Biala, 1911 prom. Graz und hab. Czernowitz, 1918 Prdzt. Graz (T. H.), 1922 a.o. Prof., 1924 o. Prof. Wien (T. H.).

1913. **Kryschanowsky**, D., Odessa, Otradnastr. 12.
Dmitri K., geb. 7. 11. 1883, 1913 Prdzt. Odessa, 1917 Dzt. Odessa, wirkl. Mitglied d. Forschungsinst. für Mathem. Odessa.

1924. **Kubota**, T., Prof. am College of Science, Tôhoku Imperial University, Sendai, (*Japan*).
Tadahiko K., geb. 27. 2. 1885 Tokio, 1908 prom. Tokio, 1910 Prof. a. d. 1. Hochschule Tokio, 1911 a.o. Prof. Sendai, seit 1915 in obiger Stellung.

1900. **Kučera**, O., Dr., Prof., Zagreb (*Kroatien*), Jurjevska ulica 14
Otto K., geb. 1. 1. 1857 Petrinja, 1876—1892 Gymn.-Prof., 1892—1899 Realschulprof., 1899—1916 a. o. Prof. Forstakademie Zagreb, 1903 Gründer d. Sternwarte, Leiter derselben bis 1913, von 1916—1920 im Ruhestand, 1920 reaktiviert, 1921—1925 Leiter der Sternwarte, 1. 1. 1925 pensioniert.

1924. **Kumm**, E., Dr., Gera, Bismarckstr. 26 I.
Elisabeth K., geb. 12. 5. 1892 Marienburg, 1922 prom. Halle.

1923. **Künneth**, H., Dr., St., Erlangen, Östl. Stadtmauerstr. 7.
Hermann K., geb. 1892 Neustadt a. d. H, 1922 prom. Erlangen.

1928. **Kunugi**, K., Dr., Prof. a. d. Tokyo Koto Gakko, Tokyo (*Japan*), Tokyo Koto Gakko.
Kinjirô K., geb. 20. 2. 1903 Kôfu, 1926 prom. Tokyo, 1927 Prof. Tokyo Koto Gakko.

580. 1893. **Kürschák**, J., Dr., Prof. a. d. T. H., Budapest II (*Ungarn*), Hunyadi János-út. 14.
Josef K., geb. 1864 Budapest, 1890 prom. Budapest, 1891 hab. Budapest, 1900 a.o. Prof. Budapest.

1928. **Küstermann**, W. W., San Diego (Calif.), *U. S. A.*, P. O. Box 788.
Walter W. K., geb. 10. 7. 1888 Green Bay, Wis. (U. S. A.), 1913 prom. München, 1914/18 Instructor a. d. Staatsuniversität Michigan, seither krankheitshalber nicht aktiv.

1892. **Kullrich**, E., Dr., Oberst.-Dir. d. Realgymnasiums, Tempelhof b. Berlin, Kaiserin-Augusta-Str. 20.
Ernst K., geb. 2. 11. 1863 Berlin, 1. 8. 1891 prom. Halle a. S.

Jahr des Eintritts

1923. Kupke, G., Lehrer, Greiffenberg i. Schles.
Gerhard K., geb. 21. 2. 1893 Lauban.

1922. Kuslik, I., Ministerialsekretär, Bratislava (Preßburg), Stefanikgasse 15.

1895. Kutta, W., Dr., Prof. a. d. T. H., Stuttgart, Römerstr. 138.
Wilhelm K., geb. 3. 11. 1867 Pitschen i. Schlesien, 1901 prom. München, 1902 hab. München (T. H.), 1909/10 a.o. Prof. Jena, 1910 o. Prof. Aachen, seit 1911 Stuttgart.

1908. Kuwaki, A., Dr., Kushu, Kaiserliche Univ., Fukuoka (*Japan*).

1914. Lagally, M., Dr., Prof. a. d. T. H., Dresden, Thielaustr. 9.
Max L., geb. 7. 1. 1881 Neuburg a. Donau, 1904 prom. München, 1913 hab. München (T. H.), 1920 o. ö. Prof. Dresden (T. H.).

1905. Lalive, A., Prof. a. d. Uhrmachersch. u. am Gymnasium, La Chaux-de-Fonds.
August L., geb. 17. 1. 1878 Freiburg (*Schweiz*), seit 1900 in obiger Stellung.

1920. Lampe, E., St.-Dir. a. d. Aufbau-Oberrealschule, Elsterwerda.
Ernst L., geb. 21. 6. 1886 Berlin.

590. 1899. Landau, E., Dr., Prof. a. d. U., Göttingen, Herzberger Landstr. 48.
Edmund L., geb. 14. 2. 1877 Berlin, 1899 prom. Berlin, 1901 hab. Berlin (U.), 1909 o. ö. Prof. Göttingen.

1921. Lange, Fr., Dr., Mitarbeiter der Telefunken, Kiel, Eichendorffstr. 24.
Friedrich L., geb. 16. 4. 1893 Straßburg i. Els., 1. 3. 1921 prom. Jena.

1926. Lange, W., Dr., St. am Wettiner Gymnasium, Dresden-A., Dürerstr. 15.
Werner L., geb. 2. 10. 1898 Dresden, 1921 Staatsprüfung, 1923 Dr. der T. H. Dresden.

1907. Langenkamp, O., Dr., St., Rheine (Westf.), Gasstr. 12.
Otto L., geb. 13. 5. 1883 Waltrap, 6. 12. 1906 prom. Münster.

1921. Langer, W., Dr., St., Leipzig N 23, Warburgstr. 12.
Willy L., geb. 19. 10. 1897 Dresden, prom. Dr. phil. Leipzig.

1902. Laubert, K., St., Prof. a. d. Realschule, Cassel, Parkstr. 37.
Konrad L., geb. 24. 10. 1873 Perleberg.

1927. Lauffer, R., Dr., Graz, Morellenfeldgasse 10.

1897. Leitzmann, H., Dr., *G. R.-R.*, Dir. im Reichsaufsichtsamt für Privatversicherung, Berlin-Lichterfelde W, Sternstraße 22a.
Hermann L., geb. 1860 Magdeburg, 1885 prom. Berlin.

1921. Lense, J., Dr., Prof. a. d. T. H., München, Rottmannstr. 13/1 S. H.
Josef L., geb. 1890 Wien, 1914 prom. Wien, 1921 hab. Wien, 1927 Prof. München (T. H.).

1922. Lettenmeyer, Fr., Dr., Prdzt. u. Ass. am Math. Sem. d. U., München, Math. Sem. d. U.
Fritz L., geb. 7. 9. 1891 Würzburg, 1918 prom. München, 1927 hab. München.

600. 1912. Letz, E., Dr., St. a. d. Oberrealschule, Halle a. d. S., Kohlschütterstr. 1.
Eduard L., geb. 12. 7. 1888 Könnern, 1911 prom. Halle.

1921. Leumann, H., St. am Realgymnasium, Kassel, Mauerstr. 16.
Harl L., geb. 14. 9. 1888.

1910. Levi, B., Dr., Prof. a. d. U., Parma (*Italien*), R. Università.
Beppo L., geb. 1875 Turin (*Italien*), 1896 prom. Turin, 1906 a.o. Prof. Cagliari, 1910 o. Prof. Cagliari, 1910 o. Prof. Parma.

1919. Levi, F., Prof. a. d. U. Leipzig, Oetzsch bei Leipzig, Waldstr. 7.
Friedrich L., geb. 6. 2. 1888 Mühlhausen i. E., 30. 10. 1911 prom. Straßburg, März 1919 hab. Leipzig, seit 1. 11. 1923 nicht planmäßiger a.o. Prof. Leipzig.

1898. Levi-Civita, T., Dr., Prof. a. d. U., Rom (*Italien*), Via Sardegna 50.
Tullio L.-C., geb. 29. 3. 1873 Padua, 1894 prom. Padua, 1897 hab. Pavia, 1898 a.o. Prof. Padua, 1902 o. ö. Prof. Padua, 1919 Rom.

1909. Lewickyi, W., Dr., Prof., Lemberg, Teatynska 3.
Wladimir L., geb. 31. 12. 1872 Tarnopol, 1901 prom. Lemberg, 1896/1903 Prof. Tarnopol, seit 1903 Prof. am 5. Staatsobergymn. Lemberg.

Jahr des Eintritts

1909. **Lichtenstein**, L., Dr., Prof. a. d. U., Leipzig, Großgörschenstr. 3.
Leon L., geb. 16. 5. 1878 Warschau, 1907 prom. Berlin (T. H.) und 1909 Berlin (U.), 1910 hab. Berlin, 1919 Honorarprof. Berlin, 1920 o. ö. Prof. Münster i. W., 1921 Leipzig.

1897. **Liebmann**, H., Dr., Prof. a. d. U., Heidelberg, Hohe Gasse 8.
Heinrich L., geb. 22. 10. 1874 Straßburg, 1895 prom. Jena, 1899 hab. Leipzig, 1905 a.o. Prof. Leipzig, von 1910/20 München (T. H.), seit 1920 o. ö. Prof. a. d. U. Heidelberg.

1908. **Lietzmann**, W., Dr., Oberstudiendirektor der Oberrealschule, Göttingen, Calsowstr. 18.
Walter L., geb. 7. 8. 1880 Drossen, 1904 prom. Göttingen, 1906 Oberlehrer Barmen, 1914 Oberrealschuldirektor, seit 1919 Lehrauftrag a. d. U. Göttingen.

1896. **Lilienthal**, R. v., Dr., *G. R.-R.*, Prof. a. d. U., Münster i. W., Rudolfstr. 16.
Reinhold v. L., geb. 25. 6. 1857 Berlin, 1882 prom. Berlin, 1883 hab. Bonn, 1891 a.o. Prof. Münster i. W., 1902 o. ö. Prof. Münster i. W.

610. 1900. **Lindelöf**, E., Dr., Prof. a. d. U., Helsingfors, Sandvikskajen 15.
Ernst L., geb. 18. 3. 1870 Helsingfors, 1893 prom. Helsingfors, 1895 hab. Helsingfors, 1902 Adjunkt Helsingfors, 1903 o. ö. Prof. Helsingfors.

1893. **Lindemann**, F., Dr., Dr. rer. pol. h. c., L. L. D., *G. R.*, Prof. a. d. U., München, Kolberger Str. 11.
Ferdinand L., geb. 12. 4. 1852 Hannover, Aug. 1873 prom. Erlangen, Mai 1877 hab. Würzburg, Okt. 1877 a.o. Prof. Freiburg i. B., Okt. 1879 o. ö. Prof. Freiburg i. B. und Okt. 1883 Königsberg i. Pr., seit Okt. 1893 o. ö. Prof. a. d. U. München.

1923. **Lindenmaier**, R., Studiendirektor, Sondershausen, Kyffhäuserstr. 11.
Reinhold L., geb. 24. 5. 1884 Stuttgart, 1910 Studienrat Sondershausen, seit 1917 St.-Dir. Sondershausen.

1923. **Lindow**, M., Dr., St., Prdzt. a. d. U., Münster i. W., Melcherstr. 11.
Martin L., geb. 26. 9. 1880 Zachan, 6. 11. 1902 prom. Halle a. S., 18. 11. 1922 hab. Münster i. W.

1898. **Linsenbarth**, H., Dr., St., Prof., Berlin N, Lothringer Str. 76.
Hermann L., geb. 22. 9. 1859 Berlin, 1884 prom. Halle, Studienrat a. D.

1924. **Littlewood**, J. E., Cambridge (*England*), Trinity College.

1927. **Löbell**, F., St.-Ass., Cannstatt a. N., Königstr. 83.
Frank L., geb. 11. 5. 1893 Tandjong-Morawa (*Sumatra*), 1926 prom. Tübingen.

1911. **Löffler**, E., Dr., Ministerialrat, Stuttgart, Seestr. 97.
Eugen L., geb. 24. 3. 1883 Tübingen, 1907 prom. Tübingen, 1907 Oberreallehrer Ulm (Gymn.), 1911 Prof. Hall (Oberrealsch.), 1918 Regierungsrat in der Min.-Abtlg. f. d. höh. Schulen Stuttgart, seit 1925 Ministerialrat im Württ. Kultusministerium.

1910. **Loehrl**, A., Dr., St.-Prof., Bayreuth, Leopoldstr. 18.
August L., geb. 30. 8. 1881 Wassertrüdingen (Mittelfr.), 1909 prom. München, seit 1920 St.-Prof. Bayreuth.

1920. **Loewenherz**, A., Dr., Dir. des Hebr. Gymnasiums, Mariampol (*Litauen*).
Arthur L., geb. 2. 5. 1890 Luckau (Brandenburg), 1911 prom. Königsberg.

620. 1921. **Loewner**, K., Dr., Prdzt. a. d. U. Köln a. Rh. Math. Sem. d. U.,
Karl L., geb. 29. 5. 1893 Laua (*Böhmen*), 1917 prom. Prag, 1922 hab. Berlin, 1928 umhab. Köln.

1897. **Loewy**, A., Dr., Prof. a. d. U., Freiburg i. B., Thurnseestr. 20.
Alfred L., geb. 20. 6. 1873 Rawitsch (Prov. Posen), 1894 prom. München, 1897 hab. Freiburg i. B., 1902 a.o. Prof. Freiburg i. B., 1919 o. ö. Prof. Freiburg i. B.

1924. **London**, F., Dr., Berlin-Charlottenburg, Schlüterstr. 5.
Fritz L., geb. 7. 3. 1900 Breslau, 1921 prom. München, 1928 hab. Berlin. U.

1923. **Looman**, H., Dr., Utrecht (*Holland*), Mauritsstraat 42.

1925. **Loor**, B. de, Dr., Lektor a. d. U., Transvaal University College, Pretoria (*Südafrika*).
Barend de L., geb. 20. 9. 1900 Kampen (*Holland*), 1925 prom. Amsterdam, seitdem Lektor a. d. T. U. C.

Jahr des Eintritts

1898. Lorenz, H., Dr., *G. R.-R.*, Prof. a. d. T. H., Danzig-Langfuhr, Johannisberg 7.
Hans L., geb. 25. 3. 1865 Wilsdruff, 1894 prom. München, 1890/96 Ingenieur, 1896/1900 a.o. Prof. Halle, 1900/04 Göttingen, seit 1904 o. Prof. Danzig.

1927. Lorenz, P., Dr., wiss. Hilfsarbeiter am Institut f. Konjunkturforschung, Berlin W 57, Culmstr. 3.
Paul L., geb. 8. 3. 1887 Leipzig, 1914 prom. Freiburg.

1896. Lorey, W., Dr., Prof., Oberstudiendirektor der öffentl. Handelslehranstalt, Doz. am Institut f. Versicherungswissenschaft d. U., Leipzig S 3, Fockestr. 7.
Wilhelm L., geb. 23. 1. 1873 Frankfurt a. M., 1901 prom. Halle, 1896/1912 Gymn., Realgymn., Oberrealschule Leer, Quakenbrück, Remscheid, Görlitz, Minden i. W., 1920 Dzt. Leipzig.

1896. Loria, G., Dr., Prof. a. d. U., Genua (*Italien*), Piazza Manin 41.
Gino L., geb. 19. 5. 1862 Mantua, 1. 7. 1883 prom. Turin, 1885 hab. Turin, 1885 Prdzt. Turin, 1884/86 Ass. Turin, 1886 a.o. Prof. Genua, 1891 o. ö. Prof. Genua.

1927. Lösch, Fr., Ass. a. d. T. H., Stuttgart, Ehrenhalde 3.
Friedrich L., geb. 10. 12. 1903 Geislingen a. d. St.

630. 1928. Lotz, I., Dipl.-Ing., Ass. a. d. T. H., Hannover, Butersworthstr. 22.
Irmgard L., geb. 16. 7. 1903 Hameln, 1927 Dipl.-Ing. Hannover.

1927. Lubben, R. G., Dr., Francitas, Texas (*U. S. A.*).
R. G. L., geb. 7. 3. 1898 Gresham, Nebraska (*U. S. A.*), 1921 B A. U. of Texas, 1925 Ph. D. U. of Texas, 1924/25 Instr. U. of Texas.

1921. Luckey, P., St., Marburg a. L., Barfüßertor 10.
Paul L., geb. 26. 12. 1884 Elberfeld.

1912. Lüders, O., Dr., St., Halle a. d. S., Königstr. 13.

1921. Ludloff, H., Dr., Frankfurt a. M., Schumannstr. 11.

1899. Ludwig, W., Dr., Prof. a. d. T. H., Dresden-A., Kaitzerstr. 21.
Walter L., geb. 10. 6. 1876 Breslau, 1898 prom. Breslau, 1904 hab. Karlsruhe i. B., 1907 o. ö. Prof. Braunschweig, 1909 o. ö. Prof. Dresden.

1921. Lummer, Fr., Dr., Gera (Reuß), Eisenbahnstr. 3.

1908. Lütkemeyer, G., Dr., Oberlehrer, Essen (Ruhr), Hedwigstr. 19.
Georg L., geb. 27. 3. 1878 Wiedenbrück, 1902 prom. Göttingen, seit 1907 in ob. Stellung.

1914. Machan, K., Ingenieur, Oberbaurat, Generaldirektion der Österreichischen Bundesbahnen Wien II, 1 (*Österreich*), Ausstellungsstr. 49.
Karl M., geb. 1. 5. 1880 Kindberg, 1904 II. Staatsprüfung Graz.

1917. Mack, K., Prof. a. d. D. T. H., Prag VII, Letvhads Ra 1212.
Karl M., geb. 11. 5. 1882 Wien, Juli 1916 a.o. Prof. Prag, 1920 o. ö. Prof. Prag.

640. 1928. Mader, K., Dr., Wien IV, Karlsplatz 13, Techn. Hochsch., Observatorium VIII, Friedrich-Schmidt-Platz 3.

1910. Mahlo, P., Dr., St.-Ass., Recklinghausen, Schützenstr. 4.

1922. Mahrenholz, J., St., Cottbus, Lessingstr. 5.
Johannes M., geb. 12. 7. 1881.

1903. Maillet, E., Répétiteur à l'École polyt., Bourg-la-Reine (Seine) (*Frankreich*), Rue de Fontenay 11.

1923. Majo, Mosco de, Wien III, Traungasse 2.

1917. Malsch, F., Dr., St. a. d. Klinger-Oberrealschule, Frankfurt a. M.-Ginnheim, Fuchshohl 34.
Fritz M., geb. 21. 11. 1890 Gotha, 17. 6. 1922 prom. Köln, 1910/14 stud. Bonn, 1916/18 Topograph, 1918 O.-Realschule Bielefeld, 1919 O.-Realschule Hamm i. W. und Weidenau-Sieg.

1898. Marcuse, A., Dr., Prof. a. d. U. Berlin, Charlottenburg 4, Dahlmannstr. 12.
Adolf M., geb. 17. 11. 1860 Magdeburg, 1884 prom., 1897 hab. Berlin.

Jahr des Eintritts

1927. **Marczewsky**, M., Prof. am Institut f. Volksbildung, Charkow (*Ukraine*), Mironossitskaja 90.

M. M., geb. 7. 10. 1884 Charkow, 1917 hab., 1923 Prof. am Inst. f. Volksbildung, Mitglied d. wiss. Katheders f. math. Analyse.

1921. **Marković**, Ž., Dr., Prof. a. d. T. H., Zagreb, Visoka ul. 16.

Željko M, geb. 20. 2. 1889 Požega (*Jugoslaw.*), 29. 3. 1915 prom. Zagreb, 5. 8. 1918 hab. Zagreb, 19. 3. 1920 a.o. Prof. Zagreb, 8. 7. 1921 o. ö. Prof. Zagreb.

1897. **Marxsen**, S., Dr., St., Schleswig, Lollfuß 79.

Sophus M., geb. 5. 4. 1877 Pinneberg, 1900 prom. Göttingen, seit 1904 in ob. Stellung.

650. 1902. **Mason**, M., Dr., Prof., President Chicago University (*U. S. A.*).

Max M., geb. 26. 10. 1877 Madison, 1903/04 Instr. am Mass. Inst. of Techn., 1904/05 Instr., 1905/08 Asst. Prof. a. d. Yale U., 1908/25 U. of Wisc., seit 1925 President U. of Chicago.

1926. **Masui**, M., Prof. a. d. 7. Kotogakko, Kagoshima (*Japan*).

Masuo M., geb. 23. 12. 1902 Tokio.

1924. **Mayer**, W., Dr., Wien I, Habsburgergasse 2.

1913. **Mayr**, K., Dr., Prof. a. d. T. H., Graz, Villengasse 5.

Karl M., geb. 1889 Bozen, 1910 prom. Wien, 1921 hab. Wien, 1923 a.o. Prof. Brünn, 1924 o. ö. Prof. Graz.

1924. **Mayrhofer**, K., Dr., Ass. a. d. T. H., Wien, Karlsplatz 13 (Phys. Laborat.).

Karl M., geb. 24. 3. 1899 Kastbruth, 12. 6. 1922 prom. Innsbruck.

1923. **Meder**, A., Prof. a. d. U., Riga, Schulenstr. 19, W. 3.

Alfred M., geb. 1873 Riga, 1899 Dozent Riga, 1914 a.o. Prof. Riga, 1919 Prof. Riga.

1899. **Mehling**, A., Dr., Prof., Nürnberg, Ludwig-Feuerbach-Str. 31.

Alwin M., geb. 6. 3 1873 Kleinbrach, 1898 prom. Würzburg.

1904. **Mehliß**, O., Dr., St., Eberswalde, Schützenstraße.

Otto M., geb. 25. 4. 1876 Eisleben, 1902 prom. Halle, seit 1905 Oberlehrer.

1891. **Mehmke**, R., Dr., Prof., Stuttgart-Degerloch, Löwenstr. 102.

Rudolf M., geb. 28. 8. 1857 Lauterberg i. Harz, 1880 prom. Tübingen, 1880 hab. Stuttgart, 1884 o. ö. Prof. Darmstadt, 1894 o. ö. Prof. Stuttgart, 1. 10. 1922 emeritiert.

1920. **Melan**, E., Dr., Prof. a. d. T. H., Wien IV, Karlsplatz 13.

660. 1927. **Melotte**, H., Dr., St.-Ass., Leipzig N 22, Menckestr. 25 IIr.

Henri M., geb. 5. 2. 1901 Bad Elster, 1925 prom. Leipzig, seit 1923 St.-Ass.

1924. **Menger**, K., Dr., Prof. a. d. U., Wien IX, Fuchsthallergasse 2.

Karl M., geb. 13. 1. 1902 Wien, 1924 prom. Wien, 1925 Doz. Amsterdam, 1927 a.o. Prof. Wien (U.).

1904. **Merrill**, Miss H. A., Wellesley College, Wellesley Mass. (*U. S. A.*).

1897. **Metzler**, W. H., Prof. a. d. U., State College for Teachers, Albany, N. Y.

William H. M., geb. 18. 9. 1863 Odessa (Ontario), 1892 Ph. D. Clark.

1900. **Mewes**, H., St., Gymnasialprof., Wismar, Mecklenburger Str. 4.

Hermann M., geb. 19. 7. 1860, 1. 4. 1885 Oberlehrer Teterow.

1898. **Meyer**, E., Dr., *G. R.-R.*, Prof. a. d. T. H., Charlottenburg, Neue Kantstr. 15.

Eugen M., geb. 14. 5. 1868 Stuttgart-Berg, 1891 prom. Göttingen, 1893 hab. Zürich (T. H.), 1896 Dozent Hannover, 1898 a.o. Prof. Göttingen, 1900 o. Prof. Berlin (T. H.).

1891. **Meyer**, F., Dr., *G. R.-R.*, Prof., Königsberg i. Pr., Maraunenhof, Hoverbeckstr. 13.

Franz M., geb. 2. 9. 1856 Magdeburg, 1878 prom. München, 1880 hab. Tübingen, 1887 a.o. Prof. Tübingen, 1888/97 o. Prof. Clausthal, 1897 Königsberg, 1924 emeritiert.

1922. **Meyer**, H., St., Weidenau/Sieg, Wilhelmstr. 75.

Hermann M., geb. 13. 2. 1897 Saarbrücken, 1921 Staatsexamen Bonn, seit 1921 im Lehrfach im Saargebiet.

1925. **Meyer**, J., Dr., Ass. a. d. Landw. H. Bonn, Köln-Ehrenfeld, Försterstr. 24.

Joseph M., geb. 20. 3. 1898 Köln-Ehrenfeld, 20. 12. 1923 prom. Bonn, 8. 11. 1924 Staatsexamen, seit 1922 in obiger Stellung.

Jahr des Eintritts

1921. **Meyeringh**, L., St., Lehe (Weser), Hafenstr. 79.
Ludwig M., geb. 9. 6. 1888 Bund (Ostfriesland).

670. 1926. **Michaelis**, O., Ober-St.-Dir., Duisburg-Meiderich, Reformrealgymnasium.
Oswald M., geb. 5. 8. 1880 Torgau, 1906 Staatsexamen Bonn, 1908 St. Duisburg, seit Mai 1926 in obiger Stellung.

1914. **Michnik**, H., Prof., St. a. W., Beuthen O.-S., Parkstr. 5.
Hugo M., geb. 26. 4. 1864 Slawentzitz (Ob.-Schles.), 1893/95 Ass. a. d. U.-Sternwarte Breslau.

1924. **Michel**, P., Dr., Prof. a. d. U., Belgrad (*Jugosl.*), 26. Kosančicév venac.
Petrovich M., geb. 1868 Belgrad, 1894 prom. Paris, 1894 hab. Belgrad, 1894 o. ö. Prof. Belgrad.

1918. **Mie**, G., Dr., Prof., *G. R.-R.*, Freiburg i. Br., Jägerhäusleweg 4.
Gustav M, geb. 1868 Rostock i. M., 1892 prom. Heidelberg, 1897 hab. Karlsruhe, 1902 a.o. Prof. Greifswald, 1905 o. ö. Prof. Greifswald, 1917 o. ö. Prof. Halle, 1924 o. ö. Prof. Freiburg i. Br.

1925. **Mierzinsky**, C., Verlagsbuchhändler, Inhaber der Helwingschen Verlagsbuchhandlung, Hannover, Emilienstr. 10.

1903. **Mikami**, Y., Dr., Tokio (*Japan*), 29 Uyeno Saku aragicho Shitaya.
Yoshio M., geb 16. 2 1875 Kotachi.

1900. **Miller**, G. A., Prof. a. d. U., Urbana Ill. (*U. S. A.*), Illinois Str. 1103.
George Abram M., geb. 31. 7. 1863 Lynnville, 1892 prom. Cumberland, 1893 hab. Michigan, 1901/02 Asst. Prof., 1902/06 Associate Prof. Stanford, 1906/07 Associate Prof. Illinois U., seit 1907 in obiger Stellung.

1907. **Mises**, R. von, Dr., Prof. a. d. U., Berlin NW 87, Sigmundshof 9.
Richard Edler von M., geb. 19. 4. 1883 Lemberg, 1908 prom. Wien (T. H.), 1908 hab. Brünn (T. H.), 1909 a.o. Prof. Straßburg i. E., 1919 o. ö. Prof. Dresden (T. H.), seit 1920 in obiger Stellung.

1909. **Mohrmann**, H., Dr., Prof. a. d. T. H., Darmstadt, Wilhelmsstr. 8.
Hans M., geb. 24. 4. 1881 Hannover, 1907 prom. München (U.), 1910 hab. Karlsruhe, 1913 o Prof. Clausthal (Bergakademie), 1917 Karlsruhe (T. H.), 1919 Basel, 1927 Darmstadt.

1899. **Molien**, Th., Professor am Polytechnikum, Tomsk (*Sibirien*).

680. 1926. **Moll**, A., Prof. am alten Realgymnasium, München, Mozartstr. 11.
Alfred M., geb. 7. 7. 1882 München, 1908 Staatsprüfung, 1919 St., 1926 St.-Prof.

1909. **Moore**, Ch. N., Dr., Prof. a. d. U., Cincinnati Ohio (*U.S.A.*), East Third Street 1123.
Charles Napoleon M., geb. 14. 11. 1882 Cincinnati, 1908 prom. Harward, 1909 hab. 1909 Asst. Prof. Cincinnati.

1896. **Moore**, E. H., Dr., Prof. a. d. U., Chicago, Ill. (*U. S. A.*), Hotel del Prado.
Eliakim Hastings M., geb. 1862 Marietta Ohio (*U. S. A.*), 1885 prom. Ph. Dr. Yale Univ. Newhaven, 1887 hab. Yale Univ., 1889/92 Northwestern Univ. Evanston, seit 1892 Chicago.

1927. **Mordell**, L. J., Prof., Manchester (*England*), University.
L. J. M., geb. 28. 1. 1888 Philadelphia (*U. S. A.*), 1910 B. A. St. Johns College Cambridge University, 1913/20 Lecturer in Math. Birckback College, 1920/22 College of Technology Manchester, 1922/23 Reader University of Manchester, 1923 Professor of Pure Mathematics, 1924 elected of the Royal Society.

1928. **Mori**, T., Dr., Prof. a. d. Kaiserl. Marineschule in Etajima, Hiroshima-Ken.
Tatzuo M., geb. 21. 3. 1904, Nagasaki, 1926 prom. Tohoku, 1928 Prof.

1927. **Morimoto**, S., Tokio (*Japan*), Tokio Butsurigakko (Phys. Hochschule).
Seigo M., geb. 26. 1. 1900.

1928. **Mosch**, E, Dr., O.-St., Berlin W 30, Eisenacher Str. 96.
Erich M.

1926. **Mühlendyck**, O., Dr., Charlottenburg, Pestalozzistr. 87, Portal II.
Otto M., geb. 19. 12. 1878 Daaden (Rheinl.), 1911 prom. Göttingen.

1924. **Mühlig**, Fr., Dr., Ass. am Geodät. Institut, Potsdam, Geodät. Institut.
Fritz M., geb. 18. 8. 1896 Leipzig, prom. 21. 11. 1922 Leipzig.

Jahr des Eintritts

1905. **Müller, Conrad H.**, Dr., Prof. a. d. T. H., Hannover, Brahmsstr. 4.
Conrad H. M., geb. 12. 12. 1878 Bremen, 1904 prom. Göttingen, 1908 hab. Göttingen, 1910 o. ö. Prof. Hannover (T. H.).

690. 1923. **Müller, E.**, Dr., Wien XVIII, Dittesgasse 6.

1902. **Müller, Eugen**, Dr., Direktor, Bruchsal, Unteröwisheimer Str. 15.
Eugen M., geb. 6. 1. 1865 Geisingen (Baden), 5. 8. 1892 prom. Heidelberg.

1904. **Müller, Franz**, Regierungsbaurat, Augsburg, Rosenaustr. 38.
Franz M., geb. 1875 Regensburg, 1914 prom. München T. H.

1923. **Müller, Fritz**, Dr., St. a. d. Annenschule, Dresden N 6, Arndtstr. 5 II.
Fritz M., geb. 4. 12. 1894 Dresden, 2. 11. 1921 prom. Dresden.

1900. **Müller, Johann, O.**, Dr., Prof. a. d. U., Bonn a. Rh., Argelanderstr. 114.
Johann M., geb. 1877 Sohland, 1903 prom. Göttingen, 1914 hab. Bonn, seit 1921 nicht beamteter a.o. Prof. Bonn.

1927. **Müller, M.**, Dr., Assist. am Math. Inst. der U., Heidelberg, Hauptstr. 47/51.
Max M., geb. 9. 5. 1901 Mannheim, 31. 7. 1925 prom. Heidelberg.

1891. **Müller, Reinhold**, Dr., *G. H.-R.*, Prof. a. d. T. H., Darmstadt, Wittmannstr. 38.
Reinhold M., geb. 11. 5. 1857 Dresden, 1883 prom. Leipzig, 1880/84 Gymn.-Oberlehrer Dresden, 1885/1907 o. ö. Prof. a. d. T. H. Braunschweig.

1892. **Müller, Richard**, Dr., Geh. St., Prof., Oberstudiendirektor, Berlin-Schöneberg, Eisenacher Str. 55.
Richard M., geb. 19. 1. 1862 Berlin, 1884 prom. Berlin, 1891/1906 hab. Berlin (T. H.).

1913. **Müntz, Ch.**, Dr., Berlin-Nikolassee, Gerkrathstr. 5.

1928. **Münzing, H.**, Dr., Lehramtsassesor, Weinheim a. d. B., Schillerstr. 4.
Hermann M.

700. 1909. **Mulder, P.**, Dr., Oberlehrer, Gorinchem (*Holland*), Wal B. 455.
Piet M., geb. 20. 6. 1878 Leiden, 1917 prom. Groningen.

1922. **Myrberg, P. J.**, Dr., Prof. a. d. T. H., Helsingfors, Tempelstr. 21.

1922. **Nádai, A.**, Dr., Ing., a.o. Prof. a. d. U., Göttingen, Rosdorfer Weg 56, Haus Rathkamp.
A. N., geb. 1883 Budapest, 1911 prom. Berlin, 1922 hab. Göttingen.

1923. **Naess, A.**, Dr., Horten (*Norwegen*).
Almar N., geb. 1888, seit 1919 Dozent der Math. an der Kgl. norw. Seekriegsschule zu Horten.

1897. **Naetsch, E.**, Dr., Prof. a. d. T. H., Dresden-Blasewitz, Tolkewitzer Str. 1.
Emil N., geb. 29. 7. 1869 Dresden, 1888/93 stud. Dresden u. Leipzig, 1894 prom. Leipzig, 1895 hab. Dresden, 1902 Assistent, 1903 außeretatmäß. a.o. Prof., 1909 etatmäß. Honorarprof., seit 1920 planmäß. a.o. Prof.

1928. **Nagai, T.**, Kagawakan (*Japan*), Takamatsu, erste Mittelschule.
Tokujun N.

1898. **Nagaoka, H.**, Prof. a. d. U., Tokio (*Japan*).
Hantaro N., geb. 18. 8. 1865 Omura, 1887 prom. Tokio, seit 1896 in obiger Stellung.

1909. **Nagy, G. v. Sz.**, Dr., Prdzt. a. d. U., Cluj (*Rumänien*), Marianum.
Gyula Béla v. Sz. N., geb. 11. 4. 1887 Erzsébetvaros, 1909 prom. Klausenburg.

1923. **Nakajima, S.**, Prof., Muyakomura, Shikigam Naraken (*Japan*), Kaiserl. japan. General-Konsulat, Hamburg, Mönckebergstr. 7.
Sôji N., geb. 1886 Nara, 1916 prom. Sendai.

1919. **Naumann, W.**, St., Hoyerswerda, Reform-Realgymnasium.
Walter N., geb. 2. 8. 1888 Görlitz.

710. 1920. **Neder, L.**, Dr., Prof. a. d. U., Münster i. W., Maximilianstr. 61.
Ludwig N., geb. 1890 Darmstadt, 1914/19 prom. Göttingen, 1920 hab. Göttingen, 1922 umhab. Leipzig, seit 1924 nichtplanm. a.o. Prof. Leipzig, März 1926 Lehrauftrag für Geometrie Leipzig, S.-S. 1926 a.o. Prof. Tübingen, 1926 o. ö. Prof. Münster i. W.

Jahr des Eintritts

1916. Nelkenbrecher, R., Dr., St. a. d. Oberrealschule, Berlin-Spandau, Neuendorfer Str. 7.
Rudolf N., geb. 15. 4. 1894 Zeitz, 13. 11. 1915 prom. Halle, seit 1. 8. 1919 in obiger Stellung.

1922. Neubauer, E., Dr., St.-Ass., Naumburg a. d. S., Staatl. Bildungsanstalt.
Ernst N., geb. 20. 7. 1893 Magdeburg, 1921 prom. Halle.

1907. Neuendorff, R., Dr., Prof., Staatl. Studienrat a. d. Höh. Schiff- u. Maschinenbauschule u. a.o. Prof. a. d. U., Kiel, Holtenauer Str. 130.
Richard N., geb. 23. 1. 1877 Berlin, 1910 hab. Kiel, seit 1905 in obiger Stellung.

1923. Neugebauer, O., Dr., Prdzt., Göttingen, Gaußstr. 8.
Otto N., geb. 1899 Innsbruck, prom. 1926 Göttingen, hab. 1927 Göttingen.

1899. Neumann, E., Dr., Prof. a. d. U., Marburg, Schwanallee 9.
Ernst N., geb. 9. 11. 1875 Königsberg i. Pr., 1898 prom. Leipzig, 1899 hab. Halle, 1901 a.o. Prof. Breslau, 1905 Marburg, 1908 o. ö. Prof. Marburg.

1927. Neumann, J. v., Dr., Prdzt. a. d. U. Berlin W. 15, Bregenzer Str. 16.
Johann v. N., geb. 28. 12. 1903 Budapest, 1926 prom. Budapest, 1928 hab. Berlin (U).

1922. Nevanlinna, F., Dr., Helsingfors, Salama Alexandersgatan 15.

1922. Nevanlinna, R., Dr., Prof. a. d. U. Helsingfors, Museigatan 9. St.

1902. Newkirk, B., Dr., Research Laboratory, General Electric Co., Shenectady, N. Y., 646 Rugby Road.
Burt Leroy N., geb. 1. 5. 1876 Ellenville (*U. S. A.*), 1902 prom. München.

720. 1923. Neymeyer, L., Dr., Prof., Sinsheim a. d. Elsing (Baden), Hauptstr. 7.

1920. Nielsen, J., Dr., Prof. a. d. T. H. Kopenhagen, Hellerup, Lundegaardsvej 16.

1900. Nielsen, N., Dr., Prof. a. d. U., Kopenhagen N, St. Hans Torv 32.
Niels N., geb. 2. 12. 1865 Oerslev, 1905 Doz. Kopenhagen, seit 1909 o. Prof.

1921. Nießner, St.-Ass., Frankfurt a. M.-Süd, Stegstr. 62.

1900. Niklas, P., Prof., Berlin NW 23, Siegmundshof 15, Gartenhaus bei Valentin.
Paul N., geb. 30. 1. 1866 Kerstinowen.

1913. Nörlund, N. E., Prof. a. d. U., Direktor der dän. Gradmessung, Kopenhagen, Malmögade 8.
N. E. N., geb. 26. 10. 1885 Slagelse, 4. 7. 1910 prom. Kopenhagen, 25. 10. 1910 hab. Kopenhagen, 28. 11. 1912 o. Prof. Lund (*Schweden*), seit 1921 o. Prof. Kopenhagen.

1909. Noether, Frl. E., Dr., Prof. a. d. U., Göttingen, Friedländerweg 57.
Emmy N., geb. 1882 Erlangen, 1907 prom. Erlangen, 1919 hab. Göttingen, seit 1922 nichtbeamt. a.o. Prof. Göttingen.

1911. Noether, F., Dr., Prof. a. d. T. H., Breslau, Hobrechtufer 15.
Fritz N., geb. 7. 10. 1884 Erlangen, 1909 prom. München, 1911 hab. Karlsruhe (Baden), 1918 a.o. Prof. Karlsruhe, 1922 o. ö. Prof. Breslau.

1909. Noßke, F., St. a. d. Petrischule, Leipzig-Connewitz, Selneckerstr. 24.
Friedrich N., geb. 17. 4. 1888 Kamenz i. Sa., 1925 prom. Leipzig.

1927. Nowakowski, A., Generalmajor d. R., Ing., Wien IV, Weyringergasse 5.
Arthur N., geb. 14. 12. 1876 Sternberg (*Mähren*), 1896 Leutnant, 1901 Generalstab, 1912/13 Major u. Art.-Kommandant Serajewo, 1924 in Ruhestand.

730. 1923. Obreschkoff, N., Dr., Prof. a. d. U., Sofia (*Bulgarien*), Mathem. Institut, San Stefanostr. 17.
Nikola O., geb. 19. 3. 1896 Warna (*Bulgarien*), März 1922 hab. Sofia, 1925 a.o. Prof. Sofia.

1928. Ogawa, Y., Katagaimachi Sanmugun, Prov. Chiba (*Japan*).
Yu O.

1926. Ogiwara, S., Dr., Doz. a. d. T. H., Sendai (*Japan*), College of Science.

1925. Okada, Y., Tôhoku Imperial University, Sendai (*Japan*).
Yoshitomo O., geb. 20. 1. 1892 Himeji.

1903. Ondracek, J., Prof. a. d. Staatsgewerbeschule, Wien XII, Schlöglgasse 38.
Josef O., geb. 7. 3. 1874 Wien.

1900. Opitz, H., Dr., Prof., Berlin SW 48, Wilhelmstr. 143.
Hans O., geb. 23. 11. 1859 Berlin, 1901 prom. Rostock, seit 1909 Prof., St. a. D.

Jahr des Eintritts

1923. **Oppenheim**, S., Dr., Prof. a. d. U., Wien XVIII, Cottagegasse 9.

1923. **Ore, Öystein**, Oslo (*Norwegen*), Henrichsensgt 3.

1918. **Ortvay**, R., Dr., Cluj (*Rumänien*), Universität, Majalis u 29.

1906. **Oseen**, C. W., Dr., Prof., Uppsala (*Schweden*), Ågatan 35 B.
C. Wilhelm O., geb. 1879 Lund, 1903 prom. Lund, 1902 hab. Lund, 1909 o. ö. Prof. Uppsala.

740. 1899. **Osgood**, W., Dr., Prof. a. d. Harvard U., Cambridge Mass. (*U. S. A.*), Avon Hill St. 74.
William Fogg O., geb. 10. 3. 1864 Boston, 1890 prom. Erlangen, 1890 hab. Harvard, 1893 a.o. Prof., seit 1903 o. ö. Prof. Harvard.

1927. **Oster**, B., Dr., Versicherungsdirektor, Hamburg 13, Feldbrunnenstr. 66.
Berthold O., geb. 5. 6. 1876 Sonsbeck, 1900 prom. Berlin.

1921. **Ostrowski**, A., Dr., Prof. a. d. U., Basel (*Schweiz*), Math. Sem. d. U.
Alexander O., geb. 25. 9. 1893 Kiew, 1920 prom. Göttingen, Doz. a. d. U. Hamburg seit S.-S. 1921, 1922 hab. Hamburg und 1923 Göttingen, 1927 o. ö. Prof. a. d. U. Basel.

1891. **Papperitz**, E., Dr., *G. B.-R.*, Prof. a. d. Bergak., Freiberg i. S., Leipziger Str. 8.
Erwin P., geb. 17. 5. 1857 Dresden, 24. 2. 1883 prom. Leipzig, 1. 4. 1886 hab. Dresden (T. H.), 18. 10. 1889 a.o. Prof. Dresden, 1. 4. 1892 o. ö. Prof. Freiberg (Bergakad.).

1891. **Pasch**, M., Dr., *G. H.-R.*, Universitätsprof. i. R., Gießen, Südanlage 14.
Moritz P., geb. 8. 11. 1843 Breslau, 1865 prom. Breslau, 1870 hab. Gießen, 1873 a.o. Prof. Gießen, 1875 o. ö. Prof. Gießen.

1903. **Du Pasquier**, L. G., Dr., Prof. a. d. U., Neuenburg (*Schweiz*).
L. Gustav Du P., geb. 10. 8. 1876 Auvernier b. Neuchâtel (*Schweiz*), 1905 prom. Zürich (U.), 1908 hab. Zürich (T. H.), 1909 Zürich (U.), 1911 o. Prof. Neuenburg.

1921. **Peine**, W., Dr., Ass. am Geophysikal. Inst. d. U. Leipzig, Doz. a. Techn., Altenburg (Thüringen), Lindenaustr. 19.
William P., geb. 6. 10. 1887 Leipzig, 15. 5. 1915 prom. Leipzig.

1904. **Perron**, O., Dr., Prof. a. d. U., München, Schackstr. 1.
Oskar P., geb. 7. 5. 1880 Frankenthal, 7. 5. 1902 prom. München, 1906 hab. München, 1910 a. o. Prof. Tübingen, 1914 o. ö. Prof. Heidelberg, 1922 o. ö. Prof. München.

1926. **Peters**, J. M., St., Prof., Köln, Königin-Luise-Schule, Niehler Kirchweg 147.
J. M. P., geb. 7. 6. 1876 Deroders (*Belgien*), 1902 Staatsexamen Berlin, 1906 Prof., seit 1907 in obiger Stellung.

1920. **Petri**, M., Dr., Leipzig-Gohlis, Pölitzstr. 17.

750. 1907. **Petrovitsch**, M., Prof. a. d. U., Belgrad (*Serbien*), Kosanc Venac 26.

1921. **Petzoldt**, J., Dr., St., Prof. a. d. T. H. Berlin, Spandau, Wröhmännerstr. 6.
Joseph P., geb. Nov. 1862 Altenburg (Sa. Alt.), 1890 prom. Göttingen, 1904 hab. Berlin (T. H.), Jan. 1922 a.o. Prof. Berlin (T. H.), seit Okt. 1891 in obiger Stellung.

1909. **Pfeiffer**, F., Dr., Prof. a. d. T. H., Stuttgart, Moltkestr. 130.
Friedrich P., geb. 2. 5. 1883 Augsburg, 1907 prom. München, 1912 hab. Danzig und Halle, 1917 a.o. Prof. Heidelberg, 1921 o. ö. Prof. Heidelberg, seit 1922 in obiger Stellung.

1924. **Picht**, J., Dr., Geodätisches Observatorium, Neubabelsberg, Berliner Str. 46.
Johannes P., geb. 25. 1. 1897 Rathenow, 26. 2. 1925 prom. Berlin.

1892. **Pick**, G., Dr., *H.-R.*, Prof. a. d. D. U., Prag II, Viničná 3.
Georg P., geb. 10. 8. 1859 Wien, 1880 prom. Wien, 1882 hab. Prag, 1888/92 a.o. Prof., seit 1892 o. Prof. Prag.

1903. **Pierce**, A., Dr., Prof. a. d. U., Los Angeles California (*U. S. A.*), 472 Pacific Electric Bldg.

1897. **Pierpont**, J., Prof. a. d. Yale U., New Haven Conn. (*U. S. A.*), Mansfieldstr. 42.

1891. **Piltz**, A., Dr., Bad Sulza i. Th.
Adolf P., geb. 8. 12. 1855 Ilmenau, 1881 prom. Berlin.

1902. **Pincherle**, S., Dr., Prof. a. d. U., Bologna (*Italien*), Viale Panzacchi 3.
Salvatore P., geb. 11. 3. 1853 Triest, 1878/88 a.o. Prof., seit 1888 o. Prof. a. d. U. Bologna.

Jahr des Eintritts

1923. **Pflieger-Härtel**, H., Dr., Heidenheim (Württemberg), Siechenbergstr. 8.
Hermann P., geb. 27. 2. 1890 Beuthen a. Oder, 29. 11. 1913 prom. Jena.

760. 1909. **Plancherel**, M., Prof. a. d. Eidg. T. H., Zürich (*Schweiz*), Kreuzstr. 82.
Michel P., geb. 16. 1. 1885 Bussy (Freiburg, *Schweiz*), 10. 7. 1907 prom. Freiburg (*Schweiz*), 1910 hab. Genf, 1911 a.o. Prof. Freiburg (*Schweiz*), 1913 o. ö. Prof. Freiburg, 1920 o. ö. Prof. Zürich.

1898. **Planck**, M., Dr., *G. R.-R.*, Prof. a. d. U., Berlin-Grunewald, Wangenheimstr. 21.
Max P., geb. 23. 4. 1858 Kiel, 28. 6. 1879 prom. München, 14. 6. 1880 hab. München, 2. 5. 1885 a.o. Prof. Kiel, 23. 5. 1892 o. ö. Prof. Berlin.

1920. **Platen**, Frl. Ch., Dr., St., Magdeburg, Otto v. Guerickestr. 25.
Charlotte P., geb. 1. 5. 1894 Eilenburg, 3. 2. 1920 prom. Halle a. d. S., seit 1. 4. 1923 St.

1919. **Plath**, W., Ingenieur, Berlin-Charlottenburg, Dahlmannstr. 28 b. Hambaum.
Willy P., geb. 10. 11. 1894 Rostock.

1906. **Plemelj**, J., Dr., Prof. a. d. U., Laibach.
Josef P., geb. 11. 12. 1873 Veldes, 1898 prom. Wien, 1902 hab. Wien, 1907 a.o. Prof., 1908 o. Prof. Czernowitz, seit 1919 Laibach.

1923. **Plessner**, A., Dr., Wiss. Hilfsarbeiter am Math. Sem. d. U. Marburg a. L., Wörthstr. 25.
Abraham P., geb. 1900 Lodz, 1922 prom. Gießen, 1926 Marburg a. L.

1906. **Pöschl**, Th., Dr.-Ing., Prof. a. d. T. H., Karlsruhe i. B., Wendtstr. 5.
Theodor P., geb. 1882 Graz, 1907 prom. Graz, 1909 hab. Graz, 1912 a.o. Prof. Prag D. T. H., 1916 o. ö. Prof. Prag D. T. H., 1928 o. ö. Prof. Karlsruhe.

1926. **Pohlhausen**, E., Prof. a. d. T. H. Danzig.
Ernst P., geb. 20. 5. 1890 Mittweida (Sa.), 1919 prom. Göttingen, 1921 hab. Rostock, 1922 a.o., 1925 o. Prof. Rostock, 1. 4. 1926 o. Prof. Danzig.

1921. **Pollaczek**, F., Dipl.-Ing., Wissensch. Hilfsarbeiter des Telegraphentechn. Reichsamtes, Berlin W 9, Königgrätzer Str. 20.
Felix P., geb. 1892 Wien, 1922 prom. Berlin.

1921. **Pollaczek**, Frau Dr. H., geb. Geiringer, Prdzt. a. d. U., Berlin-Wilmersdorf, Lauenburger Straße 24.
Hilda P., geb. 28. 9. 1893 Wien, 1917 prom. Wien, seit 1921 Ass. am Inst. für angew. Math. a. d. U. Berlin, 1927 hab. Berlin (U.).

770. 1913. **Pólya**, G., Dr., Prof. a. d. Eidg. T. H., Zürich, Büchnerstr. 1.
Georg P., geb. 13. 12. 1887 Budapest, 1912 prom. Budapest, 1914 hab. Zürich T. H., 1928 o. ö. Prof. Zürich (P. H.).

1923. **Popoff**, K., Dr., Prof. a. d. U., Sofia (*Bulgarien*), 47 Bulevard Ferdinand.
Kyrille P., geb. 3. 5. 1880 Schumen (*Bulg.*), 12. 9. 1912 prom. Paris, 1914 hab. Sofia, 1921 a.o. Prof. Sofia. 1922 o. ö. Prof. Sofia.

1917. **Portzehl**, W., Dr., St., Königsberg i. Pr., Hindenburgstr. 13.
Willi P., geb. 6. 9. 1893 Königsberg i. Pr., 8. 5. 1917 prom. Königsberg.

1920. **Post**, J., Dr., St., Stendal, Mönchskirchhof 6.
Julius P., geb. 1889 Neuhaus a. d. Oder, 1920 prom. Halle a. d. S.

1918. **Prange**, G., Dr., Prof. a. d. T. H., Hannover, Engelbostelerdamm 58.
Georg P., geb. 1. 1. 1885 Hannover, 22. 12. 1914 prom. Göttingen, 10. 7. 1917 hab. Hannover, März 1921 Prdzt. mit Lehrauftrag Halle, Okt. 1921 o. ö. Prof. Hannover.

1903. **Prasad**, G., Prof. a. d. Calkutta U., Calkutta 2 (*Indien*), Samanaya Mansions, Corporation Street.
Ganesh P., geb. 15. 11. 1876 Agra (*Indien*), 1898 prom. D. Sc., 1899/1904 stud. Cambridge u. Göttingen, 1904/05 Prof. am Muir Central College Allahabad, 1905/14 Prof. am Queen's College Benares, 1914/18 Ghosh Prof. a. d. Kalkutta U., 1918/23 Prof. a. d. Benares U., seit 1923 Hardinge Prof. a. d. Kalkutta U. und seit 1924 „Fellow of the Calcutta University".

1891. **Pringsheim**, A., Dr., *G. H.-R.*, Prof. a. d. U., München, Arcisstr. 12.
Alfred P., geb. 2. 9. 1850 Ohlau (Schles.), 1872 prom. Heidelberg, 1877 hab. München. 1886 a.o. Prof. München, 1901 o. ö. Prof. München, 1922 emer.

Jahr des Eintritts

1921 **Prüfer**, H., Dr., Prdzt. a. d. U., Münster i. W., Kinderhauserstr. 16.
Heinz P., geb. 10. 11. 1896 Wilhelmshaven, 13. 10. 1921 prom. Berlin, 17. 11. 1923 hab. Jena, 1927 umhab. Münster i. W.

1897. **Prümm**, E., Dr., Dir. der Fa. Dr. Prümm A.-G., Braunschweig, Ottmerstr. 2.
Erich P., geb. 18. 4. 1872 Berlin, 1905 prom. Tübingen.

1902. **Radaković**, M., Dr., Prof. a. d. U., Graz (*Österreich*), Geidorfplatz 1.
Michael R., geb. 25. 4. 1866 Graz, 1889 prom. Graz, 1897 hab. Innsbruck, 1906 o. ö. Prof. Czernowitz, 1915 o. ö Prof. Graz.

780. 1922. **Radaković**, Th., Dr., Ass. a. d. T. H., Wien VII, Karlsplatz 13.

1918. **Rademacher**, H., Dr., Prof. a. d. U., Breslau 16, Nachtigallenweg 3.
Hans R., geb. 3. 4. 1892 Wandsbek, 3. 3. 1916 prom. Göttingen, 15. 12. 1919 hab. Berlin, Ostern 1922 a.o. Prof. Hamburg, Ostern 1925 o. ö. Prof. Breslau.

1926. **Radó**, T., Prdzt. a. d. U., Adjunkt am Math. Sem., Szeged (*Ungarn*), Duganics tér 13.
Tibor R., geb. 2. 6. 1895 Budapest, 1921 prom. Szeged, 1926 hab. Szeged.

1911. **Radon**, J., Dr., Prof. a. d. U., Erlangen, Hindenburgstr. 14.
Johann R., geb. 16. 12. 1887 Tetschen (*Böhmen*), 18. 2. 1910 prom. Wien, 1914 hab. Wien, 1919 a.o. Prof. Hamburg, 1922 o. ö. Prof. Greifswald, 1925 Erlangen.

1893. **Rados**, G., Dr., Prof. a. d. T. H., Budapest IX, Ferenczkörút 38.
Gustav R., geb. 1862 Budapest, 1908 prom. Kolozsvár, 1885 hab. Budapest, 1891 a.o. Prof. Budapest, 1893 o. ö. Prof. Budapest.

1901. **Rahts**, J., Dr., Prof., Ober-Regierungsrat, Mitgl. d. Statist. Reichsamts Charlottenburg, Berlin-Wilmersdorf, Rüdesheimer Platz 11.
Johannes R., geb 22. 5. 1854 Königsberg i. Pr., 16. 1. 1896 prom. Königsberg i. Pr., 1886 hab. Königsberg i. Pr., 1904 Prof.-Tit.

1908. **Ranum**, A., Dr., Prof. a. d. Cornell U., Ithaca, N. Y. (*U. S. A.*), 3 Central Ave.
Arthur R., geb 13. 12. 1870 Lacrosse (*Wisc.*), 1906 Ph. D. Chicago, 1897/1904 Prof. Washington U., 1904/05 Instr. Wisconsin U., 1906/10 Instr. Cornell U., seit 1910 Asst. Prof. a. d. Cornell U.

1921. **Rapp**, R., Dr., St., Vaihingen a. d. F.
Robert R., geb. 4 6. 1888 Neckartailfingen (Wttbg.), 14. 2. 1914 prom. Tübingen.

1914. **Rauber**, A., Dr., Nürnberg, Bismarckstr. 36.

1896. **Rausenberger**, O., Dr., Prof., Frankfurt a. M., Holzhausenstr. 46.
Otto R., geb. 24. 9. 1852 Frankfurt a. M., 5. 1 1875 prom. Heidelberg, Herbst 1879 ordl. Lehrer Frankfurt a M., Ostern 1912 als Professor pensioniert.

790. 1925. **Rauter**, H., St.-Ass., Königsberg i. Pr., Weberstr. 6.
Herbert R, geb. 10. 1. 1899 Kraplan, Kr. Osterode, 1924 Staatsprüfung Königsberg, seit 1925 in obiger Stellung, 9. 6. 1926 prom. Halle.

1926. **Rehbock**, F., Dr., Charlottenburg, Kaiser-Friedrich-Str. 105.
Fritz R., geb. 16. 7. 1896 Hannover, 1926 prom. Berlin (U.).

1926. **Reichenbächer**, E., Dr., St. a. d. Oberrealschule, Wilhelmshaven, Hindenburgstraße 10.
Ernst R., geb. 20. 1. 1881 Magdeburg, 10. 11. 1902 prom. Halle, seit 1. 10. 1905 in obiger Stellung.

1921. **Reidemeister**, K., Dr., Prof. a. d. U., Königsberg, Caecilienallee 9.
Kurt R., geb. 13. 10. 1893 Braunschweig, 6. 5. 1921 prom. Hamburg, 1. 10. 1922 a.o. Prof. Wien (U.), 1925 o. ö. Prof. Königsberg.

1891. **Reinhardt**, C., Dr., Prof., Ober-St.-Dir a. D., Freiberg i. S., Annaberger Str. 7.
Curt R., geb. 5. 12. 1855 Oederau (Sachsen), 1881 prom. Leipzig, jetzt a. D.

1918. **Reinhardt**, K., Dr., Prof. a. d. U., Greifswald, Mathem Seminar.
Karl R., geb. 27. 1. 1895 Frankfurt a. M., 1918 prom. Frankfurt a. M, Ostern 1921 hab. Frankfurt a. M., 1924 hab. Greifswald, 1927 o. ö. Prof. Greifswald.

1920. **Reißner**, H., Dr., Prof. a. d. T. H, Berlin, Kol. Heerstraße, Ortelsburger Allee.
Hans R., geb. 18. 1. 1874 Berlin, 1900 prom. Charlottenburg (T. H.), 1904 hab. Charlottenburg (T. H.), 1906 o. ö. Prof. Aachen (T. H.), 1912 o. ö. Prof. Charlottenburg (T. H.).

Jahr des Eintritts

1921. **Rella**, T., Dr., Prof. a. d. U., Graz III, Hilgergasse 3.
Tonio R., geb. 24. 3. 1888 Brünn, 18. 12. 1913 prom. Wien, Juli 1921 hab. Wien, 1922 a o. Prof. Graz, 1924 o. ö. Prof. Graz.

1918. **Remak**, R., Dr., Berlin-Lichterfelde-West, Manteuffelstr. 23.
Robert R., geb. 1888 Berlin, 1911 prom. Berlin.

1920. **Rembs**, E., Dr., St., Berlin-Friedenau, Begasstr. 5 I.
Eduard R., geb. 1890 Höhr, 1918 prom. Bonn.

800. 1913. **Rey Pastor**, J., Prof. a. d. U., Madrid (*Spanien*), Sta. Teresa 8.
Julio R., geb. 14. 8. 1888 Logroño, 1909 prom. Madrid, 1911/13 Prof. a. d. U. Oviedo, seit 1913 in obiger Stellung.

1928. **Reuß**, A., St., Göppingen, Stuttgarter Str. 45.
Albrecht R., geb. 2. 3. 1893 Ochsenhausen (Württemberg).

1927. **Ribeiro**, L. F., cand. math., Pernambuco (*Brasilien*), Rua Augusta 456.
Luiz F. R.

1904. **Richardson**, R. G. D., Prof. a. d. Brown U., Providence (Rhode Island) (*U. S. A.*).
Roland G. D. R., geb. 14. 5. 1878 Halifax (*Nova Scotia*), 1906 prom. Yale Univ., 1906 hab. Yale, 1907 a.o. Prof. Brown Univ.

1907. **Riebesell**, P., Dr., Prof. a. d. U., Hamburg 20, Ericastr. 122.
Paul R., geb. 9. 6. 1883 Hamburg, 1905 prom. Kiel, 1920 hab. Hamburg, 1921 a.o. Prof. Hamburg.

1923. **Rieckmann**, E., Dr., Charlottenburg, Kantstr. 19.
Erich R., geb. 20. 5. 1901 Flensburg, 30. 10. 1923 prom. Marburg.

1920. **Riemann**, W., stud. math., Hameln, Karlstr. 2.

1905. **Riesz**, F., Dr., Prof. a. d. U., Szeged (*Ungarn*), Dugonics tér 13.
Friedrich R., geb. 22. 1. 1880 Győr, 1902 prom. Budapest, 1911 o. Prof. Kolozsvár, 1919 o. Prof. Szeged.

1921. **Riesz**, M., Dr., Prof., Lund (*Schweden*), Universität.

1927. **Ringleb**, Dr., F., Ass. am Math. Inst. u. Sem. d. U., Jena, Forstweg 3.
Friedrich R., geb. 18. 4. 1900 Guben, 12. 2. 1926 prom. Jena, seit 1. 10. 1925 in obiger Stellung.

810. 1899. **Roe**, E., Dr., Prof. a. d. U., Syracuse N. Y. (*U. S. A.*), West Ostrander Avenue 123.
Edward Drake R., geb. 4. 1. 1859 Elmira, 1898 prom. Erlangen, 1890/92 Instr. Boston U., 1892/99 Ass. Prof. Oberlin Coll., 1900/01 Syracuse U., seit 1901 o. Prof. Syracuse.

1910. **Roeser**, E., Dr., St., Bottrop, Blumenstr. 13.
Ernst R., geb. 8. 11. 1881 Magdeburg, 1909 prom. Halle.

1928. **Rogel**, F., Ingenieur, korresp. Mitglied d. Kgl. Böhmischen Gesellschaft d. Wissenschaft Prag, Klagenfurt-Kärnten, Kumpfstr. 5 II.

1923. **Rogosinski**, W., Dr., Prdzt. a. d. U., Königsberg i. Pr., Luisenallee 16 (bei Weiß).
Werner R., geb. 24. 9. 1894 Breslau, 1922 prom. Göttingen, 1923 hab. Königsberg i. Pr.

1928. **Rohrbach**, H., stud. math., Berlin-Wilmersdorf, Uhlandstr. 136.
Hans R., geb. 27. 2. 1903 Berlin.

1909. **Rosenblatt**, A., Dr., Prof. a. d. U., Krakau (*Galizien*), Basteistr. 18.
Alfred R., geb. 22. 6. 1880, 1908 prom. Krakau.

1909. **Rosenthal**, A., Dr., Prof. a. d. U., Heidelberg, Blumenthalstr. 7.
Arthur R., geb. 24. 2. 1887 Fürth i. Bayern, 1909 prom. München, 1912 hab. München, 1920 a.o. Prof. München, seit 1922 planm. a.o. Prof. a. d. U. Heidelberg.

1899. **Rost**, G., Dr., Prof. a. d. U., Würzburg, Sander-Ring 3.
Georg R., geb. 26. 2. 1870 Würzburg, 1892 prom. Würzburg, 1901 hab. Würzburg 1906 ao. Prof. Würzburg, 1906 o. ö. Prof. Würzburg.

1928. **Rothe**, E., Dr., Prdzt. a. d. T. H., Breslau I, Schmiedebrücke 29a.
Erich R., geb. 21. 7. 1895 Berlin, 1927 prom. Berlin, 1928 hab. Breslau (T. H.).

Jahr des Eintritts

1902. **Rothe**, R., Dr., Prof. a. d. T. H., Berlin-Wilmersdorf, Trautenaustr. 16.
Rudolf R., geb. 1873 Berlin, 1897 prom. Berlin, 1905 hab. Charlottenburg (T. H.), 1897 Wiss. Hilfsarb. b. d. Phys. Techn. Reichsanstalt, 1898 Ass., 1901/08 etatmäß. ständ. Mitarb., 1908 o. Prof. Clausthal, 1913 Hannover und 1914 Charlottenburg (T. H.).

820. 1924. **Röncke**, F., Versicherungsmathematiker, Hamburg 39, Elebeken 11.
Friedo R., geb. 31. 7. 1893.

1891. **Rudio**, F., Dr., Prof. a. d. Eidgen. T. H. Zürich, Zollikon bei Zürich, Höhestraße 21.
Ferdinand R., geb. 2. 8. 1856 Wiesbaden, 1880 prom. Berlin, 1881 hab. Zürich, 1885 a.o. Prof. Zürich, 1889 o. ö. Prof. Zürich (T. H.).

1917. **Rühlemann**, H., Dr., Studienassessor, Halle a. d. S., Robert-Franz-Str. 22.

1925. **Ruhm**, G., Prof. a. d. Landw. H. u. Dozt. f. angew. Math. a. d. U., Bonn, Blücherstr. 26.
Georg R., geb. 1. 12. 1880 Kattowitz (O.-Schl.), 1905 Ass. Bonn, 1907 Oberlehrerstaatsprüfung, 1908 wiss. Rechner a. Zentralbüro der Intern. Erdmessung, 1910 Oberl. a. Realgymn. Berlin-Lankwitz und Dozt. a. d. Militärtechn. Akad. Berlin, 1912 Prof. a. d. Landw. H. Bonn.

1915. **Sakellariu**, N., Dr., Prof. a. d. National-U., Athen (*Griechenland*), Voulgaroctonoustr. 4a.
N. S., geb. Agios Petros, Kynarias (*Griechenland*), prom. Athen, a.o. Prof. Athen.

1927. **Saks**, S., Dr., Dozt. a. d. U., Warschau, Techn. Hochschule, ul. Polna.
Stanislaus S., geb. 30. 12. 1897 Kalisz (*Polen*), seit 1921 Assist. a. d. T. H. Warschau, Oktober 1922 prom., Juni 1926 hab.

1925. **Salié**, H., cand. math., Leipzig, Schenkendorfstr. 52.
Hans S., geb. 6. 4. 1902 Leipzig.

1904. **Salkowski**, E., Dr., Prof. a. d. T. H. Berlin, Neubabelsberg b. Potsdam, Odienstr. 6.
Erich S., geb. 3. 2. 1881 Angerburg O.-Pr., 1902 prom. Jena, 1907 hab. a. d. T. H. Charlottenburg, 1906/15 Oberl. Berlin, 1915 o. ö. Prof. Hannover, 1927 o. ö. Prof. Berlin (T. H.).

1926. **Sambursky**, S., Dr, Jerusalem, P. O. B. 112 (*Eretz-Israel*).

1918. **Sanden**, H. v., Dr., Prof. a. d. T. H., Hannover-Herrenhausen, Böttcherstr. 9.
Horst v. S., geb. 2[illegible]. 12. 1883 Rußland, 1908 prom. Göttingen, 1911 hab. Göttingen, 1918 o. ö. Prof. Clausthal, 1922 Hannover.

830. 1925. **Sanden**, K. v., Dr., Prof. a. d. T. H., Karlsruhe i. B., Stefanienstr. 12.
Kurt v. S., geb. 7. 8. 1885, 1909/10 Ass. Brünn, 1911/23 Germania-Werft Kiel, 1923 o. Prof. f. Mechanik und angew. Mathematik a. d. T. H. Karlsruhe.

1912. **Sárközy**, P., Prof., Pannonhalma, Györm. (*Ungarn*).
Paul S., geb. 3. 12. 1884 Jánosháza, 1914 prom. Budapest, 1910 o. ö. Prof. Pannonhalma (Hochschule).

1925. **Sauer**, F. O., stud. math., Erlangen, Haagstr. 3.
Friedrich O. S., geb. 24. 10. 1903 Weißenburg i. B., stud. seit 1922 Erlangen.

1927. **Sauer**, R., Dr., Prdzt. a. d. T. H., München, Zieblandstr. 43/3.
Robert S., geb. 16. 9. 1898 Pommersfeld (Bayern), 17. 3. 1925 prom. zum Dr. der T. Wissenschaften (T. H. München), S.-S. 1926 hab. a. d. T. H. München, seit W.-S. 1923/24 Assistent für darst. Geometrie a. d. T. H. München.

1927. **Saxer**, W., Dr., o. ö. Prof. a. d. Eidg. T. H., Zürich, Techn. Hochschule.
Walter S., geb. 2. 12. 1896 Stein (Appenzell) 1922 prom. Zürich (T. H.), 1927 o. ö. Prof a. d. T. H. Zürich.

1920. **Schachenmaier**, W., Dr.-Ing., Prof. a. d T. H., München, Amalienstr. 11.
Wilhelm S., geb. 14. 4. 1882 Emmendingen i. B., 1909 prom. Dr.-Ing. Karlsruhe, 9. 2. 1916 o. ö. Prof. Karlsruhe.

1928. **Schadenberg**, H., St.-Ass., Berlin-Steglitz, Florastr. 18.

1921. **Schäfer**, Ingenieur, Frankfurt a. M.-Oberrad, De Neufvillestr. 2a.

1921. **Schaffeld**, E., Dr., Peine (Provinz Hannover).

Jahr des Eintritts

1904. **Schaffstein**, K., Dr., Göttingen, Hoher Weg 16.
Karl S., geb. 9. 9. 1863 Soest, 1888 prom. Bonn.

840. 1912. **Schaller**, J. G., St. a. D., Wismar (Meckl.), Rabenstr. 58.
J. Georg S., geb. 27. 5. 1872 Darmstadt.

1928. **Schatz**, H., Dr., Prdzt. a. d. U., Innsbruck-Hötting, Riedgasse 8.
Heinrich S., geb. 19. 8. 1901 Innsbruck, 1923 prom. Innsbruck, 1926 hab. Innsbruck.

1925. **Schauffler**, R., *R.-R.*, Berlin-Friedenau, Bornstr. 1, Seiteneingang.
Rudolf S., geb. 11. 8. 1889, 1907/12 stud., 1918 Oberlehrer in Oehringen, 1919 Wissenschaftl. Hilfsarb. im Ausw. Amt, 1923 Regierungsrat im Ausw. Amt.

1892. **Scheffers**, G., Dr., *G. R.-R.*, Prof. a. d. T. H., Berlin-Dahlem, Willdenowstraße 40.
Georg S., geb. 21. 11. 1866 Altendorf (Holzminden), 1890 prom. Leipzig, 1891 hab. Leipzig, 1896 a.o. Prof. Darmstadt, 1900 o. ö. Prof. Darmstadt, 1907 o. ö. Prof. Berlin-Charlottenburg (T. H.), 1926 Dr. ing. h. c. Darmstadt.

1921. **Scheiding**, W., stud. math., Langen (*Hessen*), Rheinstr. 2.

1899. **Scheller**, A., Dr., Prof. a. d. U., Innsbruck, Hötting, Frau-Hitt-Str. 7.
Artur S., geb. 1876 Prosnitz, 1899 prom. Prag, 1909 hab. Prag, 1918 a.o. Prof. Innsbruck.

1919. **Schenker**, Dr., Beamter des Eidgen. Statist. Büros, Matten b. Interlaken (*Schweiz*), Öhlestr.
Otto S., geb. 1875 Olten (*Schweiz*), 1911 prom. Bern (*Schweiz*).

1918. **Scherrer**, P., Dr., Prof. a. d. Eidgen. T. H., Zürich (*Schweiz*), Rislingstr. 8.
Paul S., geb. 1890 St. Gallen, 1916 prom. Göttingen, 1919 hab. Göttingen, 1920 o. ö. Prof. Zürich a. Eidg. Polytechn.

1917. **Schich**, W., Dr. phil., St. am Staatl. Gymnasium, Birkenfeld a. d. Nahe.
Wilhelm S., geb. 5. 1. 1891 Frankfurt a. Oder, 23. 10. 1914 prom. Halle.

1920. **Schilling**, B., Dr., a.o. Prof. a. d. T. H., Dresden-A., Schnorrstr. 19.
Bernhard S., geb. 25. 5. 1890 Dresden, 5. 11. 1917 prom. Dresden, 12. 5. 1924 hab. Dresden.

850. 1891. **Schilling**, C., Dr., Prof., Direktor d. Seefahrtschule, Bremen, Neustadt, Wall 1.
Carl S., geb. 13. 9. 1857 Triest, 1880 prom. Göttingen.

1893. **Schilling**, F., Dr., *G. R.-R.*, Prof. a. d. T. H., Danzig-Langfuhr, Heilsberger Weg 7.
Friedrich S., geb. 9. 4. 1868 Hildesheim, 9. 2. 1894 prom. Göttingen, 4. 3. 1896 hab. Aachen, 10. 8. 1897 a.o. Prof. Karlsruhe, 4. 3. 1899 a.o. Prof. Göttingen, 1. 8. 1904 o. ö. Prof. Danzig.

1924. **Schindelhauer**, Fr., Dr., Potsdam, Telegraphenberg, Met.-magn. Observ.

1891. **Schlesinger**, L., Dr., Prof. a. d. U., Gießen, Walltorstr. 48.
Ludwig S., geb. 1. 11. 1864 Tyrnau, 1887 prom. Berlin, 1889 hab. Berlin, 1897 a.o. Prof. Bonn, 1897 o. ö. Prof. Klausenburg, 1911 o. ö. Prof. Budapest, seit 1911 in obiger Stellung.

1903. **Schlink**, W., Dr., Prof. a. d. T. H., Darmstadt.
Wilhelm S., geb. 4. 7. 1875 Offenbach, 1901 prom. München, 1903 hab. Darmstadt, 1907 Prof. a. d. T. H. Braunschweig, 1926 Darmstadt.

1927. **Schlitt**, Dr., St., Krefeld, Cracauer Str. 16.
Rudolf S., geb. 13. 2. 1879 Hamburg, 1903 prom. Kiel.

1924. **Schmehl**, H., Dr. phil., Ass. am Geodät. Institut Potsdam, Berlin-Steglitz, Rothenburgstr. 5.
Heinz S., geb. 12. 12. 1900 Bremen, 14. 10. 1924 prom. Berlin.

1920. **Schmeidler**, W., Dr., Prof. a. d. T. H., Breslau, Novastr. 15.
W. S., geb. 7. 6. 1890 Berlin, 1917 prom. Göttingen, 1919 Prdzt. Göttingen, 1920 Prdzt. Kiel, 1921 o. Prof. d. T. H. Breslau.

1902. **Schmid**, Th., *H.-R.*, Prof. a. d. T. H., Wien IV, Karlsgasse 7.
Theodor S., geb. 6. 12. 1859 Erlau (*Ungarn*), 1900 a.o. Prof. Wien (T. H.), 1906 o. ö. Prof. Wien (T. H.).

Jahr des Eintritts

1901. **Schmidt**, A., Dr., *G.R.-R.*, Prof., Potsdam, Geodät. Inst., Telegraphenberg.
Adolf S., geb. 23. 7. 1860 Breslau, 1882 prom. Breslau, 1884/1902 Gymnasiallehrer Gotha, 1907 ord. Hon.-Prof. Berlin, seit 1902 Vorst. des Magnet. Observatoriums Potsdam.

860. 1910. **Schmidt**, E., Dr., Prof. a. d. U., Berlin NW 87, Altonaer Str. 30.
Erhard S., geb. 14. 1. 1876 Dorpat, 1905 prom. Göttingen, 1906 hab. Bonn, 1908 o. Prof. Zürich U., 1910 Erlangen, 1911 Breslau, 1917 Berlin U.

1922. **Schmidt**, H., Dr., Prdzt. a. d. U. Leipzig, Prof. am Friedrichs-Polytechnikum, Cöthen (Anhalt), Akazienstr. 13a.
Harry S., geb. 21. 6. 1894 Hamburg, 1919 prom. Leipzig, 1923 Dozent Cöthen, 1924 Prof. Cöthen, 1926 hab Leipzig.

1927. **Schmidt**, H., Ass. am Math. Inst. d. U. Jena, Kernbergstr. 12.
Hermann S., geb. 22. 7. 1902 Merkendorf (Mittelfranken), 1927 prom. München.

1923. **Schmidt**, R., Dr., Prdzt. a. d. U., Kiel, Hohenbergstr. 17.
Robert S., geb. 22. 7. 1898 Gremsmühlen, 1923 prom. Kiel, 1925 hab. Königsberg i. Pr., 1926 Kiel.

1904. **Schmidt**, W., Prof., Düren, Marienstr. 43.
Walter S., geb. 6. 3. 1861 Arolsen, 1880/84 stud. Berlin und Halle, seit 1895 Oberlehrer am Realgymn. Düren (Rhld.).

1908. **Schnee**, W., Dr., Prof. a. d. U., Leipzig, Ferdinand-Rhode-Str. 17.
Walter S., geb. 8. 8. 1885 Rawitsch, 1908 prom. Berlin, 1910 hab. Breslau, 1917 a.o. Prof. Leipzig.

1921. **Schneider**, E., Dr. rer. pol., Siegen i. W., Sandstr. 78.

1920. **Schönhardt**, E., Dr., Prof. a. d. U., Ass. am Math. Sem. d. U., Tübingen, Herrenberger Str. 34.
Erich S., geb. 25. 6. 1891 Stuttgart, 1920 prom. Tübingen, 1923 hab. Tübingen, 1927 n. b. a.o. Prof. Tübingen.

1920. **Schönwiese**, R., Dr., Leipzig-Mockau, Kieler Str. 18.
Rudolf S., geb. 5. 1. 1866, 6. 12. 1921 prom. Freiburg (h. c.), Stellvertr. Dir. der Leipzig. Lebensvers. A.-G.

1927. **Schollmeyer**, G., Dr., Magdeburg, Tißmarstr. 12.
Gerhard S., geb. 24. 11. 1889 Krossen a. d. O., Ostern 1914 prom. Gießen, Herbst 1914 Prüf. f. d. höh. Lehramt Greifswald, 1916 Versicherungsmathematiker, 1924 Privatlehrer.

870. 1924. **Scholz**, H., Dr., Prof. a. d. U., Kiel, Feldstr. 61.
Heinrich S., geb. 17. 12. 1884 Berlin, 1909 prom. Berlin, 1910 hab. Berlin, 1917 o. ö. Prof. Breslau, 1919 o. ö. Prof. Kiel.

1893. **Scholz**, P. G., Prof., Berlin-Steglitz, Fichtestr. 34.
Paul Gottlob S., geb. 21. 9. 1844 Krotoschin, 1868 prom. Breslau, seit 1870 in obig. Stellung.

1926. **Schonka**, F. Ritter v., Dr., *G.-R.*, Sektionschef a. D., Präsident d. Ersten Donau-Dampfschiffahrtsgesellschaft, Wien IV, Meyerhofgasse 11.
Franz v. S., geb. 13. 5. 1859 Agram (*Kroatien*), 9. 3. 1883 prom. Wien.

1899. **Schorer**, K. T., Prof. a. d. Oberrealschule, Lübeck, Schillerstr. 1b.
Karl Theodor S., geb. 20. 12. 1866 Lübeck.

1897. **Schorr**, R., Dr., Prof. a. d. U. Hamburg, Direktor d. Sternwarte, Bergedorf.
Richard S., geb. 20. 8. 1867 Kassel, 1889 prom. München, 1919 o. ö. Prof. Hamburg.

1897. **Schotten**, H., Dr., Oberstudiendirektor i. R., Halle a. S., Kohlschütterstr. 9.
Heinrich S., geb. 3. 7. 1856 Marburg a. Lahn, 1883 prom. Marburg.

1928. **Schottky**, F., Dr., *G. R.-R.*, Prof. a. d. U., Berlin-Steglitz, Fichtestr. 12a.
Friedrich Hermann S., geb. 24. 7. 1851 Breslau, 1875 prom. Berlin, 1878 hab. Breslau, 1882/92 Prof. Zürich (Polyt.), 1892/1902 Marburg, seit 1902 Berlin.

1914. **Schouten**, J. A., Dr., Prof. a. d. T. H., Delft (*Holland*), Rotterdamsche Weg 111.
Jan Arnoldus S., geb. 1883 Nieuwer-Amstel, 1914 prom. Delft, 1914 o. ö. Prof. Delft.

1899. **Schrader**, C., Dr., *G. R.-R.*, Berlin W 15, Kurfürstendamm 193.

Jahr des Eintritts

1928. Schreier, O., Dr., Prdzt. a. d. U., Hamburg 13, Rothenbaumchaussee 21, Math. Sem. d. U.

Otto S., geb. 3. 3. 1901 Wien, 8. 11. 1923 prom. Wien, 1926 hab. a. d. U. Hamburg.

880. 1915. Schreiter, K. O., Dr., Geschäftsführer u. Prokurist einer G. m. b. H., Hamburg 6, Weidenallee 12.

Karl Otto S., geb. 11. 1. 1880 Dresden, 1914 prom. Rostock.

1899. Schröder, J., Dr., Prof., Direktor, Hamburg-Ohlsdorf, Fuhlsbütteler Str. 603.

Johannes S., geb. 15. 12. 1865 Hamburg, 18. 7. 1889 prom. Göttingen.

1906. Schrutka, L., Edler von Rechtenstamm, Dr., o. ö. Prof. a. d. T. H., Wien 13/2, Onno-Klopp-Gasse 8.

Lothar S., geb. 1881 Czernowitz (Bukowina), 1903 prom. Wien, 1907 hab. Wien (U.), 1908 Wien (T. H.), 1912 a.o. Prof. Brünn (Dtsch. T. H.), 1917 o. ö. Prof. Brünn (Dtsch. T. H.), 1925 o. ö. Prof. Wien (T. H.).

Schulen:

1889. Dorotheenstädtisches Realgymnasium, Berlin NW 7, Georgenstraße 30—31.

1924. Friedrichschule, Gumbinnen.

1902. Höhere techn. Staatslehranstalt (früher Industrieschule), Nürnberg.

1906. Rektorat der Kreisrealschule I, Nürnberg.

1906. Friedrich-Eugens-Realschule, Stuttgart, Langestr. 57.

1921. Staatsgymnasium, Wien II, Kl. Sperlgasse 2c.

1896. Schülke, A., Dr., Prof., Oberstudiendir. i. R., Berlin-Tempelhof, Albrechtstraße 98.

Albert S., geb. 13. 12. 1856 Marienwerder, 1882 prom. Königsberg i. Pr.

890. 1928. Schuntner, E., Dr., Wien IV, Große Neugasse 44, Tür 21.

Erwin S.

1921. Schur, A., Dr. phil., Prdzt. u. Ass. a. d. U., Bonn, Math. Sem. d. U.

Axel S., geb. 9. 5. 1891 Dorpat, 20. 3. 1921 prom. Würzburg, 20. 3. 1923 hab. Hannover, 1927 umhab. Bonn.

1891. Schur, F., Dr., Dr. ing., *G.H.-R.*, Prof. a. d. U., Breslau 16, Parkstr. 25a.

Friedrich S., geb. 27. 1. 1856 Maciejewo. 1879 prom. Berlin, 1881 hab. Leipzig, 1885 a.o. Prof. Leipzig, 1888 o. ö. Prof. Dorpat, 1892 o. ö. Prof. Aachen, 1897 o. ö. Prof. Karlsruhe, 1909 o. ö. Prof. Straßburg, 1919 Breslau, 1925 prom. z. Dr.-Ing. ehr. a. d. T. H. Karlsruhe.

1901. Schur, I., Dr., Prof. a. d. U., Berlin-Schmargendorf, Ruhlaer Str. 14.

Issai S., geb. 10. 1. 1875 Mohilew, 1901 prom. Berlin, 1903 hab. Berlin, 1913 a.o. Prof. Bonn, 1916 Berlin, 1919 o. ö. Prof. Berlin.

1913. Schürer, F., Dr., St. am staatl. Realgymnasium, Pasewalk.

1906. Schütz, E. H., Dr., Prof., St. an der Seefahrtschule, Bremen, Feldstr. 42.

Ernst Wilhelm Harald S., geb. 19. 9. 1875 Traunstein, 1901 prom. Göttingen, seit 1902 in obiger Stellung.

1919. Schütze, H., Dr., Stuttgart, Reinsburgstr. 159.

1928. Schütze, W., Dr., Zörbig (Prov. Sachsen), Victor-Blüthgen-Str. 23.

Walter S.

1917. Schwab, K., St., Prof., Frankfurt a. M., Günthersburgallee 33.

Karl S., geb. 16. 2. 1861 Wiesbaden.

1921. Schwank, F., Ass. f. darstellende Geometrie a. d. T. H. Darmstadt, Frankfurter Str. $16^1/_2$.

900. 1925. Schwarz, E., Dr., Wien II, Hahngasse.

1896. Schwatt, J. T., Prof. a. d. U. of Pennsylvania, Philadelphia (*U. S. A.*), 1226 South, 58th Street.

1928. Schwerdt, H., St., Berlin-Schöneberg, Kaiser-Friedrich-Str. 15.

Hans S., geb. 3. 7. 1894 Berlin-Schöneberg, seit 1. 4. 1921 St. am Falk-Realgymnasium, Berlin, Ostern 1926 bis Michaelis 1927 Honorardozent a. d. Landwirtschaftlichen Hochschule Berlin.

Jahr des Eintritts

1926. **Schwerdtfeger**, H., stud. math., Leipzig, Linnéstr. 7.
Hans S., geb. 9. 12. 1902 Göttingen.

1910. **Schweyer**, G., St. Louis Mo. (*U. S. A.*), Blaine Avenue 4252.

1898. **Scott**, Miss Ch. A., Prof. am College, Bryn Mawr Pa. (*U. S. A.*).

1902. **See**, Th. J. J., Dr., Prof. am U. S. Naval Observatory, Mare Island Cal. (*U. S. A.*).
Thomas S., geb. 19. 2. 1866 Montgomery City, 10. 12. 1892 prom. Berlin, 1893 hab. Chicago, 1896 a.o. Prof. Chicago, seit 1899 Prof. d. Math. U. S. Navy, und zwar 1899/1902 am Naval Observ. Washington, 1902/03 Naval Ac., seit 1903 in obiger Stellung.

1924. **L. W. Seidel & Sohn**, Verlagsbuchhandlung, Wien I, Graben 29.

1896. **Seliwanoff**, D., Dr., Prof. a. d. U. Prag, Klánovice u Prahy, Cerného ulice č 21.
Demetrius S., geb. Gorodischtsche, 1885 Magister St. Petersburg, 1890 prom. Moskau, 1885/1905 Prdzt. a. d. U. Petersburg, 1905/06 a.o. Prof., seit 1906 o. Prof. a. d. U. Petersburg.

1925. **Sengenhorst**, P., Dr., St., Charlottenburg, Am Lützow 6.
Paul S., geb. 9. 12. 1894, stud. seit 1913 Bonn und Göttingen, St. seit Okt. 1923.

910\. 1921. **Seyfarth**, Fr., Dr., St., Göttingen, Lindenstr. 4.
Friedrich S., geb. 7. 12. 1891 Apolda, 1914 prom. Jena.

1928. **Shoda**, K., Göttingen, Dahlmannstraße 24 bei Philipps.
Kenjiro S., geb. 25. 2. 1902 Tatebayashi.

1892. **Sievert**, H., Dr., Ober-St. a. D., Bayreuth, Kasernenstr. 17.
Heinrich S., geb. 3. 4. 1855 Wunsiedel, 1885 prom. Tübingen, 1894 Gymn.-Prof., 1907 Oberst.

1923. **Silvermann**, L. L., Dartmouth Coll. Hannover, N. H. (*U. S. A.*).

1897. **Sintzov**, D., Dr., Prof., Charkow (*Rußland*), Mironossitskaja 72.
Dimitry S., geb. 21. 11. 1867 Wiatka, 1895 Magister, 1890 prom., 1894 hab., 1899/1903 a. d. Höh. Bergschule Ekaterinoslaw, 1903 o. Prof. a. d. U. Charkow, seit 1920 am Institut f. Volksbild. und Vorst. d. wissensch. Katheders der Geometrie.

1909. **Skutsch**, R., Dr., Prof., Oberbaurat, Neubabelsberg, Kaiserstr. 44.
Rudolf S., geb. 10. 4. 1870 Neiße, 1910 prom. Braunschweig, 1904 hab. Aachen, 1904/06 Doz. für Mechanik Braunschweig, seit 1906 bei der Pr. Eisenbahnverwaltung.

1918. **Smekal**, A., Dr., Prdzt. a. d. U. u. T. H., Ass. am II. Phys. Institut d. U., Honorardozt. f. techn. Phys. a. d. T. H., Wien IV, Schikanedergasse 13/II.
Adolf S., geb. 1895 Wien, 1917 prom. Graz, 1920 hab. Wien (U.), 1921 Wien (T. H.).

1899. **Smith**, D. E., Prof. a. d. Columbia Universität, New York City (*U. S. A.*), 501 West 120th St.
David Eugene S., geb. 21. 1. 1860 Cortland N. Y.

1901. **Smith**, O. A., Lektor, Aarhus (*Dänemark*), Skovvej 28.
Otto Andreas S., geb. 8. 7. 1873 Saby, 1901 prom. Kopenhagen.

1900. **Smith**, P. F., Prof. a. d. Yale U., New-Haven Conn. (*U. S. A.*), Willowstr. 330.
Percey F. S., geb. 21. 8. 1867 Nyack.

920\. 1903. **Snyder**, V., Dr., Prof. a. d. Cornell U., Ithaca N. Y. (*U. S. A.*), University Av. 214.
Virgil S., geb. 9. 11. 1869 Dixon, 12. 12. 1894 prom. Göttingen, 1895 hab. Cornell, 1903 a.o. Prof. Cornell, 1910 o. ö. Prof. Cornell.

1900. **Sobotka**, J., Prof. a. d. Böhmischen U., Prag, Weinberge, Havlicékpark 5.
Johannes S., geb. 2. 9. 1862 Repnik, 1897/99 a.o. Prof. a. d. T. H. Wien, 1899/1904 o. Prof. a. d. Böhm. T. H. Brünn, seit 1904 Böhm. U. Prag.

1923. **Socher**, H. von, Dr., Berlin NW 87, Siegmundshof 21.
Hermann von S., geb. 4. 2. 1894 Kraubath, 1928 prom. Berlin (U.).

1923. **Sohn**, J., St., Nürnberg, Realschule I, Keßlerstr. 4.
Jakob S., geb. 17. 10. 1890 Würzburg.

1902. **Soisson**, W., Dr., Prof. am Athenäum, Luxemburg, Goethestr. 6.

1927. **Solowjew**, Paul, Lehrer d. höh. Math. am Inst. f. Volksbildung, Charkow (*Ukraine*).

Jahr des Eintritts

1899. **Sommer**, J., Dr., Prof. a. d. T. H., Danzig-Langfuhr, Johannistal 2.
Julius S., geb. 9. 7. 1871 Reutlingen, Okt. 1897 prom. Tübingen, 11. 3. 1899 hab. Göttingen, 1. Okt. 1901 o. ö. Prof. Bonn-Poppelsdorf (Land. Akad.), 1. 10. 1904 o. ö. Prof. Danzig.

1895. **Sommerfeld**, A., Dr., *G. H.-R.*, Prof. a. d. U., München, Leopoldstr. 87.
Arnold S., geb. 5. 12. 1868 Königsberg i. Pr., 24. 10. 1891 prom. Königsberg, 1895 hab. Göttingen, 1897 o. Prof. Clausthal, 1900 o. ö. Prof. Aachen, 1906 o. ö. Prof. München.

1893. **Souslow**, G., Dr., Wirkl. Staatsrat, Prof. am Polytechnikum, Odessa (*Ukraine*), Paskidailowskaya 5.
Gabriel S., geb. 1857 Petersburg, 1888 prom. Petersburg, 1888 hab. Kiew, 1888 a.o. Prof. Kiew, 1891 o. ö. Prof. Kiew, 1907 o. ö. Prof. Odessa.

1926. **Späth**, H., Dr., Tübingen, Jürgensenstr. 9.
Hans S., geb. 8. 9. 1901 Haigerloch, 1925 prom. Göttingen.

930. 1909. **Speiser**, A., Dr., Prof. a. d. U., Zürich (*Schweiz*), Pelikanstr. 22.
Andreas S., geb. 1885 Basel, 1909 prom. Göttingen, 1911 hab. Straßburg, 1917 a.o. Prof. Zürich, 1919 o. ö. Prof. Zürich.

1917. **Spieß**, O., Dr., Prof. a. d. U., Basel, Kornhausgasse 14.
Otto S., geb. 1878 Basel, 1901 prom. Basel, 1904 hab. Basel, 1909 a.o. Prof. Basel.

1920. **Spieweck**, B., Dr., Abteilungsleiter a. d. Dtsch. Versuchsanst. f. Luftfahrt, Adlershof b. Berlin, Kronprinzenstr. 14.
Bruno S., geb. 8. 11. 1893 Beinrode, 1919 prom. Halle.

1927. **Spohr**, G., cand. math., Verden a. d. Aller, Marienstr. 15.
Gerhard S., geb. 22. 8. 1903 Verden a. d. Aller.

1923. **Spreen**, W., Dr., Oberstudiendirektor, Brake i. O.
Wilhelm S., geb. 2. 8. 1888 Fabbenstedt (Pr.), 31. 3. 1921 prom. München.

1920. **Springer, Julius**, Verlagsbuchhandlung, Berlin W 9, Linkstr. 23/24.

1924. **Stachó**, T. von, Dr., Adjunkt a. d. T. H., Budapest, Budofoki ut. 22. II. 12.
Tibor S., geb. 1895 Budapest, 1922 prom. Budapest.

1925. **Stammler**, G., Dr., Prdzt. a. d. U., Halle a. d. S., Breitestr. 29.
Gerhard S., geb. 3. 5. 1898, 1921 prom. Berlin (U.), 1924 hab. Halle (Philosophie).

1920. **Stasnik**, W., Dr., Gymnasialprof., Laucuf (*Polen*).
Wasyl S.

1911. **Steffensen**, J. F., Dr., Prof., Hellerup (*Dänemark*), Ehlersvej 8.
Johann Frederik S., geb. 28. 2. 1873 Kopenhagen, 1912 hab. Kopenhagen, 1919 Dst. Kopenhagen, 1923 Prof. Kopenhagen.

940. 1897. **Steinitz**, E., Dr., Prof. a. d. U., Kiel, Feldstr. 104.
Ernst S., geb. 13. 6. 1871 Laurahütte O.-Schl., 17. 3. 1894 prom. Breslau, 16. 12. 1897 hab. Charlottenburg, 1903 a.o. Prof. Charlottenburg, 1910 o. ö. Prof. Breslau (T. H.), 1920 Kiel.

1921. **Stern**, O., Dr., Prof. a. d. U., Hamburg.

1926. **Stern**, T., Dr. phil., Dortmund, Luisenstr. 25.
Toni S., geb. 7. 10. 1892 Dortmund, 10. 6. 1925 prom. Göttingen.

1918. **Sternberg**, W., Dr., Prdzt. a. d. U. Breslau, Lohensteinerstr. 27.

1891. **Stickelberger**, L., Dr., *G. H.-R.*, Prof., Basel, Palmenstr. 23.
Ludwig S., geb. 18. 5. 1850 Buch Kt. Schaffhausen, 1874 prom. Berlin, 1874 hab. Zürich, 1879 a.o. Prof. Freiburg i. Br., 1894 o. ö. Prof. Freiburg, 1919 o. Honorarprof., 1924 emer.

1922. **Stiegler**, R., St. am Colegio alemán, Madrid (*Spanien*), Almagro 32.
Richard S., geb. 5. 7. 1896 Münsingen, 1923 prom. Münster i. W., 1922/24 Ass. a. d. T. H. Stuttgart.

1922. **Still**, C., Dr., Recklinghausen (Westf.), Bismarckplatz 2.
C. S., geb. 2. 8. 1868 Struthütten (Kr. Siegen), Dr.-Ing e. h.

1928. **Storck**, K., St. a. d. Oberrealschule, Recklinghausen i. W., Dorstenerstr. 59.
Karl S., geb. 6. 10. 1881.

1901. **Störmer**, C., Prof. a. d. U., Oslo (*Norwegen*), Huk Avenue 33, Bygdö b. Oslo.
Carl S., geb. Sept. 1874 Skien, seit 1903 in obiger Stellung.

Jahr des Eintritts

1900. Straubel, R., Dr., Prof. a. d. U., Jena, Botzstr. 6.

950. 1921. Struik, J., Dr., Ass. Prof. a. Massachusetts Institute of Technology, Dep. of. Math. Cambridge (*Mass.*).

Jan S., geb. 1894 Rotterdam, 1922 prom. Leiden, 1923 hab. Utrecht, 1928 Ass. Prof. am Mass. Inst. of Techn.

1920. Stucke, E., Dr., Studienrat, Leipzig-Gohlis, Möckernsche Str. 47.

1891. Study, E., Dr., *G. R.-R.*, Prof. a. d. U., Bonn, Argelanderstr. 126.

Eduard S., geb. 23. 3. 1862 Koburg, 1884 prom. München, 1885 hab. Leipzig, 1893/94 a.o. Prof. Marburg, 1894 a.o. Prof. Bonn, 1897 o. Prof. Greifswald, seit 1904 in obiger Stellung.

1906. Stübler, E., Dr., Prof. a. d. T. H., Berlin-Dahlem, Hohenzollerndamm 96.

Eugen S., geb. 3. 7. 1873 Stuttgart, 1902 prom. Tübingen, 1905 hab. Stuttgart, 1910 Titel und Rang des a.o. Prof. a. d. T. H. Stuttgart, 1914 a.o. Prof. Berlin (T. H.).

1927. Sudan, G., Dr., Bukarest, Str. Scaume 33.

G. S., geb. 26. 4. 1900 Bukarest, 1925 prom. Göttingen.

1920. Süß, W., Dr., Prdzt. a. d. U. Greifswald, Math. Sem. d. Univ.

Wilhelm S., geb. 7. 3. 1895 Frankfurt a. M., 1920 prom. Frankfurt a. M., 1923 bis 1928 Prof. a. d. 7. Kotogakko in Kagoshima (*Japan*), 1928 hab. Greifswald.

1927. Suetuna, Z., Dr., Ass. Prof. a. d. U. Tokyo (*Japan*), Göttingen, Feuerschanzengraben 11.

Zyoiti S., geb. 28. 11. 1898 Ôita-ken (*Japan*), 1924 Assist. Prof. Tokyo, 1927 prom. Tokyo.

1921. Sundheimer, J., stud. math., Frankfurt a. M., Hermesweg 43.

1909. Suppantschitsch, R., Dr., Prof. a. d. U., Laibach (*Jugoslawien*).

Richard S., geb. 22. 12. 1878 Laibach (*Jugoslawien*), 1903 prom. Wien, 1912 Honorardoz. Wien (T. H.).

1898. Suták, J., Dr., Prof. a. d. U., Budapest I, 16, Atlös-ut 11.

Josef S., geb. 5. 11. 1875 Szabadka, 1892 prom. Klausenburg, 1890/91 Prof. Szeged, seit 1891 Gymn.-Prof. Budapest, 1896 hab.

960. 1926. Svenson, E., Doz. f. Math. am Herderinstitut, Riga W. 6, Ritterstr. 16.

E. S., geb. 5. 8. 1895 Riga, 17. 12. 1924 prom. Marburg, seit Jan. 1925 in obiger Stellung

1912. Szász, O., Dr., Prof. a. d. U., Frankfurt a. M., Friedrichstr. 15.

Otto S., geb. 11. 12. 1884 Unterszucs, 1911 prom. Budapest, 1914 hab. Frankfurt a. M., 1921 a.o. Prof. Frankfurt a. M.

1921. Szegö, G., Dr., Prof. a. d. U., Königsberg i. Pr., Cäcilienallee 9.

Gabriel S., geb. 1895 Kunhegyes, 1918 prom. Wien, 1921 hab. Berlin, 1925 nicht beamteter a.o. Prof. Berlin (U.), 1926 o. ö. Prof. Königsberg i. Pr.

1919. Szivessy, G., Dr., Prof. a. d. U., Münster i. W., Langenstr. 22.

1906. Taber, H., Prof. a. d. Clark Universität, Worcester Mass. (*U. S. A.*).

1921. Takagi, T., Dr., Prof. a. d. Kaiserl. Universität, Tokyo (*Japan*).

1925. Takasu, T., Dr., Prof. a. d. Tôhoku U., Sendai (*Japan*), z. Zt. Hamburg 37, Parkallee 1, b. Frl. Jordan.

Tsurisaburo T., geb. 29. 5. 1890 Yamaguchisken (*Japan*), 1924 prom. Sendai, 1921 a.o. Prof. Sendai (Tôhoku U.).

1894. Tauber, A., Dr., Prof. a. d. U., Wien IV, Karlsgasse 18.

1903. Tedone, O., Dr., Prof. a. d. U., Genua (*Italien*).

Orazio T., geb. 10. 5. 1870 Ruvo di Puglia, 1892 prom., 1893 hab. Pisa.

1928. Teichmann, H., Dipl.-Ing., Dresden-A., Fürstenstr. 53.

Horst T., geb. 12. 1. 1904.

970. 1910. Terradas, E., Dr., Prof., Barcelona (*Spanien*), Corcega 331.

Esteban T., geb. 17. 9. 1883 Barcelona, 1905 prom. Madrid, 1906 hab. Zaragoza, seit 1907 in obiger Stellung.

1906. Thaer, C., Dr., Prof. a. d. U. u. St., Greifswald, Gützkower Str. 1.

Clemens T., geb. 8. 12. 1883 Berlin, 1906 prom. Gießen, 1909 hab. Jena.

Jahr des Eintritts

1914. **Thesing**, C., Dr., Bichl (Oberbayern), Landhaus Thesing.

1901. **Thiersch**, F., Dr., O.-St. am Gymnasium, Rosenheim, Kufsteiner Str. 45.
Friedrich T., geb. 1876 München, 1912 prom. München (T. H.).

1917. **Thommeck**, B., Dr., Oberingenieur, Köln-Kalk, Eythstr. 11.

1923. **Thomsen**, G., Dr., Ass. am Math. Sem. d. U., Hamburg, Hirtenstr. 37 III.
Gerhard T., geb. 23. 6. 1899 Hamburg, Sommer 1923 prom. Hamburg.

1926. **Threlfall**, W., Dr., Prdzt. a. d. T. H., Dresden-N. 8, Nordstr. 1.
W. T. geb. 25. 6. 1888 Dresden, 1925 prom. Dresden, 1927 hab. Dresden.

1904. **Tietze**, H., Dr., Prof. a. d. U., München, Lessingstr. 3.
Heinrich T., geb. 31. 8. 1880 Schleinz (Nied.-Österreich), 29. 1. 1904 prom. Wien, 9. 8. 1908 hab. Wien (U.), 1. 11. 1910 a.o. Prof. Brünn (D. T. H.), 1. 10. 1913 o. ö. Prof. Brünn (D. T. H.), 1. 6. 1919 o. ö. Prof. Erlangen (U.), 1. 4. 1925 o. ö. Prof. München (U.).

1923. **Tihanyi**, M., Prof., Esztergom (*Ungarn*), Bencés tanár.
Miklós T., geb. 1873 Pápa.

1897. **Timerding**, H. E., Dr., Prof. a. d. T. H., Braunschweig, Kasernenstr. 23.
Heinrich Emil T., geb. 23. 1. 1873 Straßburg, 1894 prom., 1897 hab. Straßburg, 1905 a.o. Prof. Straßburg, seit 1909 in obiger Stellung.

980. 1906. **Timpe**, A., Dr., Prof. a. d. T. H. Berlin, Berlin-Steglitz, Grunewaldstr. 25.
Aloys T., geb. 14. 3. 1882 Bergedorf, 1904 prom. Göttingen, 1909 hab. Aachen, 1911 hab. Münster, 1918 Landwirtschaftliche Hochschule Berlin, 1927 T. H. Berlin.

1906. **Toeplitz**, O., Dr., Prof. a. d. U., Bonn a. Rh., Coblenzerstr. 121.
Otto T., geb. 1. 8. 1881 Breslau, 1905 prom. Breslau, 1907 hab. Göttingen, 1913 a.o. Prof. Kiel, 1920 o. ö. Prof. Kiel, 1928 Bonn.

1920. **Trefftz**, E., Dr., Prof. a. d. T. H., Dresden, Kulmstr. 1.
Erich T., geb. 21. 2. 1888 Leipzig, 1913 prom. Straßburg, 1917 hab. Aachen, 1919 o. ö. Prof. Aachen, 1922 o. ö. Prof. Dresden.

1905. **Tropfke**, J., Dr., Prof., Oberst.-Direktor, Berlin NW 87, Zwinglistr. 2.
Johannes T., geb. 14. 10. 1866 Berlin, 1889 prom. Halle.

1923. **Tschakaloff**, L., Prof. a. d. U., Sofia (*Bulgarien*), Boulevard Skobeleff 13.
Ljubomir T., geb. 1886 Samokov (*Bulg.*), 1914 hab. Sofia, 1919 a.o. Prof. Sofia, 1922 o. ö. Prof. Sofia.

1928. **Tschebotarew**, N., Dr., Prof. a. d. U., Kasan (*Rußland*), Universität, Physik.-Mathem. Fakultät.
Nikolaj T., geb. 3. 6. 1894 Kamenetz-Podolsk, 1916 cand. math. Kiew, 1918 hab. Kiew, 1923 wirkl. Mitglied d. math. Forsch.-Kath. Odessa, 1927 prom. Kiew, 1928 Prof. a. d. U. Kasan.

1928. **Tsuji**, M., Prof. a. d. U., Tokyo (*Japan*), Mathematical Institute, Imperial University.
Masatsugu T.

1903. **Tyler**, H. W., Dr., Prof. am Massachusetts Institute of Technology, Cambridge Mass. (*U. S. A.*).
Harry Walter T., geb. 16. 4. 1863 Ipswich, 1889 prom. Erlangen, 1890 Asst. Prof., 1892 Associate Prof., seit 1893 o. Prof. Mass. Inst.

1919. **Uhlich**, R., Dr., Prof., St., Wurzen, Torgauer Str. 29.

1925. **Ullrich**, E., Dr., Ass. am Math. Sem. d. U., Jena, Dornburger Str. 3.
Egon U., geb. 1. 1. 1902 Wien, 1924 Ass. Graz, 27. 6. 1925 prom. Graz, 1927 Ass. Jena.

990. 1899. **Umlauf**, K., Dr., Prof., Landesschulrat, Hamburg-Bergedorf, Bismarckstr. 33.
Karl U., geb. 1866 Dresden, 1891 prom. Leipzig.

1923. **Unger**, W., Dr., Berlin W., Friedrich-Wilhelm-Str. 26.
Walter U., geb. 21. 8. 1894 Erfurt, 1920 prom. Bonn.

1897. **Vahlen**, Th., Dr., früher Prof. a. d. U. Greifswald, Eldena (Pom.), Wolgaster Str. 38.
Theodor V., geb. 30. 6. 1869 Wien, 1893 prom. Berlin, 1897 hab. Königsberg, 1904 a.o. Prof. Greifswald, 1911—1927 o. ö. Prof. Greifswald.

1925. **van Veen**, S. C., Dr., Oberlehrer, Dortrecht (*Holland*), Dubbeldamscheweg 224.
Simon Cornelius v. V., geb. 8. 6. 1896 Rotterdam, 1921 Oberlehrer Dortrecht, 1922 Phil. Dr.

Jahr des Eintritts

1902. **Van Vleck**, E. B., Dr., Prof. a. d. Wisconsin U., Madison, Wisc. (*U. S. A.*).
Edward Burr van V., geb. 7. 6. 1863 Middletown, 1893 prom. Göttingen, 1895/98 Ass. Prof., 1898/1906 o. Prof. Wesleyan, seit 1906 in obiger Stellung.

1901. **Varičak**, V., Dr., Prof. a. d. U., Zagreb (*Jugoslawien*), Trg I Nr. 6.
Vladimir V., geb. 26. 3. 1875 Otočac, 1891 prom., 1895 hab. Zagreb, seit 1899 in obiger Stellung.

1906. **Velten**, W., Dr., Kreuznach.
Wilhelm V., geb. 23. 7. 1845 Kirchenbollenbach, 1883 prom. Bonn.

Verbindungen, Vereine und Arbeitsgemeinschaften:

1922. **Mathematisch-physikalische Arbeitsgemeinschaft** der Universität, Berlin C 2, Math. Sem. der Universität.

1897. **Mathematischer Verein** der Universität, Berlin W 8, Behrenstr. 40.

1896. **Mathematische Verbindung** der Universität, Göttingen.

1000. 1899. **Mathematische Verbindung** der Universität (Markomannia), Halle a. d. S.

1910. **Mathematische Gesellschaft**, Hamburg, Patriotisches Gebäude.

1905. **Mathematische Verbindung** der Universität, Heidelberg, Ingrimstr. 16.

1908. **Mathematische Verbindung** der Universität, Leipzig, Talstr. 35.

1927. **Math.-physikalische Fachschaft** der Universität, Marburg.

1900. **Mathematischer Verein** der Universität, München.

1918. **Vermeil**, H., Dr., St. a. d. Maschinenbauschule, Köln-Zollstock, Vorgebirgstraße 275.

1898. **Vieth**, J. v., Dr., Oberstudienrat a. D., Dresden-N., Arndtstr. 9.
Johann v. V., geb. 16. 7. 1856 Dresden, 1893 prom. Leipzig.

1921. **Vietoris**, L., Dr., Prof. a. d. U. Innsbruck, Meranerstr. 9.
Leopold V., geb. 1891 Radkersburg (*Steiermark*), 1920 prom. Wien, 1923 hab. Wien (U.), 1927 a.o. Prof. Innsbruck.

1923. **Vieweg & Sohn**, Fr., A.-G., Braunschweig.

1010. 1908. **Vivanti**, G., Dr., Prof. a. d. U., Mailand (*Italien*), Via C. Battisti N. 6—2.
Giulio V., geb. 1859 Mantua, 1881 Ziviling. Turin, 1883 prom. Bologna, 1896 Prof. Messina, 1901 o. Prof. Messina, 1908 o. Prof. Pavia, 1924 o. Prof. Mailand.

1914. **Voghera**, G., Dr., Prof. a. d. Handelsakademie, Triest, Casella postale 179.
Guido V., geb. 26. 10. 1884 Triest, 1906 prom. Wien, seit 1910 in obiger Stellung.

1912. **Voigt**, A., Dr., *G. R.-R.*, Prof. a. d. U., Frankfurt a. M., Rödelheim, Fuchstanzstr. 33.
Andreas V., geb. 18. 4. 1860 Flensburg, 1889 prom. Freiburg i. B., 1. 4. 1903 Prof. Frankfurt a. M., 14. 8. 1914 o. ö. Prof. Frankfurt a. M.

1921. **Volk**, O., Dr. phil., Dr.-Ing., Prof. a. d. U., Kaunas (*Litauen*), Rotušes Aikštė 6.
Otto V., geb. 13. 7. 1892 Neuhausen, 1918 prom. München (T. H.), 1920 München (U.), 1922 hab. München (U.), seit 1923 in obiger Stellung.

1921. **Völlmy**, E., Dr., Basel (*Schweiz*), Austraße 34.

1891. **Voss**, A., Dr., Dr.-Ing. h. c., *G.-R.*, Prof. a. d. U., München, Habsburgerstr. 1.
Aurel V., geb. 7. 12. 1845 Altona, 1869 prom., 1874 hab. Göttingen, 1875/79 o. Prof. Darmstadt, 1879/85 Dresden, 1885/91 München (T. H.), 1891/1903 Würzburg, seit 1903 München (U.).

1921. **Vranić**, V., Dr., Prdzt. a. d. T. H., Zagreb (*Jugoslawien*), Gundulićeva ul. 23 B.
Vladimir Vr., geb. 10. 11. 1896 Zagreb, 14. 2. 1920 prom. Zagreb, 1923 hab. Zagreb.

1900. **Vries**, H. de, Dr., Prof. a. d. U., Amsterdam (*Holland*), Vossiusstraat 39.
Hendrik de V., geb. 1867 Amsterdam, 1901 prom. u. hab. Amsterdam, 1902/05 Dozent, 1905/06 o. Prof. a. d. T. H. Delft, seit 1906 in obiger Stellung.

1898. **Vries**, J. de, Dr., Prof. a. d. U., Utrecht (*Holland*), v. d. Duynstr. 11.
Jan de V., geb. 1. 3. 1858 Amsterdam, 2. 7. 1881 prom. Amsterdam, Jan. 1894 a.o. Prof. Delft, April 1897 o. ö. Prof. Utrecht.

Jahr des Eintritts

1913. **Wacker**, H., Dr., St. am RG. und OR., Heilbronn a. N., Äußere Wartbergstr. 15.
Heinrich W., geb. 26. 6. 1890 Straßburg i. E., 8. 6. 1912 prom. Straßburg i. E.

1020. 1925. **Waerden**, B. L. van der, Prdzt. a. d. U., Göttingen, Lotzestr. 45.
B. L. van der W., 1927 hab. Göttingen.

1908. **Wägler**, C., Dr., Oberst.-Prof. am Realgymnasium, Gera, Blücherstr. 51.
Carl W., geb. 29. 5. 1876 Chemnitz, 2. 3. 1901 prom. Leipzig, 1. 10. 1914 Ober-St. Gera, 9. 11. 1918 Prof. Gera.

1925. **Walfisz**, A., Dr., Versicherungsmathematiker, Warschau, Królewska 27 m. 16.
Arnold W., geb. 2. 7. 1892 Warschau, 30. 11. 1921 prom. Göttingen.

1907. **Walker**, B. M., Direktor des Agricultural College, Starkville Miss. (*U.S.A.*).

1908. **Wallner**, K., Dr., St.-Prof., Rothenburg o. T.
Karl W., geb. 31. 8. 1881 Augsburg, 1905 prom. München.

1921. **Walther**, A., Dr., Prdzt., Ass. am Math. Inst. d. U., Göttingen, Wilhelm-Weber-Str. 3.
Alwin W., geb. 6. 5. 1898 Reick b. Dresden, 10. 5. 1922 prom. Dresden.

1925. **Walsh**, J. L., Ass., Prof. Harvard, 547 Widener Library, Cambridge, Mass. (*U. S. A.*).
Josef Leonhard W., geb. 21. 9. 1895 Washington D. C., Ph. D. 1920 Harvard University, 1921/24 Instructor in Math. Harvard, 1924 Ass. Prof. Harvard.

1891. **Wangerin**, A., Dr., *G. R.-R.*, Prof. a. d. U., Halle a. d. S., Wilhelmstr. 37.
Albert W., geb. 18. 11. 1844 Greifenberg i. Pommern, 1866 prom. Königsberg i. Pr., 1868/69 Oberlehrer Posen, 1869/76 Berlin, 1876 a.o. Prof. Berlin, 1882 o. ö. Prof. Halle a. d. S., seit 1919 emer.

1928. **Warhaftman**, St., Schriftleiter, Warschau (*Polen*), Marczalkowska 81.
Stanislaw W., geb. 26. 3. 1899 Warschau, Schriftleiter der math.-phys. Monatsschrift „Mathesis Polska".

1916. **Wäsche**, H., Dr., St., Magdeburg, Georgsplatz 4/5.

1030. 1925. **Wäsche**, H., cand. math., Barmen (Rhld.), Ziethenstr. 5.
Hans W., geb. 21. 7. 1903 Barmen.

1893. **Wassiliew**, A., Dr., Prof., Moskau, Rasgulai, Denisovski 18.
Alexander W., geb. 5. 8. 1853 Kasan, 1874 hab. Kasan, 1884 Dr. d. Math., 1884/99 Prof., seit 1899 emer.

1895. **Weber**, E. Ritter v., Dr., Prof. a. d. U., Würzburg, Randesackererstr. 46a.
Eduard W., geb. 1870 München, 1893 prom. München, 1895 hab. München, 1907 a.o. Prof. Würzburg, 1909 o. ö. Prof. Würzburg.

1921. **Weber**, K., Frl., stud. math., Frankfurt a. M., Oberweg 46.

1897. **Weber**, M., Dr.-Ing., Prof. a. d. Technischen Hochschule, Charlottenburg.
Moritz W., geb. 18. 7. 1871 Leipzig, 1904/13 Prof. a. d. T. H. Hannover, seit 1913 in obiger Stellung.

1909. **Weickmann**, L., Dr., Prof. a. d. U., Leipzig, Denkmalsallee 110.

1913. **Weininger**, H., Ingenieur, Wien XVIII (*Österreich*), Schulgasse 58.

1905. **Weinnoldt**, E., Dr., Prof., Direktor der städt. Handelslehranstalten, Hannover, Stiftstr. 15.
Ernst W., geb. 28. 10. 1863 Kiel, 1885 prom. Kiel, 1901 hab. Kiel, 1888 Wissensch. Lehrer am Realgymn. Berlin, 1890 a. d. Baugewerkschule Magdeburg, 1892 Prof. a. d. Kaiserl. Marine-Akademie u. -Schule Kiel, seit Ostern 1910 in obiger Stellung.

1917. **Weinreich**, W., Dr., Bibliothekar a. d. Senckenbergischen Bibliothek, Frankfurt a. M.-Eschersheim, Lindenring 10.
Wilhelm W., geb. 8. 4. 1889 Karlsruhe i. B., 1. 3. 1913 prom. Heidelberg.

1921. **Weinreich**, Dr., St., Göttingen, Schillerstr. 21.

1040. 1928. **Weinstein**, A., Dr., Prdzt. a. d. Eidgen. T. H. Zürich, z. Zt. Hamburg, Math. Sem. d. U.
Alexander W.

Jahr des Eintritts

1924. **Weiss**, E. A., Dr., Prdzt. u. Ass. a. Math. Sem. d. U., Bonn a. Rh., Endenicher Allee 20.
Ernst August W., geb. 5. 5. 1900 Straßburg i. E., 1. 3. 1924 prom. Bonn, 1927 hab. Bonn.

1912. **Weisweiler**, Ober-St., Neuß, Jülicherstr. 68.
Casimir W., geb. 23. 7. 1886 Köln a. Rh.

1909. **Weitzenböck**, R., Dr., Prof. a. d. U. Amsterdam, Laren (*Nordholland*), „Klein Wahnfried".
Roland W., geb 26. 5. 1885 Kremsmünster, 1910 prom. Wien, 1912 hab. Wien, 1918 a.o. Prof. Prag, 1920 o. ö. Prof. Prag, 1920 o. ö Prof. Graz, seit 1922 in obiger Stellung.

1922. **Wellstein**, J., Dr., Ass., Prof. a. d. T. H., Karlsruhe i. B., Westendstr. 8.

1891. **Weltzien**, C., Dr., Prof., Berlin-Zehlendorf (Wsb.), Prinz-Handjery-Str. 3.
Carl W., geb. 15. 8. 1852 Schwerin (Mecklenburg), 1883 prom. Berlin.

1926. **Wendelin**, H., Dr. phil., Graz, Hofgasse 5 (Österreich).
Hermann W., geb. 5. 9. 1895 Wien, 1926 prom. Graz, seit 1926 Assistent a. d. U. Graz.

1899. **Wendler**, A., Dr., Ober-St., Erlangen, Auf dem Berg 12.
August Wilhelm W., geb. 5. 5. 1873 Nürnberg, 1900 prom. München.

1903. **Wendt**, E., Dr., Prof. a. d. Seefahrtschule, Bremen, Rembrandtstr. 20.
Ernst W., geb 12. 5 1872 Berlin, 1894 prom. Berlin.

1903. **Wernicke**, P., Dr., Prof., Cincinnati Ohio (*U. S. A.*), Moorman Ave. 2560.

1050. 1921. **Westenberger**, J., St.-Ass., Fulda, Langebrücke 46b.
Josef W., geb. 23 4. 1894 Sindlingen a. M., 12. 2. 1925 prom. Frankfurt a. M.

1908. **Westfall**, W., Dr., Prof. a. d. U, Columbia Mo. (*U. S. A.*).
Wilhelmus W., geb. 27. 1. 1879 Montague, 1905 prom. Göttingen, seit 1907 in obiger Stellung.

1900. **Westlund**, J., Prof. a. d. Purdue U., West La Fayette Ind. (*U. S. A.*), 469 Salisbury Str.
Jacob W., geb. 18 5. 1867 Örebro, 1898 prom. Yale, seit 1910 in obiger Stellung.

1908. **Weyl**, H., Dr., Prof. a. d. E. T. H., Zürich, Bolleystr. 52.
Hermann W., geb. 9. 11 1885 Elmshorn, 1908 prom. Göttingen, 1910 hab. Göttingen 1913 o. ö. Prof. a. d. T. H. Zürich.

1923. **Weyrich**, R., Dr., Prof. a. d. Deutschen T. H. Brünn, Augustinergasse 14.

1897. **White**, H. S., Dr., Prof. am Vassar College, Poughkeepsie N. Y. (*U. S. A.*).
Henry Selly W., geb. 20. 5. 1861 Casenovia, 1890 prom. Göttingen, seit 1905 in obiger Stellung.

1917. **Wiarda**, G., Dr., Prof., Prdzt. a. d. T. H., Kötzschenbroda b. Dresden, Sewenningstr. 2.

1927. **Widmer**, A., Dr., Prof., St. Gallen (*Schweiz*), Berneckstr. 36.
Adolf W., geb. 23. 4. 1893 in Zürich, 1918 prom. a. d. Eidgen. Techn. Hochschule seit 1919 Prof. für Math. a. d. Kantonschule St. Gallen.

1909. **Wieferich**, A., Dr., St. am Gymnasium, Stade.
Arthur W, geb. 27. 4. 1884.

1928. **Wiegandt**, W., Lehrer, Breesen b. Gnoien i. Meckl.
Walter W.

1060. 1900. **Wieleitner**, H., Dr., Oberstudiendir., Prdzt. a. d. U. München 2, SO 5, Neues Realgymnasium, Müllerstr. 7.
Heinrich W., geb 31. 10. 1874 Wasserburg a. Inn, 1901 prom. München (U.), 1900 Gymn.-Lehrer Speyer, 1909 Gymn.-Prof. Pirmasens, 1915 Realschulrektor Speier, 1920 Konrektor Augsburg, 1926 Neues Realgymnasium München, 1928 München (U.)

1897. **Wien**, W., Dr., *G. H.-R.*, Prof. a. d. U., München, Leopoldstr. 9.
Willi W., geb 13. 1 1864 Gaffken, 1886 prom. Berlin, 1892 hab. Berlin, 1896 a.o. Prof. Aachen (T. H.), 1899 o. Prof Gießen, 1900 o. Prof. Würzburg

1891. **Wiener**, H., Dr., *G. H.-R.*, Prof. a. d. T. H., Darmstadt, Grüner Weg 28.
Hermann W., geb. 15. 5. 1857 Karlsruhe, 8. 8. 1881 prom. München, 15. 5. 1885 hab. Halle a. S., 1. 10. 1894 o. ö. Prof. Darmstadt (T. H.).

Jahr des Eintritts

1926. **Wiener**, N., Prof. am Mass. Inst. of Technology, Boston (Mass.) (*U. S. A.*).
Norbert W.

1921. **Willers**, H., St., Göttingen, Wilhelm-Weber-Str. 33.
Hans W., geb. 26. 12. 1890 Hildesheim

1924. **Willers**, Fr., Dr., St., Prdzt. a. d. T. H., Charlottenburg, Leonhardtstr. 6.

1900. **Willgrod**, H., Dr., Prof., Oberst.-Dir. a. D., Chemnitz, Weststr. 60.
Heinrich W., geb. 10. 11. 1859 Bremen, 1883 prom. Göttingen.

1921. **Wilson**, B. M., Lecturer, Liverpool (*England*), 2, Grosvenor Terrace, Ullet Road.
B. M. W., geb. 14. 11. 1896 London, 1919 B. A. Cambridge, 1922 M. A. Cambridge, seit 1920 Lecturer in Mathematics at the U. Liverpool.

1927. **Wiman**, A., Dr., Prof. a. d. U., Uppsala (*Schweden*), Math. Inst. d. U.
Anders W., geb. 11. 2. 1865 Hammarlöf, 27. 5. 1893 prom. Lund, 27. 11. 1892 Doz. Lund, 5. 12. 1909 a.o. Prof. Uppsala, 31. 12. 1906 Prof. Uppsala.

1918. **Wimmer**, J., St., Pasing b. München, Kirchenstr. 11.
Joseph W., geb. 8. 3. 1887 Solla.

1070. 1921. **Windau**, W., Dr., Göttingen, Ob. Karspüle 22.

1906. **Winkelmann**, M., Dr., Prof. a. d. U., Jena, St. Jakobstr. 22.
Max W, geb. 10. 1. 1879 Berlin, 1904 prom. Göttingen, 1907 hab. Karlsruhe i. B., 1911 a.o. Prof. Jena, 1923 o. ö. Prof. Jena.

1921. **Winternitz**, A., Dr., Prdzt., Ass. am Math. Inst. d. Deutschen U., Prag II, Opatovická 8.
Arthur W., geb. 16. 6. 1893 Oxford, 3. 7. 1917 prom. Prag, 1921 hab. Prag.

1921. **Wirth**, J., Dr., Reichskanzler a. D., Berlin, Lutherstr. 3.
Josef W., geb. 6. 9. 1879 Freiburg i. B., 1905 prom., 1908 Prof. am Realgymn. Freiburg i. B., 1918 Bad. Finanzminister, 1920 Reichsminister d. Innern, 1921/23 Reichskanzler.

1891. **Wirtinger**, W., Dr., Prof. a. d. U., Wien XVIII, Köhlergasse 26.
Wilhelm W., geb. 19. 7. 1865 Ybbs, 1887 prom. Wien, 1890 hab. Wien, 1895 a.o. Prof. Innsbruck, 1897 o. ö. Prof. Innsbruck, 1903 o. ö. Prof. Wien.

1893. **Witting**, A., Dr., Ober-St. a. D., Prof., Dresden-Strehlen, Waterloostr. 13.
Alexander W., geb. 18. 12. 1861 Dresden, 1886 prom. Göttingen.

1891. **Wölffing**, E., Dr., Prof. a. d. T. H., Stuttgart, Hackländerstr. 38.
Ernst W., geb. 2. 3. 1864 Stuttgart, 1889 prom. Tübingen, 1895 hab. Stuttgart, 1900 Titularprof. Stuttgart.

1924. **Wolf**, K., Dr., Prof. a. d. T. H., Wien XIV, Obkirchergasse 42.
Karl W., geb. 1886 Bielitz (Schles.), 1911 prom., 1915 hab. Wien, 1921 a.o. Prof. Wien.

1891. **Wolf**, M., Dr., *G.-R.*, Prof. a. d. U., Dir. d. Sternwarte, Heidelberg, Königstuhl.
Max W., geb. 21. 6 1863 Heidelberg, 1888 prom. Heidelberg, 1890 hab. Heidelberg, 1893 a.o. Prof. Heidelberg, 1902 o. ö. Prof. Heidelberg.

1912. **Wolff**, G., Dr., Studiendirektor, Hannover, Isernhagener Str. 16.

1080. 1914. **Wolff**, H., Dr., St., Berlin-Wilmersdorf, Zähringerstr. 19.
Hermann W., geb. 18 2. 1878 Marburg a. L., 1903 prom. Bonn.

1927. **Wolkenstörfer**, H., Ass. am Math. Inst. d. T. H., München, Math. Inst. d. T. H.
Hans W., geb. 12. 2. 1898.

1903. **Worm**, H., Dr., Ober-St., Prof. an der Fürstenschule, Meißen, Freiheit 16.
Hans W., geb. 15. 3. 1875 Greiz, 20. 7. 1900 prom. Leipzig.

1913. **Wünschmann**, K., Dr., St., Eisleben, Clingesteinstr. 10.
Karl W., geb. 24. 7. 1881 Mülsen St. Micheln (Sachsen), 28. 10. 1905 prom. Greifswald.

1913. **Wulkow**, H., Mathematiker, Hamburg, Ifflandstr. 12.

1928. **Yamamoto**, Jkuzô, Prof. a. d. 4. Kôtôgakko, Kanazawa (*Japan*).

1927. **Yoshida**, M., Sendai (*Japan*), Math. Institut d. U.
Minoru J., geb. 10. 4. 1902 Yamada (*Japan*).

1925. **Yoshimatsu**, K., Naval Engineering School Nakamaizuru, Kyôtofu (*Japan*).
Kotaro Y., geb. 18. 2. 1899 Kobe.

Jahr des Eintritts

1928. **Yosida**, Y., Dr., Prof. a. d. U., Prof. a. d. Daiiti Koto Gakko, Tokyo (*Japan*), Daiiti Koto Gakko.
Yôiti Y., geb. 11. 7. 1898 Tokyo, 1923 prom. Tokyo, 1923 Prof. Daiiti Koto Gakko, 1927 a.o. Prof. Tokyo.

1905. **Young**, A. E., Prof. a. d. Miami Universität, Oxford O. (*U. S. A.*).

1090. 1903. **Young**, J. W., Prof. am Dartmouth College, Hanover N. H. (*U. S. A.*)

1899. **Young**, W. H., Dr., Prof., The Athenaeum Club, London SW und Collogne la Conversion (*Schweiz*).
William Henry Y., geb. 20 10. 1863 London, 1884 prom. Cambridge, hab. Cambridge, 1910/20 o. Prof. a. d. U. Liverpool, 1913/16 Calcutta, 1919/23 Wales, 1904 Sc. D. Cambridge, 1913 D. Sc. Calcutta, 1913 Dr. ès. Sc. Math. Genf, jetzt im Ruhestand.

1903. **Zacharias**, M., Dr., St., Prof., Berlin NW 52, Melanchthonstr. 27.
Max Z., geb. 5. 5. 1873 Berlin, 1903 prom. Rostock, seit 1901 St.

1926. **Zapletal**, J., cand. rer. math., Brünn (*Tschechoslow.*), Augartengasse 12.
Josef Z., geb. 30. 8. 1902.

1927. **Zarycki**, M., Prof. am IX. Staatsgymnasium, Lemberg, ul. Obertyńska 4.
Miron Z., geb. 21. 5. 1889, Mohylenycia stara (*Polen*).

1924. **Zemaitis**, Z., Dr., Prof. a. d. Litauischen Staatsuniversität in Kaunas (*Lit.*).

1899. **Zermelo**, E., Dr., Prof., Freiburg i. B., Karlstr. 60.
Ernst Z., geb 27. 7 1871 Berlin, 1894 prom. Berlin, 1899 hab. Göttingen, 1910/16 o. ö. Prof. Zürich, 1916/26 im Ruhestand, 1926 o. Honorarprof. a d. U. Freiburg i. B.

1911. **Zervos**, P., Dr., Prof., Athen (*Griechenland*), Sozopolkosstr. 88.
Panaiotis Z., geb. 11. 6. 1878 Corfu, 1889 prom. Athen, seit 1915 a. d. 5. Schule Athen.

1926. **Ziegler**, M., Volksschullehrer, Leipzig-Lindenau, Gellertplatz 1.
Max Z., geb. 30. 6. 1883 Dresden, 1906 Volksschullehrer Leipzig.

1928. **Zimmermann**, E., Dr., Prof, Rosenthal I bei Reichenberg (*Tschechoslow.*)

1100. 1893. **Zindler**, K., Dr., Prof. a. d. U., Innsbruck (*Österreich*), Schubertstr. 3.
Konrad Z., geb. 1866 Laibach, 1890 prom. Graz, 1893 hab. Graz, 1894 Wien, 1900 a.o. Prof. Innsbruck, 1904 o. ö. Prof. Innsbruck.

1892. **Ziwet**, A., Prof. a. d. U., Ann Arbor Mich. (*U. S. A.*), Packardstr. 532.
Alexander Z., geb. 8. 2. 1853 Breslau, seit 1888 in obiger Stellung.

1926. **Zlousic**, Lj., Franziskanerordenspriester, Gymnasiallehrer, Visoko (Bosna) (*Jugoslawien*).
Ljudevit Z.

1892. **Żorawski**, K. v., Dr., Prof. a. d. U., Krakau (*Polen*), Garbarska 7.
Kasimir Z., geb. 2. 6. 1866 Szozurzyn, 1891 prom Leipzig, 1892 hab. Lemberg, 1893 Krakau, 1895/98 a o. Prof., seit 1898 o. Prof. Krakau.

1902. **Zühlke**, P., Dr., Oberschulrat, Cassel, Wilhelmshöhe, Kaiser-Friedrich-Str. 2.
Paul Z., geb. 1. 7. 1877 Berlin, 1902 prom Rostock, 1901/12 Oberlehrer Charlottenburg und Grunewald, 1903/10 Ass. und Doz. a. d. T. H. Charlottenburg, 1912/19 Realgymn.-Dir. Landeshut i. Schl., 1919/21 Oberrealschul-Dir. Kiel, seit 1921 beauftragter Dozent a. d. U. Kiel, seit 1923 Oberschulrat im Provinzialschulkoll. Cassel und beauftragter Dozent a. d. U. Marburg.

1909. **Zupančič**, R., Dr., Prof. a. d. U., Laibach.
(Siehe unter Suppantschitsch.)

1927. **Zygmund**, A., Dr., Doz. a. d. U., Warschau, Chlodna 56.
Antoni Z., geb. 26. 12. 1900 Warschau, seit 1923 Ass. a. d. T H. Warschau, 22. 11. 1923 prom., Juni 1926 hab.

Unauffindbare Mitglieder mit Angabe der zuletzt bekannt gewordenen Adresse.

Ackermann, Dr., St., Schmargendorf, Franzensbaderstr. 4.
Binder, W., Dr., Prof., Stuttgart, Augustenstr. 7.
Dohmen, Dr., Austin Texas (*U. S. A.*), Ellerystreet 39.
Edalji, J, Prof., Teheran (*Persien*), 6 Gulamkhan Avenue.

Genzel, Dr., Schmagorei b. Reppen, Neumark.
Hecht, Dr., Prof., La Croix (*Frankreich*), Dép. Var.
Lorenz, Gymnasiallehrer i. R., Friedland i. Meckl., Königstr. 80.
Olbrich, W., Dr., Prof., Wien 18, Bäckerbrünngasse 11.
Schumacher, Dr., Prof., München, Wilhelmstr. 6.
Werner, A., Dr., Königsberg, Butterberg 6.
Wilenzky, Dr., Bern (*Schweiz*), Lentulusstr. 41.

Gestorben:

Bauch, F., Oberlehrer a. D., Hamburg 21.
Bleicher, H., Dr., Prof., Frankfurt a. M.
Henrici, O., Dr., Prof., London.
Schoenflies, A., Dr., Prof., Frankfurt a. M.
Staude, O., Dr., Prof., Rostock.
Sterneck, R., Dr., Prof., Graz.
Wiechert, E., Dr., Prof., Göttingen.

Die **Bibliothek** des verstorbenen Herrn **Schoenflies** ist ganz oder geteilt zu verkaufen. Auskunft erteilt Frau Geheimrat Schoenflies Frankfurt a. M., Grillparzerstraße 59.

Berichtigungen zum Mitgliederverzeichnis.[1])

1902. d'Adhémar, Vicomte R., Dr., ancien Prof. de la faculté libre des sciences de Lille, Lambertsart (Nord) (*Frankreich*), 87 rue de Lille.
1923. Alexandroff, P., Dr., Prof. a. d. U., Moskau (*Rußland*), Staropimenowski per. 8; kw. 5.
1928. Baer, R., Dr., Prdzt. a. d. U., Halle (Saale), Hohenzollernstr. 10 pt., bei Voigt.
1910. Baldus, R., Dr., Prof. a. d. T. H., Karlsruhe, Mozartstr. 8.
1921. Bessel-Hagen, E., Dr., Prdzt. a. d. U., Bonn a. Rh., Lessingstr. 22.
1908. Blaschke. W., Dr., Prof. a. d. U., Hamburg 36, Rothenbaumchaussee 21.
1923. Brennecke, E., Dr., Observator am Geodät. Inst. Potsdam, Berlin-Nikolassee, Teutonenstr. 1 a.
1920. Carnap, R., Dr., Prdzt. a. d. U., Wien XIII, Ameisbachzeile 5.
1893. Dalwigk, F. v., Dr., Prof., München-Gern, Magdalenenstr. 17.
1914. Fraenkel, A., Dr., Prof. a. d. U., Kiel, Niemannsweg 36.
1918. Gaede, E., Dr., St. am Gymnasium, Oschersleben (Bode), Halberstädter Str. 84.
1928. Grüss, G., Dr., Berlin NW 87, Tile Wardenbergstr. 28 IV.
1928. Haack, W., Dr., Danzig-Langfuhr, Althoffweg 5.
1928. Hirano, T., Tokyo-Fuka (*Japan*), 122, Amanuma, Suginami-machi.
1905. Hoffmann, C., Dr., Ober-St.-Dir., Ravensburg (Württemberg), Schützenstr. 19.
1927. Hurewicz, W., Dr., Amsterdam (*Holland*), Minervalaan 13.
1925. Kawaguchi, A., Dr., Hamburg, Hoheluftchaussee 38 I, p. Adr.: Prof. Nakajima.
1921. Krull, W., Dr., Prof. a. d. U., Erlangen, Universität.
1908. Kuwaki, A., Dr., Kyushu, Imp. University, Fukuoka (*Japan*).
1927. Löbell, F., Dr., Prdzt. a. d. T. H. Stuttgart, Cannstatt, Königstr. 83.
1921. Loewner, K., Dr., Prof. a. d. U., Köln a. Rh., Math. Sem. der Universität.
1927. Lorenz, P., Dr., wiss. Hilfsarbeiter am Inst. f. Konjunkturforschung, Berlin-Charlottenburg 5, Trendelenburgstr. 1, Gartenh. II.
1924. Mayer, W., Dr., Wien IX, Strudlhofgasse 5 (Math. Sem.).
1924. Mayrhofer, K., Dr., Prdzt., Ass. a. d. U., Tübingen, Math. Sem. d. U.
1923. Nakajima, S., Prof., Hamburg, Hoheluftchaussee 38 I.
1923. Neugebauer, O., Dr., Prdzt., Göttingen, Calsowstr. 57.
1921. Pollaczek, F., Dipl.-Ing., wiss. Hilfsarbeiter des Reichspostzentralamtes, Berlin-Tempelhof, Schöneberger Str. 11/15.
1911. Radon, J., Dr., Prof. a. d. U., Breslau 18, Kaiser-Wilhelm-Str. 195.
1926. Rehbock, F., Dr., Stuttgart, Hölderlinplatz 2 b.
1924. Schmehl, H., Dr., Observator am Geodät. Inst. Potsdam, Berlin-Steglitz, Rothenburgstr. 5.
1927. Schmidt, H., Dr., Ass. am Math. Sem. d. U., Jena, Kernbergstr. 12.
1918. Smekal, A., Dr., Prof. a. d. U., Halle (Saale), Paradeplatz 6.
1920. Süß, W., Dr., Prdzt. a. d. U., Greifswald, Karlsplatz 3.
1912. Szász, O., Dr., Prof. a. d. U., Frankfurt a. M., Kettenhofweg 99 I.
1925. Takasu, T., Dr., Prof. a. d. Tohoku U., Sendai (*Japan*).
1921. Vietoris, L., Dr., Prof. a. d. T. H., Wien IV (*Österreich*), Karlsplatz 13.
1925. Waerden, B. L. van der, Prof. a. d. U., Groningen (*Holland*), J. W. Frisostraße 80 a.
1921. Walther, A., Dr., Prof. a. d. T. H., Darmstadt, Techn. Hochschule.
1902. Zühlke, P., Dr., Prof., Oberschulrat, Kassel-Kirchditmold, Riedwiesensiedlung.

---

1) In dieses Verzeichnis sind nur Berichtigungen aufgenommen, die die Anschriften betreffen.

Neue Mitglieder.

1928. Birkhoff, G. D., Prof. a. d. Harvard University, Cambridge (Mass.) (*U. S. A.*), 984 Memorial Drive.
1928. Burkas, H., St.-Ass., Waldsee (Württemberg), Klosterhofstr.
1928. Cairns, W. D., Dr., Prof., Oberlin College, Oberlin (Ohio) (*U. S. A.*), Departements math.
1928. Dehmer, F., Dr., Hilfslehrer am Bundesrealgymnasium Wien II, Wien IX, Liechtensteinstr. 123/III St. I, 14.
1928. Gassmann, F., Dr., Prof., Prdzt. a. d. Eidgen. Polytechn., Aarau (*Schweiz*), Rütliweg 2.
1928. Haslam-Jones, U. S., Liverpool, 44 Ulled Road Rankin Hall.
1928. Jung, K, Ass. am Geodät. Inst., Potsdam, Saarmunderstr. 17.
1929. Leeskamer Bosscha, Leiden (*Holland*), Langebrug 111.
1928. Lehrstuhl für Geometrie a. d. T. H., Karlsruhe i. B.
1928. Maier, W., Dr., Prdzt. a. d. U., Frankfurt a. M., Schloßstr. 113.
1929. Mathematisches Seminar der U., Debrecen (*Ungarn*).
1928. Nagumo, M., Dr., Math. Inst. d. K. U., Tokyo (*Japan*).
1929. Nyström, E. J., Dr., Dozent a. d. U., Helsingfors-Åggelby (*Finnland*), Selberg 6.
1928. Scholz, A., Dr., Ass. am Math. Sem. d. U., Berlin-Charlottenburg 1, Scharrenstr. 39.
1928. Schwan, W., Dr., Düsseldorf-Oberkassel, Askanierstr. 57.
1928. Shimizu, T., Dr., Ass. am Math. Inst. d. K. U., Tokyo (*Japan*).
1928. Stadtbibliothek, Berlin C 2, Breite Str. 37.
1928. Suzuki, S., Prof. a. d. Vorbereitungsschule d. K. U. in Hokkaido (*Japan*), z. Zt. Berlin, Ahornstr. 1, Japan. Botschaft.
1929. Terracini, A., Dr., Prof. a. d. U., Torino (*Italien*), Corso Francia 19bis.
1929. Tricomi, Fr., Dr., Prof. a. d. U., Torino (113) (*Italien*), Corso Re Umberto 21.
1928. Wohlrab, Gerda, St.-Ass., Chemnitz, Beethovenstr. 13 II.
1929. Zányi, L., Gymnasiallehrer, Budapest IV (*Ungarn*), Váci u. 33.
1928. Zeitz, H., Bankdirektor, Charlottenburg 2, Schillerstr. 11.

Ackermann, Dr., St., Berlin-Wilmersdorf, Münstersche Str., Goetheschule.
(Bisher unauffindbar.)

Ausgetreten.

Jaerisch, Bergedorf bei Hamburg.

Habilitationen.

F. Löbell hat sich a. d. T. H. Stuttgart habilitiert.
R. Remak hat sich a. d. U. Berlin habilitiert.
H. Schmehl, Observator am Geodät. Inst. in Potsdam, hat sich a. d. T. H. Berlin habilitiert.

Ernennungen, Auszeichnungen usw.

R. Furch, a.o. Prof. a. d. U. Rostock, wurde zum o. Prof. daselbst ernannt.
F. Hausdorff, Prof. a. d. U. Bonn, wurde zum Mitglied der Math. Gesellschaft in Moskau gewählt.
L. Koschmieder, n. b. a.o. Prof. a. d. U. Breslau, wurde zum o. Prof. a. d. Deutschen T. H. Brünn ernannt.

W. Krull, Prdzt. a. d. U. Freiburg i. B., wurde zum o. Prof. a. d. U. Erlangen ernannt.

J. Lense, a.o. Prof. a. d. T. H. München, wurde zum o. Prof. an der gleichen Hochschule ernannt.

K. Loewner, Prdzt. a. d. U. Berlin, hat sich nach Köln umhabilitiert und wurde zum n. b. a.o. Prof. ernannt.

Die Wiener Akademie der Wissenschaften hat den R. Lieben-Preis, der für die beste mathematische Arbeit eines Österreichers aus den letzten drei Jahren verliehen wird, Herrn Karl Menger für seine dimensionstheoretischen Abhandlungen zuerkannt.

A. Ostrowski, Prdzt. a. d. U. Göttingen, wurde zum o. Prof. a. d. U. Basel ernannt.

J. Radon, o. Prof. a. d. U. Erlangen, wurde zum o. Prof. a. d. U. Breslau ernannt.

B. L. van der Waerden, Prdzt. a. d. U. Göttingen, wurde zum o. Prof. a. d. U. Groningen ernannt.

A. Walther, Prdzt. a. d. U. Göttingen, wurde zum o. Prof. a. d. T. H. Darmstadt ernannt.

L. Vietoris, a.o. Prof. a. d. U. Innsbruck, wurde zum o. Prof. a. d. T. H. Wien ernannt.

Gestorben.

R. Birkeland, G. Bohlmann, W. Burnside, Th. Häbler, E. Hoppe, W. Kapteyn, S. Oppenheim, W. Schachenmaier, H. Späth, E. Steinitz, C. Weltzien, W. Wien, W. Windau.

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER VEREINIGUNG

HERAUSGEBER: L. BIEBERBACH
O. BLUMENTHAL / G. FABER

38. BAND
1.–4. HEFT

1929

BERLIN · B. G. TEUBNER · LEIPZIG

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

HERAUSGEGEBEN VON
L. BIEBERBACH IN BERLIN, O. BLUMENTHAL IN AACHEN,
G. FABER IN MÜNCHEN
VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG C 1, POSTSTRASSE 3

Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Bücher usw.) sind an Prof. Dr. L. Bieberbach in Berlin-Dahlem, Gelfertstraße 16, zu richten.

Die Verfasser erhalten unentgeltlich: von im Auftrag der D. M.-V. erstatteten Berichten bis zu einem Umfang von $1^1/_2$ Bogen und anderen Beiträgen bis zu $^1/_2$ Bogen Umfang 100 Sonderabdrücke, bei darüber hinausgehendem Umfange 50 Sonderabdrücke, von kleineren Mitteilungen 10.

Jeder Band umfaßt 12 Hefte in 3 bis 4 Lieferungen. Der Preis des Bandes beträgt für **Mitglieder** der D. M.-V., die ihr Abonnement bei der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner, Leipzig C 1, Poststraße 3, aufgeben müssen, RM 18.—, für **Nichtmitglieder** RM 27.—. Es bleibt überlassen, den Betrag auf einmal nach Erhalt der ersten Lieferung oder anteilig nach Erhalt einer jeden Lieferung zu erstatten. Der Preis für Einzellieferungen ist 20% höher als der Abonnementspreis.

Auf mehrfachen Wunsch bildet künftig das Mitgliederverzeichnis eine besondere Lieferung. Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung zählt z. Z. rund 1000 Mitglieder. Der Mitgliedsbeitrag für 1929 ist auf RM 5.— festgesetzt worden. Der Vorstand wurde ermächtigt, den Mitgliedern des Vereins zur Förderung des math.-nat. Unterrichtes, den Studenten, Assistenten und Privatdozenten auf ein an den Schriftführer der D. M.-V. (Prof. Bieberbach, Berlin-Dahlem, Gelfertstraße 16) zu richtendes Ersuchen den Beitrag auf RM 3.— zu ermäßigen. Auch sonst wird, wo es die finanziellen Verhältnisse erheischen, bereitwilligst entgegengekommen werden. Beitrittserklärungen nimmt ebenfalls der Schriftführer der Vereinigung oder die obengenannte Verlagsbuchhandlung entgegen. Der Jahresbeitrag ist an die Deutsche Math.-Vereinigung, Postscheckkonto 54126 beim Postscheckamt Leipzig, einzusenden.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES

1. Abteilung

2. Abteilung

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER VEREINIGUNG

HERAUSGEBER: L. BIEBERBACH
O. BLUMENTHAL / G. FABER

ACHTUNDDREISSIGSTER BAND

MIT DEN BILDNISSEN VON
JOHANN LUDWIG HEIBERG UND WLADIMIR STEKLOFF
UND 37 FIGUREN IM TEXT



1929
LEIPZIG UND BERLIN
VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER

Inhalt.

1. Abteilung.

Berichte, Nachrufe und Abhandlungen.

2. Abteilung.

Angelegenheiten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Aufgaben und Lösungen.

Mitteilungen und Nachrichten.

Akademien. Gesellschaften. Vereinigungen. Versammlungen.

Preisaufgaben und gekrönte Preisschriften.

Sprechsaal der Enzyklopädie

Literarisches.

Besprechungen.

Verfasserverzeichnis.

(Die im folgenden gebrauchte Abkürzung „H. V.“ bedeutet „Hamburger Vortrag“.)

Einige Probleme der Dynamik.

Von George D. Birkhoff in Cambridge (Mass. *U. S. A.*).[1]

Mit 4 Figuren im Text.

Seit Hill und Poincaré sucht man die Bewegungen eines gegebenen dynamischen Systems in ihren großen qualitativen Zügen zu charakterisieren. Diese letzte Phase der Entwicklung der theoretischen Dynamik ist für den Mathematiker vom höchsten Interesse. Die Wichtigkeit von qualitativen dynamischen Ideen für die exakten Wissenschaften kann kaum zu hoch bewertet werden. Um solche Ideen zu erläutern, werde ich einige einfache Beispiele kurz betrachten. Nach dieser Vorbereitung will ich die Aufmerksamkeit auf einige ungelöste dynamische Probleme lenken.

Von sehr großer Wichtigkeit ist zum Beispiel die nicht ganz genau zu fassende Idee, daß irgendeine stabile Bewegung eines dynamischen Systems entweder periodisch ist oder in der Nähe einer periodischen Bewegung verläuft. Um einen sehr einfachen Fall zu behandeln, betrachten wir die Bewegung eines Teilchens P auf einer Geraden unter dem Einfluß einer Kraft f, die nur von der Lage und Geschwindigkeit von P abhängt.[2] Wir werden annehmen, daß es nur *eine* Gleichgewichtslage O auf der Geraden gibt. Wenn also x die Entfernung OP und t die Zeit bedeuten, haben wir eine Gleichung

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right),$$

wo f eine gegebene Funktion ist. Weil die gegebene Bewegung stabil ist, so haben wir

$$|x| \leqq M, \quad |y| \leqq M$$

für $t \geqq 0$, wo $y = dx/dt$ ist. Aber die obige Gleichung der zweiten Ordnung führt sogleich zu den zwei Gleichungen erster Ordnung

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = f(x, y),$$

1) Der Aufsatz gibt zwei Vorträge wieder, die der Verfasser als Gast der Universität Berlin am 30. 6. und am 3. 7. 28 gehalten hat.

2) Dieses Beispiel sowie die anderen hier gegebenen sind in meinem Buche „Dynamical Systems" (New York, 1927) in ausführlicher Weise behandelt. Dort finden sich auch weitere Literaturangaben.

wo x, y als rechtwinklige Koordinaten betrachtet sind. Allen Bewegungen entsprechen dann Kurven, welche die Ebene einmal erfüllen. Das Gleichgewicht in O entspricht einer Punktkurve in $x = y = 0$, die wir auch mit O bezeichnen.

Bei $y > 0$ bewegt sich jeder Punkt längs seiner Kurve nach rechts, weil $dx/dt > 0$ ist. Bei $y < 0$ bewegt jeder Punkt sich nach links. Auf der x-Achse bewegt sich jeder Punkt in der Richtung der y-Achse oder in der entgegengesetzten Richtung. Die gegebene stabile Bewegung entspricht einer Kurve, welche für $t \geqq 0$ in einem Quadrat $|x| \leqq M$, $|y| \leqq M$ liegt.

Wir betrachten erstens die einfachste Möglichkeit, daß der bewegte Punkt niemals die x-Achse überschreitet. Hier kann nur die Möglich-

Fig. 1a. Fig. 1b. Fig. 1c.

keit eintreten, daß der Punkt sich der Gleichgewichtslage nähert, wenn t unendlich wächst, wie in der Fig. 1a.

Bei einem oder zwei Übergängen über die Achse ist die Figur wie in 1b oder 1c resp. Bei zwei Übergängen müssen die beiden Übergänge auf entgegengesetzten Seiten der Gleichgewichtslage liegen, weil auf einer und derselben Seite die Richtung immer dieselbe ist. Hier haben wir eine Bewegung des Teilchens P, welche einmal oder zweimal durch die Gleichgewichtslage oszilliert, um sich dann dieser Lage zu nähern. Bei drei Übergängen A, B, C ist es augenscheinlich, daß C nicht nur auf derselben Seite wie A liegt, sondern zwischen O und A. Hier geht das Teilchen dreimal durch die Gleichgewichtslage, aber die dritte Schwingung ist geringer als die erste. Nachher nähert sich P dieser Lage. Diese Prozesse lassen sich fortsetzen. Wir müssen eine endliche Anzahl von immer kleineren Schwingungen haben und nachher eine Annäherung an die Gleichgewichtslage, oder unendlich viele Schwingungen. In diesem letzten Fall ist die Bewegung entweder genau periodisch, oder die Schwingungen wachsen, um sich einer periodischen Bewegung zu nähern, oder sie verringern sich, um sich einer solchen periodischen Bewegung zu nähern, oder sie ver-

Fig. 2.

ringern sich, um sich der Gleichgewichtslage zu nähern. Mindestens in diesem speziellen Fall ist die obige allgemeine Idee eines Zusammenhanges zwischen Stabilität und Periodizität gerechtfertigt.

Bei tieferer Betrachtung dieser Idee erscheinen gewisse „zentrale Bewegungen" sowie „rekurrente Bewegungen" als die wirklichen Verallgemeinerungen der periodischen Bewegungen.

In der klassischen Dynamik sind die Differentialgleichungen meistens von der Hamiltonschen oder kanonischen Form. Im einfachsten Fall eines Freiheitsgrades sind die zwei Differentialgleichungen diese:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \tag{1}$$

wo H (die Energie) eine gegebene analytische Funktion von p und q ist. Durch Multiplikation dieser zwei Gleichungen mit $\partial H/\partial p$ und $\partial H/\partial q$ und Addition sehen wir sofort, daß in der x, y-Ebene ein Punkt P sich längs einer Kurve H = Konst. bewegt. Daher muß die Bewegung entweder instabil sein oder periodisch oder einem Gleichgewichtszustand (p_0, q_0) sich nähern. Ferner kann man bei Benutzung des Integrals H = Konst. diese Differentialgleichungen integrieren.

Wir wollen nun ein Hamiltonsches System von zwei Freiheitsgraden betrachten, weil es der einfachste unlösbare Fall ist. Die Gleichungen sind

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2), \tag{2}$$

wo H eine gegebene analytische Funktion der vier Variablen p_1, q_1, p_2, q_2 ist. Mit Hilfe des bekannten Integrals der Energie, H = Konst., und der Unabhängigkeit des H von t kann man die Ordnung dieses Systems in rein formaler Weise zweimal reduzieren. Diese Reduktion ist eine wohlbekannte und hier nicht nötig durchzuführen. Die neuen vereinfachten Gleichungen können in der Form eines Hamiltonschen Systems von einem Freiheitsgrad ausgedrückt werden wie folgt:

$$\frac{dp}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dq}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p}. \tag{3}$$

Hier ist H eine bekannte Funktion der Variabeln p, q, τ. Wir werden diese Reduktion später gebrauchen.

Wenn p_1, q_1, p_2, q_2 die Koordinaten eines Punktes in einem vierdimensionalen Raum bedeuten, so definieren die ursprünglichen vier Gleichungen eine bestimmte Strömung einer Flüssigkeit in diesem Raum. Die Geschwindigkeitskomponenten sind gerade die vier Größen auf den rechten Seiten der Gleichungen (2). Jeder Punkt (p_1, q_1, p_2, q_2) repräsentiert einen bestimmten Bewegungszustand. Die Stromlinien

oder Bewegungskurven entsprechen allen möglichen Bewegungen des Systems. Die Gesamtheit aller möglichen Punkte entspricht der „Zustandsmannigfaltigkeit“ und kann entweder offen oder geschlossen sein. Zwei solche dynamische Systeme heißen „äquivalent“, wenn eine Punkttransformation existiert, welche die Punkte und die Bewegungskurven des einen Systems in die Punkte und die Bewegungskurven des anderen überführt.

Das wirkliche Ziel der Dynamik ist, alle Invarianten eines gegebenen Systems gegenüber solchen Transformationen zu bestimmen, so daß es möglich wird, die Frage, ob zwei solche Systeme äquivalent sind oder nicht, zu beantworten.

Im allgemeinen existieren solche Invarianten nicht im großen, sondern sie existieren in der Nähe eines Gleichgewichtszustandes oder (etwas allgemeiner gesprochen) einer periodischen Bewegung. Daher wollen wir die Nachbarschaft einer geschlossenen Bewegungskurve betrachten, welcher einer solchen periodischen Bewegung entspricht.

Wegen unserer Reduktion betrachten wir nur diejenigen Bewegungszustände in der Nähe, welche dieselbe Energiekonstante haben wie die gegebene periodische Bewegung. Sie entsprechen einem dreidimensionalen Teil der Zustandsmannigfaltigkeit, welcher einen Torus (im topologischen Sinne) bildet.

Bei geeigneter Wahl der Variablen p, q, τ wird die gegebene Bewegungskurve längs der τ-Achse in einem rechtwinkligen p, q, τ-Raum liegen, wo zwei Punkte $(p, q, \tau + 2\pi)$ und (p, q, τ) einem und demselben Bewegungszustand entsprechen. Hier wird der Torus zum unendlichen Zylinder.

Sei nun irgendeine Fläche S gegeben, welche die geschlossene Bewegungskurve in einem Punkt Q unter einem von Null verschiedenen Winkel schneidet. Zum Beispiel ist die Ebene $\tau = 0$ augenscheinlich eine Fläche dieser Art. Bezeichnet P einen Punkt dieser Fläche, und verfolgen wir im Sinne der zunehmenden Zeit die durch P gehende Bewegungskurve bis an den ersten folgenden Punkt P_1, welcher auf S liegt. Dadurch ist eine Punkttransformation T definiert, von irgendeinem P zu seinem entsprechenden $P_1 : P_1 = T(P)$. Diese Transformation und auch die inverse Transformation $P = T^{-1}(P_1)$ sind analytisch, wenn nur das gegebene Problem und die Schnittfläche S analytisch sind. Es ist zu bemerken, daß Q selbst ein Fixpunkt der Transformation T ist.

Um ein einfaches Beispiel einer solchen Transformation T zu geben, betrachten wir die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$q'' + k^2 q = 0$$

oder, was dasselbe ist, die zwei Differentialgleichungen des obigen Typus (3)

$$\frac{dp}{dt} = -k^2 q = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dq}{dt} = p = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \left(H = \frac{1}{2}(p^2 + k^2 q^2)\right).$$

Die Lösung (p, q), welche für $\tau = 0$ die Werte (p_0, q_0) nimmt, wird durch die Formel

$$p = p_0 \cos k\tau - kq_0 \sin k\tau, \quad q = \frac{p_0}{k} \sin k\tau + q_0 \cos k\tau$$

gegeben. Wenn τ von 0 bis 2π zunimmt, so bekommen wir p_1, q_1:

$$p_1 = p_0 \cos 2k\pi - kq_0 \sin 2k\pi, \quad q_1 = \frac{p_0}{k} \sin 2k\pi + q_0 \cos 2k\pi.$$

In den Koordinaten $\left(p/\sqrt{k},\ q\sqrt{k}\right)$ ist diese Transformation T eine gewöhnliche Rotation um einen Winkel $2k\pi$.

Augenscheinlich ist, daß bei einer anderen Wahl der Koordinaten oder der Schnittfläche eine Transformation $\overline{T}$ definiert wird, welche dem T äquivalent ist. In der Tat, bei einer neuen Wahl der Koordinaten sind nur die Koordinaten in S geändert. Auch bei neuer Wahl der Schnittfläche entspricht einem Wertepaar p, q der Variablen in S ein und nur ein Wertepaar $\bar{p}, \bar{q}$ in $\overline{S}$, so daß die Transformationen T und $\overline{T}$ auch hier äquivalent sein müssen.

Dieses Ergebnis läßt sich umkehren; also, wenn die zugehörigen Transformationen zweier dynamischen Probleme äquivalent sind, so sind diese Probleme einander äquivalent. Um dieses zu beweisen, ist es nur nötig, eine eindeutige stetige Abbildung der zwei Zustandsmannigfaltigkeiten zu definieren. Dies geschieht in geometrischer Weise wie folgt: die Punkte von S und $\overline{S}$ korrespondieren in gegebener Weise. Jeder andere Punkt P der ersten Mannigfaltigkeit liegt auf einem Bogen QQ_1, welcher in den zwei Punkten Q, Q_1 der Schnittfläche endet. Der Punkt P teilt die Bogenlänge QQ_1 in zwei Teile QP, PQ_1. Wir bezeichnen das Verhältnis QP/PQ_1 mit σ. Wir lassen zwei Punkte P und $\overline{P}$ korrespondieren, wenn sie auf entsprechenden Bögen QQ_1 und $\overline{Q}\overline{Q}_1$ liegen, mit gleichem σ und $\bar{\sigma}$. In dieser Weise ist eine stetige Transformation der einen Mannigfaltigkeit in die andere definiert, welche die Bewegungskurven der einen in die Bewegungskurven der anderen überführt.

Hier sind die benutzten Punkttransformationen nur stetig, so daß wir bei dieser Beweismethode die Gruppe aller stetigen Punkttransformationen gebrauchen.

Diese Betrachtungen zeigen, daß alle dynamischen Eigenschaften der Bewegung den Eigenschaften dieser Transformationen ent-

sprechen, so daß das dynamische Problem auf das Problem der Transformation einer Ebene in der Nähe eines Fixpunktes reduziert wird. Es ist auch klar, daß eine solche Art der Reduktion eines willkürlichen dynamischen Problems auf ein Transformationsproblem immer möglich ist, wenigstens in der Nähe einer periodischen Bewegung.

Welches sind nun die charakteristischen Eigenschaften einer Transformation T, welche zu einem dynamischen Problem (3) gehört?

Um diese Frage zu beantworten, beachten wir zuerst, daß, wenn wir kanonische Variable p, q, τ benutzen und mit der Schnittfläche $\tau = 0$ operieren, der Flächeninhalt bei T nicht geändert wird. In der Tat läßt die Strömung das Volumen invariant, weil die Gleichungen in folgender Weise geschrieben werden können:

$$\frac{dp}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dq}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{d\tau}{d\tau} = 1 \qquad (H = H(p, q, \tau)).$$

worin

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(-\frac{\partial H}{\partial q}\right) + \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right) + \frac{\partial}{\partial \tau}(1) = 0.$$

Ferner bewegt sich jeder Punkt mit einer Geschwindigkeitskomponente 1 in der Richtung der τ-Achse. Daher muß ein kleiner Zylinder mit einer Basis α in $\tau = 0$ und mit einer konstanten kleinen Höhe h immer eine Basis mit demselben Flächeninhalt haben. Irgendein Flächeninhalt α in $\tau = 0$ muß daher dem Flächeninhalt $\bar{\alpha}$ der Fläche $\tau = 2\pi$ gleich sein, w. z. b. w.

Nun können wir ein etwas anderes Bild unseres Problems in einer Ebene entwerfen. In einer p, q-Ebene bewegt sich jeder Punkt bei festem τ mit Geschwindigkeitskomponenten $-\partial H/\partial q, \partial H/\partial p$. So wird eine veränderliche Strömung in der Ebene definiert, welche dieselbe ist, als wenn die Ebene $\tau = c$ sich mit der Geschwindigkeit 1 in der Richtung der τ-Achse bewegt und jeder Punkt dieser p, q-Ebene auf seiner zugehörigen Bewegungskurve bleibt. Diese veränderliche Strömung ist die einer inkompressiblen Flüssigkeit in der Ebene, weil der Flächeninhalt irgendeines Teiles konstant bleibt. Wir sehen auch sofort, daß die zweidimensionale Strömung periodisch ist, mit einer Periode 2π. Die vorhergehende Transformation T hat hier die folgende Bedeutung: ein Punkt P der Flüssigkeit, welcher für $\tau = 0$ die Lage (p_0, q_0) hat, wird nach 2π Sekunden in (p_1, q_1) sein.

In umgekehrter Weise entspricht jede inhaltserhaltende periodische Strömung dieser Art einem dynamischen Problem (3). In der Tat lassen die Differentialgleichungen dafür sich in der Gestalt

$$\frac{dp}{d\tau} = P, \quad \frac{dq}{d\tau} = Q, \quad \frac{d\tau}{d\tau} = 1 \qquad (P = P(p, q, \tau), \quad Q = Q(p, q, \tau))$$

schreiben, wo p, q periodisch mit der Periode 2π in τ sind und wo

$$\frac{\partial P}{\partial p} + \frac{\partial Q}{\partial q} = 0,$$

der Inkompressibilität wegen. Wenn wir nun

$$H = \int_{(0,0)}^{(p,q)} (Q\,dp - P\,dq)$$

schreiben, nehmen diese Differentialgleichungen gerade die Form (3) an.

Daher scheint es als augenscheinlich, daß jede eindeutige flächeninhaltserhaltende periodische Transformation T einem Hamiltonschen Problem der Art (3) zugehört. Diese Tatsache läßt sich sofort beweisen, wenigstens wenn die Funktionen, welche in T eintreten, sowie alle ihre Ableitungen stetig sind und H von derselben Art (aber vielleicht nicht analytisch) ist.[1])

Für dynamische Systeme mehrerer Freiheitsgrade ist die entsprechende rauminhaltserhaltende Eigenschaft solcher Transformationen T nicht ganz charakteristisch.

Betrachten wir jetzt irgendeine flächeninhaltserhaltende Transformation T in der Nähe des Fixpunktes. Im allgemeinen gehören sie einer der folgenden Arten an. Entweder der lineare Teil von T ist eine Rotation

$$p_1 = p_0 \cos\vartheta - q_0 \sin\vartheta, \quad q_1 = p_0 \sin\vartheta + q_0 \cos\vartheta$$

mit einer nichtrationalen Zahl ϑ, oder er hat die Form

$$p_1 = \lambda p_0, \quad q_1 = \frac{1}{\lambda} q_0$$

mit $\lambda^2 \neq 1$. Der zweite, viel einfachere Typus mag instabil heißen, der erste mag stabil heißen.

Im zweiten Fall scheint es sicher zu sein, daß bei passender Wahl der p, q die Transformation T im allgemeinen die hier folgende normale Form annimmt:

$$p_1 = \lambda e^{p_0 q_0} p_0, \quad q_1 = \frac{1}{\lambda} e^{-p_0 q_0} q_0.$$

Hierbei sind alle Punkttransformationen gestattet, worin alle die zugehörigen Funktionen sowie ihre Ableitungen stetig sind. Für das ursprüngliche dynamische Problem, $p_0 = 0$ und $q_0 = 0$, entsprechen sich zwei Familien von asymptotischen Bewegungen. Alle anderen Bewegungen in der Nähe nähern sich nur der periodischen Bewegung, um sich später zu entfernen.

1) Siehe meine Note „A Remark on the Role of Poincaré's geometric Theorem". (Szeged Acta, 1928.)

Im ersten Fall gibt es auch eine einfache normale Form

$$p_1 = p_0 \cos(\vartheta + r_0^2) - q_0 \sin(\vartheta + r_0^2),$$
$$q_1 = p_0 \sin(\vartheta + r_0^2) + q_0 \cos(\vartheta + r_0^2),$$

wo $r_0^2 = p_0^2 + q_0^2$, welche im allgemeinen nur in formaler Weise erreichbar ist.

Wir sehen, daß auch hier nur eine formale Invariante ϑ existiert. Die Transformation ist mit großer Genauigkeit zu betrachten als ähnlich einer Rotation um (0, 0) durch einen Winkel $\vartheta + r_0^2$, welche vom Radius r_0 abhängt.

Die Natur der Transformation in diesem Falle zu bestimmen, ist eines der interessantesten und schwierigsten Probleme der Mathematik. Die wesentliche Frage ist folgende: Bleiben bei Wiederholung der Transformation T alle Punkte P in der Nähe von (0, 0) immer in der Nähe? Dies ist das Problem der dynamischen Stabilität im einfachsten Falle, welches noch heute völlig ungelöst ist.

In dieser Richtung möchte ich noch eine Bemerkung hinzufügen. Durch die Natur der Transformation kann man in diesem Falle zu dem Resultat kommen, daß in der Nähe der entsprechenden periodischen Bewegung unendlich viele periodische Bewegungen existieren mit der gegebenen Konstante der Energie, welche viele Umläufe während einer Periode dieser Bewegung machen. Die Art des Beweises ist folgende (natürlich kann ich nicht alle Einzelheiten geben): Bei großem n und in einer hinreichenden Nähe des (0, 0) hat T die Form einer Rotation durch einen Winkel $n(\vartheta + r_0^2)$, mindestens so, daß die Rotation längs eines Kreises $C, r = r_0$, mehr als 2π größer ist als die Rotation längs $r = 0$. Daher können wir ein m finden, so daß, wenn T mit einer Rotation um einen Winkel $-2m\pi$ zusammengesetzt wird, die Rotation positiv längs $r = r_0$ sein muß und negativ längs $r = 0$.

Man sieht sofort, daß bei dieser neuen Transformation T_n^m mindestens eine geschlossene Linie C um den Punkt (0, 0) existieren muß, auf welcher keine Rotation stattfindet. Wegen der flächeninhaltserhaltenden Eigenschaft der T_n^m müssen C und $T_n^m(C)$ mindestens einen gemeinsamen Punkt P haben. Des weiteren kann direkt bewiesen werden, daß C einmal und nur einmal von jedem Radius geschnitten wird. Daher muß C_n auch diese Eigenschaft haben, weil jeder Punkt Q_n von C_n auf demselben Radius wie Q liegt. Also $T_n^m(P)$ muß dann mit P zusammenfallen.

Für einen solchen Punkt P haben wir $T_n^m(P) = P$. Dieser Punkt entspricht einer periodischen Bewegung, welche m Umläufe der ge-

gebenen periodischen Bewegung macht. Aber n ist willkürlich groß gewählt, so daß unendlich viele solche periodische Bewegungen in der Nähe existieren müssen.

Der sogenannte letzte geometrische Satz von Poincaré war von ihm aufgestellt, um das Dasein solcher neuen periodischen Bewegungen zu begründen. Aber unsere Methode zeigt uns, wie in vielen der wichtigsten Fälle der Gebrauch dieses Satzes vermieden werden kann. Es ist sehr interessant, daß die meisten falschen Versuche, diesen Satz zu beweisen, sich auf Betrachtungen ganz ähnlicher Natur wie die obigen stützen. Aber diese Versuche versagen gerade, weil im allgemeinen Fall des Poincaréschen Satzes nicht bekannt ist, daß C von einer solchen speziellen Art ist.

Wir wollen nun die folgenden vier Beispiele dynamischer Systeme kurz betrachten: a) Billardkugelspiel auf elliptischem Tisch; b) Teilchen auf glatter, konvexer Fläche; c) Teilchen auf glatter, geschlossener Fläche von durchaus negativer Krümmung; d) Dreikörperproblem.

a) Billardkugelspiel auf elliptischem Tisch.

Die geodätischen Linien auf einem Ellipsoide mit Halbachsen a, b, c ($a > b > c > 0$) sind seit Jacobi bekannt. Sie erscheinen auch als allgemeine Lösung eines integrierbaren Hamiltonschen Problems, weil ein Teilchen, das sich auf einem glatten Ellipsoide, ohne Einfluß äußerer Kräfte, bewegt, einer solchen geodätischen Linie folgen muß. Wenn nun die kleinste Halbachse c gegen Null konvergiert, während die anderen Halbachsen a, b konstant bleiben, geht das Ellipsoid in eine Ellipse über. Die geodätischen Linien werden gerade Strecken, und zwei solche Strecken, die derselben Linie angehören und einander folgen, müssen die Ellipse unter gleichem Winkel treffen. Aber solche gebrochenen Linien sind die idealisierten Bahnen einer Billardkugel auf einer Ellipse. Natürlich muß dieses Problem auch „integrierbar" sein.

Die geometrische Eigenschaft, welche dieser Integrierbarkeit entspricht, ist eine wohlbekannte: Zwei einander folgende Strecken sind immer Tangenten eines und desselben Kegelschnittes, welcher dieselben Brennpunkte hat wie die gegebene Ellipse. Daher teilen sich alle Bewegungen in analytische Familien, gemäß dem entsprechenden Kegelschnitt.

Die möglichen Bewegungszustände entsprechen allen Punkten der Ellipse zusammen mit allen möglichen Richtungen. Wenn also x, y die Koordinaten eines Punktes der Ellipse sind und φ der Richtungswinkel ist, so gibt jedes (x, y, φ) einen Bewegungszustand. Die Ge-

samtheit solcher Zustände hat augenscheinlich die topologische Natur eines Torus, sobald man von den Zuständen (x, y, ψ), wo (x, y) auf der Ellipse selbst liegt, absieht. Aber für solche Punkte sind (x, y, ψ) und (x, y, ψ_1) als derselbe Zustand zu betrachten, wenn ψ und ψ_1 zwei einander folgenden Strecken entsprechen. Daher ist die Zustandsmannigfaltigkeit in diesem Fall eine geschlossene.

Wir haben also ein integrierbares dynamisches Problem mit geschlossener Zustandsmannigfaltigkeit.

Hier läßt sich auch eine Transformation T ausnahmslos definieren. Angenommen, ϑ sei eine Variable mit Periode 2π, welche die Lage eines Punktes auf der Ellipse fixiert, und φ sei eine Variable, welche die Winkel zwischen der zurückprallenden Billardkugel und der positiven Richtung der Tangente angibt, so daß $0 \leqq \varphi \leqq \pi$. Für jedes Paar (ϑ, φ) gibt es ein nächstfolgendes (ϑ_1, φ_1). Die Gesamtheit der Bewegungszustände (ϑ, φ), welche den Stößen am Rand entsprechen, bilden eine Schnittfläche S für alle möglichen Bewegungskurven, mit Ausnahme der zwei rollenden Bewegungen längs der Kurve. Diese Schnittfläche ist eine ringförmige. Wir können dann schreiben

$$(\vartheta_1, \varphi_1) = T(\vartheta, \varphi).$$

Weil dieses Problem integrierbar ist, haben wir auf S geschlossene, invariante, analytische Kurven, welche bei T oder T^2 in sich selbst transformiert werden. Alle die Projektionsrichtungen, welche Strecken definieren, die einen und denselben Kegelschnitt mit denselben Brennpunkten berühren, gehören einer oder zwei solchen geschlossenen Kurven an. Es ist sehr leicht, die topologische Natur dieser Kurven zu bestimmen.

Man sieht sofort, daß es vier Arten von Bewegungen gibt: 1. überall dichte periodische Bewegungen, welche gewissen dieser Kurven entsprechen; 2. überall dichte rekurrente aber nicht periodische Lösungen, welche den anderen Kurven entsprechen und welche den allgemeinen Fall im Sinne des Lebesgueschen Integrals bilden; 3. zwei Familien von Bewegungen, welche die periodische Bewegung längs der größeren Achse asymptotisch annähern, in beiden Richtungen der Zeit; diese entsprechen den Bahnen, welche einmal, und daher unendlich oft, durch die Brennpunkte gehen; 4. die zwei rollenden Bewegungen im entgegengesetzten Sinne um die Ellipse, welche auch periodische Bewegungen sind. Alle periodischen Bewegungen, mit einziger Ausnahme der Bewegung längs der kürzeren Achse und der zwei rollenden Bewegungen, sind instabil.

In dieser Weise gewinnt man eine volle Übersicht über die Be-

wegungstypen und ihre Beziehungen zueinander, wie in einem solchen integrierbaren Probleme zu erwarten ist.

b) Teilchen auf glatten, geschlossenen, konvexen Flächen.

Die Zustandsmannigfaltigkeit in diesem Falle ist augenscheinlich geschlossen. Aber es gibt für solche allgemeinen konvexen Flächen keinen Grund, eine Gruppierung der Bewegungen in geschlossenen Familien zu erwarten, wie beim Ellipsoid.

Der Bau einer Schnittfläche S und einer Transformation T ist hier etwas komplizierter als im vorhergehenden Problem. In anschaulicher Weise sieht man erstens, daß es eine kürzeste Länge für eine geschlossene Kurve gibt, so daß der konvexe Körper durch die Kurve gehen kann. Eine Kurve dieser Länge muß mindestens einmal um die Fläche ausgedehnt werden und in dieser Lage eine geschlossene geodätische Linie G bilden. Alle Bewegungszustände der Schnitte mit G geben zwei Schnittflächen geeigneter Art und zugehörige Transformationen T.

Eine volle Betrachtung der Bewegungen in einem willkürlich gegebenen Fall scheint beinahe unmöglich zu sein, weil man nicht die unendlichen Prozesse, welche eintreten, wirklich durchführen kann. In Wirklichkeit könnten wir eine sehr gute Anschauung davon bekommen, wenn wir nur alle invarianten Bereiche in S wüßten.

Aber es scheint ganz sicher zu sein, daß es im allgemeinen keine solchen Bereiche in S gibt. In einem solchen Falle kann man beweisen, 1. daß es unendlichviele periodische Bewegungen gibt, welche in sich dicht sind, 2. daß die asymptotischen Bewegungen aller denkbaren Typen überall in dichter Weise existieren, 3. daß Bewegungen, welche in die Nähe aller Zustände kommen, existieren, usw. In dieser Weise bekommen wir auch hier einen ziemlich zufriedenstellenden Überblick über die Bewegungstypen und ihre Beziehungen zueinander. Natürlich ist die Lage hier viel komplizierter als in einem integrierbaren Falle.

c) Teilchen auf glatten, geschlossenen Flächen von durchaus negativer Krümmung.

Um ein solches Beispiel zu bilden, betrachten wir z. B. die Fläche

$$z^2 = 1 - e^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} x \sin^2 \tfrac{1}{2} y \qquad (e > 1),$$

wo x, y, z rechtwinklige Koordinaten sind, und wo wir annehmen, daß alle Punkte

$$x = 2k\pi, \quad y = 2l\pi \qquad (k, l = 0, 1, 2, \ldots)$$

demselben Punkt der Fläche korrespondieren. Diese Voraussetzung ist gerechtfertigt, weil alle Transformationen

$$\bar{x} = x + 2k\pi, \quad \bar{y} = y + 2l\pi$$

die Fläche in sich selbst überführen. Ein Grundbereich ist das Quadrat in der x, y-Ebene

$$0 \leqq x < 2\pi, \quad 0 \leqq y < 2\pi.$$

Die weitere Betrachtung zeigt sofort, daß die Krümmung durchaus negativ ist, mit Ausnahme der Punkte, die an den Quadratseiten liegen, und daß die Fläche vom Genus 2 ist. Auch gibt es eine und nur eine geodätische Linie AB von einem gegebenen Punkte A bis einem gegebenen Punkt B, welche aus einer gegebenen Kurve AB bei stetiger Deformation hervorgeht. In derselben Weise sieht man, daß eine und nur eine geschlossene geodätische Linie von gegebenem Typus existiert.

Dieses Beispiel ist von ganz anderer Art als die zwei vorhergehenden, weil keine periodische Bewegung vom stabilen Typus existieren kann.

Wie man leicht beweisen kann, gibt es hier nicht nur überall dicht periodische Bewegungen, sondern auch andere Typen von rekurrenten Bewegungen sowie Bewegungen, die fast alle Zustände annehmen, usw. Hier gibt es einen Algorithmus solcher Art, daß man eine Übersicht aller Bewegungen gewinnen kann.

In diesem Fall scheint es nicht möglich zu sein, eine vollständige Schnittfläche S mit entsprechender Punkttransformation T zu bilden, aber nichtsdestoweniger ist die Natur der Bewegungen fast ebensogut bekannt wie in dem integrierbaren Fall.

Die drei vorhergehenden Beispiele waren von geodätischer Art. Dies ist aber keine wirkliche Beschränkung, weil alle gewöhnlichen dynamischen Probleme als geodätische Probleme formuliert werden können.

d) Dreikörperproblem.

Hier nehmen wir an, daß die 10 Konstanten der 10 bekannten Integrale gegeben sind. Wir nehmen weiter an, daß nicht alle drei Flächenkonstanten verschwinden.

Die Zustandsmannigfaltigkeit ist hier als eine offene von 7 Dimensionen anzusehen, weil die Koordinaten unendlich werden können. Die Möglichkeit des Zusammenstoßens aller drei Körper ist ausgeschlossen, und das Zusammenstoßen von zwei Körpern erscheint nur als eine hebbare Singularität, wie Sundman zuerst bewies.

Eine wichtige Tatsache ist nun die folgende: eine Bewegungskurve dieser Zustandsmannigfaltigkeit, welche einen Punkt enthält, für den alle drei Entfernungen klein sind, muß mit abnehmender oder zunehmender Zeit ins Unendliche gehen. In dem einzigen, vom qualitativen Stand-

punkt aus schwierigen Fall ist die gesamte Energie nicht groß genug, um alle Körper unendlich voneinander zu entfernen. In diesem Fall entfernt sich einer und nur einer der drei Körper von den zwei anderen. Aus diesen Gründen müssen drei Strömungen vom Unendlichen ins Unendliche in der Zustandsmannigfaltigkeit existieren. Man könnte glauben, daß im allgemeinen fast alle Punkte dieser „See" aus einem dieser Ströme kommen, um später in einem ins Unendliche zu gehen. Nur gewisse periodische, rekurrente und zu ihnen asymptotische Bewegungen sind vielleicht von anderem Typus.

Ich habe nur einige der wichtigsten bisher bekannten Eigenschaften für diese vier Beispiele angedeutet. Aber eine tiefere Betrachtung würde uns manche andere Resultate geben, die Natur und die Verteilung aller möglichen Bewegungen betreffend.

Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen, sind wir in der Lage, einige heute noch nicht gelöste wichtige Probleme der theoretischen Dynamik zu formulieren.

Am Anfang sprachen wir über die Beziehung zwischen Periodizität und Stabilität. Aber eine solche Beziehung besteht nicht, wenn man die Idee der Periodizität nicht in geeigneter Weise verallgemeinert.

Es gibt hier zwei Arten von Verallgemeinerungen. Mit Rücksicht auf unser erstes Beispiel sind die beiden Arten sehr leicht zu verstehen.

Erstens bemerken wir, daß im Laufe der Zeit jede Bewegung sich den periodischen Bewegungen nähert, wenigstens in diesem speziellen Beispiel. Wenn die Zustandsmannigfaltigkeit M eine geschlossene ist, gibt es eine geschlossene Menge M_1, deren Bewegungen sich alle anderen Bewegungen nähern. Um M_1 genauer zu definieren, betrachten wir ein kleines Molekül in M. Es kann geschehen, daß dieses Molekül im Laufe der Zeit niemals zu seiner ursprünglichen Lage zurückkehrt. Dann werden wir die entsprechenden Bewegungen „wandernde" nennen. Die Menge M_1 ist gerade die Menge der nichtwandernden Bewegungen. Nun können wir die nichtwandernden Bewegungen M_2 in bezug auf M_1 definieren. So entsteht eine abzählbare, wohlgeordnete Reihe $M, M_1, M_2, \ldots$, welche in einer $M_r = M_{r+1}$ endet, wo r eine Ordinalzahl im Sinne von Cantor ist. Im Laufe der Zeit findet sich jede Bewegung fast immer in der Nähe dieser Menge M_r von zentralen Bewegungen.

Wenn die Zustandsmannigfaltigkeit zweidimensional ist, kann man leicht beweisen, daß $r \leqq 2$. Aber für mehr Dimensionen n glaube ich nicht, daß $r \leqq n$ ist.

Daher werde ich unser erstes Problem formulieren wie folgt:

Problem I: *Ein dynamisches Problem zu konstruieren mit dreidimensionaler, geschlossener Zustandsmannigfaltigkeit, worin die Ordinalzahl r der zentralen Bewegungen* > 3 *ist.*

Es gibt andere wichtige Probleme, welche die Struktur der zentralen Bewegungen betreffen.

Die zweite Verallgemeinerung der periodischen Bewegungen entsteht wie folgt: Keine periodische Bewegung nähert sich einer anderen Bewegung. Also können wir diejenigen Bewegungen „rekurrente" nennen, welche eine *minimale,* geschlossene Menge anderer Bewegungen annähern, so daß es keine Untermenge derselben Art gibt. Das Dasein solcher rekurrenten Bewegungen und ihre quasiperiodischen Eigenschaften sind dann leicht zu beweisen. Ein Hauptsatz ist, daß jede stabile Bewegung gleichmäßig oft in die Nähe solcher rekurrenten Bewegungen kommt.

Es gibt auch viele wichtige Fragen über die Struktur der rekurrenten Bewegungen. Aber die erste und die wichtigste betrifft die periodischen Bewegungen allein und kann in folgender Weise formuliert werden:

Problem II. *Im Falle der Hamiltonschen Probleme* (2) *von zwei Freiheitsgraden, mit geschlossener Zustandsmannigfaltigkeit und mit mindestens einer stabilen periodischen Bewegung, die Überalldichtheit der periodischen Bewegungen zu beweisen.* (Hier hat die Energiekonstante einen gegebenen Wert.)

Wenn diese Vermutung richtig ist, so ist jede Bewegung bei einem solchen Hamiltonschen System von zwei Freiheitsgraden immer in der Nähe periodischer Bewegungen. Ich glaube nicht, daß dasselbe im Falle mehrerer Freiheitsgrade gilt. Aber ich glaube, daß die rekurrenten Bewegungen überall dicht sind. Daher werde ich das dritte Problem in folgender Weise formulieren:

Problem III. *Im Falle aller Hamiltonschen Probleme mit geschlossener Zustandsmannigfaltigkeit die Überalldichtheit der rekurrenten Bewegungen zu beweisen.*

Es gibt noch eine andere Frage, welche die periodischen Bewegungen betrifft: Ist es möglich, eine brauchbare Erweiterung des letzten Poincaréschen Satzes in allgemeineren Fällen zu finden?

Hier müssen wir einige vorbereitende Bemerkungen machen. In der ursprünglichen Form dieses Satzes kam in Betracht die Transformation T eines zweidimensionalen Ringes in sich selbst. Für eine Anwendung dieses Satzes bei einem gegebenen dynamischen Problem war es darum nötig, eine volle Schnittfläche S zu finden, deren Berandung aus zwei periodischen Bewegungskurven besteht. Aber im

Falle mehrerer Freiheitsgrade existiert eine solche Schnittfläche nicht, wenn nicht eine geschlossene invariante Familie von Bewegungskurven vorhanden ist. Aber das Dasein einer solchen Familie ist nicht zu erwarten. Für eine mögliche dynamische Anwendung müssen wir daher eine Erweiterung des Satzes finden, welche nur eine Transformation T in der Nähe eines Fixpunktes betrifft. Solche Transformationen sind immer vorhanden.

Nun müssen wir auch den Typus der Transformationen T bestimmen, welche aus dynamischen Problemen entstehen. Die flächeninhaltserhaltende Eigenschaft, welche charakteristisch für den einfachsten Fall ist, läßt sich verallgemeinern, weil, wie oben bemerkt, T eine volumenerhaltende Transformation im allgemeinen Fall ist. Aber diese Eigenschaft ist in keiner Weise charakteristisch. Um eine charakteristische Eigenschaft zu formulieren, betrachten wir irgendein geodätisches Problem. In der n-dimensionalen Fläche, auf welcher das Teilchen sich bewegt, können wir eine $n-1$-dimensionale Fläche konstruieren, welche die gegebene geschlossene geodätische Linie in einem Punkt schneidet. Es kann nun geschehen, daß eine und nur eine geodätische Linie in der Nähe existiert, welche einen Punkt $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ dieser Fläche mit einem nächstfolgenden Punkt $(x_1', \ldots, x_{n-1}')$ derselben Fläche verbindet. Dann sind $(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_1', \ldots, x_{n-1}')$ als Koordinaten einer gewöhnlichen Schnittfläche zu betrachten; hier hat die Energie H des Teilchens und somit seine Geschwindigkeit einen vorgegebenen Wert, so daß die Zustandsmannigfaltigkeit eine $2n-2$-dimensionale ist. Bei der Transformation T geht ein Punkt $(x_1, \ldots, x_{n-1}')$ der Schnittfläche in einem Punkt $(x_1', \ldots, x_{n-1}'')$ über. Die Länge $\Omega(x_1, \ldots, x_{n-1}')$ der geodätischen Linie, welche $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ und $(x_1', \ldots, x_{n-1}')$ verbindet, besitzt dann die weitere extremale Eigenschaft, daß

$$d\,[\Omega\,(x_1, \ldots, x_{n-1}') + \Omega\,(x_1', \ldots, x_{n-1}'')] = 0$$

ist, wo $x_1', \ldots, x_{n-1}'$ zu variieren sind. Diese $n-1$ Gleichungen definieren die Koordinaten $x_1'', \ldots, x_{n-1}''$ mittels $x_1, \ldots, x_{n-1}'$ und damit eine Transformation T.

Beim Gebrauch einer endlichen Anzahl solcher Hilfsflächen kann man immer T im geodätischen Problem definieren wie folgt: Es gibt k Funktionen

$$\Omega_1(x_1, \ldots, x_{n-1}'), \quad \Omega_2(x_1', \ldots, x_{n-1}''), \ldots, \Omega_k = \Omega\,(x_1^{(k-1)}, \ldots, x_{n-1}^{(k)}),$$

so daß die Gleichungen

$$d\,(\Omega_1 + \cdots + \Omega_k) = 0$$

gelten und die Transformation T definieren. Hier variieren alle Variabeln, außer $x_1, \ldots, x_{n-1}$ und $x_1^{(k)}, \ldots, x_{n-1}^{(k)}$.

Wir werden irgendeine solche Transformation T eine „konservative Transformation" T nennen. So entsteht das folgende Problem:

Problem IV. *Bei gegebener konservativer Transformation T das Dasein eines entsprechenden Hamiltonschen Systems, insbesondere von geodätischem Typus, zu beweisen.*

Wenn diese Vermutung richtig ist, dann muß eine wirkliche Verallgemeinerung des letzten Poincaréschen Satzes gerade als Äquivalent einen Satz über das Dasein von anderen geschlossenen, geodätischen Linien in der Nähe einer gegebenen geodätischen Linie liefern. Hier muß natürlich die gegebene geschlossene, geodätische Linie vom stabilen Typus sein.

Wir können nun die Frage nach einer möglichen Verallgemeinerung des Poincaréschen Satzes wie folgt formulieren:

Problem V. *Sei T irgendeine konservative Transformation mit einem Fixpunkt P vom stabilen Typus. Es sind dann Bedingungen zu bestimmen, so daß unendlichviele Punkte P_n in der Nähe existieren müssen, welche Fixpunkte von T^m sind.*

Endlich muß ich das wichtige und sehr schwierige Problem der Stabilität in seiner einfachsten Form formulieren:

Problem VI. *In dem Falle zweier Freiheitsgrade das Dasein von dynamischen Systemen zu beweisen, die eine periodische Bewegung vom stabilen Typus besitzen, welche jedoch nicht wirklich stabil ist.*

Die oben gegebenen Probleme betreffen nicht spezielle dynamische Systeme, sondern die allgemeinen. Es gibt auch viele andere interessante Probleme, welche gewisse wichtige spezielle Probleme betreffen. Hier möchte ich nur zwei solcher Probleme betonen:

Problem VII. *Im allgemeinen Dreikörperproblem die topologische Natur der Zustandsmannigfaltigkeit zu bestimmen.*

Problem VIII. *Die Nichtintegrierbarkeit des Dreikörperproblems in der Nähe einer periodischen Bewegung vom stabilen Typus zu beweisen.*

Es ist zu bemerken, daß die Resultate von Poincaré nur die Unmöglichkeit einer gewissen gleichmäßigen Integrierbarkeit bei veränderlichen Massen beweisen.

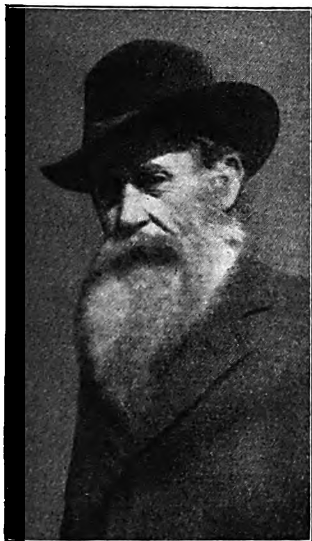
Nach meiner Meinung sind die oben gegebenen Probleme gerade diejenigen, deren Lösungen große weitere Fortschritte ermöglichen würden.

(Eingegangen am 7. 8. 1928.)

Johann Ludwig Heiberg.[1])

Von GUSTAV JUNGE in Berlin-Lichterfelde.

Mit einem Bildnis.



Johann Ludwig Heiberg.

Vor neun Jahren, in den ersten Januartagen 1920, starb Zeuthen, der dänische Mathematiker, über 80 Jahre alt. Am 4. Januar 1928 ist, gleichfalls hochbetagt, sein Mitarbeiter auf dem Gebiete der griechischen Mathematik dahingegangen: Johann Ludwig Heiberg.

Geboren am 27. November 1854 in Aalborg als Sohn eines Arztes, entstammte Heiberg einer angesehenen nordischen Familie, aus der schon viele Schriftsteller und Ärzte hervorgegangen sind. Der Verstorbene hatte dieselben Vornamen wie ein vor 100 Jahren lebender Verwandter, ein in seinem Vaterlande noch heute geschätzter Schriftsteller.

Johann Ludwig der Zweite, wie er gelegentlich genannt wird, wurde mit 17 Jahren Student. 25jährig erwarb er den Doktortitel mit einer Arbeit: „Quaestiones Archimedeae". Der Vorliebe für diesen großen Griechen ist Heiberg sein ganzes Leben hindurch treu geblieben. Nach Vollendung des Studiums war er zunächst einige Jahre Lehrer an Kopenhagener Privatschulen, dann von 1884—95 Leiter der dortigen Borgerdydskole. Diese „Bürgertugendschule", 1787 begründet, ist eine höhere Schule mit Gabelungen, also mit unseren Reformanstalten zu vergleichen. Auch seiner Schule hat Heiberg die Treue gehalten: noch wenige Wochen vor seinem Tode gab er dort regelmäßig griechischen Unterricht. 1896 wurde Heiberg Professor an der Universität und blieb in dieser Stellung bis zu seinem 70. Lebensjahre. 1915—16 war er Rektor.

---

1) Die Photographie wurde von Herrn Oberstudiendirektor Otto Schroeder in Berlin freundlichst zur Verfügung gestellt; Herr Professor T. Bonnesen und Herr Dr. S. Naesgaard in Kopenhagen übersandten dem Verfasser einige biographische Nachrichten. Allen diesen Herren sei auch an dieser Stelle unser bester Dank ausgesprochen.

Heiberg war klassischer Philologe, nicht gerade großer Freund der Römer, doch mit Leib und Seele Verehrer der Griechen und ihrer Zeit. Bei Heibergs 70. Geburtstage sagte einer seiner Universitätskollegen, seine Vorliebe für die Griechen ginge bis an die Grenze der Monomanie. Zwar leidenschaftlicher Raucher, war er sonstigen Neuerungen wie dem Telephon durchaus abhold, zog auch die Petroleumlampe dem elektrischen Licht vor. In Kopenhagen war seine hohe Gestalt mit dem wallenden Bart vielen bekannt, die von griechischer Mathematik nichts wußten. Die ihm näher standen, besonders seine Schüler, die Jünglinge wie die Knaben, merkten wohl, daß er bei aller Einseitigkeit und allem altmodischen Wesen ein fester und kraftvoller Mann war, ein Charakter von seltener Reinheit.

„Rhetorik war ihm eine Pestilenz, und mit Ästhetik gab er sich niemals ab", so heißt es in einem Nachrufe. Für ihn war die klassische Zeit der Griechen kein goldenes Zeitalter der Literatur, sondern eine *eiserne* Zeit aufrechter Männer, und von diesem Eisen wollte er der heutigen Welt etwas mitteilen. Seine eigenen Worte sind: „Daß wir uns ein menschenwürdiges Dasein schaffen können auf der Grundlage, die Sokrates gelegt hat, das hat dieser selbst gezeigt durch sein Leben und Sterben. Allen denen, die ihr Leben ohne übernatürlichen Beistand führen wollen, hat er ein für allemal den Weg gewiesen." — Doch seine Feindschaft gegen das Christentum, in der er sich mit Nietzsche begegnete, fand nicht mehr viel Verständnis, wie auch seine Begeisterung für griechisches Heldentum seine Zeit nicht zu erwärmen vermochte. „Hat auch Heiberg die Tragik verspürt, etwas zu wollen, wenn alle Welt etwas anderes oder gar nichts will? — Doch er trug seine Niederlage, als habe er gesiegt, stolz und aufrecht blieb er bis zuletzt", so sagt Prof. V. Andersen von dem Verstorbenen.

Auch die Griechen waren nicht überall so, wie Heiberg sie haben wollte. Er mußte in der weiten griechischen Literatur ein entlegenes Feld aufsuchen, um vor Rhetorik und Ästhetik ganz sicher zu sein, um nur eiserne Beharrlichkeit und kühle, sachliche Ruhe anzutreffen. *So kam er zur griechischen Mathematik.* Ihre strenge Klarheit war das, was er suchte. Daneben konnten ihm nur noch die griechischen Ärzte gefallen, ihre scharfe Beobachtung der Wirklichkeit und ihr Mißtrauen gegen alle philosophische Spekulation.

Bevor wir auf die eigentliche Lebensarbeit Heibergs eingehen, wollen wir noch erwähnen, daß er auch eine ganze Reihe mehr volkstümlicher Arbeiten, teils Beiträge zur Altertumskunde, teils Früchte seiner vielen Reisen, veröffentlicht hat. Doch sind diese in dänischer

Sprache erschienen und dadurch leider in Deutschland wenig bekannt geworden.

Dagegen hat Heiberg in deutscher Sprache zwei schätzbare zusammenfassende Schriften über sein besonderes Arbeitsgebiet veröffentlicht, von denen namentlich die erste wegen ihrer zwar gedrängten, doch vortrefflichen Darstellung dem Mathematiker noch immer empfohlen werden kann: „Naturwissenschaften und Mathematik im klassischen Altertum“ (Aus Natur und Geisteswelt; 1. Ausg. von 1912; die neue von 1920 scheint leider nicht verändert) und „Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften im Altertum“, München 1925 (Handbuch der Altertumswiss., Bd. 5, Abt. 1, Teil 2).

1879 hatte Heiberg über Archimedes promoviert, 1880—81 gab er dessen Werke heraus, in drei Bänden; nicht nur griechisch, sondern auch mit lateinischer Übersetzung, „da ja die Mathematiker durchaus eine Übersetzung verlangen“. Das Werk erschien in der Bibliotheca Teubneriana, ebenso wie die übrigen Mathematiker-Ausgaben Heibergs. Archimedes ist der einzige Mathematiker, den Heiberg später noch einmal ediert hat. Dies geschah zum Teil, weil er seinen Fund von 1906 verwerten wollte, aber auch, weil er später, mit gereifter Erfahrung, glaubte, sein erstes Werk noch verbessern zu können. Dem Mathematiker wird es schwer fallen, die Verbesserungen zu finden, er wird schon bei der alten Ausgabe staunen nicht nur über die Fülle philologischer Anmerkungen, sondern vor allem über die Feinheit der textgeschichtlichen Schlüsse. Schon hier hat Heiberg nicht nach alter Weise eine oder wenige, sondern *alle* zugänglichen Handschriften eingesehen und davon alle irgend brauchbaren verwertet. Sein Ziel war hier wie später nicht nur, einen guten Text auszuwählen, sondern auch eine Geschichte des Textes zu erschließen, um so dem natürlich unerreichbaren Urtext möglichst nahezukommen.

Auf den tiefsten griechischen Mathematiker folgte der bekannteste, der praeceptor mundi. 1883 kam der erste Band von Euklid heraus, der die ersten vier von den dreizehn Büchern der Elemente enthält. Weitere Bände folgten bald, 1888 der fünfte. Dieser bringt zunächst auf über 100 Seiten eine sehr reichhaltige und wertvolle Textkritik und Textgeschichte der Elemente, dann folgt der Text der angehängten, also unechten Bücher, des sog. 14. und 15. Buches der Elemente; den Beschluß bilden fast 700 Seiten Euklid-Scholien. Diese sind nicht ins Lateinische übersetzt. Es konnte in der Tat bei den Scholien schon fraglich erscheinen, ob die Mühe der griechischen Herausgabe lohnte. Diese Randbemerkungen zu den Handschriften zeugen wohl von viel gutem Willen der Schreiber, den Text sich selbst und anderen ver-

ständlich zu machen, aber sie halten sich durchweg an der Oberfläche und bringen sogar ausgesprochen Falsches. Sie entstammen eben einer Zeit kulturellen und mathematischen Niederganges. Nur wenige Goldkörner sind in dieser Masse zu finden, wie Heiberg selbst gelegentlich sich ausdrückt.

In seinem dreibändigen Werke: „The 13 books of Euclid's elements" Cambridge 1908 (2. Aufl. 1926), hat T. L. Heath es verstanden, die Ergebnisse von Heibergs Euklid-Forschungen in einer dem modernen Leser leichter zugänglichen Form darzustellen.

Neben der Bibel werden die Elemente Euklids dasjenige Buch der Weltliteratur sein, das die weiteste Verbreitung gefunden hat, das am häufigsten herausgegeben und am fleißigsten gelesen worden ist.[1]) Jahrtausende hindurch hat der mathematische Unterricht die Elemente als Lehrbuch festgehalten, denn die wohldurchdachte Gliederung in Bücher und Sätze schien für die Aneignung unübertrefflich. Der sorgsame logische Aufbau machte die Elemente auch zur Grundlage für weitergehende Forschungen, wie die des Archimedes und Apollonius, und an die unvermeidlichen Lücken oder philosophischen Schwierigkeiten, die eben dieser Aufbau erkennen ließ, knüpften in der Folgezeit die Kommentatoren an mit ihren Spekulationen über das Wesen des Punktes oder über diskrete und kontinuierliche Größen, über das Parallelenpostulat und über die Unendlichkeit der Welt. — Ein Buch der Weltliteratur wie die Elemente ist keine der übrigen Schriften Euklids. Immerhin haben auch sie ihre kulturgeschichtliche Bedeutung. Heiberg selbst veröffentlichte 1895 die Optik. Es folgten 1896 die Daten, von Menge herausgegeben, endlich 1916 die sonstigen erhaltenen Schriften und die Fragmente Euklids, ebenfalls von Menge besorgt.

Der wichtigste Euklid-Kommentar, der des Proklus, war schon 1873 von Friedlein veröffentlicht worden. Der nächstwichtige erhaltene Kommentar, der des Anaritius (an-Nairizi) erschien 1899 als Supplement der Euklid-Ausgabe, aus der Hand von Curtze.

Neben Archimedes ist Apollonius der zweite schöpferische Mathematiker des Altertums, dessen Werke sich erhalten haben. Von den acht Büchern seiner Kegelschnitte sind nur die ersten vier in griechischer Sprache auf uns gekommen, die drei folgenden in arabischer Übersetzung; dagegen ist das achte Buch verloren, sein Inhalt ist nur durch die Angaben des Pappus bekannt. Die arabischen Bücher V, VI und VII wurden im 17. Jahrhundert gefunden, und 1710 gab Halley die Kegelschnitte heraus, so gut dies möglich war, also die ersten vier

1) Heath, History of Greek Mathematics, Bd. I, Oxford 1921, S. 358.

Bücher griechisch, die folgenden drei arabisch und mit lateinischer Übersetzung. Diese „Oxforder Ausgabe" ist bis heute die einzige vollständige, und die arabischen Bücher scheinen seitdem nicht wieder herausgegeben zu sein. Heibergs Ausgabe umfaßt nur die vier ersten Bücher, dazu die Kommentare des Eutokius, griechisch und lateinisch, ferner die Fragmente des Apollonius. Die Ausgabe hat zwei Bände und erschien 1890—93.

Wie zu den Elementen Euklids, so gibt es auch zu den Kegelschnitten des Apollonius angehängte Schriften geringeren Wertes: sie sind von Serenus von Antinoeia verfaßt und wurden von Heiberg 1896 veröffentlicht.

1894 gab Heiberg die Kommentare des Simplicius zur Physik des Aristoteles heraus. Dies Werk ist natürlich nicht vorwiegend mathematischen Inhalts, aber es wird große Dienste leisten, wenn einmal der Versuch gemacht werden sollte, zu einem wirklichen Verständnis der physikalischen Weltauffassung des Aristoteles zu gelangen. Die Bedeutung der aristotelischen Naturphilosophie für das Mittelalter ist bekannt genug, aber eigentlich nur in ungünstigem Sinne. Aristoteles hatte gelehrt, daß die Sonne um die Erde läuft, daß der Fixsternhimmel zugleich das Ende der Welt bedeutet, daß die leichten Körper nach oben, die schweren nach unten streben, um so mehr, je schwerer sie sind. — Überall sind wir so sehr gewohnt, den Fortschritt zu preisen, der in der Überwindung dieser Meinungen bestand, daß die „Philosophia naturalis" des Aristoteles dadurch in eine gar zu gründliche Verachtung geraten ist. Ihre „Principia mathematica" mögen ja unvollkommen sein, immerhin sind sie Zeugnisse der großartigen Entwicklung des mathematischen Denkens zwischen Plato und Euklid.

Allerdings hat Aristoteles sich auf das geozentrische System festgelegt, obgleich das heliozentrische schon aufgestellt war. Aber auch Archimedes erwähnt das System des Aristarch ohne zustimmende Äußerung, die physikalischen Gründe sprachen eben damals eher dagegen als dafür. Eine ruhige Abschätzung der Gründe und Gegengründe bringt die Einleitung zum Almagest, der „großen Syntaxis" des Ptolemäus. Der mathematische Leser mag hierüber die Übersetzung von Manitius nachsehen, die ihrerseits auf der Textausgabe von Heiberg (1898—1907, 2 Bde.) beruht.

Euklid, Archimedes, Apollonius, Ptolemäus: die Ausgabe ihrer Schriften bildet das eigentliche Lebenswerk Heibergs. Doch der unermüdlichen und entsagungsvollen Arbeit des Gelehrten sollte noch ein Lohn zuteil werden, den weder er noch andere erwarten konnten.

Im Sommer 1906 fand Heiberg in Konstantinopel eine Archimedes-Handschrift mit der bis dahin verlorenen Ephodos oder Methodenlehre. Es war ein Palimpsest, „mit der Lupe einigermaßen lesbar", wie Heiberg sagte, — außer ihm hätte wahrscheinlich niemand den Text entziffern können. Die Bibliotheca mathematica brachte 1907 (S. 321) eine deutsche Übersetzung von Heiberg und einen Kommentar von Zeuthen, und Heiberg gab bald darauf den ganzen Archimedes mit dem neuen Fund noch einmal heraus: 3 Bände, 1910—15.

Die Bedeutung der Ephodos besteht in drei Punkten, in denen sie von den klassischen Schriften des Archimedes abweicht. Zunächst benutzt Archimedes in der Ephodos *mechanische*, nämlich Schwerpunktsbetrachtungen; dies ist nichts völlig Neues, das gleiche Verfahren wird gelegentlich in der schon lange bekannten Quadratur der Parabel angewandt. Merkwürdig ist aber, daß in dem gut erhaltenen ersten Teil der Ephodos überall der sog. Exhaustionsbeweis fehlt, d. h. der Nachweis, daß bei genügender Verfeinerung oder Fortsetzung des infinitesimalen Verfahrens der begangene Fehler kleiner gehalten werden kann als jede vorgeschriebene Größe. Endlich findet sich eine gewisse Nachlässigkeit des Ausdrucks, die aber gerade den Erfolg hat, die Darstellung kurz und übersichtlich zu machen: es wird angenommen, daß ein Körper aus Flächen „besteht"; um den Rauminhalt eines Körpers zu finden, werden einfach seine Schnittflächen untersucht.

Erwähnt sei noch die Ausgabe einer arabischen Euklid-Bearbeitung mit lateinischer Übersetzung, die Heiberg und der Kopenhagener Arabist Besthorn zusammen begonnen haben (5 Teile, Kopenhagen 1893—1910). Die Arbeit wurde wegen Besthorns Tode nicht zu Ende geführt. Es handelt sich um den berühmten Codex Leidensis 399, 1, der die sechs ersten Bücher der von al Hadschadsch ausgeführten Euklid-Übersetzung enthält, sowie auch den Kommentar des an-Nairizi, der seinerseits aus Simplicius, Heron und anderen geschöpft hat. An einer von dem Schreiber dieser Zeilen angeregten Fortführung des Unternehmens wollte auch Heiberg sich beteiligen — es sollte nicht mehr sein.

Die letzten Schriften des Verstorbenen sind zwei 1927 erschienene Ausgaben: „Mathematici Graeci minores"[1]) und „Theodosius Sphaerica".[2])

1) Det kgl. Danske Vid. Selskab, Hist. fil. Meddelelser, XIII, 3; Kopenhagen; 107 S.; eine Zusammenstellung sonst wenig bekannter Schriften, meist griechisch und in deutscher Übersetzung.

2) Abh. der Ges. der Wiss. zu Göttingen, Phil. hist. Klasse, neue Folge Bd. XIX, 3; Berlin; 199 S., griechisch und lateinisch. Diese Sphärik ist eine Geometrie auf der Kugel

Heibergs Werk verträgt es wohl, daß man zwei Fragen stellt: Ist denn nichts daran auszusetzen? Und welchen Zweck hat das Ganze?

Was die eigentlich philologische Arbeit betrifft, so sind von berufener Seite Heibergs Ausgaben immer als mustergültig, ja als die endgültigen bezeichnet worden. Der Mathematiker kann nur hinzufügen, daß Heiberg, wenn er auf mathematische Fragen zu sprechen kommt, durchweg ein feines Verständnis bekundet. Eine kleine Schwäche war, daß er die Figuren nicht immer richtig gab, sondern in gar zu großer Treue oft die fehlerhaften Figuren der alten Handschriften unverändert in seine Textausgabe übernahm.

Was endlich die für den Mathematiker erkennbaren Erfolge der Heibergschen Ausgaben betrifft, so ist hier allerdings zu sagen, daß er, von der Ephodos abgesehen, den Mathematikern nicht viel Neues gebracht hat, auch wohl nicht bringen konnte. Sein Verdienst liegt in letzter Linie doch auf philologischem Gebiet, in der Aufdeckung einer Textgeschichte. Die Verbesserungen des Textes sind meist für den Mathematiker nicht wesentlich. Einige sind immerhin mit Recht bekannt geworden: die berühmte euklidische Voraussetzung über die Parallelen galt früher als elftes Axiom und wird seit Heiberg als fünftes Postulat bezeichnet. Von anderen Gründen abgesehen, sollen die Axiome oder „Gemeinbegriffe" nicht nur geometrischen Inhalt haben; so gehört wohl der Ausspruch dahin, daß das Ganze größer ist als sein Teil, aber nicht die Aussage über die Parallelen. —

Es war im ganzen eine mühselige Arbeit, die Heiberg geleistet hat. Karg blieb der Lohn der Welt, spärlich die verständnisvolle Anerkennung. Ein Aufleuchten brachte nur die Ephodos von 1906. Um diese Riesenarbeit auszuführen, war mehr nötig als philologischer Fleiß und guter Wille. Es bedurfte einer besonderen Natur, die immer wieder aus sich selbst neue Kraft zu neuem Tun schöpfte, es war Heibergs glühende Begeisterung für das Griechentum nötig und eine Vorliebe für die herberen Seiten des griechischen Wesens, wie gerade Heiberg sie hatte.

---

ohne alle Rechnung. Eine deutsche Übersetzung von Nizze ist schon 1826 erschienen. Über den Inhalt berichtet Heath, History of Greek Mathematics, Bd. II, Oxford 1921, S. 246—252.

(Eingegangen am 12. 4. 1928.)

Bemerkungen zu Fermats Methode der Aufsuchung von Extremwerten und der Bestimmung von Kurventangenten.

Von Heinrich Wieleitner in München.

Mit 1 Figur im Text.

Wenn man Fermats Methode der Aufsuchung von Extremwerten, mit der seine Methode zur Bestimmung von Kurventangenten aufs engste zusammenhängt, studieren will, muß man sich schon etwas Zeit vornehmen. Zuerst sind da neun (lateinische) Originalstücke von Fermat im I. Band der „Œuvres" (Paris 1891, S. 133—179)[1]), dann Briefe im II. Band (Paris 1894), die S. 126 mit dem Stück XXV beginnen (Descartes an Mersenne, Jan. 1638), im Stück XXXI (S. 154f.) mit einer ausführlichen, für Descartes bestimmten Darlegung Fermats (in Französisch) gipfeln und langsam gegen den Schluß des Jahres verebben (letztes Stück XXXVI, Dez. 1638, Fermat an Mersenne, S. 176—178). Im IV. Band (1912) sind sieben Schriftstücke, meist Briefe von Descartes, zum Thema eigens zusammengestellt (S. 25—64), darunter auch eine Verteidigung Fermats durch Roberval, und ein durch seine krause Schreibweise auffallender Originalbrief von Desargues an Mersenne.[2]) In demselben Band ist ein Auszug eines großen Aufsatzes von J.-M.-C. Duhamel über den Gegenstand aus dem Jahre 1864 abgedruckt als Note I (S. 143—145), begleitet von einer kurzen Berichtigung durch A. Aubry, die auf den Wunsch des Herausgebers in einer eigenen Note XXV (S. 222—227) weiter ausgearbeitet wurde. Duhamel hatte zu seinem Aufsatz natürlich noch gar nicht die richtigen Grundlagen, und durch die Note von Aubry scheint es mir nicht viel besser geworden zu sein. Diese beiden Auslassungen werde ich also im folgenden nicht berücksichtigen. Ich habe auch die alten Aufsätze, die es über die Sache weiter gibt, und die in dem gleichen IV. Bd. der „Œuvres" S. 240 in der Fußnote angegeben sind, als kaum fördernd nicht angesehen. Wohl aber habe ich wieder mit Aufmerksamkeit die wertvollen Ergänzungen studiert, die C. de Waard in dem zu Paris 1922 erschienenen V. Bd. der „Œuvres" (eig. „Supplément aux Tomes I—IV" genannt) ans Licht gezogen hat, und zwar die Stücke V und VI (S. 72—86), die noch nicht viel Neues

1) Französ. Übersetzung von P. Tannery in Bd. III, Paris 1896, S. 121—156.

2) Die Briefe von und an Descartes findet man auch zerstreut in dem II. Bd. der „Œuvres de Descartes", Paris 1898.

bringen, dann das wichtige Stück VIII, eine Darlegung der Fermatschen Tangentenmethode durch Jean de Beaugrand (wahrscheinlich im Herbst 1638 entstanden; S. 98—114), und den noch wichtigeren Brief von Fermat selbst an Brûlart de St.-Martin mit einer Erläuterung seiner Methode (Stück X, vom 31. März? 1643, S. 120 bis 125), der durch einen bisher schon bekannten Brief von Fermat an Mersenne vom 7. April 1643 (dem er wahrscheinlich beilag), nicht unwesentlich ergänzt wird (Bd. II, S. 253/54).

I.

Von zusammenhängenden Beurteilungen der Fermatschen Leistung möchte ich besonders auf die von H. G. Zeuthen hinweisen, die allerdings schon im Jahre 1903 erschien[1]), aber, wie bei Zeuthen immer, auf eingehenden Studien beruht. Und doch muß ich schon hier mit meinen Bemerkungen beginnen, gerade weil Zeuthen sonst zuverlässig ist, und man ihm daher im allgemeinen vertraut. Zuerst muß ich aber ganz kurz sagen, worin Fermats Methode bestand, so wie er sie in seinem ersten Stück darstellte, das im Jan. 1638, zugleich mit der ersten Tangentenbestimmung (an die Parabel), an Descartes gelangte.[2])

In dem Ausdruck, der die Größe, die ein Extrem werden soll, darstellt, sei A die Variable. Fermat ersetzt A durch $A + E$. Er setzt dann den neuen Ausdruck dem alten annähernd gleich, nimmt die gleichen Glieder auf beiden Seiten weg, dividiert durch die höchstmögliche Potenz[3]) von E, läßt dann alle mit E behafteten Glieder weg („elidantur . . . homogenea sub E . . .“), und setzt das was übrigbleibt wirklich gleich. Daraus ergibt sich A.

Natürlich gibt diese Methode, rein äußerlich betrachtet, dasselbe, wie wenn man — so drückt es Zeuthen auch aus — die Gleichung

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$$

bildet und hier dann $h = 0$ nimmt. Hierzu ist aber vor allem zu bemerken, daß Fermat nirgends außer in dem Stück IV (Bd. I, S. 147 bis 153), von dem ich noch eigens sprechen werde, wirklich sagt, daß er E gleich Null setzt. Er läßt eben nur die mit E behafteten Glieder

1) Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrh., Leipzig 1903, S. 329 bis 334. Ed. franç., Paris 1902.

2) Fermat datiert seine Entdeckung selbst um acht bis zehn Jahre zurück; Bd. II, S. 162. Da er dasselbe schon behauptet hatte, bevor er mit Descartes in Fühlung kam, ist es sehr wohl glaublich (Briefe IX und XIII im II. Bd., S. 56 und S. 71 an Stephan Pascal und Roberval, bzw. an den letzteren allein).

3) Wohl nur eine gedankenlose Bemerkung von Fermat; in Frage kommt doch lediglich die erste Potenz von E.

weg. Auch daß E möglichst klein sein soll, wird nirgends gesagt, und ist höchstens durch den Ausdruck „adaequalitas" („adégalité") zum Ausdruck gebracht. Von einem Grenzübergang für $E \to 0$ ist schon gar nicht die Rede. Einen Beweis für seine Regel hat ja Fermat, wenigstens anfangs, nicht gegeben. Das gibt er selbst zu in dem Brief an Mersenne (Stück XXX in Bd. II, S. 152), dem die Ausführungen für Descartes (Stück XXXI; s. o.) beilagen. Dort deutet er aber an, daß die „Hauptgrundlage des Beweises darauf beruhe, daß $A + E$ dasselbe gibt wie $A - E$". Dies ist dann noch weiter ausgeführt in dem Brief an den Seigneur de St.-Martin (s. o.), der den Gedankengang Fermats sehr deutlich erkennen läßt, wenn es, wie Fermat zugesteht (in dem erwähnten Brief an Mersenne vom 7. April 1643), auch zu einem eigentlichen Beweis noch nicht reicht: „Denn um die Sache ganz klar zu machen und vollständig zu beweisen, müßte man eine ganze Abhandlung schreiben. Ich werde mich dem nicht entziehen, wenn ich nur einmal genug Muße dafür finde."

In dem Brief an St.-Martin setzt Fermat seine Methode an dem mehrfach von ihm verwendeten Beispiel auseinander: *Eine Strecke so zu teilen, daß der Würfel aus dem einen Abschnitt und dem Quadrat des andern ein Maximum wird.* Wir führen die Rechnung in moderner Bezeichnung, doch sonst möglichst unverändert vor. a (> 0) sei die Strecke, x der eine Abschnitt auf ihr. Die zu untersuchende Funktion $f(x) = x^2(a - x)$ ist im Sinne Fermats nur definiert für $0 \leqq x \leqq a$. Ist $h > 0$ (und gilt $0 \leqq x \pm h \leqq a$), so wird durch Auspotenzieren gebildet

$$f(x \pm h) = x^2(a - x) \pm h(2ax - 3x^2) + h^2(a - 3x) \mp h^3.$$

Ist x_0 Maximalstelle von $f(x)$ ($0 < x_0 < a$), so muß nach Fermat $f(x_0) > f(x_0 \pm h)$ gelten. Er bestimmt $x_0 (= \frac{2}{3}a)$ als Wurzel der Gleichung für x, die durch Nullsetzen des Koeffizienten $2ax - 3x^2$ von h in beiden Entwicklungen entsteht. Sodann schließt er aus der (für $x > 0$ geltenden) Ungleichung $\frac{2ax}{3x^2} > \frac{a}{3x}$ [1]), daß der Koeffizient von h^2 für die fragliche Extremstelle wegen $3x_0 > a$ negativ und folglich $f(x_0) > f(x_0 \pm h)$ wird; „denn man sehe auf den ersten Blick, daß das Glied mit h^3 diese Ungleichung nicht mehr beeinflußt.[2]) Vielmehr werde alles entschieden durch den Koeffizienten von h^2; sei er negativ wie in dem Beispiel, so ergebe sich ein Maximum; sei er positiv, so habe man ein Minimum."

1) Die Zähler bzw. Nenner in dieser Ungleichung sind die positiven bzw. negativen Glieder der Koeffizienten von h bzw. h^2.

2) In Wirklichkeit ist das freilich nicht so einfach, als es sich Fermat dachte.

Fermat hat also die Bedingung für ein Maximum oder Minimum ganz klar erkannt und allgemein ausgesprochen; das muß zu allen Darstellungen seiner Methode, die vor 1922 liegen, ausdrücklich hinzugefügt werden. Sein Verfahren beruht aber hier nicht auf dem Umstand, daß h gleich Null gesetzt wurde oder gegen Null hinstreben sollte, vielmehr hängt es ab von der Entwicklung der Funktionen $f(x \pm h)$ nach Potenzen von h. Fermat konnte sein Verfahren nur auf Polynome $f(x)$ oder darauf zurückführbare Funktionen anwenden.[1])

---

1) An der Fassung des Absatzes von „In dem Brief an St.-Martin" an hat Herr Jos. E. Hofmann mitgearbeitet. Die folgende Fußnote stammt ganz von ihm. —

Um Fermats Verfahren im einzelnen zu verfolgen (wie er selber sagt, gilt es allgemein), denken wir uns $f(x)$ nebst seinen Ableitungen $f'(x), f''(x)$ im Intervall $\alpha \leqq x \leqq \beta$ eindeutig und stetig. Sodann nehmen wir mit Fermat an, es gebe zwei Funktionen $P(x), Q(x)$, die nebst ihren Ableitungen $P'(x), Q'(x)$ im Intervall eindeutig, stetig und positiv sind und den Bedingungen genügen

(1) $$f'(x) \equiv P(x) - Q(x), \quad \text{also} \quad f''(x) \equiv P'(x) - Q'(x),$$

(2) $$\frac{P'(x)}{Q'(x)} - \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ hat im Intervall keine Nullstelle.}$$

Die Existenz solcher Funktionen ist für Fermat selbstverständlich; wir werden sie nachher (mit einer unwesentlichen Einschränkung) beweisen.

Hat nun $f'(x)$ im Intervall $\alpha < x < \beta$ überhaupt Nullstellen, so hat es deren genau eine; sie sei mit x_0 bezeichnet. Gäbe es nämlich mehrere, so sei ξ die nächst x_0 gelegene Nullstelle von $f'(x)$ im Intervall. Dann wäre $f''(x_0) f''(\xi) < 0$, während doch aus (1) mit $f'(x_0) = 0$ folgt

$$f''(x_0) = Q'(x_0) \cdot \left[\frac{P'(x_0)}{Q'(x_0)} - 1\right] = Q'(x_0) \cdot \left[\frac{P'(x_0)}{Q'(x_0)} - \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}\right];$$

entsprechend

$$f''(\xi) = Q'(\xi) \cdot \left[\frac{P'(\xi)}{Q'(\xi)} - \frac{P(\xi)}{Q(\xi)}\right],$$

oder mit (2) entgegen der obigen Ungleichung $f''(x_0) \cdot f''(\xi) > 0$.

Der zur Nullstelle x_0 von $f'(x)$ gehörige Funktionswert $f(x_0)$ ist ein Maximum für $\frac{P}{Q} > \frac{P'}{Q'}$, ein Minimum für $\frac{P}{Q} < \frac{P'}{Q'}$. Das folgt direkt aus der für $\alpha \leqq x_0 + h \leqq \beta$ geltenden Entwicklung

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0 + \vartheta h), \qquad 0 \leqq \vartheta \leqq 1.$$

Fermats Methode bezieht sich nur auf Extremstellen x_0 mit $f''(x_0) \neq 0$. Es ist daher ein Teilintervall $\alpha' \leqq x \leqq \beta'$ angebbar, in dem $f''(x) \neq 0$ ist. In diesem Intervall lassen sich Funktionen P, Q der obigen Eigenschaften konstruieren. Es seien nämlich M, N zwei positive Konstante derart, daß $|f'(x)| < MN$, $|f''(x)| < M$, und es werde gesetzt

$$P(x) = M[x - \alpha' + N], \quad Q(x) = M[x - \alpha + N] - f'(x);$$
$$P'(x) = M, \quad Q'(x) = M - f''(x).$$

II.

Nun hat Fermat freilich auch das erwähnte Stück IV geschrieben, und gerade auf dieses stützt Zeuthen seine Darlegung. Aber dieses Stück IV fällt ganz aus dem Rahmen der übrigen heraus, und gehört nicht, wie Zeuthen meint, zu den „älteren Darstellungen der Anwendungen seiner Methode", sondern es stammt (nach der in Bd. V, S. XVI gegebenen Datierungstabelle) aus den Jahren 1643 oder 1644, und ist eine ganz andere Fassung seiner Methode als die, welche er gewöhnlich anwendete, und die seinem Brief an St.-Martin zugrunde liegt. Das nächste Stück, das als fraglich auf den 21. April 1644 datiert wird und als „Anhang zur Methode" bezeichnet ist, nimmt keinerlei Bezug auf IV. Infolgedessen ist es nicht unwahrscheinlich, daß IV überhaupt das letzte Stück ist, das Fermat über diese Methode der Maxima und Minima schrieb. Denn alle vorausgehenden und alle noch folgenden Stücke sind nachweislich älter. Die Darlegung des Verfahrens im Stück IV ist bei Zeuthen sehr knapp, aber richtig. Nur die Bezugnahme auf Oresme und Kepler (die auch Aubry hat) sollte fehlen.[1])

Wenn ich das Verfahren des Stückes IV an dem einfachsten Beispiele, das Fermat gibt, in moderner Bezeichnung zeige, ist es folgendermaßen. Es soll eine Strecke a so geteilt werden, daß das Produkt der beiden Abschnitte gleich b^2 wird. Die Gleichung lautet

$$x(a-x)=b^2.$$

Es gibt aber eine zweite Lösung y, die auch der Gleichung

$$y(a-y)=b^2$$

genügt. Nach dem Vorbild von Viète setzt nun Fermat

$$x(a-x)=y(a-y),$$

und erhält, nachdem er alles mit $x-y$ dividiert hat,

$$a=x+y,$$

---

dann sind P, Q; P', Q' positiv und erfüllen die Bedingungen (1). Außerdem ist

$$\frac{P'}{Q'}-\frac{P}{Q}=\frac{M}{QQ'}[(x-a'+N)f''-f']$$

bei hinreichend großem N von gleichem Zeichen, nämlich dem von $f''(x)$, und damit sind zwei Funktionen der gewünschten Art gebildet. Somit ist Fermats Rechenregel wohl begründet und liefert alle Extremstellen x_0 richtig, für welche $f''(x_0) \neq 0$ ist.

1) Unterdessen hat E. Hoppe (dieser Jahresbericht XXXVII, 1928, S. 180) die alte Behauptung, wenigstens für Kepler, wieder aufgestellt, während ihm bei Oresme (trotz sonstiger Ungenauigkeiten) doch selbst Bedenken gekommen sind (S. 178/79).

wobei $x \neq y$. Wenn man nun b^2 vergrößert (das nur immer unter $\frac{1}{4}a^2$ bleiben muß), rücken x und y einander näher, und wenn $x = y$ wird, entsteht das größtmögliche Produkt b^2. In diesem Falle ist

$$2x = 2y = a,$$
$$x = \quad y = \tfrac{1}{2}a,$$

das Maximum der Funktion selbst ist

$$b^2 = \tfrac{1}{4}a^2.$$

Weil es aber oft unbequem sei, mit $x - y$ zu dividieren, setzt Fermat

$$y = x + h.$$ [1]

Dann ergibt sich bei dem obigen Beispiel

$$ax - x^2 = a(x + h) - (x + h)^2$$
$$= ax + ah - x^2 - 2xh - h^2,$$ [2]

und es ist also nach Wegnahme der gleichen Glieder und Division durch h

$$2x = a - h.$$

Wenn aber das Maximum erreicht wird, ist $x = x + h$, also $h = 0$ zu setzen.[3] Und man erhält das obige.

Hier kann man nun tatsächlich von einem Grenzübergang sprechen, da x immer näher an y heranrücken soll, also h immer kleiner und schließlich gleich o wird.

Aber dieses Verfahren hat Fermat mit seiner anderen streng algebraischen Methode, wie er sie in dem Brief an St.-Martin genauer darlegt, niemals kombiniert. Er nennt es auch in der Einleitung des Stückes IV selbst (I, S. 147) „Nova ad inventionem maximae et minimae ... methodus". Es scheint daraus hervorzugehen, daß er die wirkliche Identität der beiden Betrachtungsweisen nicht voll durchschaute. Oder er hat vielleicht, wenn dies das letzte Stück war, wie ich oben als möglich hinstellte, den Gegenstand nicht mehr aufgenommen. Unter diesen Umständen darf man aber nicht, wie das Zeuthen tat, dieses Verfahren als den alleinigen Sinn von Fermats Methode hinstellen. Das Verfahren, das Fermat in allen anderen

1) Bei ihm heißt es $A + E$.

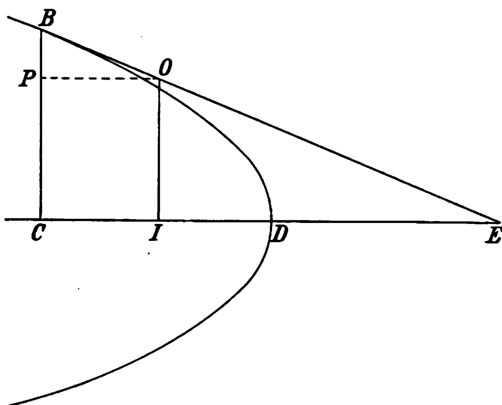
2) Fermat selbst führt nicht dieses Beispiel aus, sondern ein wesentlich komplizierteres.

3) Fermat sagt wörtlich: Aequanda igitur sunt inter se A et $A + E$, ergo E dabit nihilum. (Bd. I, S. 150.)

Stücken und Briefen anwendet, ist vielmehr am besten durch den Brief an St.-Martin wiedergegeben, der nach meiner Ansicht früher ist als das Stück IV.[1])

III.

Die Tangentenmethode hat Fermat direkt an die Methode für Maxima und Minima angeschlossen. Aber er sagte nur, daß sich die Auffindung der Tangenten auf die oben dargelegte Methode zurückführen lasse (I, S. 134), nicht daß er die Auffindung der Tangenten als eine Extremaufgabe betrachte, worauf sich Descartes in dem daraufhin ausgebrochenen Streit versteifte. Die Methode war die, daß Fermat die gesuchte Subtangente CE (s. Fig.) mit A bezeichnete, dann $EI = A - E$ setzte, in I die Ordinate IO bis zur Tangente zog und jetzt zuerst auf BC und OI den Verhältnislehrsatz und dann die „proprietas specifica" der Parabel anwendete. Diese wurde zuerst als Ungleichung geschrieben, schließlich als angenäherte Gleichung und ganz zum Schluß als wirkliche Gleichung. Wenn ich wieder alles in moderner Bezeichnung, aber genau im Sinne Fermats schreibe, so setze ich $DC = x$, $CE = s$, $CI = h$, $CB = y$, $IO = y_0$.



Dann ist zuerst

(I) $$\frac{y}{y_0} = \frac{s}{s-h} \quad \text{und} \quad \text{(II)} \quad \frac{y^2}{y_0^2} < \frac{x}{x-h}.$$

Man erhält also

(III) $$\frac{s^2}{(s-h)^2} < \frac{x}{x-h},$$

und daraus $$s^2x - s^2h \approx s^2x - 2shx + h^2x,$$

oder, genau nach der beim Aufsuchen der Extremwerte angewendeten Methode,
$$s^2 \approx 2sx - hx,$$

und schließlich $$s = 2x.$$

---

1) Nach den neu aufgefundenen älteren Handschriften hat dieses Stück auch den bezeichnenden Titel „Analytica ejusdem methodi investigatio" (Bd. V, S. XVII).

Auch hier wird nicht $h = 0$ gesetzt, sondern nur das Glied mit h weggelassen, und das was übrig bleibt gleichgesetzt. Das kommt ja gewiß auf dasselbe hinaus, wie wenn Fermat den Punkt O gleich auf der Kurve angenommen hätte. Dann wäre schon (II) eine Gleichung geworden. Läßt man dann h allmählich zu Null werden, so würde der Punkt O nach B hinrücken und die Tangente wäre aus der Sekante entstanden, wie wir das gewohnt sind aufzufassen. So hat es auch Beaugrand dargestellt (s. o.), der um die Sache noch mehr zu verdeutlichen, statt des Fermatschen $E(= h)$ den Buchstaben o einführte, damit er gleich die Anlehnung an Null hatte.[1]) Auch Descartes hat in einem seiner vernünftigeren Briefe zu dieser Sache, nämlich dem vom Juni 1638 an den Pariser Rechtsanwalt Claude Hardy (Bd. IV, S. 48—51), das Verfahren so dargelegt.

Aus dem Original von Fermat und aus allen seinen späteren Beispielen sieht man aber, daß dies keineswegs Fermats Gedanke war. Fermat hatte durchaus die antike Auffassung der Tangente, daß diese die Kurve nur in einem einzigen Punkte trifft, während alle anderen Punkte außerhalb der Kurve liegen. Deshalb beginnt er seine Ausführungen auch mit einer Ungleichung. Descartes' nicht sehr intelligente Einwände erfuhr Fermat anfangs nicht, da Mersenne sie ihm nicht direkt auslieferte, sondern Fermats Freunden Roberval und Etienne Pascal in Paris zur Beantwortung übergab. Die gemeinsame Antwort ist nicht erhalten, ihr Inhalt aber aus einem etwas späteren Stück „Roberval contre Descartes" (IV, S. 30—38) gut zu ersehen. Roberval weist vor allem darauf hin, daß, was für $A - E$ gelte, auch für $A + E$ gelten müsse (das ist gerade Fermats nicht ausgesprochener Gedanke), und er hatte erkannt, daß Fermat in der Ungleichung (II) die „spezifische Eigenschaft" der Parabel verwendet hatte. Descartes hatte das in seiner hochmütigen Leichtfertigkeit, mit der er Fermats Methode offenbar angesehen hatte, wirklich nicht begriffen, und in seinem Briefe an Claude Mydorge vom 1. März 1638 (IV, S. 25—30), der geradezu borniert genannt werden muß, Fermats Wortlaut, der sich auf die Parabel bezog, ohne Änderung auf Ellipse und Hyperbel, also ohne deren spezifische Eigenschaften (wir sagen „Gleichungen") zu verwenden, übertragen. Damit glaubte er Fermat ad absurdum führen zu können.

Leider hat nun auch Zeuthen das Fermatsche Verfahren nicht nur so wie Beaugrand wiedergegeben (a. a. O. S. 331), sondern auch noch (nach unserer Bezeichnung) durch O, welcher Punkt bei ihm auf

1) Man wird bemerken, daß E. Hoppe (a. a. O. S. 175) das Verhältnis von Fermat und Beaugrand nicht richtig darstellt.

der Kurve liegt, die Parallele OP gezogen, was nie bei Fermat und auch nicht bei Beaugrund und Descartes an den angegebenen Stellen vorkommt, so daß Zeuthen sogar zu der Behauptung kommt, das Dreieck BPO (nach unserer Bezeichnung) sei dasselbe, das Pascal bei seinen Quadraturen verwendet und das Leibniz später das charakteristische genannt habe. Es kann nicht laut genug gesagt werden, daß dieses Dreieck bei der Fermatschen Methode damals nie angewandt wurde.

IV.

Wie schon berührt, versteifte sich Descartes auch darauf, daß das Tangentenproblem als Maximumaufgabe gelöst werden müsse. Und er wollte die Tangente definieren als die längste Strecke von E aus, die die Parabel nicht überschreitet. Die Unmöglichkeit einer solchen Definition sah er offenbar nicht ein, wiewohl auch darauf ihn schon Roberval hingewiesen hatte. BE sollte also nach Descartes ein Maximum werden. In seinem Brief an Mersenne vom 18. Jan. 1638 (II, S. 126—132) rechnet er, wenn wir es lediglich in unsere Bezeichnung umsetzen, folgendermaßen:

Weil gilt $$\overline{BE}^2 = s^2 + y^2,$$

und $y^2 = px$ die Gleichung der Parabel ist ($p = \frac{\overline{BC}^2}{CD}$ nach antiker Weise der Parameter), so ist, wenn man jetzt $s + h$ nimmt statt s (er sagt, es käme auf dasselbe hinaus wie $s - h$, nach der Figur) und $x + h$ statt x

$$\overline{BE}^2 = (s + h)^2 + p(x + h),$$

demnach $$s^2 + px = s^2 + 2sh + h^2 + px + ph,$$

folglich $$p + 2s + h = 0,$$

und schließlich $$p + 2s = 0.^{1)}$$

Diese Gleichung, sagt Descartes, gebe aber nicht den Wert von s, und folglich sei Fermats Regel falsch.

Leider hat Descartes selbst nicht verstanden, was er da so schön ausgerechnet hatte. Es kommt ja heraus $s = -\frac{1}{2}p$, und das gibt, wenn man s von C aus rechnet, den Schnittpunkt der Normalen in B mit der Achse. Fermat hat aber sofort begriffen, daß die Auf-

1) Bei Descartes wörtlich (S. 128)

$$\frac{Bq.}{D} + A \text{ bis égal à rien,}$$

wobei $B = \overline{BC}$, $D = \overline{CD}$.

suchung des Extrems von BE auf die Normale und nicht auf die Tangente führen müsse, und hat es Descartes vorgerechnet (Stück XXXI, Bd. II, S. 159/61). Er hat nur leider den Ansatz neu gemacht, so daß, was wir s nannten, positiv herauskam. Wahrscheinlich hatte er eben Descartes' Brief gar nicht mehr vor Augen. Aber das Descartessche Beispiel wäre ein Musterbeispiel gewesen, um den Wert der negativ gezählten Strecken zu erkennen. Es wurde aber weiter nicht beachtet, und soviel mir bekannt ist, hat auch kein Historiker darauf hingewiesen.

In seiner eigensinnigen Verbohrtheit hat Descartes auch die Tangente an den Kreis als Maximumaufgabe genau so gerechnet (Brief an Mersenne vom 3. Mai 1638; II, S. 138—145), und er bekommt (S. 141)

$$E \text{ in } C + E \text{ in } B \text{ bis égal à rien,}$$

„was offenkundig den Fehler dieser Regel aufzeigt". Aber wenn man hier mit E dividiert, so kommt heraus

$$C + 2B = 0,$$

und da C der Durchmesser des Kreises ist, und B die Strecke, die in der Figur unserer Parabel mit DE bezeichnet wurde, so ergibt sich hier wunderschön

$$B = -\frac{C}{2},$$

und Descartes hat nolens volens auch hier den Schnittpunkt der Normalen in B mit der Achse, d. i. den Mittelpunkt des Kreises errechnet, ohne es zu wissen. Auch hierauf wurde meines Wissens noch nie hingewiesen.

V.

Es ist nun die Frage, ob Fermats Tangentenmethode nicht doch als eine Extremaufgabe aufgefaßt werden kann. Das ist in der Tat der Fall, und auch das ist damals schon zur Sprache gekommen, wenn es auch ursprünglich sicher nicht in der Absicht Fermats gelegen hatte, die Sache so anzusehen. Descartes hat nämlich in dem eben erwähnten Brief (II, S. 142—144) das Fermatsche Verfahren durch weitere Rechnung angeblich verbessert, so daß es brauchbar wurde, aber auch dabei nicht erkannt, was er eigentlich tat. Fermat hat es (Brief an Mersenne vom Juni 1638; II, S. 152—154) mit ein paar Worten angegeben. Wenn ich mich wieder auf die obige Figur beziehe, so sagt Fermat, daß Descartes an den betreffenden Stellen das Minimum des Verhältnisses $BE : BC$ gesucht und richtig gefunden habe. Das ist aber nichts anderes als das Maximum des Winkels bei E, wie ich

hinzusetze. Nehme ich statt der Funktion cosec, die Descartes (wahrscheinlich unbewußt) angewandt hat, die Funktion tg, so wäre also das Maximum von $\frac{y}{s}$ zu suchen; d. h. ich müßte setzen, wenn ich y_1 die Ordinate der Kurve in I nenne,

$$\frac{y_1}{s-h} < \frac{y}{s},$$

oder, wenn ich auf beiden Seiten quadriere,

$$\frac{p(x-h)}{(s-h)^2} < \frac{px}{s^2},$$

schließlich
$$\frac{s^2}{(s-h)^2} < \frac{x}{x-h},$$

was genau mit der obigen Ungleichung (III) übereinstimmt. Fermat hätte seinem Verfahren also leicht diese Wendung geben können. Aber da er das eben nicht tat, halte ich die Bemerkung des Herausgebers (Ch. Henry) in Bd. IV (S. 43[2]), „Fermat habe das Maximum von $\frac{ID}{\overline{IE}^2}$ [1]) gesucht, wenn der Punkt I gegen den Punkt C strebt", für unrichtig und unhistorisch, doppelt unhistorisch wegen des Beisatzes, da Fermat von einem solchen Hinstreben nie gesprochen hat, außer in dem Stück IV, wo aber nicht von Tangenten die Rede ist.

Fermats Methode mußte schließlich auch Descartes imponieren, nachdem sich gezeigt hatte, was Descartes am Anfang für ausgeschlossen hielt, daß Fermat sie auf beliebig vorgegebene Kurven, sogar auf transzendente (wie die Zykloide und die Quadratrix des Deinostratos) anwenden konnte, wozu seine eigene algebraische Methode, die ohnedies schon bei einfachen algebraischen Kurven sehr umständlich wurde[2]), überhaupt nicht imstande war. Und schließlich bedachte Descartes auch Fermat, nachdem Mersenne einen direkten Briefwechsel vermittelt hatte, mit den schmeichelhaftesten Ausdrücken (s. z. B. den Brief vom 27. Juni 1638; II, S. 163). Aber hinten herum äußerte sich Descartes immer noch sehr ungünstig über seinen Gegner (s. Brief an Mersenne vom 23. Aug. 1638; IV, S. 60f.[3]), und im Dez. 1638 schrieb er an Mersenne (IV, S. 109/10), er habe in den verschiedenen Schriften Fermats nur zwei oder drei

1) Das wäre in unserer Schreibweise $\frac{x-h}{(s-h)^2}$, was an sich etwas ganz Abstraktes, Unanschauliches gäbe.

2) S. z. B. die lat. Ausgabe der Descartesschen Geometrie von 1659, S. 40f. (Im Original von 1637, S. 342f.).

3) Von dem ganz bösen Brief an Mersenne vom 3. Juni 1638 (?) will ich absehen, weil er wohl vor dem entscheidenden Brief XXX (Bd. II, S. 152) geschrieben war.

gute Dinge gesehen, untermischt mit vielem Schlechten, und er verglich Fermats Schriften mit den Versen des Ennius, aus welchen Vergil das Gold herausgezogen habe, „*i'entens de stercore Ennii*". Das sei aber nur „entre nous" gesagt. Stärker kann sich die verletzte Eitelkeit, wenn sie noch dazu im Unrecht ist, nicht äußern. Fermat hat sich in dem ganzen Streit, der ja auf die (berechtigten) Einwände, die er gegen Descartes' Erklärung des Brechungsgesetzes gemacht hatte, zurückging, als ein gerade und vornehm seinen Weg gehender Gelehrter erwiesen.

(Eingegangen am 3. 9. 1928.)

Einige distributive Systeme in Mathematik und Logik.

Von FRITZ KLEIN in Barmen.

1. Ausgangspunkt der nachstehenden Ausführungen ist die folgende Tatsache: In der *Arithmetik* verhalten sich die Verknüpfungen der Addition und Multiplikation symmetrisch bezüglich des kommutativen und assoziativen Gesetzes; die Symmetrie wird erst zerstört im distributiven Gesetz. In der *Logik* dagegen gibt es zwei Verknüpfungen, nämlich die des „Entweder-oder" und die des „Sowohl-als auch", die vollkommen symmetrisch in bezug auf die drei genannten Gesetze sind.[1]) Eine Menge, deren Elemente zwei Verknüpfungen zulassen, die hinsichtlich der drei obigen Gesetze symmetrisch sind, möge als distributive Menge oder auch als distributives System bezeichnet werden.

In der folgenden Untersuchung, die nur vom Standpunkt der Mathematik aus bewertet sein will, soll gezeigt werden, daß es auch in der *Mathematik* distributive Systeme gibt. Über das dabei benötigte Maß von Voraussetzungen ist folgendes zu sagen: Wir unterscheiden zwei Arten distributiver Systeme, nämlich einfache Systeme (E-Systeme), die den Bedingungen (1)—(5), und vervollständigte Systeme (V-Systeme), die den Bedingungen (1)—(10) genügen. Das abstrakte E-System ist bekannt[2]), ebenfalls seine durch Beispiel I innerhalb der Mathematik vollzogene Verwirklichung. Das abstrakte V-System ist wohl noch nicht aufgestellt worden; den psychologischen Anstoß zur Aufstellung desselben hat die durch Gegenüberstellung von bejahenden und verneinenden Urteilen erzeugte Zuordnung und die durch Unterscheidung der Urteile in wahre und falsche bedingte Klassen-

1) Siehe weiterhin Beispiel I und V.

2) Vgl. z. B. Julius König, Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre, Leipzig 1914, S. 75, 76.

einteilung gegeben. Realisiert wird das abstrakte V-System in der Mathematik durch die Beispiele II, III und IV, in der Logik durch Beispiel V, die bis auf V neu sein dürften. Zum Schluß wird kurz die Möglichkeit einer Quasi-Algebra erörtert.

2. Vorgelegt sei eine Menge M von Elementen $a, b, \ldots$ Dieselben seien zweier Verknüpfungen fähig, die Addition bzw. Multiplikation genannt und durch die Zeichen $+$ bzw. $\cdot$ symbolisiert werden mögen. Die Verknüpfungen sollen den folgenden dual sich entsprechenden Bedingungen genügen:

(1) Sind a und b Elemente aus M, so existiert genau ein Element c aus M, so daß gilt
$$a + b = c,$$
und genau ein Element d aus M, so daß gilt
$$a \cdot b = d.$$

(2) Sind a und b identisch, d. h. $a = b$, so sind auch die vermöge (1) vorhandenen Elemente c und d mit a und b identisch, d. h.
$$a + a = a, \quad a \cdot a = a;$$

(3)
$$a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a;$$

(4)
$$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c,$$
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c;$$

(5)
$$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c),$$
$$(a \cdot b) + c = (a + c) \cdot (b + c).$$

Zwecks Vereinfachung der Schreibweise setzen wir fest, daß Punkte und Klammern nach den in der Arithmetik üblichen Regeln unterdrückt werden können. Diese Übereinkunft hat zwar eine Unsymmetrie in der Darstellung der obigen Verknüpfungen zur Folge; sie bietet dafür aber manche Vorteile; überdies kann ja, wo es erforderlich ist, zu jeder Zeit die Dualität in der Schreibweise wieder hergestellt werden.

Das hiermit aufgestellte E-System wird zu einem V-System, wenn einerseits eine *Zuordnung* zwischen den Elementen, andererseits eine Einteilung in zwei *Klassen* möglich ist.

Die beiden folgenden Bedingungen regeln die Zuordnung:

(6) Zu jedem a aus M gehört (1, 1)-deutig ein Element a' aus M, so daß gilt $a \leftrightarrow a'$.

Hiernach findet statt
$$(a')' = a.$$

(7) Mit $a \longleftrightarrow a'$ und $b \longleftrightarrow b'$ gilt

$$a + b \longleftrightarrow a'b', \quad \text{d. h.} \quad (a + b)' = a'b',$$

und

$$ab \longleftrightarrow a' + b', \quad \text{d. h.} \quad (ab)' = a' + b'.$$

Die Einteilung von M in zwei elementfremde Klassen erfordert die weitere Voraussetzung, daß mindestens zwei verschiedene Elemente vorhanden sind. Derselben Klasse angehörende Elemente nennen wir *äquivalent*. Die Äquivalenz bzw. Nichtäquivalenz von a und b drücken wir durch $a \ominus b$ bzw. $a \oplus b$ aus. Für je zwei Elemente a und b gilt also eine und nur eine dieser Beziehungen. Die Relation $\ominus$ ist wie die mit $=$ bezeichnete Relation bekanntlich reflexiv, symmetrisch und transitiv. Darüber hinaus genüge sie den folgenden Bedingungen:

(8) Mit $a \ominus b$ gilt $a + b \ominus ab \ominus a$.

(9) Mit $a \oplus b$ gilt $a + b \oplus ab$.

(10) Mit $a \longleftrightarrow a'$ gilt $a \oplus a'$.

Jedes Paar von nichtäquivalenten Elementen bildet ein *vollständiges Repräsentantensystem* der Klasseneinteilung. Wir wollen die folgende Übereinkunft treffen: Findet (9) statt, so gehöre $a + b$ der ersten und somit ab der zweiten Klasse an. Gemäß (10) kann jedes Paar zugeordneter Elemente als ein vollständiges Repräsentantensystem angesehen werden.

3. Was die folgenden Beispiele anbetrifft, so verwirklicht, wie bereits erwähnt, das erste den durch die Bedingungen (1)—(5) charakterisierten Tatbestand, während aus den übrigen Beispielen die Verträglichkeit der in einem V-System vereinigten Bedingungen hervorgeht. Auf den bei jedem Beispiel leicht zu erbringenden Nachweis der Gültigkeit der betreffenden Bedingungen gehen wir nicht ein.

I. Es sei N eine Menge. M bedeute die Menge der Teilmengen von N. Unter der Summe $a + b$ verstehen wir die Vereinigungsmenge und unter dem Produkt ab den Durchschnitt der Teilmengen a und b. Somit enthält $a + b$ alle Elemente von N, die entweder a oder b angehören, und ab alle Elemente von N, die sowohl a als auch b angehören.[1]) Dabei hat die Bestimmung „entweder a oder b angehörend“ den Sinn „mindestens einer der Mengen a oder b angehörend“. Diese Bemerkung ist notwendig, da die durch „entweder-oder“ ausgedrückte Disjunktion verschieden interpretiert werden kann.[2])

1) Vgl. zu diesem Beispiel auch Richard Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen? 3. Aufl. 1911, S. 3 u. 5; ferner Ernst Schröder, Der Operationskreis des Logikkalküls, Leipzig 1877.

2) Vgl. z. B. König, a. a. O. S. 75 Anm.

II. Es sei min $[a, b]$ das Minimum der als reell und positiv vorausgesetzten Zahlen a und b; es ist also min $[a, b]$ die kleinere der beiden Zahlen, falls dieselben ungleich sind, andernfalls ihr gemeinsamer Wert. Entsprechendes gelte für das Maximum max $[a, b]$. Es sei nun M eine Menge von reellen positiven Zahlen, deren Anzahl endlich oder unendlich sein kann. Unter $a + b$ bzw. ab werde min $[a, b]$ bzw. max $[a, b]$ verstanden. Diese Menge M genügt den Bedingungen (1)—(5). Ist insbesondere M die Menge aller reellen positiven Zahlen x, die kleiner als eine feste Zahl r sind, gehört überdies $\frac{r}{2}$ nicht zu M, so können wir dadurch eine Zuordnung und Klasseneinteilung herstellen, daß wir jeder Zahl x die eindeutig bestimmte Zahl x' zuordnen, für die im Sinn der Arithmetik gilt $x + x' = r$, und in die erste bzw. zweite Klasse alle Elemente von M werfen, die kleiner bzw. größer als $\frac{r}{2}$ sind.

III. Das eben betrachtete Beispiel ist einer Verallgemeinerung fähig. Es sei $x = (x_1, \ldots, x_n)$, kurz $x = (x_\nu)$, ein Punkt im n-dimensionalen Raum, und zwar beschränken wir uns der Einfachheit wegen auf *positive* Punkte, d. h. auf solche, für die durchweg gilt $x_\nu \geqq 0$. Sind $a = (a_\nu)$ und $b = (b_\nu)$ positive Punkte, so bedeute $a + b$ bzw. ab den Punkt (min $[a_\nu, b_\nu]$) bzw. (max $[a_\nu, b_\nu]$). Die Gesamtheit der positiven Punkte (x_ν), die entsteht, wenn jede Komponente x_ν innerhalb einer Menge M_ν variieren darf, ist ein E-System.

Aus demselben geht folgendermaßen ein V-System hervor. Es sei $r = (r_\nu)$ ein fester positiver Punkt. Wir betrachten alle Punkte x, deren Komponenten die Ungleichungen

$$0 \leqq x_\nu \leqq r_\nu$$

befriedigen. Wir ordnen jedem Punkt $x = (x_\nu)$ den eindeutig bestimmten Punkt $x' = (x_\nu')$ zu, für den die n Gleichungen

$$x_\nu + x_\nu' = r_\nu$$

im Sinn der Arithmetik bestehen, und bringen in die erste bzw. zweite Klasse alle Punkte (x_ν), für die gilt

$$0 \leqq x_\nu \leqq \frac{r_\nu}{2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{r_\nu}{2} \leqq x_\nu \leqq r_\nu,$$

wobei der beiden Klassen gemeinsame Punkt $\left(\frac{r_\nu}{2}\right)$ auszuschließen ist.

Auf die geometrische Durchführung dieser (min, max)-Rechnung im Fall $n = 2$ möge wenigstens hingewiesen werden.

IV. Setzen wir im Anschluß an III

$$x = (x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n),$$

kurz $x = f(x_\nu)$, mit $f(x_\nu)$ als Funktion von n Veränderlichen, die wie soeben wesentlich positiv sein mögen, so findet statt

$$a + b = f(\min[a_\nu, b_\nu]), \quad ab = f(\max[a_\nu, b_\nu]).$$

Es sei insbesondere
$$x = \prod_{\nu=1}^{n} p_\nu^{x_\nu}$$

die Primfaktorenzerlegung der positiven ganzen Zahl x. Ist dann $t(a, b)$ der größte gemeinsame Teiler und $v(a, b)$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von

$$a = \prod_{\nu=1}^{n} p_\nu^{a_\nu}, \quad b = \prod_{\nu=1}^{n} p_\nu^{b_\nu},$$

so gilt
$$t(a, b) = \prod_{\nu=1}^{n} p_\nu^{\min[a_\nu, b_\nu]}, \quad v(a, b) = \prod_{\nu=1}^{n} p_\nu^{\max[a_\nu, b_\nu]},$$

also
$$a + b = t(a, b), \quad ab = v(a, b).$$

Um ein V-System zu erhalten, ordnen wir unter Verwendung der positiven ganzen Zahl
$$r = \prod_{\nu=1}^{n} p_\nu^{r_\nu}$$

jedem positiven Teiler x von r die eindeutig bestimmte Zahl x' zu, die der Gleichung
$$x x' = r$$

im Sinn der Arithmetik genügt, und werfen in die erste bzw. zweite Klasse alle Teiler x, für die die Exponenten x_ν ganzzahlige Auflösungen der Ungleichungen

$$0 \leqq x_\nu \leqq \frac{r_\nu}{2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{r_\nu}{2} \leqq x_\nu \leqq r_\nu$$

sind; dabei ist im Fall
$$r_\nu \equiv 0 \bmod 2 \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

von der Zahl $\sqrt{r}$ abzusehen.

V. Eine weitere Realisation des abstrakten V-Systems bietet der Urteilskalkül.[1]) Die Elemente von M seien Urteile, wobei zu beachten ist, daß es wahre und falsche Urteile gibt. $a + b$ bedeute das durch Disjunktion, ab das durch Konjunktion aus den Urteilen a und b hervorgegangene Urteil.[2]) Eine geeignete Klasseneinteilung wird erzielt durch Zusammenfassung der wahren Urteile in der ersten und der

---

1) Vgl. z. B. König, a. a. O. S. 74ff., Louis Couturat, Die philosophischen Prinzipien der Mathematik. Deutsch von Dr. Carl Siegel, Leipzig 1908, S. 8ff., Heinrich Behmann, Mathematik und Logik, Leipzig und Berlin 1927, S. 7ff.

2) Bezüglich der Disjunktion vgl. die Bemerkung zu Beispiel I.

falschen in der zweiten Klasse. Schließlich kann man jedem Urteil seine Verneinung (1, 1)-deutig zuordnen.

4. Eine „rationale" Funktion $f(x)$ der Unbestimmten x entsteht, wenn man mit Hilfe des Elements x und des zugeordneten x' oder eines der beiden unter eventueller Verwendung weiterer Elemente aus M Additionen und Multiplikationen in endlicher Anzahl ausführt. Entsprechendes gilt für eine Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ von n Unbestimmten. Demgemäß läßt sich in unserer Quasi-Algebra eine n Unbestimmte aufweisende Gleichung bzw. Äquivalenz in der Form

(11) $$f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{bzw.}$$

(12) $$f(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow g(x_1, \ldots, x_n)$$

darstellen, wo $g(x_1, \ldots, x_n)$ ebenfalls eine Funktion der Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$ ist. Was (11) anbetrifft, so ist es im allgemeinen möglich, jede Funktion entweder in eine Summe von Produkten oder in ein Produkt von Summen umzuformen. In bezug auf (12) erwähnen wir das Äquivalenzproblem. Man kann nämlich die Frage aufwerfen: Welchen Klassen müssen $x_1, \ldots, x_n$ angehören, damit gilt

$$f(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \begin{cases} K_1 \\ K_2 \end{cases},$$

wenn (K_1, K_2) ein Repräsentantensystem der Klasseneinteilung ist und K_1 der ersten Klasse angehört? So findet man, daß die Äquivalenz

(13) $$f(x, y) = x' + y \Leftrightarrow K_1$$

entweder $$x \Leftrightarrow K_1, \quad y \Leftrightarrow K_1$$

oder $$x \Leftrightarrow K_2, \quad y \text{ beliebig}$$

verlangt. Die Relation (13) spielt bekanntlich in der Logik[1]) bei der Implikation der Urteile eine Rolle. Das in diesem Fall zwischen x und y bestehende Abhängigkeitsverhältnis, das gewöhnlich durch $x \supset y$ symbolisiert wird, erweist sich leicht als reflexiv, nichtsymmetrisch und transitiv.

---

1) Vgl. König, a. a. O. S. 77ff. und Couturat, a. a. O. S. 9ff.

(Eingegangen am 26. 10. 1927.)

Zur Verteilung der quadratischen Reste.

Von K. Dörge in Köln a. Rhein.

p sei eine ungerade Primzahl. In der Reihe $1, 2, \ldots, p-1$ greife man alle $p-4$ Systeme von 4 aufeinanderfolgenden Zahlen heraus. Die Anzahl derjenigen dieser Systeme, die 4 quadratische Reste enthalten, nenne man R_4, die Anzahl derjenigen, die 4 quadratische Nichtreste enthalten, N_4.

von Sterneck hat in der Moskauer mathematischen Sammlung Bd. 20 gezeigt: Für große p ist

$$R_4 + N_4 > 0.$$

E. Jacobsthal hat in seiner Dissertation „Anwendung einer Formel aus der Theorie der quadratischen Reste", Berlin 1906 dieses Resultat verschärft und bewiesen: Für alle ungeraden Primzahlen außer 3, 5, 7, 11, 17 ist

$$R_4 > 0 \quad \text{und} \quad N_4 > 0.$$

Im folgenden wird eine Abschätzung nach unten für $R_4 + N_4$ angegeben, und zwar ergibt sich für alle ungraden Primzahlen

$$R_4 + N_4 \geqq \frac{p}{22} - 4 - \frac{19}{22}.$$

Dieses Resultat enthält den von Sterneckschen Satz, jedoch nicht den Jacobsthalschen Satz als Spezialfall. Darüber, ob diese Abschätzung für irgendeine Primzahl etwa nicht mehr verschärft werden kann, gibt der Beweis keinerlei Anhalt.

Anordnung des Beweises: p sei ungerade Primzahl. $\left(\frac{1}{p}\right), \left(\frac{2}{p}\right), \ldots$ seien die Legendreschen Symbole. Unter einem Quadrupel der geordneten Reihe $\mathfrak{R}$

$$(\mathfrak{R}) \qquad \left(\frac{1}{p}\right), \left(\frac{2}{p}\right), \ldots, \left(\frac{p-1}{p}\right)$$

verstehe man vier aufeinanderfolgende Zahlen dieser Reihe. Ein Quadrupel heiße von νter Art, wenn es zwar ν aber nicht $\nu + 1$ gleiche Zahlen enthält. Jedes Quadrupel ist dann offenbar entweder von zweiter oder dritter oder vierter Art. Unter einer Sequenz der Reihe $\mathfrak{R}$ vom Abstand ϱ, ($\varrho = 1, 2$) verstehe man vier gleiche Zahlen $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$, $\varepsilon^{(3)}$, $\varepsilon^{(4)}$ der Reihe $\mathfrak{R}$, für die $\varepsilon^{(2)}$ von $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(3)}$ von $\varepsilon^{(2)}$, $\varepsilon^{(4)}$ von $\varepsilon^{(3)}$ den Abstand ϱ hat. Eine Sequenz im Abstand 1 ist dann ein Quadrupel vierter Art und umgekehrt.

In den Nummern 1 bis 4 wird im wesentlichen gezeigt, daß die Anzahl der Quadrupel zweiter Art eine ganze lineare Funktion der Anzahl der Quadrupel vierter Art ist.

Unser Ziel ist, zu zeigen, daß die Anzahl der Quadrupel vierter Art ziemlich groß ist. Andernfalls wäre nun auch die Anzahl der Quadrupel zweiter Art klein, daher müßte es lange Reihen aufeinanderfolgender Quadrupel dritter Art geben. Solche Reihen müssen aber die Periode 4 enthalten, sind also von ziemlich einfacher Natur. Die einfachste Abzählung (vgl. 6.) zeigt, daß solche Reihen Sequenzen vom Abstand 2 enthalten, und zwar je länger sie sind, in um so größerer Anzahl. Die Annahme, daß die Anzahl der Sequenzen vom Abstand 1, d. h. der Quadrupel vierter Art klein ist, hat also zur Folge, daß die Anzahl der Sequenzen im Abstand 2 groß ist. Man sieht aber andrerseits leicht ein, daß die Anzahl der Sequenzen vom Abstand 1 mindestens ebenso groß ist wie die Anzahl der Sequenzen vom Abstand 2, und damit ist dann der Beweis geführt.

1. Für $\varrho \equiv 0 \pmod{p}$ setze man

$$\left(\frac{\varrho}{p}\right) = 0.$$

Man betrachte für irgendeine ganze Zahl ν, die der Ungleichung $1 \leqq \nu \leqq p - 1$ genügt, die $p - 1$ Zahlenpaare

$$\left(\frac{1}{p}\right), \left(\frac{1+\nu}{p}\right); \quad \left(\frac{2}{p}\right), \left(\frac{2+\nu}{p}\right); \dots; \left(\frac{\mu}{p}\right), \left(\frac{\mu+\nu}{p}\right); \dots; \left(\frac{p-1}{p}\right), \left(\frac{p-1+\nu}{p}\right).$$

Unter G_ν verstehe man die Anzahl derjenigen dieser Paare, die zwei gleiche Zahlen, unter V_ν die Anzahl derjenigen, die verschiedene Zahlen enthalten. In dieser Nummer wird gezeigt werden

$$V_\nu = G_\nu + 2.$$

Unter G_ν' bzw. V_ν' verstehe man entsprechend die Anzahlen derjenigen Paare aus der Reihe

$$\left(\frac{\nu 1}{p}\right) \left(\frac{\nu 2}{p}\right); \quad \left(\frac{\nu 2}{p}\right) \left(\frac{\nu 3}{p}\right); \dots; \left(\frac{\nu\mu}{p}\right) \left(\frac{\nu(\mu+1)}{p}\right); \dots; \left(\frac{\nu(p-1)}{p}\right) \left(\frac{\nu p}{p}\right),$$

welche gleiche bzw. verschiedene Zahlen enthalten. Da mit ϱ auch $\nu\varrho$ ein reduziertes Restsystem mod. p durchläuft, ist $G_\nu' = G_\nu$ und $V_\nu' = V_\nu$. Aus der Distributivität $\left(\frac{\nu\mu}{p}\right) = \left(\frac{\nu}{p}\right)\left(\frac{\mu}{p}\right)$ folgt ferner $G_\nu' = G_1$ und $V_\nu' = V_1$. Es ergibt sich daher $G_\nu = G_1$ und $V_\nu = V_1$. Unter G_ν^* und V_ν^* endlich verstehe man die den obigen entsprechenden Anzahlen für die Reihe der $p - 1$ Paare

$$(*) \qquad \left(\frac{\nu}{p}\right) \left(\frac{\nu+1}{p}\right); \quad \left(\frac{\nu}{p}\right) \left(\frac{\nu+2}{p}\right); \dots; \left(\frac{\nu}{p}\right) \left(\frac{\nu+p-1}{p}\right).$$

Offenbar ist dann $$\sum_{1}^{p-1}{}_\nu G_\nu^* = \sum_{1}^{p-1}{}_\nu G_\nu,$$

also nach dem Obigen

$$\sum_{1}^{p-1}{}_{\nu} G_\nu^* = \sum_{1}^{p-1}{}_{\nu} G_\nu = (p-1)\, G_1 = (p-1)\, G_\varrho$$

und
$$\sum_{1}^{p-1}{}_{\nu} V_\nu^* = \sum_{1}^{p-1}{}_{\nu} V_\nu,$$

also
$$\sum_{1}^{p-1}{}_{\nu} V_\nu^* = \sum_{1}^{p-1}{}_{\nu} V_\nu = (p-1)\, V_1 = (p-1)\, V_\varrho,$$

also
$$\sum_{1}^{p-1}{}_{\nu} (G_\nu^* - V_\nu^*) = \sum_{1}^{p-1}{}_{\nu} G_\nu^* - \sum_{1}^{p-1}{}_{\nu} V_\nu^* = (p-1)\,(G_\varrho - V_\varrho).$$

In der Reihe (*) ist nun offenbar $\left(\frac{\nu}{p}\right)$, wenn ν Rest ist, mit $\frac{p-1}{2} - 1$ Restsymbolen und $\frac{p-1}{2}$ Nichtrestsymbolen und einmal mit der Zahl 0 gepaart, Entsprechend ist $\left(\frac{\nu}{p}\right)$, wenn ν Nichtrest ist, mit $\frac{p-1}{2} - 1$ gleichen und $\frac{p-1}{2} + 1$ anderen Zahlen gepaart. Daher ist $G_\varrho^* - V_\varrho^* = -2$, mithin $G_\varrho - V_\varrho = -2$, also

$$V_\varrho = G_\varrho + 2, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

2. p sei zunächst von der Form für $4n - 1$. Dann ist -1 Nichtrest. Also haben σ und $-\sigma$, wenn $\sigma \not\equiv 0 \pmod{p}$, verschiedenen Restcharakter. Nun setze man hier

$$\left(\frac{p}{p}\right)^* = +1.$$

Dann folgt wegen 1., daß für $\nu \not\equiv 0 \pmod{p}$ in den beiden Zeilen für $1 \leqq \varrho \leqq p-1$

$$\begin{array}{lllllll} 1 & \left(\frac{\varrho}{p}\right) & \left(\frac{\varrho+1}{p}\right) & \cdots & \left(\frac{p}{p}\right)^* & \left(\frac{p+1}{p}\right) & \cdots & \left(\frac{p+\varrho}{p}\right) \\ 1 & \left(\frac{\varrho+\nu}{p}\right) & \left(\frac{\varrho+1+\nu}{p}\right) & \cdots & \left(\frac{p+\nu}{p}\right) & \left(\frac{p+1+\nu}{p}\right) & \cdots & \left(\frac{p+\varrho+\nu}{p}\right) \end{array}$$

grade ebenso oft zwei gleiche Zahlen, wie verschiedene Zahlen untereinander stehen, oder, wie wir kurz sagen, es folgt, daß die beiden Zeilen orthogonal sind. Insbesondere sind also von den vier Zeilen

$$(\mathfrak{M}') \quad \begin{array}{lllllll} 1 & \left(\frac{1}{p}\right) & \left(\frac{2}{p}\right) & \cdots & & \left(\frac{p-1}{p}\right) & \left(\frac{p}{p}\right)^* \\ 1 & \left(\frac{2}{p}\right) & \left(\frac{3}{p}\right) & \cdots & & \left(\frac{p}{p}\right)^* & \left(\frac{1}{p}\right) \\ 1 & \left(\frac{3}{p}\right) & \left(\frac{4}{p}\right) & \cdots & \left(\frac{p}{p}\right)^* & \left(\frac{1}{p}\right) & \left(\frac{2}{p}\right) \\ 1 & \left(\frac{4}{p}\right) & \left(\frac{5}{p}\right) & \cdots & \left(\frac{1}{p}\right) & \left(\frac{2}{p}\right) & \left(\frac{3}{p}\right) \end{array}$$

je zwei orthogonal. Entsprechend ergibt sich für Primzahlen der Form $4n + 1$, wo σ und $-\sigma$ ($\sigma \not\equiv 0 \bmod. p$) denselben Restcharakter haben, wenn man

$$\left(\frac{p}{p}\right)^* = +1, \quad \left(\frac{p}{p}\right)' = \left(\frac{2p}{p}\right)' = -1$$

setzt, daß von den vier Zeilen

$$(\mathfrak{M}'')\quad \begin{matrix} 1 & 1 & \left(\frac{1}{p}\right) & \left(\frac{2}{p}\right) & \cdots & \left(\frac{p-1}{p}\right) & \left(\frac{p}{p}\right)^* & \left(\frac{1}{p}\right) & \left(\frac{2}{p}\right) & \cdots & \left(\frac{p-1}{p}\right) & \left(\frac{p}{p}\right)' \\ 1 & 1 & \left(\frac{2}{p}\right) & \left(\frac{3}{p}\right) & \cdots & \left(\frac{p}{p}\right)^* & \left(\frac{1}{p}\right) & \left(\frac{2}{p}\right) & \left(\frac{3}{p}\right) & \cdots & \left(\frac{p}{p}\right)' & \left(\frac{1}{p}\right) \\ 1 & 1 & \left(\frac{3}{p}\right) & \left(\frac{4}{p}\right) & \cdots & \left(\frac{1}{p}\right) & \left(\frac{2}{p}\right) & \left(\frac{3}{p}\right) & \left(\frac{4}{p}\right) & \cdots & \left(\frac{1}{p}\right) & \left(\frac{2}{p}\right) \\ 1 & 1 & \left(\frac{4}{p}\right) & \left(\frac{5}{p}\right) & \cdots & \left(\frac{2}{p}\right) & \left(\frac{3}{p}\right) & \left(\frac{4}{p}\right) & \left(\frac{5}{p}\right) & \cdots & \left(\frac{2}{p}\right) & \left(\frac{3}{p}\right), \end{matrix}$$

die auch in der Form

$$\begin{matrix} 1 & 1 & \left(\frac{1}{p}\right) & \left(\frac{2}{p}\right) & \cdots & \left(\frac{p}{p}\right)^* & \left(\frac{p+1}{p}\right) & \left(\frac{p+2}{p}\right) & \cdots & \left(\frac{2p}{p}\right)' \\ 1 & 1 & \left(\frac{2}{p}\right) & \left(\frac{3}{p}\right) & \cdots & \left(\frac{p+1}{p}\right) & \left(\frac{p+2}{p}\right) & \left(\frac{p+3}{p}\right) & \cdots & \left(\frac{1}{p}\right) \\ 1 & 1 & \left(\frac{3}{p}\right) & \left(\frac{4}{p}\right) & \cdots & \left(\frac{p+2}{p}\right) & \left(\frac{p+3}{p}\right) & \left(\frac{p+4}{p}\right) & \cdots & \left(\frac{2}{p}\right) \\ 1 & 1 & \left(\frac{4}{p}\right) & \left(\frac{5}{p}\right) & \cdots & \left(\frac{p+3}{p}\right) & \left(\frac{p+4}{p}\right) & \left(\frac{p+5}{p}\right) & \cdots & \left(\frac{3}{p}\right) \end{matrix}$$

geschrieben werden können, je zwei orthogonal sind.[1])

3. Man habe drei Zeilen von je n Zahlen, von denen jede ± 1 ist,

$$\begin{matrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \ldots & \varepsilon_n \\ \varepsilon_1' & \varepsilon_2' & \ldots & \varepsilon_n' \\ \varepsilon_1'' & \varepsilon_2'' & \ldots & \varepsilon_n''. \end{matrix}$$

Je zwei der drei Zeilen seien orthogonal. Es soll gezeigt werden: Dann ist n durch 4 teilbar und die Anzahl der Spalten, die entweder dreimal $+1$ oder dreimal -1 enthalten, ist $\frac{n}{4}$.

Dazu bezeichne man die Anzahl der Spalten, an deren ersten beiden Stellen entweder beide Male $+1$ oder beide Male -1 steht, bei denen also $\varepsilon = \varepsilon'$ ist, mit α, die Anzahl der übrigen Spalten mit β. Wegen der Orthogonalität der ersten beiden Zeilen ist n grade und

$$\alpha = \beta = \frac{n}{2}.$$

---

1) Die Kenntnis der geschilderten Möglichkeit, mittels des Systems der Legendreschen Symbole immer vier Zeilen herzustellen, die im wesentlichen zyklisch auseinander hervorgehen und von denen je zwei orthogonal sind, verdanke ich einer Mitteilung von Herrn Heinz Hopf, Berlin. Mein Beweis beruht hierauf wesentlich.

Unter den α Spalten unterscheide man nun diejenigen, die an zweiter und dritter Stelle entweder beide Male $+1$ oder beide Male -1 haben, in denen also $\varepsilon' = \varepsilon''$ ist, von den übrigen. Die Anzahl der ersteren sei α_1, die der übrigen α_2. Dann ist also

$$\text{(I)} \qquad \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha = \frac{n}{2}.$$

Entsprechend bedeute β_1 die Anzahl derjenigen unter den β Spalten, in denen $\varepsilon' = \varepsilon''$ ist, β_2 die Anzahl der übrigen unter den β Spalten. Dann ist

$$\text{(II)} \qquad \beta_1 + \beta_2 = \beta = \frac{n}{2}.$$

Unsere Behauptung ist $\alpha_1 = \frac{n}{4}$. Die Orthogonalität der zweiten und dritten Zeile besagt nun

$$\text{(III)} \qquad \alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 = \frac{n}{2},$$

die Orthogonalität der ersten und dritten Zeile

$$\text{(IV)} \qquad \alpha_1 + \beta_2 = \alpha_2 + \beta_1 = \frac{n}{2}$$

Dann folgt aus (III) und (IV)

$$\beta_1 = \beta_2,$$

aus (I) und (III) $\qquad \alpha_2 = \beta_1,$

aus (II) und (IV) $\qquad \alpha_1 = \beta_1.$

Also gilt $\qquad \alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2.$

Mithin ist $\qquad \alpha_1 = \frac{n}{4}, \qquad$ w. z. b. w.

4. Man denke sich nun vier Zeilen untereinander geschrieben, von denen jede n Elemente enthält. Jedes Element sei wieder $+1$ oder -1:

$$(\mathfrak{M}) \qquad \begin{matrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_n \\ \varepsilon_1' & \varepsilon_2' & \dots & \varepsilon_n' \\ \varepsilon_1'' & \varepsilon_2'' & \dots & \varepsilon_n'' \\ \varepsilon_1''' & \varepsilon_2''' & \dots & \varepsilon_n'''. \end{matrix}$$

Die wesentliche Voraussetzung sei wieder diese: Je zwei der vier Zeilen seien orthogonal. In jeder der n Spalten sind nun unter ihren vier Zahlen mindestens zwei gleiche. Enthält eine Spalte ν, aber nicht $\nu + 1$ übereinstimmende Zahlen, so heiße sie von νter Art. Jede Spalte ist dann von zweiter oder dritter oder vierter Art. Die Anzahl der Spalten νter Art sei A_ν. Es ist dann

$$A_2 + A_3 + A_4 = n.$$

Wendet man nun 3. auf die Zeilen 1, 2, 3 an, so sieht man, es gibt genau $\frac{n}{4}$ Spalten, die an der ersten, zweiten und dritten Stelle drei gleiche Zahlen enthalten, in denen also $\varepsilon = \varepsilon' = \varepsilon''$ ist. Entsprechendes gilt für die weiteren Zeilenkombinationen: 1, 2, 4; 1, 3, 4 und 2, 3, 4. Man verstehe nun unter einem „System" von $\mathfrak{M}$ ein System von drei gleichen in derselben Spalte von $\mathfrak{M}$ auftretenden Zahlen, also drei übereinstimmende Zahlen ε mit gleichem Index. Die aus einem System entstehenden sechs Permutationen sollen dabei als nicht verschieden angesehen werden.[1]) Im ganzen gibt es wegen 3. dann $4 \cdot \frac{n}{4} = n$ Systeme in $\mathfrak{M}$.

Wir gehen nun die Spalten von $\mathfrak{M}$ einzeln durch. Die Spalten zweiter Art liefern kein System. Jede Spalte dritter Art liefert ein, jede Spalte vierter Art vier Systeme. Daher ist

$$A_3 + 4A_4 = n,$$

also

$$A_2 + A_3 + A_4 = A_3 + 4A_4,$$

mithin

$$A_2 = 3A_4.$$

5. Wir studieren nun — man vergleiche den vorangestellten Beweisgedanken — vorerst Folgen von Quadrupeln dritter Art. Man nehme etwa an, in der Reihe

$$(+) \qquad 1 \left(\frac{1}{p}\right) \left(\frac{2}{p}\right) \cdots \left(\frac{p}{p}\right)^* \qquad \text{oder in}$$

$$(++) \qquad 1\ 1 \left(\frac{1}{p}\right) \left(\frac{2}{p}\right) \cdots \left(\frac{p}{p}\right)^* \left(\frac{p+1}{p}\right) \cdots \left(\frac{2p}{p}\right)$$

kämen $\nu + 1$ aufeinanderfolgende Quadrupel dritter Art vor.[2]) Es seien dies etwa die $\nu + 1$ Quadrupel aus der Reihe

$$(\times) \quad \left(\frac{\varrho}{p}\right) \left(\frac{\varrho+1}{p}\right) \cdots \left(\frac{\varrho+\nu}{p}\right) \left(\frac{\varrho+\nu+1}{p}\right) \left(\frac{\varrho+\nu+2}{p}\right) \left(\frac{\varrho+\nu+3}{p}\right).$$

Da dann durch drei aufeinanderfolgende Zahlen immer die vierte bestimmt ist, muß die Reihe $(\times)$ die Periode 4 enthalten, d. h.: Gehören $\left(\frac{\sigma}{p}\right)$ und $\left(\frac{\sigma+4}{p}\right)$ der Reihe $(\times)$ an, so ist

$$\left(\frac{\sigma}{p}\right) = \left(\frac{\sigma+4}{p}\right).$$

1) Ist also z. B. $\varepsilon_\varrho = \varepsilon_\varrho' = \varepsilon_\varrho'' = \varepsilon_\varrho'''$, so erhält man daraus die vier Systeme $\varepsilon_\varrho\, \varepsilon_\varrho'\, \varepsilon_\varrho''$; $\varepsilon_\varrho\, \varepsilon_\varrho'\, \varepsilon_\varrho'''$; $\varepsilon_\varrho\, \varepsilon_\varrho''\, \varepsilon_\varrho'''$; $\varepsilon_\varrho'\, \varepsilon_\varrho''\, \varepsilon_\varrho'''$.

2) Es handelt sich also jetzt um Quadrupel von (+) bzw. von (++) und nicht um Quadrupel von ($\mathfrak{R}$).

6. Aus (+) bzw. (++) denke man sich acht aufeinanderfolgende Zahlen herausgegriffen. Diese Gesamtheit nenne man ein Oktupel. Unter einem Oktupel dritter Art verstehe man ein solches, dessen fünf Quadrupel sämtlich dritter Art sind. Ein Oktupel dritter Art enthält nach 5. die Periode 4. Offenbar hat jedes Oktupel dritter Art eins der folgenden acht Schemata, indem man kurz statt $+1$ „+“ und statt -1 „—“ schreibt

$$(\ddagger)\qquad \begin{array}{cccccccc} + & + & + & - & + & + & + & - \\ + & + & - & + & + & + & - & + \\ + & - & + & + & + & - & + & + \\ - & + & + & + & - & + & + & + \end{array}$$

und die weiteren vier, die hieraus entstehen, indem man + durch — und — durch + ersetzt. Unter einer Sequenz vom Abstand ϱ, ($\varrho = 1, 2$) in (+) bzw. (+ +) verstehe man vier gleiche Zahlen $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$, $\varepsilon^{(3)}$, $\varepsilon^{(4)}$, so daß $\varepsilon^{(2)}$ von $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(3)}$ von $\varepsilon^{(2)}$ und $\varepsilon^{(4)}$ von $\varepsilon^{(3)}$ in (+) bezw. (+ +) den Abstand ϱ hat. Wie in $\ddagger$ angedeutet, enthält dann jedes Oktupel dritter Art mindestens eine Sequenz vom Abstand 2.

Zwei Oktupel dritter Art können ferner offenbar höchstens dann dieselbe Sequenz vom Abstand 2 enthalten, wenn sie aufeinanderfolgen. Hieraus ergibt sich: Hat man ν Oktupel dritter Art — sie mögen aufeinanderfolgen oder nicht —, so gibt es darin mindestens $\frac{\nu}{2}$ verschiedene Sequenzen vom Abstand 2.

7. Wir führen nunmehr den endgültigen Beweis nur für Primzahlen der Form $4n - 1$ völlig durch. Für Primzahlen der Form $4n + 1$ verläuft er ganz entsprechend, indem man statt der Matrix $\mathfrak{M}'$ die Matrix $\mathfrak{M}''$ aus 2. benutzt.

Für die Matrix

$$(\mathfrak{M}')\qquad \begin{array}{ccccc} 1 & \left(\frac{1}{p}\right) & \left(\frac{2}{p}\right) & \cdots & \left(\frac{p}{p}\right)^* \\ 1 & \left(\frac{2}{p}\right) & \left(\frac{3}{p}\right) & \cdots & \left(\frac{1}{p}\right) \\ 1 & \left(\frac{3}{p}\right) & \left(\frac{4}{p}\right) & \cdots & \left(\frac{2}{p}\right) \\ 1 & \left(\frac{4}{p}\right) & \left(\frac{5}{p}\right) & \cdots & \left(\frac{3}{p}\right) \end{array}$$

hatten wir in 4. das Resultat erhalten $A_2 = 3A_4$. In der Reihe

$$(\times\times)\qquad \left(\frac{1}{p}\right)\left(\frac{2}{p}\right)\cdots\left(\frac{p-1}{p}\right)\left(\frac{p}{p}\right)^*\left(\frac{1}{p}\right)\left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right)$$

bezeichne man nun die Anzahl der Quadrupel νter Art mit B_ν. Dann

ist offenbar $B_2 = A_2$ und $B_4 = A_4 - 1$, da die erste Spalte nunmehr ausfällt. Mithin ist

$$B_2 = 3B_4 + 3,$$

also

$$B_2 + B_4 = 4B_4 + 3.$$

Unter alle p Quadrupeln der Reihe $(\times\times)$ sind also genau

$$4B_4 + 3$$

nicht von dritter Art. Man betrachte nun alle $p - 4$ Oktupel der Reihe $(\times\times)$. Jedes Quadrupel von $(\times\times)$ kann in höchstens fünf Oktupeln von $(\times\times)$ auftreten.[1]) Es gibt daher höchstens $5(4B_4 + 3)$ Oktupel in $(\times\times)$, die nicht von dritter Art sind, also mindestens $p - 4 - 20B_4 - 15$ Oktupel dritter Art, also nach 6. mindestens $\frac{p - 19 - 20B_4}{2}$ Sequenzen vom Abstand 2 in $(\times\times)$. Die Gleichung

$$\frac{p - 19 - 20x}{2} = x$$

hat die Lösung

$$x = \frac{p - 19}{22}.$$

Ist dagegen $x < \frac{p-19}{22}$, so ist $\frac{p - 19 - 20x}{2} > x$. Ersetzt man hier x durch B_4, so ergibt sich: Ist $B_4 < \frac{p-19}{22}$, so ist die Anzahl der Sequenzen vom Abstand 2 größer als $\frac{p-19}{22}$. Mithin ergibt sich: Entweder es gibt in $(\times\times)$ $\frac{p-19}{22}$ Sequenzen im Abstand 1, oder es gibt $\frac{p-19}{22}$ Sequenzen im Abstand 2. Daraus aber folgt: In der Reihe

$$(\perp) \qquad \left(\frac{1}{p}\right)\left(\frac{2}{p}\right)\cdots\left(\frac{p-1}{p}\right)$$

gibt es entweder

$$\frac{p-19}{22} - 4$$

Sequenzen vom Abstand 1 oder $\frac{p-19}{22} - 4$ Sequenzen vom Abstand 2.

8. Schließlich ist die Anzahl der Sequenzen vom Abstand 1, die in $(\perp)$ auftreten, mindestens so groß wie die Anzahl der Sequenzen im Abstand 2. Dies folgt, indem man die Reihe

$$(\top) \qquad \left(\frac{2\cdot 1}{p}\right)\left(\frac{2\cdot 2}{p}\right)\cdots\left(\frac{2\cdot(p-1)}{p}\right)$$

betrachtet. Da hier 2ϱ mit ϱ alle Zahlen eines reduzierten Restsystems mod. p durchläuft, ist nämlich die Anzahl der Quadrupel vierter Art von $(\top)$ mindestens gleich der Anzahl der Sequenzen vom Abstand 2

1) D. h. ganz enthalten sein.

in ($\perp$), andererseits ist sie wegen der Distributivität gleich der Anzahl der Sequenzen vom Abstand 1 in ($\perp$). Damit haben wir das Resultat erhalten: p sei Primzahl von der Form $4n - 1$. Dann ist

$$R_4 + N_4 \geqq \frac{p}{22} - \frac{19}{22} - 4.$$

Hat p die Form $4n + 1$, so erhält man entsprechend das etwas schärfere Resultat

$$R_4 + N_4 \geqq \frac{p}{22} - \frac{17}{22} - 4.$$

Anmerkung bei der Korrektur: Herr Heinz Hopf hat mir eine von ihm gefundene sehr interessante Methode mitgeteilt, aus welcher das folgende wesentlich schärfere Resultat folgt:

$$\frac{p}{8} - \frac{p}{8\sqrt{6}} + C < R_4 + N_4 < \frac{p}{8} + \frac{p}{8\sqrt{6}} + C.$$

(Eingegangen am 31. 10. 1927.)

Eine Anwendung der Fareyschen Reihen.

Von NICOLAUS OGLOBLIN in Simferopol (Krim).

Der in den sog. Fareyschen Reihen vorliegende Algorithmus wurde von H. Minkowski zur Definition einer merkwürdigen Funktion verwendet. Meine Aufgabe ist es zu zeigen, daß durch denselben Algorithmus einige abzählbare Mengen (rationale Zahlen und quadratische Irrationalitäten) mit bedeutender Bequemlichkeit sich numerieren lassen.

1. Setzen wir an die Enden einer geraden Strecke die Symbole $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{0}$, schreiben in die Mitte dieser Strecke den *komponierten* Bruch $\frac{1}{1}$, d. h. den durch das respektive Addieren der Zähler und Nenner der ersten erhaltenen, dann in die Mitte jedes Intervalles die entsprechenden komponierten Brüche $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{1}$ usw., so erhalten wir bei Fortsetzung des Verfahrens z. B. die Reihe

(A) $\quad \frac{0}{1}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{5}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{5}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{1}\ \frac{4}{3}\ \frac{3}{2}\ \frac{5}{3}\ \frac{2}{1}\ \frac{5}{2}\ \frac{3}{1}\ \frac{4}{1}\ \frac{1}{0}.$

Es ist leicht zu beweisen, daß in allen auf diese Weise entstehenden Reihen 1. die Brüche immer nach ihrer zunehmenden Größe geordnet sind, 2. alle Brüche irreduktibel sind (die Differenz der benachbarten Brüche hat immer 1 im Zähler) und 3. die Reihen bei hinreichender Fortsetzung jede gegebene rationale Zahl enthalten.

Wir werden hier nur die letzte Behauptung beweisen, und am besten gelangen wir dazu, wenn wir ein Verfahren finden, um für jede gegebene rationale Zahl ihre Abszisse auf der ursprünglichen Strecke zu bestimmen.

Es ist z. B. der Bruch $\frac{11}{4}$ gegeben; setzen wir die Reihe (A) fort und schreiben wir nur die nötigen Brüche aus, so erhalten wir, ohne uns an einen richtigen Maßstab zu halten, die folgende Tabelle:

(B) $$\frac{0}{1}\quad\frac{1}{1}\quad\frac{2}{1}\quad\frac{5}{2}\quad\frac{8}{3}\quad\frac{11}{4}\qquad\frac{3}{1}\quad\frac{1}{0}.$$

Um $\frac{11}{4}$ zu erreichen, macht man in dieser Tabelle einen „Schritt" von $\frac{0}{1}$ bis $\frac{1}{1}$, dessen Länge $\frac{1}{2}$ der ursprünglichen Strecke gleich ist, dann einen anderen Schritt, der $\frac{1}{4}$ der Strecke lang ist, und nach einem Übergange von $\frac{1}{0}$ bis $\frac{3}{1}$ macht man von $\frac{2}{1}$ an noch die Schritte $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ und $\frac{1}{64}$. Auf diese Weise erhalten wir für die Abszisse der Zahl $\frac{11}{4}$ die Größe

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64},$$

indem wir die Strecke von $\frac{0}{1}$ bis $\frac{1}{0}$ für 1 und ihr Ende $\frac{0}{1}$ als Ursprung nehmen.

Um eine Regel für die Auffindung dieser Abszisse festzusetzen, nehmen wir die folgende Umformung der Tabelle (B) vor. Wir lassen in der Tabelle die zwei ersten Brüche weg und subtrahieren von den übrigen die gerade Zahl 2; dann schreiben wir statt dieser die umgekehrten Brüche; endlich sondern wir den letzten erhaltenen Bruch ab und subtrahieren von den übrigen die Zahl 1. So entstehen die folgenden Reihen:

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{0}{1} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \qquad\frac{1}{1} & \frac{1}{0} \\[1ex]
\frac{1}{0} & \frac{2}{1} & \frac{3}{2} & \frac{4}{3} & \qquad\frac{1}{1} & \frac{0}{1} \\[1ex]
\frac{1}{0} & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \qquad\frac{0}{1} & ,
\end{array}$$

wo endgültig an der Stelle von $\frac{11}{4}$ der Bruch $\frac{1}{3}$ steht und wo für alle Reihen die zweite von den drei erwähnten Eigenschaften beibehalten ist.

Führen wir an dem Bruch $\frac{1}{3}$ die umgekehrten Operationen aus gegenüber denjenigen, die zur Berechnung von $\frac{1}{3}$ ausgeführt worden sind, und in umgekehrter Reihenfolge, so erscheint $\frac{11}{4}$ in den Kettenbruch

$$\frac{11}{4} = (2,\ 1,\ 3)$$

entwickelt; hier stimmen offenbar die Teilnenner 2, 1, 3 mit den Anzahlen der sukzessiven Schritte von links und von rechts in der Reihe (B) überein.

Es ist bequem die Abszisse im dyadischen Zahlensystem zu schreiben. Z. B. für $\frac{11}{4}$ haben wir die Abszisse $[0{,}110111]_2$, wo die Anzahl der Einsen und der Nullen den entsprechenden Teilnennern gleich ist. Dabei muß die gegebene Zahl immer durch einen Ketten-

bruch mit ungerader Anzahl der Glieder ausgedrückt werden, der ganze Teil mit einbegriffen, was immer möglich ist. Z. B. für die Zahl

$$\frac{100}{29} = (3, 2, 4, 3) = (3, 2, 4, 2, 1)$$

ist die Abszisse gleich $(0{,}111001111001)_2$. Für einen echten Bruch fängt die dyadisch geschriebene Abszisse nach dem Komma mit Nullen an; z. B. für

$$\frac{13}{37} = (0, 2, 1, 5, 2)$$

ist die Abszisse $[0{,}0010000011]_2$ gleich.

2. Jetzt wenden wir uns der Numerierung der irrationalen Zahlen zu.

Um die Menge der rationalen Zahlen zu numerieren, gibt es eine bekannte Methode von Cantor, nach welcher alle Brüche in einer gewissen Reihenfolge aufgestellt werden, wo die Summen der Zähler und Nenner allmählich zunehmen. Der Nachteil dieser Methode besteht darin, daß man für eine gegebene Zahl nur dann ihre Nummer anzeigen kann, wenn die ganze vorhergehende Reihe zusammengestellt worden ist, weil in der ursprünglichen Reihe die reduktibeln Brüche gestrichen werden müssen.

Dieser Nachteil ist von Faber (Mathematische Annalen, 1905) beseitigt worden, welcher eine auf der Zerlegung der ganzen Zahlen und der Brüche in gewisse faktorielle Summen beruhende Methode der Numerierung der rationalen Zahlen vorgeschlagen hat. Diese Methode erlaubt, jede rationale Zahl mittels ihrer Nummer zu berechnen und umgekehrt.

Die folgende von mir entworfene Methode der Numerierung der rationalen Zahlen besitzt alle Vorteile der Faberschen Methode, die Bequemlichkeit und Einfachheit des Verfahrens mit inbegriffen, wird mit gleicher Leichtigkeit auf die Numerierung aller rationalen Zahlen wie auch auf die der echten Brüche angewandt und kann mit Bequemlichkeit für die Numerierung aller quadratischen Irrationalitäten benutzt werden.

Für die Nummer einer gegebenen rationalen Zahl nehme ich die Zahl, welche im dyadischen Zahlensystem im Vergleich mit der der gegebenen Zahl entsprechenden Abszisse, wo die Null und das Komma weggelassen sind, durch die umgekehrte Ziffernfolge dargestellt wird. Für $\frac{11}{4}$ z. B. haben wir die Nummer

$$[111011]_2 = 32 + 16 + 8 + 2 + 1 = 59.$$

Suchen wir noch die der Nummer 100 entsprechende Zahl auf.

$100 = [1100100]_2$; Absz. $= [0{,}0010011]_2$; die Zahl $= (0, 2, 1, 2, 2) = \frac{7}{19}$.

Es ist klar, daß jede Zahl eine bestimmte Nummer hat und umgekehrt und daß die umgekehrte Ziffernfolge nötig war, um die mit Nullen endenden Nummern zu liefern.

Um die Natürlichkeit der Verteilung der Zahlen nach den drei Methoden vergleichen zu können, führen wir hier die den ersten 15 Nummern nach diesen drei Methoden entsprechenden Zahlen an.

Methode	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cantor	1	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{3}$	3	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	4	$\frac{1}{5}$	5	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$
Faber	1	$\frac{1}{5}$	2	$\frac{1}{2}$	5	$\frac{1}{23}$	$1\frac{2}{11}$	$\frac{5}{19}$	$2\frac{3}{7}$	$\frac{3}{5}$	7	$\frac{1}{11}$	$1\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	3
Meine	1	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	3	$\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{3}$	$\frac{3}{5}$	$2\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$1\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	4

Meine Methode erlaubt außerdem, alle Brüche, die ganzen Zahlen ausgenommen, zu numerieren. Zu diesem Zwecke sei bemerkt, daß die Nummern der ganzen Zahlen von der Form $2^n - 1$ sind (weil ihre Abszissen nur die Eins nach dem Komma haben). Deswegen hat man nur von der vorigen Nummer N einer gegebenen Zahl den ganzen Teil von $\frac{\log(N+1)}{\log 2}$ abzuziehen, um ihre gesuchte neue Nummer zu erhalten.

Die Fabersche Methode wird unmittelbar nur auf die Numerierung der echten Brüche angewandt, und für die Numerierung aller rationalen Zahlen muß man eine Transformation benutzen. Um nach meiner Methode alle echten Brüche zu numerieren, braucht man nur beim Auffinden der Nummer die erste in der dyadischen Abszisse immer nach dem Komma vorhandene Null wegzulassen. Als ein Beispiel werden wir den 75sten echten Bruch finden.

$$75 = [1001011]_2;\quad \text{die Abszisse} = [0{,}011010011]_2;$$
$$\text{die Zahl} = (0,\ 1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1) = \tfrac{13}{25}.$$

Die unten angeführte Tabelle enthält die ersten 15 echten Brüche nach den drei Methoden.

Methode	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cantor	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{7}$
Faber	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{13}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{17}{24}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
Meine	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{5}$

Betrachten wir wieder die Strecke, auf welcher alle irrationalen Zahlen sich verteilen, auf die Weise, daß jeder durch einen echten dyadischen Bruch sich ausdrückenden Abszisse eine bestimmte rationale Zahl entspricht. Wir werden festsetzen, daß jeder anderen reellen Abszisse kleiner als 1 die irrationale Zahl entspricht, welcher sich die den dyadischen Annäherungswerten dieser Abszisse entsprechenden Kettenbrüche nähern. Den rationalen Abszissen, welche durch endliche dyadische Brüche nicht auszudrücken sind, entsprechen unendliche periodische Kettenbrüche, d. h. quadratische Irrationalitäten.

Für die Abszisse $\frac{13}{15}$ z. B. haben wir

$$\frac{13}{15} = [1101]_2 : [1111]_2 = [0{,}1101110111\ldots]_2;$$

$$\text{die Zahl} = (2, 1, 3, 1, 3, \ldots) = \frac{1+\sqrt{21}}{2}.$$

Um alle quadratischen Irrationalzahlen samt den rationalen Zahlen zu numerieren, bemerken wir, daß jede solche Zahl eine bestimmte rationale Abszisse hat und daß nach dem oben erklärten Verfahren diese Abszisse (der echte Bruch) mit einer Nummer versehen werden kann. Die Bedeutung dieser Methode besteht in der Möglichkeit der unmittelbaren Nummernberechnung und der umgekehrten Operation.

Hier ist die Tabelle für die ersten 15 Nummern.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	2	$\sqrt{2}-1$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\sqrt{3}-1$	$\sqrt{2}+1$

(Eingegangen am 5. 12. 1927.)

Mathematische Miszellen. XIV.

Über die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion und verwandte Funktionalgleichungen.

Von ALEXANDER OSTROWSKI in Basel.

I.

Die formelmäßige Festlegung der Gesetze des exponentiellen Anwachsens und der exponentiellen Abnahme geschieht gewöhnlich durch einen Grenzübergang, dessen Darstellung wegen der Vermengung der praktischen und theoretischen Daten selten erfreulich ist. Es ist daher vielleicht von Interesse, eine sehr elementare und für Vorlesungszwecke wohl geeignete Herleitung an Hand einer einfachen Funktionalgleichung anzugeben, die ich in den mir bekannten Lehrbüchern nicht gefunden habe. Wir machen folgende Annahmen: Die zu untersuchende Größe ist in einem Intervalle I: $\langle\alpha, \beta\rangle$ gegeben und gehorcht dem Gesetz, daß für $x_2 > x_1$ $\frac{f(x_2)}{f(x_1)}$ *nur* von der Differenz $x_2 - x_1$ abhängt, nicht aber von x_1; wenn also x als die Zeit aufgefaßt wird, so ist das Änderungsverhältnis $\frac{f(x_2)}{f(x_1)}$ nur vom verflossenen *Zeitintervall* abhängig, so z. B. beim radioaktiven Zerfall, beim Anwachsen des Kapitals bei kontinuierlicher Verzinsung usw. Dieser *ersten* Voraussetzung entspricht die Funktionalgleichung, zunächst für $h \geqq 0$:

$$f(x+h) = f(x) \cdot \varphi(h). \tag{1}$$

Wir machen *zweitens* die Voraussetzung, daß $f(x)$ für kein x aus unserem Intervalle I verschwindet.[1]) Dann ist auch $\varphi(h) \neq 0$, und aus $f(x) = f(x+h) \frac{1}{\varphi(h)}$ folgt, daß wenn $\varphi(-h) = \frac{1}{\varphi(h)}$ für $h > 0$ definiert wird, allgemein $f(x+h) = f(x) \cdot \varphi(h)$ gilt, sofern x und $x+h$ dem Intervall I angehören. $\varphi(h)$ ist dann definiert für alle h aus $\langle -(\beta-\alpha), (\beta-\alpha)\rangle$. Die Integration der obigen Funktionalgleichung gelingt am einfachsten, wenn man *drittens* die Voraussetzung macht, daß $f(x)$ wenigstens an einer Stelle x_0, $(\alpha < x_0 < \beta)$ differenzierbar ist. Denn daraus folgt, daß mit $h \to 0$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f(x_0) \frac{\varphi(h) - 1}{h} \to \lambda,$$

$$\frac{\varphi(h) - 1}{h} \to \frac{\lambda}{f(x_0)}$$

1) Es genügt übrigens vorauszusetzen, daß $f(x)$ für wenigstens *ein* x, $(\alpha < x < \beta)$ nicht verschwindet, da daraus mit Hilfe von (1) leicht folgt, daß $f(x)$ für *kein* x verschwinden kann.

gilt. Ist aber dann x ein beliebiger Wert aus I, so folgt, solange $x + h$ in I bleibt,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f(x)\,\frac{\varphi(h) - 1}{h} \to \frac{f(x)}{f(x_0)}\,\lambda,$$

d. h.

$$f'(x) = \frac{\lambda}{f(x_0)}\,f(x).$$

Hieraus folgt

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\lambda}{f(x_0)}, \quad \frac{d\log f(x)}{dx} = \frac{\lambda}{f(x_0)}, \quad \log f(x) = \frac{\lambda x}{f(x_0)} + c.$$

$$f(x) = e^{\frac{\lambda}{f(x_0)}x + c} = c_1 e^{c_2 x}.$$

Die dritte oben gemachte Voraussetzung, diejenige der Differenzierbarkeit in wenigstens einem Punkte, erscheint natürlich nicht ohne weiteres als sachlich gerechtfertigt. Am plausibelsten dürfte hier die Annahme sein, daß $\varphi(h)$ monoton oder stetig ist. Auch in diesen Fällen gibt es elementare, wenn auch weniger zum Vortrag in einer Anfängervorlesung geeignete Herleitungen, die man von der Theorie der Funktionalgleichung

(2) $$\psi(x + y) = \psi(x) + \psi(y)$$

her kennt. In der Tat ist auch die obige Funktionalgleichung (1) ohne weiteres auf die Gleichung (2) zurückführbar, wenn man $f(x) \neq 0$ voraussetzt. Denn aus (1) folgt für

$$0 \leqq x \leqq \frac{\beta - \alpha}{2}, \quad 0 \leqq y \leqq \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$f(\alpha + x + y) = f(\alpha)\,\varphi(x + y) = f(\alpha + x)\cdot\varphi(y) = f(\alpha)\,\varphi(x)\,\varphi(y),$$

$$\varphi(x + y) = \varphi(x)\cdot\varphi(y)$$

und daher, $\log\varphi(x) = \psi(x)$ gesetzt,

$$\psi(x + y) = \psi(x) + \psi(y) \quad \begin{cases} 0 \leqq x \leqq \frac{\beta - \alpha}{2} \\ 0 \leqq y \leqq \frac{\beta - \alpha}{2}. \end{cases}$$

Nunmehr dehne man das Definitionsintervall der Funktion $\psi(x)$ vermöge der allgemeinen Funktionalgleichung über die ganze Zahlengerade aus, und man erhält eine für alle reellen x bestimmte endliche Funktion, die der Funktionalgleichung (2) genügt. Hat man von $\psi(x)$ bewiesen, daß es die Form $\psi(x) = ax$ hat, so folgt alsdann ohne weiteres für $f(x)$

$$f(x) = f(\alpha)\,\varphi(x - \alpha) = f(\alpha)\,e^{a(x-\alpha)}.$$

Unter welchen Annahmen können wir nun beweisen, daß eine Lösung von (2) die Form ax hat?

II.

In der Literatur finden sich im wesentlichen über die fast triviale Voraussetzung der Stetigkeit von $\psi(x)$ hinaus, soweit mir bekannt ist, vier verschiedene Bedingungen für $\psi(x)$. Wir besprechen zuerst die drei ersten Bedingungen.

1. $\psi(x)$ ist auf wenigstens einem Intervalle gleichmäßig einseitig beschränkt (Darboux)[1]),
2. $\psi(x)$ ist meßbar (Frechet, Banach)[2]),

und als Verallgemeinerung von 2.,

3. $\psi(x)$ hat eine meßbare Majorante (Sierpinski).[3])

Keine der Bedingungen 1. und 3. ist in der andern enthalten. Man kann nun eine sehr einfache und prägnante Bedingung formulieren, die schwächer ist als jede der Bedingungen 1. und 3. Es gilt nämlich:

Es sei eine Lösung $\psi(x)$ von (2) auf einer Menge positiven Maßes einseitig beschränkt, d. h. es gebe eine Zahl A derart, daß auf einer Menge positiven Maßes durchweg $\psi(x) \geqq A$ oder $\psi(x) \leqq A$ ist. Dann hat $\psi(x)$ die Form $\psi(1)\,x$.

Diese Formulierung scheint neu zu sein, läßt sich aber sehr einfach den Betrachtungen entnehmen, die Herr Sierpinski zur Begründung der obigen Formulierung 3. anstellt. Wir wollen nun einen Beweis unserer Formulierung erbringen, indem wir beweisen, daß unter unserer Annahme $\psi(x)$ stetig sein muß, woraus ja $\psi(x) = \psi(1)\,x$ ohne weiteres folgt. Und zwar beweisen wir zugleich einen allgemeineren Satz über sogenannte konvexe Funktionen, zu denen auch die Lösungen von (2) gehören.

Unter einer konvexen Funktion im Intervall I: (α, β) versteht man eine in diesem Intervall definierte endliche Funktion $\varphi(x)$, die der Ungleichung

$$\varphi\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqq \frac{\varphi(x_1) + \varphi(x_2)}{2} \tag{3}$$

genügt, wenn x_1 und x_2 zu I gehören. Bereits von Herrn J. L. W. V. Jensen (1905)[4]) ist gezeigt worden, daß eine in I beschränkte konvexe Funktion in (α, β) *stetig* ist. Herr Sierpinski (1920)[5]) hat

---

1) G. Darboux, Math. Ann. Bd. 17, S. 56—57.

2) M. Frechet, L'enseign. math. Bd. XV, S. 390—393; S. Banach, Fund. math. Bd. I, S. 123—124.

3) W. Sierpinski, Fund. math. Bd. V, S. 334—336.

4) J. L. W. V. Jensen, Acta math. 30, S. 189.

5) W. Sierpinski, Fund. math. Bd. I, S. 125—129.

dasselbe unter der Annahme bewiesen, daß $\varphi(x)$ meßbar ist. Wir wollen nun zeigen, daß wenn $\varphi(x)$ bereits auf einer Menge positiven Maßes kleiner als eine Konstante c ist, die Stetigkeit von $\varphi(x)$ in (α, β) folgt. Da mit einer Lösung $\psi(x)$ von (2) auch $-\psi(x)$ eine Lösung von (2) und daher von (3) ist, folgt durch die Anwendung dieses Resultates auf $\psi(x)$ oder $-\psi(x)$ die Stetigkeit von $\psi(x)$.

III.

Es sei also $\varphi(x)$ in I: (α, β) endlich und genüge dort der Funktionalgleichung

$$\varphi\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqq \frac{\varphi(x_1) + \varphi(x_2)}{2}. \tag{3}$$

Es sei ferner auf einer Menge $\mathfrak{M}$ aus I mit $m(\mathfrak{M}) = d > 0$ $\varphi(x) < c$. Da mit φ auch $\varphi - c$ der Relation (3) genügt, so können wir voraussetzen, daß $\varphi(x) < 0$ für alle x auf $\mathfrak{M}$ ist. Wir werden zeigen, daß $\varphi(x)$ dann in (α, β) stetig ist. Es genügt, die folgende Teilbehauptung zu beweisen:

A. *Es gibt ein Teilintervall von* I, *auf dem* $\varphi(x)$ *gleichmäßig nach oben beschränkt ist.*

Denn aus der Beschränktheit von $\varphi(x)$ nach oben in einem Teilintervall von I folgt nach einem Satz von F. Bernstein und G. Doetsch[1]) die Beschränktheit von $\varphi(x)$ nach oben in jedem Teilintervall und daraus folgt nach dem Satz von Jensen die Stetigkeit von $\varphi(x)$ in (α, β).

Nach Definition des Maßes läßt sich $\mathfrak{M}$ in eine Folge von Intervallen $\sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_\nu$ einschließen, die sich nicht überdecken und deren Längensumme zwischen d und $\frac{4}{3} d$ liegt. Daher gibt es wenigstens ein Intervall δ_ν — es sei mit δ bezeichnet — dessen Länge $|\delta|$ der Bedingung genügt

$$m(\mathfrak{M}\delta) \leqq |\delta| \leqq \tfrac{4}{3} m(\mathfrak{M}\delta),$$

wo $\mathfrak{M}\delta$ der Durchschnitt von $\mathfrak{M}$ und δ ist. Es sei ξ der Mittelpunkt von δ. Gibt es ein Intervall um ξ, in dem $\varphi(x)$ nach oben gleichmäßig beschränkt ist, so ist A. richtig. Sonst gibt es in beliebiger Nähe von ξ Punkte x, in denen $\varphi(x) > 1$ ist. Es sei x_0 ein derartiger Punkt, dessen Distanz von ξ kleiner als $\frac{m(\mathfrak{M}\delta)}{3}$ ist. Man betrachte zu jedem Punkt x von $\mathfrak{M}\delta$ den Punkt $x' = 2x_0 - x$. Wegen $\varphi(x_0) \leqq \frac{\varphi(x) + \varphi(x')}{2}$ folgt $\varphi(x') > 2$, so daß x' nicht zu $\mathfrak{M}$ gehören kann. Man bezeichne die Menge

1) F. Bernstein und G. Doetsch, Math. Ann. Bd. 76, S. 518—519.

dieser Punkte x' mit $\mathfrak{N}$. Das Maß von $\mathfrak{N}$ ist wieder gleich $m(\mathfrak{M}\delta)$. Nun kann die Menge $\mathfrak{N}$ aus δ nur nach einer Seite und nur um weniger als $\frac{2}{3}\,m(\mathfrak{M}\delta)$ hinausragen. Daher ist das Maß von $\mathfrak{N}\delta$ größer als $m(\mathfrak{M}\delta) - \frac{2}{3}\,m(\mathfrak{M}\delta) = \frac{1}{3}\,m(\mathfrak{M}\delta)$, und folglich ist das Maß der Vereinigungsmenge der punktfremden Mengen $\mathfrak{M}\delta$ und $\mathfrak{N}\delta$ größer als $\frac{4}{3}\,m(\mathfrak{M}\delta)$. Und dies widerspricht der Annahme, daß diese Vereinigungsmenge im Intervall δ liegt, dessen Länge $\frac{4}{3}\,m(\mathfrak{M}\delta)$ nicht überschreitet. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

IV.

Die vierte der oben erwähnten Bedingungen wird durch den folgenden Satz von G. Hamel[1]) geliefert:

Eine unstetige Lösung $\psi(x)$ von (2) nimmt auf jedem Intervall der x-Achse Werte an, die auf der ψ-Achse überall dicht liegen. Demnach muß eine Lösung von (2), deren Werte auf einem Intervall der x-Achse in ein Intervall der ψ-Achse nicht eindringen, stetig sein. Diese Bedingung, die als eine weitere Verallgemeinerung von 1. aufgefaßt werden kann, läßt sich zur folgenden Bedingung verallgemeinern, die zugleich die Bedingungen 2. und 3. enthält:

Es sei eine Lösung $\psi(x)$ von (2) so beschaffen, daß auf einer Menge $\mathfrak{M}$ positiven Maßes die von ihr angenommenen Werte in ein Intervall $\langle\psi_1, \psi_2\rangle$ der ψ-Achse nicht eindringen. Dann ist $\psi(x)$ überall stetig und hat daher die Form $\psi(x) = ax$.

Beweis: Es sei $\psi_2 - \psi_1 \geqq l > 0$. Es sei ξ ein Punkt von $\mathfrak{M}$, in dem $\mathfrak{M}$ die Dichte 1 hat, d. h. für den, wenn $U_d(\xi)$ das Intervall von der Länge $2d$ um ξ als Mittelpunkt ist, der Quotient $\frac{m\mathfrak{M}U_d(\xi)}{2d}$ mit $d \downarrow 0$[2]) gegen 1 konvergiert. Offenbar gilt $\psi(0) = 0$. Wenn $\psi(1) \neq 0$ ist, ziehen wir von $\psi(x)$ die stetige Lösung $\psi(1)\cdot x$ von (2) ab und erhalten eine neue Lösung $\psi_1(x)$ von (2). Man betrachte nun den Teil $\mathfrak{M}'$ der Menge $\mathfrak{M}$, dessen Punkte von ξ höchstens den Abstand $\lambda = \frac{l}{3\,|\psi(1)|}$ haben. Das Maß von $\mathfrak{M}'$ ist nach der Voraussetzung über ξ positiv. Da die Werte von $\psi_1(x)$ über $\mathfrak{M}'$ aus den Werten von $\psi(x)$ über $\mathfrak{M}'$ durch Subtraktion von $\psi(1)\xi + \Theta\psi(1)\cdot\lambda$ entstehen, wo $-1 \leqq \Theta \leqq 1$ ist, wird $\psi_1(x)$ über $\mathfrak{M}'$ jedenfalls das Intervall

$$(\psi_1 - \psi(1)\xi + |\psi(1)|\lambda,\ \psi_2 - \psi(1)\xi - |\psi(1)|\lambda)$$

---

1) G. Hamel, Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung: $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Math. Ann. Bd. 60 (1905), S. 459 ff.

2) Mit $\downarrow 0$ deuten wir das monotone Abnehmen gegen 0 an.

auslassen, d. h. ein Intervall von der Länge $l - 2\,|\psi(1)|\,\frac{l}{3\,|\psi(1)|} = \frac{l}{3}$. Und $\psi_1(1)$ ist nunmehr gleich 0.

Wir können also von vornherein annehmen, daß $\psi(1) = 0$ ist. Dann aber gilt wegen $\psi\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}\,\psi(1)$ für ganze m und n auch $\psi\left(\frac{m}{n}\right) = 0$. Ist dann irgendeine r rationale Zahl, so folgt aus $\psi(r + x) = \psi(r) + \psi(x) = \psi(x)$, daß $\psi(x)$ die Werte aus dem Intervall $\langle\psi_1, \psi_2\rangle$ auch über jeder der Mengen $r + \mathfrak{M}$ ausläßt, die aus $\mathfrak{M}$ durch Verschiebung um eine beliebige rationale Zahl r hervorgeht.

Wir schalten nun den Beweis des folgenden Hilfssatzes über meßbare Mengen positiven Maßes ein: *Ist $\mathfrak{M}$ eine lineare meßbare Menge positiven Maßes und bildet man die Vereinigungsmenge M aller Mengen $(\mathfrak{M} + r)$, die aus $\mathfrak{M}$ durch Translationen um beliebige rationale Zahlen r hervorgehen, so hat die Menge der in M nicht enthaltenen Punkte das Maß* 0. Die Menge M ist also in jedem Punkte von der Dichte 1, d. h. sie ist überall „volldicht" (hat überall „epaisseur pleine" nach Denjoy). — Denn ist die Dichte von $\mathfrak{M}$ in einem Punkt ξ gleich 1, so gibt es zu einem beliebig kleinen positiven ε ein $d > 0$ derart, daß $\frac{m\,\mathfrak{M}\,U_d(\xi)}{2d} \geqq 1 - \varepsilon$ ist, wo $U_d(\xi)$ das Intervall um den Mittelpunkt ξ von der Länge $2d$ bezeichnet. Und dabei kann d als eine Zahl von der Form $\frac{1}{k}$ gewählt werden, wo k ganz und ungerade ist. Verschieben wir nunmehr die Menge $\mathfrak{M}\,U_d(\xi)$ nach beiden Seiten um $2d$, $4d$, $6d$, $8d$ usw., so wird ein Intervall I_N um den Mittelpunkt ξ von der Länge $2N$ für ein ganzes ungerades $N > 0$ überdeckt, und wir sehen, daß das Maß von MI_N nicht kleiner als $2(1 - \varepsilon)N$ ist und daher das Maß der zu M in bezug auf I_N komplementären Menge höchstens gleich $2\varepsilon N$ ist. Und wegen der Willkür von ε folgt hieraus, daß das Maß der zu M in bezug auf I_N komplementären Menge gleich 0 ist, so daß, wegen der Willkür von N, die zu M komplementäre Menge eine Nullmenge ist, w. z. b. w.

Aus unserm Hilfssatz folgt nun, daß $\psi(x)$ Werte aus dem Intervall $\langle\psi_1, \psi_2\rangle$ nur aus einer Nullmenge $\mathfrak{M}_0$ annehmen kann. Wir können annehmen, eventuell nach der Multiplikation von $\psi(x)$ mit -1 und einer Verkleinerung des Intervalls $\langle\psi_1, \psi_2\rangle$, daß $\psi_2 = q\psi_1 > \psi_1 > 0$ ist, wo q rational ist. Aus der wegen der Rationalität von q geltenden Relation $\psi(qx) = q\psi(x)$ folgt aber offenbar, daß $\psi(x)$ Werte aus dem Intervall $\langle\psi_1 q, \psi_1 q^2\rangle$ nur auf der Nullmenge $\mathfrak{M}_1 = q\mathfrak{M}_0$ annehmen kann. Allgemein folgt für ein ganzes positives ν, daß $\psi(x)$ Werte aus dem Intervall $\langle\psi_1 q^\nu, \psi_1 q^{\nu+1}\rangle$ nur auf der Nullmenge $\mathfrak{M}_\nu = \mathfrak{M}_0 q^\nu$

annehmen kann. Da aber die Intervalle $\langle\psi_1, \psi_1 q\rangle$, $\langle\psi_1 q, \psi_1 q^2\rangle$, $\langle\psi_1 q^2, \psi_1 q^3\rangle, \ldots$ sich zum unendlichen Intervall $\langle\psi_1, \infty\rangle$ zusammenfügen, so folgt, daß $\psi(x)$ Werte, die größer als ψ_1 sind, nur auf der Nullmenge $\mathfrak{M}_0 + \mathfrak{M}_1 + \cdots$ annehmen kann und daher auf einer Menge positiven Maßes beschränkt ist, woraus sich nach dem in III. Bewiesenen unsere Behauptung ergibt.

V.

Es liegt nun die Frage nahe, ob sich der in IV. bewiesene Satz dahin verschärfen läßt, daß auch das Intervall $\langle\psi_1, \psi_2\rangle$ durch eine beliebige Menge positiven Maßes ersetzt werden kann. *Dies ist aber nicht mehr richtig.* Der Aufstellung eines Gegenbeispiels schicken wir einige allgemeine Bemerkungen voraus, die insofern von Interesse sind, als sie eine Klassifikation der unstetigen Lösungen von (2) unter dem oben hervorgehobenen Gesichtspunkt nahelegen und eine weitere Diskussion verschiedener Klassen solcher Lösungen anbahnen.

Es sei $\psi(x)$ eine unstetige Lösung von (2). Nimmt sie auf jeder Menge positiven Maßes $\mathfrak{M}_x$ Werte aus jeder Menge positiven Maßes $\mathfrak{M}_\psi$ an, so sagen wir, $\psi(x)$ besitzt *die Eigenschaft A*. Ist es andererseits möglich, die ganze Zahlengerade der x-Werte in eine Nullmenge $\mathfrak{N}^*$ und eine überall volldichte Menge $\mathfrak{M}^*$ derart zu spalten, daß der Wertevorrat $\psi(x)$ auf $\mathfrak{M}^*$ eine Nullmenge $N_\psi{}^*$ bildet, so sagen wir, $\psi(x)$ besitze *die Eigenschaft B*. Offenbar schließen sich die Eigenschaften A und B gegenseitig aus.

Es sei nun $\psi(x)$ insbesondere eine solche unstetige Lösung von (2), *die wenigstens einen Wert für zwei verschiedene Argumente x_1 und x_2 annimmt, die also dann auch eine von* 0 *verschiedene Wurzel $x_2 - x_1$ besitzt. Wir behaupten, daß eine solche Lösung von* (2) *entweder die Eigenschaft A oder die Eigenschaft B besitzen muß, und daß beide Fälle wirklich vorkommen können.*

Denn ist $\psi(\gamma) = 0$ für $\gamma \neq 0$, so können wir annehmen, daß $\gamma = 1$ ist, indem wir eventuell $\psi(x)$ durch die Funktion $\psi_1(x) = \psi(\gamma x)$ ersetzen. Es genügt dann offenbar, den Satz für $\psi_1(x)$ zu beweisen. Aus $\psi(1) = 0$ folgt aber $\psi(r) = 0$ für jedes rationale r. Besitzt nun $\psi(x)$ die Eigenschaft A nicht, so gibt es zwei Mengen M_x und $\mathfrak{M}_\psi$ positiven Maßes, derart, daß $\psi(x)$ auf $\mathfrak{M}_x$ keinen Wert aus $\mathfrak{M}_\psi$ annimmt. Wegen $\psi(x + r) = \psi(x)$ nimmt dann $\psi(x)$ auch auf keiner der Mengen $\mathfrak{M}_x + r$ Werte aus $\mathfrak{M}_\psi$ an. Nach dem Hilfssatz von IV. ist aber die Vereinigungsmenge $\sum_r (\mathfrak{M}_x + r)$ aller $\mathfrak{M}_x + r$ eine Menge $\mathfrak{M}_x'$, die überall volldicht ist. Und wir sehen also, daß die Werte aus $\mathfrak{M}_\psi$ nur auf der zu M_x'

komplementären Nullmenge $\mathfrak{N}_x'$ angenommen werden können. Wegen $\psi(rx) = r\psi(x)$ für rationale r folgt, daß für ein rationales $r \neq 0$ Werte aus $r\mathfrak{M}_\psi$ nur auf der Nullmenge $r\mathfrak{N}_x'$ angenommen werden können. Bezeichnen wir also die Nullmenge, die sich als die Vereinigungsmenge aller $r\mathfrak{N}_x'$ ergibt, mit $\mathfrak{N}_x^*$, so werden Werte aus der Vereinigungsmenge $\mathfrak{M}_\psi^*$ der $r\mathfrak{M}_\psi$ höchstens auf $\mathfrak{N}_x^*$ angenommen. Wir behaupten nun, daß $\mathfrak{M}_\psi^*$ ***überall volldicht ist***, d. h., daß die zu ihr komplementäre Menge $\mathfrak{N}_\psi^*$ eine Nullmenge ist. Denn es sei $\psi_0 \neq 0$ ein Punkt der Menge $\mathfrak{M}_\psi$, in dem $\mathfrak{M}_\psi$ die Dichte 1 hat, und es sei etwa $\psi_0 > 0$. Es sei dann $I_\varepsilon = \langle \psi_1, \psi_2 \rangle$ ein Intervall um ψ_0, mit $\psi_2 = (1+\varepsilon)\psi_1 > \psi_1 > 0$, wo für ein beliebiges $\delta > 0$ $\frac{m\mathfrak{M}_\psi I_\varepsilon}{m I_\varepsilon} > 1 - \delta$ und $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ rational ist. Es sei ferner N eine beliebige feste positive Zahl > 1, und $n(\varepsilon)$ sei die größte ganze Zahl, für die $(1+\varepsilon)^{n(\varepsilon)} \leqq N$ ist. Dann ist das Maß der Teilmenge von $\mathfrak{M}^*$, die im Intervall $\langle 0, N \rangle$ liegt, größer als

$$\begin{aligned}(1-\delta)(1+\varepsilon)^{n(\varepsilon)} &= (1-\delta)N - (1-\delta)\left(N - (1+\varepsilon)^{n(\varepsilon)}\right)\\ &> (1-\delta)N - \left((1+\varepsilon)^{n(\varepsilon)+1} - (1+\varepsilon)^{n(\varepsilon)}\right) = (1-\delta)N - \varepsilon(1+\varepsilon)^{n(\varepsilon)}\\ &\geqq (1-\delta-\varepsilon)N.\end{aligned}$$

Läßt man nun ε und δ gegen 0 gehen, so folgt, daß die zu $\mathfrak{M}_\psi^*$ in bezug auf $\langle 0, N \rangle$ komplementäre Menge eine Nullmenge ist, d. h. wegen der Willkür von N, daß $\mathfrak{M}_\psi^*$ überall im Intervall $\langle 0, \infty \rangle$ volldicht ist. Und da mit einem Punkt ψ in $\mathfrak{M}_\psi^*$ auch $-\psi$ in $\mathfrak{M}_\psi^*$ liegt, gilt dasselbe für die ganze Zahlengerade. Ist aber $\psi_0 < 0$, so brauchen wir nur $\mathfrak{M}_\psi$ durch die Menge $-\mathfrak{M}_\psi$ zu ersetzen. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Wir sehen also, daß $\psi(x)$ auf einer überall volldichten Menge $\mathfrak{M}_x^*$ nur Werte aus einer Nullmenge $\mathfrak{N}_\psi^*$ annimmt, d. h., die Eigenschaft B besitzt.

VI.

Nach einem bekannten Satz von Hamel gibt es eine *Basis aller Zahlen*, d. h. eine Menge H reeller von 0 verschiedenen Zahlen derart, daß jede endliche Teilmenge aus H linear unabhängig ist und zu jeder von 0 verschiedenen reellen Zahl x eine (eindeutig bestimmte) endliche Teilmenge $a_1, \ldots, a_n$ von H gehört, durch die sich x linear in der Form $x = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu a_\nu$ mit von 0 verschiedenen (eindeutig bestimmten) rationalen Koeffizienten α_ν darstellen läßt. H kann insbesondere so gewählt werden, daß es 1 enthält. Es sei nun zu einer solchen, 1 enthaltenden Hamelschen Basis H die Gesamtheit M aller reellen

Zahlen gebildet, bei deren Darstellung durch die Basis die Basiszahl 1 nicht benutzt wird. Die Menge M mit 0 bildet offenbar einen Modul. Dann läßt sich jede reelle Zahl $x \neq 0$ eindeutig in eine Summe spalten $x = r(x) + m(x)$, wo $r(x)$ eine rationale Zahl und $m(x)$ eine Zahl aus M oder 0 ist. Offenbar gilt

$$r(x+y) = r(x) + r(y), \quad r(1) = 1, \quad m(x+y) = m(x) + m(y).$$

Setzen wir noch $r(0) = m(0) = 0$, so haben wir also in den Funktionen $r(x)$ und $m(x)$ zwei Lösungen von (2).

Die erste Lösung $r(x)$ hat nur einen abzählbaren Wertevorrat und besitzt daher erst recht die Eigenschaft B.

Die zweite Lösung $\psi(x) \equiv m(x)$ verschwindet für alle rationalen x, ohne identisch zu verschwinden, ist also unstetig, so daß die Menge M überall dicht ist. Wir beweisen, daß $m(x)$ die Eigenschaft B nicht besitzt, so daß dafür die Eigenschaft A zutreffen muß, da $m(1) = 0$ ist. Zu dem Zwecke bemerken wir, daß M sicher keine Nullmenge ist. Denn sonst wäre ja auch die Vereinigungsmenge aller Mengen $(M + r)$ für alle rationalen r eine Nullmenge, während sie die ganze Zahlengerade überdeckt. Hätte aber $m(x)$ die Eigenschaft B und wären $\mathfrak{M}_x{}^*$ und $\mathfrak{N}_\psi{}^*$ die in der Definition der Eigenschaft B postulierten Mengen, so würde sich M von ihrem Durchschnitt $M\mathfrak{M}_x{}^*$ mit $\mathfrak{M}_x{}^*$ nur um eine Nullmenge unterscheiden. Und da für jedes x aus M $m(x) = x$ ist, wäre $M\mathfrak{M}_x{}^*$ in $\mathfrak{N}_\psi{}^*$ enthalten, also eine Nullmenge, so daß auch M eine Nullmenge sein müßte. Damit haben wir also zwei Lösungen von (2) konstruiert, die die Eigenschaften A bzw. B besitzen.

Zum Schluß sei bemerkt, daß auch im Falle konvexer Funktionen eine der Hamelschen analoge Eigenschaft von F. Bernstein und G. Doetsch[1]) bewiesen wurde. Auch diese Eigenschaft läßt sich in der Richtung unseres in IV. bewiesenen Satzes weiter verschärfen, worauf hier indessen nicht weiter eingegangen werden soll.[2])

1) Math. Ann. Bd. 76 (1915), S. 514—526.

2) Vgl. eine Note des Verfassers in den Comment. math. helv., Bd. 1 (1929).

(Eingegangen am 16. 3. 1929.)

Über eine Klasse von Funktionen, die die Stieltjesschen Kettenbrüche als Sonderfall enthält.

Von W. Cauer in Göttingen.

Mit 3 Figuren im Text.

Bei einem elektrotechnischen Problem[1]), das besonders für die Nachrichtentechnik Interesse besitzt, stößt man auf eine Klasse analytischer Funktionen, in der die Stieltjesschen Kettenbrüche als Sonderfall enthalten sind. Es handelt sich dabei um folgendes: Gegeben sei eine Schar quadratischer Formen $\sum_{i,k=1}^{n} A_{ik} x_i x_k$, wo

$$A_{ik} = \lambda L_{ik} + R_{ik} + \lambda^{-1} D_{ik}$$

und λ ein Parameter ist. Die Formen

$$\sum_{i,k=1}^{n} L_{ik} x_i x_k, \quad \sum_{i,k=1}^{n} R_{ik} x_i x_k, \quad \sum_{i,k=1}^{n} D_{ik} x_i x_k$$

sollen positiv definit sein. Der Einfachheit halber werden wir, soweit nichts anderes bestimmt wird, voraussetzen, daß sie nicht singulär sind, daß sie also den Wert Null nur annehmen, wenn sämtliche Veränderliche verschwinden. Die von uns betrachteten Funktionen werden nun durch den Quotienten $F(\lambda) = \frac{a}{a_{11}}$, aus den Diskriminanten der Formen $\sum_{i,k=1}^{n} A_{ik} x_i x_k$ und $\sum_{i,k=2}^{n} A_{ik} x_i x_k$ gebildet.[2])

a ist also die $n$reihige Determinante aus den A_{ik}, a_{11} die zu ihrem ersten Element gehörige Unterdeterminante $\frac{\partial a}{\partial A_{11}}$.

Bei diesen Funktionen wird uns hauptsächlich die Lage der Nullstellen und Pole interessieren, durch die sie sich von anderen rationalen Funktionen auszeichnen.[3]) *Für die Untersuchung dieser Frage ist die*

1) Archiv für Elektrotechnik, Dez. 1926; ETZ 1927. Die Bezeichnungen sind im folgenden so gewählt, daß elektrotechnisch Vorgebildete an bekannte Dinge erinnert werden.

2) Mit den Verallgemeinerungen der Stieltjesschen Kettenbrüche durch Grommer und Hamburger haben unsere Funktionen nichts zu tun.

3) Fragt man nach derjenigen Klasse von Funktionen, die sich durch unsere rationalen Funktionen beliebig genau approximieren lassen, so lautet die Antwort einfach: das sind *diejenigen in der rechten λ-Halbebene regulären Funktionen, die dort positiv reellen Teil besitzen und die auf der reellen Achse reell sind.*

Invariantentheorie der affinen Transformationen dreier quadratischer Formen grundlegend. Besonderer Wert wird auf gewisse Beziehungen unserer Funktionen zu den Liniensystemen (Graphen) der Analysis situs gelegt, mit deren Hilfe auf anschaulichem Wege rein algebraische Sätze erhalten werden.

Wir beschäftigen uns zunächst mit den Spezialfall einer nur aus zwei Formen bestehenden Formenschar. Z. B. sollen also alle $L_{ik} = 0$ sein. Um mich kurz ausdrücken zu können, will ich die so erhaltenen Funktionen als der Klasse B und zum Unterschied davon die allgemeineren Funktionen als der Klasse A angehörig bezeichnen. Beim Studium der Klasse B muß ich vielfach an bekannte Dinge erinnern, die zum Verständnis des Ganzen nötig sind. Es wird sich ergeben, daß die *Stieltjesschen Kettenbrüche in dieser Klasse* B *für* $n \to \infty$ *enthalten* sind. Die Anzahl n der Variablen x_i, die ich Zahl der Freiheitsgrade nennen will, soll im allgemeinen als endlich vorausgesetzt werden.

Jede Funktion F der Klasse A läßt verschiedene Darstellungen als Quotient $\frac{a}{a_{11}}$ zu. Aus einer erhält man offenbar andere durch Anwendung einer linearen Transformation mit reellen Koeffizienten der Gruppe

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1' \\ x_2 &= \alpha_{21} x_1' + \alpha_{22} x_2' + \cdots + \alpha_{2n} x_n' \\ x_3 &= \alpha_{31} x_1' + \alpha_{32} x_2' + \cdots + \alpha_{3n} x_n' \\ &\vdots \\ x_n &= \alpha_{n1} x_1' + \alpha_{n2} x_2' + \cdots + \alpha_{nn} x_n' \end{aligned}$$

auf unsere quadratischen Formen. a und a_{11} multiplizieren sich dabei mit ein und demselben Faktor, dem Quadrat der Determinante mit dem Diagonalglied $\alpha_{22}\alpha_{33} \ldots \alpha_{nn}$. Durch solche Transformationen kann man gewisse Normaldarstellungen von F erhalten. Für den Vortrag soll der Ausnahmefall ausgeschlossen werden, daß für $L_{ik} = 0$ a und a_{11} einen gemeinsamen Faktor besitzen, obwohl dieser Fall für die Klasse A Interesse besitzt. Dann läßt sich durch Transformation u. a. stets die folgende Normalform erzielen: $D_{ik} = 0$ für $i \neq k$, $R_{ik} = 0$ für $i \neq k$ außer R_{1k} und $R_{1k} = R_{kk}$. Setzt man

$$R_{11} = R_1 + \sum_{i=2}^{n} R_{ii},$$

so folgt durch Ausrechnung der Determinanten für eine Funktion der Klasse B der Ausdruck

$$F = R_1 + \frac{D_{11}}{\lambda} + \sum_{i=2}^{n} \frac{D_{ii}}{\lambda + \frac{D_{ii}}{R_{ii}}},$$

d. h. die Partialbruchzerlegung der Funktion. Notwendig und hinreichend dafür, daß die quadratischen Formen positiv definit sind, ist $R_1 > 0$, $R_{ii} > 0$, $D_{ii} > 0$. Aus der Eindeutigkeit der Partialbruchzerlegung schließt man auf die Äquivalenz irgend zweier Darstellungen von F in bezug auf Transformationen der genannten Gruppe. Aus der Normaldarstellung von F folgt noch fast unmittelbar, wie ich nicht weiter ausführen will, daß die negativen Nullstellen und Pole von F sich gegenseitig trennen. Der Grenzfall des Zusammenfallens tritt nur in dem vorhin ausgeschlossenen Ausnahmefall ein. Besitzt umgekehrt eine gebrochene rationale Funktion $\frac{a}{a_{11}}$ lauter verschiedene negative Nullstellen und Pole, die sich gegenseitig trennen, und ist der Quotient der Koeffizienten der höchsten Potenzen von λ im Zähler und Nenner positiv, so hat die Funktion, wie man leicht nachweist, jene Partialbruchzerlegung mit positiven R und D, gehört also zur Klasse B. Somit sind notwendige und hinreichende Bedingungen für die Zugehörigkeit einer Funktion zu der Klasse B aufgestellt.

Wie wir gesehen haben, können wir den Formen $\sum_{i,k=1}^{n} R_{ik} x_i x_k$ und $\sum_{i,k=1}^{n} D_{ik} x_i x_k$ noch außer der Bedingung des Positivdefinitseins weitere Einschränkungen auferlegen, ohne daß die Allgemeinheit der dann gewonnenen Funktionen leidet. Wir werden nun bald eine besondere Art solcher weiteren Einschränkungen ins Auge fassen, die für gewisse, in das Gebiet der Analysis situs fallende *geometrische Darstellungen der Funktionen unserer Klasse mit Hilfe von Liniensystemen* erforderlich ist. Bei diesen geometrischen Darstellungen, die mir zur Belebung der rein algebraisch-funktionentheoretischen Untersuchung sehr nützlich erscheinen, handelt es sich um das *mathematische Äquivalent elektrotechnischer Schaltungen.*

Ich will erst ein paar Worte über die Liniensysteme sagen, die wir benutzen wollen. Es seien q Punkte, „Knotenpunkte", und s Strecken oder „Zweige" mit Richtungssinn gegeben. Jeder Zweig beginne und ende in je einem Knotenpunkte, und jeder Knotenpunkt sei Anfangs- oder Endpunkt von mindestens zwei Zweigen. Es sind verschiedene Vorschläge gemacht worden, ein solches Liniensystem analytisch darzustellen. Für unsere Zwecke ist die folgende Darstellung durch eine Matrix brauchbar. Jedem Knotenpunkt soll eine Zeile, jedem Zweige eine Spalte der Matrix entsprechen. Ein Element der Matrix erhält den Wert $+1$, -1 oder 0, je nachdem der betreffende Zweig in dem betreffenden Knotenpunkt endigt, beginnt oder keins von beiden der Fall ist. Der Rang einer solchen Matrix ist stets kleiner als die Zahl

der Knotenpunkte. Wir dürfen wegen der Ausschließung des vorhin erwähnten Ausnahmefalles in zwei oder mehrere Teile zerfallende Liniensysteme außer Betracht lassen, was auf die Festsetzung hinauskommt, daß der Rang unserer Matrix $q - 1$ ist. Sei

$$\begin{matrix} m_{11} m_{12} \ldots m_{1s} \\ m_{21} m_{22} \ldots m_{2s} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ m_{q1} m_{q2} \ldots m_{qs} \end{matrix}$$

eine solche ein Liniensystem bestimmende Matrix. Jedem gerichteten Zweige p ordnen wir eine Variable x_p' zu. Zwischen den x_p' sollen die linearen Gleichungen

$$\sum_{p=1}^{s} m_{lp} x_p' = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, q)$$

bestehen, so daß sich die x_p' durch $n = s - q + 1$ unabhängige Variable linear ausdrücken lassen. Als diese werden wir später die n Variablen x_t unserer quadratischen Formen wählen. Wir schreiben

$$x_p' = \sum_{t=1}^{n} c_{pt} x_t \qquad (p = 1, 2, \ldots, s).$$

Die Konstanten c_{pt} werden eindeutig bestimmt, wenn wir noch festsetzen, daß irgend n unabhängige x_p', die wir mit $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ bezeichnen können, direkt gleich den ungestrichenen Größen gesetzt werden. Diese Transformation hat ihre geometrische Bedeutung. Entfernen wir die den unabhängigen Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entsprechenden Zweige aus dem Liniensystem, so bleibt ein Baum übrig, d. h. ein zusammenhängendes Gebilde ohne geschlossene Kreise. Um ein Beispiel vor Augen zu haben, sehen wir uns Bild 1 an, in dem die Zeichen innerhalb der einzelnen Zweige zunächst fortzudenken sind. Hier bleibt ersichtlich nach Entfernung der Zweige $1, 2, \ldots, n$ ein zusammenhängender Linienzug ohne geschlossene Kreise übrig. Auch für das Folgende kann man, um die Gedanken zu fixieren, zweckmäßig immer Bild 1 betrachten. Durch jeden der ersten n Zweige geht genau ein geschlossener doppelpunktfreier Kreis, der keinen der übrigen n ersten Zweige enthält. In jedem der n geschlossenen Kreise soll die Richtung des einen in ihm enthaltenen Zweiges mit der Nummer $1, 2, \ldots, n$ ausgezeichnet werden. So wie die x_p' den Zweigen, entsprechen dann die x_t den Kreisen. Je nachdem die Richtung des p-ten Zweiges mit der Richtung eines durch ihn laufenden t-ten Kreises übereinstimmt oder nicht, ist $c_{pt} = +1$ oder -1, und wenn der t-te Kreis gar nicht durch den p-ten Zweig hindurch geht, ist $c_{pt} = 0$.

Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen über Liniensysteme komme ich zur Hauptsache: Die ursprünglichen quadratischen Formen werden durch

$$R_{ik} = \sum_{p=1}^{s} c_{pi} c_{pk} R_p$$

und

$$D_{ik} = \sum_{p=1}^{s} c_{pi} c_{pk} D_p$$

in $\sum_{p=1}^{s} R_p x_p'^2$ und $\sum_{p=1}^{s} D_p x_p'^2$ transformiert, wo die x_p' überzählige Variable sind und sich in der erwähnten Art durch die unabhängigen Veränderlichen x_t ausdrücken $\left(x_p' = \sum_{t=1}^{n} c_{pt} x_t\right)$. Als *Einschränkungen für die* R_{ik} *und* D_{ik} wird nun verlangt, daß es *bei geeigneter Wahl des Liniensystems* möglich sein soll, daß trotz der Überzähligkeit der x_p' *sämtliche* R_p *und* D_p *nicht negativ* ausfallen. Diese Forderung läßt sich sicher nicht für beliebige positiv definite Formen erfüllen, da wegen der angeführten Eigenschaften der c_{pt} jedenfalls $R_{ii} \geq |R_{ik}|$ sein muß. Sie läßt sich aber doch ohne Einschränkung der Funktionen der Klasse B befriedigen, wie man aus der besprochenen Normaldarstellung folgern kann. Hier war $R_{1k} = R_{kk}$ und alle übrigen R_{ik}, $D_{ik} = 0$ für $i \neq k$. Als Liniensystem wählen wir das von Bild 1:

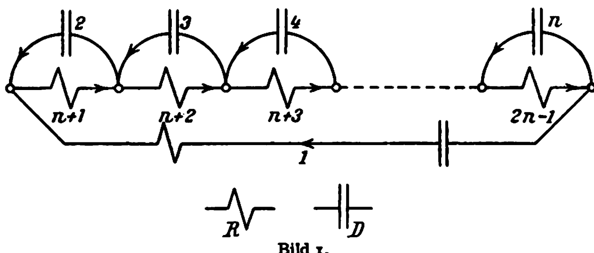


Bild 1.

Hier habe ich zur Veranschaulichung die Größen R_p, D_p, die hier das Verlangte leisten, durch Symbole gleich in die betreffenden Zweige eingezeichnet. Der erste geschlossene Kreis besteht aus den Zweigen 1, $n+1$, $n+2$, ..., $2n-1$, der zweite aus 2 und $n+1$ usw. Hier ist es so, daß immer sämtliche Zweige eines Kreises dieselbe Richtung wie dieser besitzen. Die Transformation der R- und D-Größen kann man aus der Figur ablesen:

$$\begin{array}{lll} R_{11} = R_1 + R_{n+1} + \cdots + R_{2n-1} & & D_{11} = D_1 \\ R_{12} = R_{22} = R_{n+1} & R_{ik} = 0 \begin{Bmatrix} i \neq k \\ i, k > 1 \end{Bmatrix} & D_{22} = D_2 \quad D_{ik} = 0 \quad (i \neq k) \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots & & \vdots \qquad \vdots \\ R_{1n} = R_{nn} = R_{2n-1} & & D_{nn} = D_n. \end{array}$$

Man sieht hier unmittelbar aus der Figur, warum auch R_1, das mit dem früher so bezeichneten übereinstimmt, ebenso wie die übrigen von Null verschiedenen R_p und D_p *positiv sein muß*. Die Zweige 1, $n+1$, $n+2, \ldots, 2n-1$ sind nämlich ebenfalls unabhängig, da bei ihrer Entfernung ein Baum übrig bleibt. Daher bilden die in $\sum_{p=1}^{s} R_p x_p'^2$ vorkommenden x_p' unabhängige Variable, so daß wegen der Voraussetzung des Positivdefinitseins auch $R_1 > 0$ sein muß. So wie sich demnach jede Funktion der Klasse B durch eine Anordnung von positiven Größen R_p und D_p in einem Liniensystem darstellen läßt, führt umgekehrt jede derartige Anordnung nach Auszeichnung eines Zweiges als ersten durch eine Transformation $x' \rightarrow x$ auf eine bestimmte Funktion der Klasse B.

Gewisse Liniensysteme, unter anderem auch das eben diskutierte, zeichnen sich dadurch aus, daß sich jede zugehörige Funktion F besonders einfach ohne Benutzung von Determinanten ermitteln läßt. Es sind dies Liniensysteme folgender Art: Entfernt man den ersten Zweig, so läßt sich der Rest dadurch zu einem einzigen Zweige vereinigen, daß man nacheinander immer zwei unmittelbar parallel liegende, d. h. in zwei Knotenpunkten aneinanderstoßende Zweige durch einen einzigen Zweig ersetzt und ebenso verfährt, wenn zwei Zweige in Reihe liegen, d. h. in *einem* Knotenpunkt zusammenstoßen, der für keinen weiteren Zweig Anfangs- oder Endpunkt ist. Es läßt sich aus den angeführten Eigenschaften der Liniensysteme leicht nachweisen, worauf ich aber verzichte, daß man dann den Wert der Funktion F durch folgende Berechnungsweise richtig erhält, aus der hervorgeht, daß die Richtungen der Zweige auf den F-Wert keinen Einfluß haben. Jedem Zweig wird zunächst der Wert $F_p = R_p + D_p\lambda^{-1}$ zuerteilt, einem Ersatzzweig von zwei parallel liegenden Zweigen p_1 und p_2 sodann der Wert $\frac{1}{\frac{1}{F_{p_1}} + \frac{1}{F_{p_2}}}$, einem Ersatzzweig von zwei in Reihe liegenden Zweigen der Wert $F_{p_1'} + F_{p_2'}$. Schließlich verfährt man mit dem ersten Zweig und dem einen nach der Umformung übriggebliebenen weiteren Zweig so wie mit zwei in Reihe liegenden Zweigen, d. h. man addiert die einzelnen F-Werte. Das Resultat liefert die zum Liniensystem gehörige Funktion unserer Klasse.

Dadurch wird man für den Fall der Klasse B auf *eine von den quadratischen Formen ganz unabhängige Erzeugung unserer Funktionen* geführt. Wir definieren ein mathematisches System in folgender Weise. Das System besteht aus der Menge aller Funktionen unserer Klasse B

mit den Verknüpfungsregeln: Addition zweier Funktionen oder Bildung des reziproken Wertes der Summe der reziproken Werte zweier Funktionen. Eigenschaften des Systems sind: Aus irgend zwei Elementen der Menge entsteht durch Anwendung einer Verknüpfungsregel wieder ein Element der Menge. Es gilt das Kommutationsgesetz. Das Assoziationsgesetz gilt nur bei Beschränkung auf eine der zwei Verknüpfungsregeln. Als weiteren Unterschied von einer Gruppe erwähne ich noch: Zu keinem Element des Systems existiert ein inverses. Alle Elemente lassen sich aus den positiven Zahlen (R) und aus diesen multipliziert mit λ^{-1} ($D\lambda^{-1}$) durch die Verknüpfungsregeln erzeugen. Das geometrische Symbol der ersten Verknüpfungsregel ist die Reihenanordnung zweier Zweige, das Symbol der zweiten Verknüpfungsregel die Parallelanordnung. Also z. B. in Bild 2:

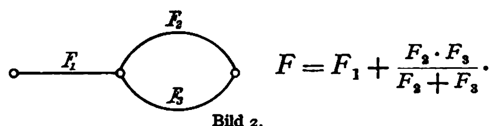


Bild 2.

Jetzt ist ohne weiteres einleuchtend, daß die Stieltjesschen Kettenbrüche in unserer Klasse B enthalten sind. Man hat nur abwechselnd ein R- und D-Element zu nehmen und die beiden Verknüpfungsregeln abwechselnd anzuwenden und erhält so z. B. die Anordnung Bild 3:

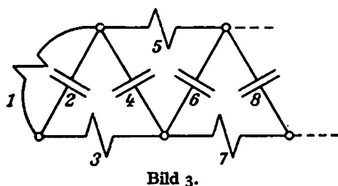


Bild 3.

und für F die Kettenbruchentwicklung

$$F = R_1 + \frac{1|}{\left|\frac{\lambda}{D_2}\right.} + \frac{1|}{|R_3} + \frac{1|}{\left|\frac{\lambda}{D_4}\right.} + \frac{1|}{|R_5} + \frac{1|}{\left|\frac{\lambda}{D_6}\right.} + \cdots,$$

für $R_1 = 0$ also einen Stieltjesschen Kettenbruch, d. h. einen Kettenbruch, deren Teilzähler alle 1 und dessen Teilnenner abwechselnd positive Vielfache von λ und reine positive Zahlen sind. Bricht man mit D_{2n} ab, so ergibt sich eine Anordnung von n Freiheitsgraden, in der sowohl alle n R wie alle n D enthaltenden Zweige unabhängig sind. *Entwickelt man daher eine beliebig gegebene Funktion der Klasse B in einen Kettenbruch* der angeschriebenen Art, *so müssen alle R und D positiv ausfallen,* da die definiten quadratischen Ausgangsformen in

$\sum\limits_{p=1,3,\ldots,2n-1} R_p x_p'^2$ und $\sum\limits_{p=2,4,\ldots,2n} D_p x_p'^2$ transformiert werden können und die x_p' unabhängige Variable sind. Damit ist gezeigt, daß alle Funktionen der Klasse B sich nur um eine positive additive Konstante von einem Stieltjesschen Kettenbruch unterscheiden, und eine weitere Normaldarstellung unserer Funktionen gewonnen. Auf unserem Wege haben wir eine geometrische Deutung der Partialbruchzerlegung und Kettenbruchentwicklung bekommen, welche die Beziehung: Stieltjesscher Kettenbruch $= \int\limits_0^\infty \frac{d\psi(x)}{\lambda + x}$, anschaulich beleuchtet. Der Satz, daß die Näherungsbrüche gerader und ungerader Ordnung des Stieltjesschen Kettenbruchs gegen verschiedene oder gleiche Grenzfunktionen konvergieren, je nachdem die Reihe

$$\frac{1}{D_2} + R_3 + \frac{1}{D_4} + R_5 + \cdots$$

konvergiert oder divergiert, läßt sich z. B. sehr gut anschaulich aus einer geeigneten Anordnung von Elementen R und D einem Liniensystem plausibel machen, was ich aber nicht weiter ausführen will.

Wir gehen nun zu den *allgemeineren Funktionen der Klasse A* über, bei denen die Form $\sum\limits_{i,k=1}^{n} L_{ik} x_i x_k \not\equiv 0$ ist. Solche Funktionen erhalten wir, indem wir die erzeugenden Elemente des geschilderten mathematischen Systems um alle positiven Zahlen L_p, multipliziert mit λ, vermehren. Aber, und das ist eine wesentliche Komplikation gegenüber der Klasse B, wir gewinnen so nicht alle Funktionen der Klasse A. Eine Transformation der anfangs erwähnten Gruppe ist schon durch die Reduzierung der R- und D-Formen auf eine Normalform festgelegt. Man kann im allgemeinen keine Transformation der Gruppe angeben, so daß nach der Transformation die Gleichungen

$$L_{ik} = \sum_{p=1}^{s} c_{pi} c_{pk} L_p, \quad R_{ik} = \sum_{p=1}^{s} c_{pi} c_{pk} R_p, \quad D_{ik} = \sum_{p=1}^{s} c_{pi} c_{pk} D_p$$

für ein geeignetes Liniensystem nicht negative Lösungen für L_p, R_p und D_p zugleich gestatten. Noch in anderer Hinsicht liegen die Verhältnisse ganz anders als bei der Klasse B. Im allgemeinen sind zwei verschiedene Darstellungen einer Funktion der Klasse A nicht mehr äquivalent in bezug auf Transformationen jener Gruppe, sondern nur dann, wenn außer den Koeffizientenverhältnissen der gebrochenen rationalen Funktion F noch gewisse weitere absolute Invarianten über-

einstimmen. — Zu den Funktionen der Klasse A gehören u. a. Funktionen der Form $F = F_1 \cdot \int\limits_0^\infty \frac{d\psi(x)}{\frac{F_1}{F_2} + x}$. Hierin ist $\psi(x)$ eine wachsende Funktion, F_1 und F_2 sind selbst Funktionen der Klasse A. Speziell kann z. B. F_1 nur R und D, F_2 nur L und D enthalten. Diese Funktionen bilden ein ähnliches mathematisches System, wie es bei der Klasse B betrachtet wurde, nur sind hier statt R und $D \cdot \lambda^{-1}$ als erzeugende Elemente μF_1 und νF_2 zu nehmen, wo μ und ν irgendwelche positiven Zahlen sind. — Es gilt der Satz, daß *mit jeder Funktion auch ihr reziproker Wert der Klasse A angehört.* Bei der Darstellung der reziproken Funktionen kommen dann singuläre Formen vor. Beschränkt man sich auf die Funktionen jenes mathematischen Systems, in welchem die $L_p\lambda$ als erzeugende Elemente hinzugenommen sind, so ist zum Beweis nichts weiter nötig, als jede Reihenanordnung durch eine Parallelanordnung und umgekehrt jede Parallelanordnung durch eine Reihenanordnung der reziproken Elemente zu ersetzen. Die neue Elementanordnung hat dann den reziproken F-Wert.

Eine Hauptfrage bei dem Studium unserer rationalen Funktionen ist die: Unter welchen Bedingungen, d. h. unter welchen Einschränkungen für Nullstellen und Pole gehört eine rationale Funktion zu unserer Klasse. Bei der Klasse B habe ich die Bedingungen schon genannt. Sie lassen sich in Form von Ungleichungen schreiben, die in den Koeffizienten der rationalen Funktion rational sind. Das ist bei der Klasse A im allgemeinen nicht mehr der Fall. Notwendige Bedingungen sind auch hier die sogenannten Hurwitzschen Bedingungen für Zähler und Nenner, welche besagen, daß alle Nullstellen und Pole einen negativ reellen Teil besitzen, eine aus der Mechanik der kleinen Schwingungen bekannte Tatsache. Eine weitere notwendige Bedingung, die daraus folgt, daß $\sum\limits_{i,k=1}^{n} R_{ik} x_i x_k$ als positiv definit vorausgesetzt wurde, ist $ReF(\lambda) > 0$[1]), wenn λ alle rein imaginären Werte durchläuft. Es läßt sich zeigen, z. B. mit Benutzung einer Bemerkung von Hurwitz, daß diese Bedingungen nicht unabhängig voneinander sind, sondern *aus den Hurwitzschen Bedingungen für den Zähler bzw. Nenner und der Bedingung* $ReF > 0$ *im wesentlichen die Hurwitzschen Bedingungen für den Nenner bzw. Zähler folgen. Ferner ergeben sich aus den genannten notwendigen Bedingungen im Grenzfall* $R_{ik} = 0$ *die notwendigen und hinreichenden Bedingungen* für die Zugehörigkeit einer

1) *Re* bedeutet: reeller Teil von ...

rationalen Funktion zu unserer Klasse.[1]) Daraus kann man überhaupt eine enge Beziehung zwischen diesen notwendigen und den notwendigen und hinreichenden Bedingungen vermuten.

Für die notwendigen und hinreichenden Bedingungen liegen die Verhältnisse nicht einfach genug, als daß es möglich wäre, in einem kurzen Vortrag näher darauf eingehen. Ich will daher zum Schluß nur noch ein *Resultat* für den einfachsten nicht trivialen Fall angeben, nämlich *für* $n = 2$. Diesen Fall zweier Freiheitsgrade hat schon der Amerikaner Foster untersucht, der seine Ergebnisse 1924 dem Mathematikerkongreß in Toronto vorgelegt hat.[2]) Ich habe in meiner Dissertation gezeigt, daß sich die Bedingungen kürzer und zweckmäßiger formulieren lassen, und will sie nun für den einfacheren Fall mitteilen, daß die Pole von F komplex sind. Der Ausdruck unserer Funktion für $n = 2$ wird von der Form

$$F = \frac{a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4}{b_1\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_3\lambda}.$$

Zur Abkürzung führen wir

$$V_1 = a_1 b_1 - a_0 b_2, \quad V_2 = a_2 b_2 - a_1 b_3 - a_3 b_1, \quad V_3 = a_3 b_3 - a_4 b_2$$

ein. Dann lauten die Bedingungen bei der die Allgemeinheit nicht einschränkenden Voraussetzung $a_0 > 0$:

(α) $$a_4 > 0, \quad b_1 > 0, \quad b_2 > 0,$$

(β) $$V_1 x_1^2 + V_2 x_1 x_2 + V_3 x_2^2$$

positiv definit. Der Zusammenhang mit der Bedingung $ReF > 0$ besteht darin, daß diese letztere Bedingung darauf hinauskommt, daß der Ausdruck (β) für alle *positiven* $x_1 : x_2$ positive Werte annimmt.

1) Vgl. hierzu Sitzungsber. d. Berl. Math. Ges. XXVII. Jahrg., S. 25: „Ein Satz über zwei zusammenhängende Hurwitzsche Polynome".

2) The Bell System Technical Journal 1924.

(Eingegangen am 6. 10. 27.)

Die Uniformisierung des arithmetisch-geometrischen Mittels.[1])

Von HARALD GEPPERT in Gießen.

Mit 4 Figuren im Text.

Der funktionentheoretische Aufbau der Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels ist Gegenstand neuerer Arbeiten der Herren L. von Dávid, L. Schlesinger und von mir gewesen[2]); den Kernpunkt dieses Aufbaues bildet die Uniformisierung des zum Mittel führenden Algorithmus durch die Nullwerte der Jacobischen Thetafunktionen und die daraus entspringende Einführung der elliptischen Modulfunktion. Es soll Aufgabe der folgenden Zeilen sein, diese Uniformisierungstheorie vom geometrischen Standpunkt aus zu beleuchten und ihr damit einen gewissen Abschluß zu geben. Ich benutze dabei zum Teil meine früheren Resultate in neuer Beweisanordnung und unter neuen Gesichtspunkten.

§ 1. Die Uniformisierung des Algorithmus.

Es seien a_0, b_0 zwei beliebige, von Null verschiedene und nicht entgegengesetzt gleiche komplexe Zahlen; wir betrachten den Algorithmus

$$(1) \quad a_\nu = \tfrac{1}{2}(a_{\nu-1} + b_{\nu-1}), \quad b_\nu = \sqrt{a_{\nu-1} b_{\nu-1}}, \quad c_\nu = \sqrt{a_\nu^2 - b_\nu^2}, \quad (\nu = 1, 2, \ldots);$$

er liefert als gemeinsamen Grenzwert der a_ν, b_ν das arithmetisch-geometrische Mittel (agM) von a_0, b_0:

$$\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = \lim_{\nu\to\infty} b_\nu = \mathfrak{M}(a_0, b_0); \quad \lim_{\nu\to\infty} c_\nu = 0.$$

Wegen der Doppeldeutigkeit der Quadratwurzel gibt es unendlich viele Algorithmen (1) und demnach i. a. unendlich viele Werte $\mathfrak{M}(a_0, b_0)$. Als *Normalalgorithmus* zeichnen wir den aus, für den

$$\Re\left(\frac{b_\nu}{a_{\nu-1}}\right) \geqq 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

ist, und der zum *„einfachsten Mittel"* $M(a_0, b_0)$ führt.

---

1) Vorgetragen auf der Jahresversammlung der D. M.-V. in Bad Kissingen am 22. September 1927.

2) Vgl. L. von Dávid, Journal f. reine u. angew. Mathem. 159 (1928), S. 154—170. L. Schlesinger, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 28 (1898). S. 346—360. H. Geppert, Math. Ann. 99 (1928), S. 162—180.

Durch die Nullwerte $\vartheta_{00}(0 \mid \omega)$, $\vartheta_{01}(0 \mid \omega)$ und $\vartheta_{10}(0 \mid \omega)$ der Jacobischen Thetafunktionen, die wir kurz mit $\vartheta_{00}(\omega)$, $\vartheta_{01}(\omega)$, $\vartheta_{10}(\omega)$ bezeichnen, wird der Algorithmus (1) uniformisiert, und zwar in folgender Weise: Zu jedem Wertepaar a_0, b_0 lassen sich unendlich-viele in der oberen Halbebene gelegene Werte ω bestimmen, die der Proportion

$$(2) \qquad a_0 : b_0 : c_0 = \vartheta_{00}(\omega)^2 : \vartheta_{01}(\omega)^2 : \vartheta_{10}(\omega)^2$$

genügen, und zwar hängen diese Werte ω durch die ganzzahligen Substitutionen der Kongruenzgruppe Γ^4 vierter Stufe

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod 4,$$
$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

miteinander zusammen. Aus (2) folgt dann allgemein

$$(3) \quad a_\nu = \mu(\omega)\,\vartheta_{00}(2^\nu\omega)^2, \quad b_\nu = \mu(\omega)\,\vartheta_{01}(2^\nu\omega)^2, \quad c_\nu = \mu(\omega)\,\vartheta_{10}(2^\nu\omega)^2,$$

wo der Proportionalitätsfaktor $\mu(\omega)$ gleich einem Werte des Mittels $\mathfrak{M}(a_0, b_0)$ ist.

Jedem der möglichen Algorithmen (1) entspricht eine uniformisierende Variable ω aus Γ^4. Bezüglich dieser Verknüpfung bieten sich nun folgende Fragestellungen dar:

1. Man kann ausgehen von der Gesamtheit der Algorithmen und fragen, wie zu einem bestimmt vorgegebenen Algorithmus seine uniformisierende Variable ω gefunden wird; der durch Γ^4 bestimmten Parzellierung der ω-Ebene muß dann eine Klassifikation der Algorithmen entsprechen.

2. Man kann ausgehen von der ω-Ebene und aus der besonderen Form der Uniformisierung, nämlich der schrittweisen Ersetzung von ω durch 2ω, den Algorithmus, also seine funktionentheoretische Deutung, gewinnen.

Die Klärung dieser Verhältnisse gibt uns einen tiefen Einblick in das Wesen der Verbindung von *agM* und Modulfunktion.

§ 2. Die Parzellierung der ω-Ebene.

Wegen der Homogeneität des Algorithmus (1) führen wir statt der a_ν, b_ν, c_ν die Variablen

$$k_\nu' = \frac{b_\nu}{a_\nu}, \quad k_\nu = \frac{c_\nu}{a_\nu}$$

ein, so daß
$$k_\nu'^2 + k_\nu^2 = 1$$

ist. Die Verbindung zwischen zwei aufeinander folgenden k_ν' lautet dann nach (1)

$$(4)\qquad k_\nu' = \frac{\pm 2\sqrt{k'_{\nu-1}}}{1+k'_{\nu-1}}, \quad k'_{\nu-1} = \left(\frac{1\pm\sqrt{1-k_\nu'^2}}{k_\nu'}\right)^2,$$

d. h. $k'_{\nu-1}$ und k_ν' sind durch die *in beiden quadratische* Relation

$$(5)\qquad k'^2_{\nu-1}k_\nu'^2 + 2k'_{\nu-1}k_\nu'^2 + k_\nu'^2 - 4k'_{\nu-1} = 0$$

miteinander verknüpft. In gleicher Weise finden wir aus (1) zunächst

$$k_\nu^2 = \left(\frac{1\pm\sqrt{1-k^2_{\nu-1}}}{k_{\nu-1}}\right)^4, \quad k^2_{\nu-1} = \frac{\pm 4k_\nu}{(1\pm k_\nu)^2},$$

d. h. die reduktible biquadratische Gleichung

$$k_\nu^4k^4_{\nu-1} - 2k_\nu^2k^4_{\nu-1} + 16k_\nu^2k^2_{\nu-1} + k^4_{\nu-1} - 16k_\nu^2$$
$$\equiv (k_\nu^2k^2_{\nu-1} + 2k_\nu k^2_{\nu-1} + k^2_{\nu-1} - 4k_\nu)$$
$$(k_\nu^2k^2_{\nu-1} - 2k_\nu k^2_{\nu-1} + k^2_{\nu-1} + 4k_\nu) = 0,$$

die zu jedem $k^2_{\nu-1}$ zwei Paare entgegengesetzt gleicher k_ν vermittelt. Das an sich für die Fortführung des Algorithmus gleichgültige Zeichen wird durch die Wahl der Uniformisierung (3) festgelegt und zwar in der Weise, daß

$$(6)\qquad k_\nu = \left(\frac{1\pm\sqrt{1-k^2_{\nu-1}}}{k_{\nu-1}}\right)^2, \quad k_{\nu-1} = \frac{\pm 2\sqrt{k_\nu}}{1+k_\nu}, \qquad \text{also}$$

$$(7)\qquad k_\nu^2k^2_{\nu-1} + 2k_\nu k^2_{\nu-1} + k^2_{\nu-1} - 4k_\nu = 0$$

wird. Die Iteration der Gleichungen (5) und (7) führt zu den Grenzwerten

$$\lim_{\nu\to\infty} k_\nu' = 1, \quad \lim_{\nu\to\infty} k_\nu = 0.$$

Mittels der Beziehungen (4) und (6) läßt sich der Algorithmus (1) auch nach rückwärts fortsetzen und zwar, wie man sieht, in der gleichen Mannigfaltigkeit von Arten wie nach vorwärts. Wir fassen im folgenden stets den Algorithmus als nach vorwärts und rückwärts laufend auf, d. h. geben dem ν in (3) positive und negative Werte.

Wir betrachten nun die durch die Gleichungen

$$k_0' = \left(\frac{\vartheta_{01}(\omega)}{\vartheta_{00}(\omega)}\right)^2, \quad k_0 = \left(\frac{\vartheta_{10}(\omega)}{\vartheta_{00}(\omega)}\right)^2$$

vermittelte Abbildung der k_0'- bzw. k_0-Ebene auf die obere ω-Halbebene. Letztere wird durch die Gruppe Γ^4 parzelliert, und zwar ist der Fundamentalbereich Φ dieser Gruppe das Kreisbogenzehneck mit den Ecken $0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \pm 2, \infty i$, das wir in die acht mit (43) ... (23)

bezeichneten Teile zerfällen (vgl. Fig. 1). Die Figur enthält die gesuchte Abbildung, indem von den Doppelzahlen die linksstehenden

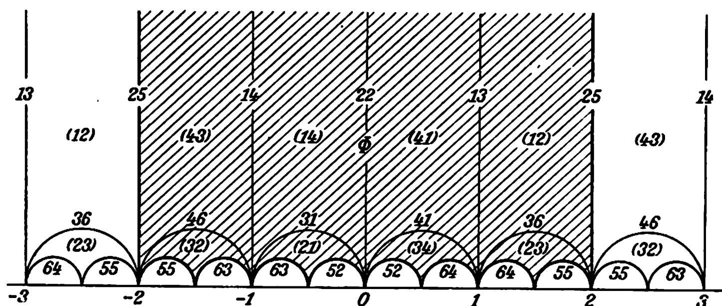


Fig. 1.

die entsprechenden Seiten bzw. Quadranten der k_0'-, die rechtsstehenden die der k_0-Ebene angeben (Fig. 2). Durch Ausführung der Operationen von Γ^4 auf Φ wird die obere ω-Halbebene ausgeschöpft und wegen der Invarianz von k_0', k_0, d. h. der Proportion (2) gegenüber Γ^4 überträgt sich hierbei die in Φ bestehende Abbildung auf die äquivalenten Bereiche.

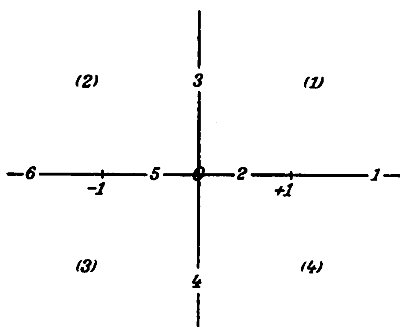


Fig. 2.

Die Gruppe der projektiven ganzzahligen Substitutionen, deren Untergruppe Γ^4 ist, hat die zwei erzeugenden Substitutionen: $\omega' = \omega + 1$, $\omega' = \frac{-1}{\omega}$; man ersieht aus der Figur, daß das Auftreten dieser *zwei* Erzeugenden bedingt ist durch das Vorhandensein der *zwei* Verzweigungspunkte $k_0' = \pm 1$ bzw. $k_0 = \pm 1$. Einem Umlauf um $k_0 = 0$, d. h. um die Verzweigungspunkte $k_0' = \pm 1$ entspricht nämlich in der ω-Ebene der Übergang (41) → (12) → (43) → (14) → . . . bzw. (21) → (32) → (23) → (34) → . . ., d. h. die Anwendung der Substitution $\omega' = \omega \pm 1$; die durchlaufenen Quadranten der k_0-Ebene werden dabei längs der Seiten 2, 3, 5, 4 verbunden, d. h. wir erhalten durch Ausführung der genannten Substitution die von ∞ nach -1 und $+1$ geschlitzte k_0-Ebene und die rechte bzw. linke k_0'-Halbebene. In gleicher Weise gibt ein Umlauf um $k_0' = 0$, d. h. um die Verzweigungspunkte $k_0 = \pm 1$, in der ω-Ebene den Zyklus (14) → (21) → (34) → (41) bzw. (12) → (23) → (32) → (43), der im wesentlichen durch die Substitution $\omega' = -\frac{1}{\omega}$ hervorgerufen wird, und dem wieder

die von ∞ nach ± 1 geschlitzte k_0'-Ebene und die rechte bzw. linke k_0-Halbebene entspricht.

Nunmehr wenden wir uns der ersten der oben gestellten Fragen zu, indem wir zu jedem vorgelegten Algorithmus seine uniformisierende Variable ω suchen. Dazu werden wir die Algorithmen (1) klassifizieren, indem wir als Normalalgorithmus den des einfachsten Mittels zugrunde legen, für den

$$\Re(k_\nu') \geqq 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{8}$$

ist; die Algorithmen zerfallen zunächst in *reguläre*, d. h. solche, für die (8) von einem gewissen Index ν an immer erfüllt ist, und *irreguläre*, für die dies nicht der Fall ist. Letztere ergeben als Grenzwert immer die Null und werden, wie sich gleich zeigen wird, von unserer Uniformisierung durch die ϑ-Funktionen *nicht* erfaßt. Die regulären Algorithmen teilen wir nach *Stufen* ein, indem wir als Algorithmus $n$ter Stufe einen solchen bezeichnen, für den

$$\Re(k_n') < 0, \quad \Re(k_\nu') \geqq 0 \quad (\nu = n+1, n+2, \ldots$$

ist; demgemäß gehört das einfachste Mittel $M(a_0, b_0)$ zu den Algorithmen von höchstens nullter Stufe.

Wir bemerken ferner, daß der Ausführung eines Schrittes im Algorithmus gemäß (3) der Übergang von ω zu 2ω entspricht. Daher zeigt sich, daß, wenn ω im Fundamentalbereich Φ und den um das Vierfache ganzer Zahlen verschobenen Bereichen liegt, die Gleichungen (3) den Algorithmus des einfachsten Mittels ergeben, indem dann 2ω, $4\omega, \ldots$ in den oberen Teil $(43) + (14) + (41) + (12) + \ldots$ zu liegen kommen, in dem $\Re(k_\nu') \geqq 0$ gilt. Umgekehrt muß auch jedes ω, das durch (3) einen Algorithmus des einfachsten Mittels gibt, im Bereiche $\Phi + 4n = E$ liegen, da es für jedes andere ω der oberen Halbebene notwendig eine Potenz λ gibt, so daß $2^\lambda\omega$ nach dem unteren Teil von Φ, d. h. $(32) + (21) + (34) + (23) + 4n$ fällt, also (8) an der λten Stelle durchbrochen wird. Wir haben somit das Recht, den Bereich $\Phi + 4n = E$ als den *Bereich des einfachsten Mittels* zu bezeichnen. Jedem vorgelegten Wertetripel a_0, b_0, c_0 entspricht bei den üblichen Voraussetzungen über die Berandung bis auf belanglose Vierfache ganzer Zahlen *ein und nur ein* ω aus F, das dann vermittels (3) den zugehörigen Normalalgorithmus gibt.

Zu jedem gegebenen Wertetripel a_0, b_0, c_0 gibt es $2^{\nu-1}$ verschiedene Algorithmen ν-ter Stufe, indem bei den ersten $\nu - 1$ Schritten das Vorzeichen der Wurzel beliebig gewählt werden kann. Bezeichnen wir den Bereich der Algorithmen ν-ter Stufe, d. h. denjenigen, in den ω

zu liegen kommt, wenn (3) einen Algorithmus ν-ter Stufe abgeben soll, mit E^ν, so wird also E^ν gebildet aus allen Kreisbogendreiecken mit den Ecken $\frac{n}{2^\nu}$, $\frac{2n+1}{2^{\nu+1}}$, $\frac{n+1}{2^\nu}$ (Fig. 3); umgekehrt gibt es zu *jedem* der

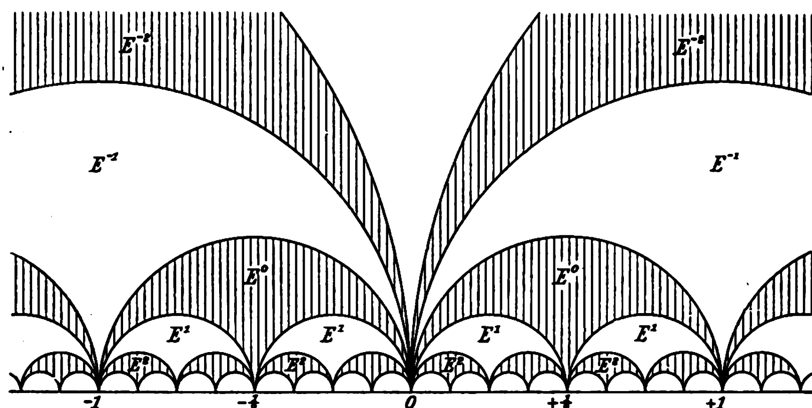


Fig. 3.

$2^{\nu-1}$ Algorithmen ν-ter Stufe ein und nur ein ihn darstellendes ω aus E^ν, wie man sofort einsieht, da der Bereich E^ν bei positivem ν vermöge der Substitutionen

$$\omega' = \frac{\omega\left(1 - 4n + 16n^2 - \cdots + (-1)^{\frac{\nu+1}{2}} 4^{\frac{\nu+1}{2}} n^{\frac{\nu+1}{2}}\right) \pm (-1)^{\frac{\nu+1}{2}} 4n^{\frac{\nu+3}{2}}}{\pm 4^{\frac{\nu+1}{2}}\omega + (4n+1)} + \text{ganze Zahl},$$

bzw.

$$\omega' = \frac{\omega\left(1 - 4n + 16n^2 - \cdots + (-1)^{\frac{\nu+2}{2}} 4^{\frac{\nu+2}{2}} n^{\frac{\nu+2}{2}}\right) \pm (-1)^{\frac{\nu}{2}} 8n^{\frac{\nu+4}{2}}}{\mp 4^{\frac{\nu+1}{2}}\omega + (4n+1)} + \text{ganze Zahl}$$

bei ungeradem bzw. geradem ν dem darüberliegenden Bereich $E + E^1 + E^2 + \cdots + E^{\nu-1}$ äquivalent ist, also sich auf die $2^{\nu-1}$-fache k_0'- bzw. k_0-Ebene abbildet. Von E^ν ($\nu > 0$) braucht natürlich jeweils nur der unterhalb Φ gelegene Teil ins Auge gefaßt zu werden.

Damit ist jeder reguläre Algorithmus in der ω-Ebene lokalisiert, und man sieht aus der Figur, daß es für jedes ω der oberen Halbebene (soweit es nicht auf der singulären reellen Achse liegt) einen Index ν gibt, so daß $2^{\nu+1}\omega$, $2^{\nu+2}\omega$, ... nach E fallen, d. h. also *daß durch unsere Uniformisierung nur die regulären Algorithmen erfaßt werden können.*

Mit dieser Lokalisierung der Algorithmen ist prinzipiell auch die Aufgabe gelöst, zu einem vorgegebenen Algorithmus sein ω zu finden.

Ein Beispiel wird genügen, um die hierbei waltenden Verhältnisse klarzulegen. Es sei ein Algorithmus A zweiter Stufe zu uniformisieren, der nach nebenstehendem Schema verlaufe.

	a_0, b_0, c_0	
1.	a_1, b_1, c_1	$\Re(k_1') > 0$
2.	a_2, b_2, c_2	$\Re(k_2') < 0$
3.	a_3, b_3, c_3	$\Re(k_3') > 0$
4.	. . . . . .	. . . . > 0

Es sei ω die zu suchende uniformisierende Variable des Gesamtalgorithmus A. Ich bemerke zunächst, daß — wie wir unten zeigen werden — zu jedem Normalalgorithmus sich sofort seine uniformisierende Variable ermitteln läßt. Da A vom 2. Schritt ab Normalalgorithmus ist, läßt sich hiernach ein in E^0 gelegenes ω_0 finden, derart, daß

$$a_2 : b_2 : c_2 = \vartheta_{00}(\omega_0)^2 : \vartheta_{01}(\omega_0)^2 : \vartheta_{10}(\omega_0)^2$$

ist, und es muß offenbar

$$4\omega = \omega_0 + 4m, \quad \omega = \frac{\omega_0}{4} + m \qquad (m = \text{ganze Zahl})$$

sein. Diese Gleichung vermittelt *vier* unterhalb Φ in E^2 gelegene Werte von ω, was selbstverständlich ist, da man zu den Elementen a_2, b_2, c_2 durch rückwärtige Fortsetzung *vier* Tripel von Ausgangselementen erhält, die möglichen Algorithmen lauten nämlich

$\frac{\omega_0}{4}$	$\frac{\omega_0}{4} + 1$	$\frac{\omega_0}{4} + 2$	$\frac{\omega_0}{4} + 3$
a_0, b_0, c_0	$b_0, a_0, i c_0$	$a_0, b_0, -c_0$	$b_0, a_0, -i c_0$
a_1, b_1, c_1	$a_1, b_1, -c_1$	a_1, b_1, c_1	$a_1, b_1, -c_1$
a_2, b_2, c_2	a_2, b_2, c_2	a_2, b_2, c_2	a_2, b_2, c_2

Nur *einer* der vier Werte $\frac{\omega_0}{4} + m$ liefert also die gegebenen Ausgangselemente und ist mit dem gesuchten ω identisch. Man kann diese Auswahl auch folgendermaßen erreichen: Es sei $\bar{\omega}$ die zum *Normal*algorithmus mit den Elementen a_0, b_0, c_0 gehörende uniformisierende Variable, dann ist $\bar{\omega}$ äquivalent ω und von den Werten $\frac{\omega_0}{4} + m$ ist also derjenige gleich ω, der bezüglich Γ^4 äquivalent zu $\bar{\omega}$ ist.[1])

§ 3. Die Deutung des Algorithmus.

Wir wenden uns nun der zweiten der eingangs gestellten Fragen zu, welche funktionentheoretische Deutung die besondere Art der Uni-

1) Vgl. zu dieser Frage auch: L. von Dávid. Math.-naturw. Berichte aus Ungarn, 27 (1909), S. 167ff.

formisierung, nämlich das schrittweise Ersetzen von ω durch 2ω, im Algorithmus zuläßt.

Dem Übergang $\omega \to 2\omega$ entspricht ein Übergang $k_{\nu-1} \to k_\nu$, und offenbar muß die $k_{\nu-1}$ und k_ν verknüpfende Relation bei jedem Schritt, d. h. für jedes ν, die gleiche sein. Um diese Relation zu gewinnen, genügt es — da wir nur reguläre Algorithmen betrachten, die von einer gewissen Stelle ab dem Algorithmus des einfachsten Mittels genügen — das ω als im Fundamentalbereich Φ gelegen, anzunehmen. Wenden wir auf Φ die Transformation $\omega \to 2\omega$ an, so geht der Bereich Φ_1 hervor, der aus den Dreiecken (41), (12), (43), (14), (41), (12), (43), (14) besteht und sich von -4 bis $+4$ erstreckt (Fig. 4). Dem Bereich Φ entspricht zweimal die volle k_0'- sowie k_0-Ebene, dem Bereiche Φ_1 hingegen viermal die rechte k_1'-, bzw. zweimal die volle k_1-Ebene.

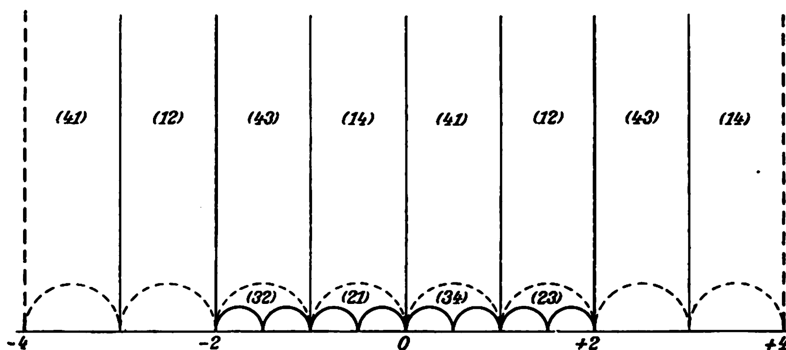


Fig. 4.

Wir untersuchen zunächst die Beziehung zwischen k_0' und k_1'. Gemäß der Figur entspricht einem Werte von k_0' zweimal ein- und derselbe Wert von k_1', der in der rechten Halbebene liegt, aber umgekehrt entsprechen einem Werte von k_1' aus der rechten Halbebene zweimal zwei verschiedene Werte von k_0'. Man bemerkt sofort, daß die Beziehung zwischen Φ und Φ_1 links und rechts von ihrer Symmetrielinie 22 die gleiche ist, denn man kann die Verdoppelung von ω auf der linken Hälfte von Φ auch dadurch herbeiführen, daß man diese Hälfte um -2 über die Strecke $-4 \ldots -2$ herüberschiebt und die Vektoren von -4 aus verdoppelt, wodurch dann genau dieselbe, nur um 4ω verschobene, also äquivalente Figur entsteht wie auf der rechten Hälfte. Es reicht daher hin, wenn wir nur einen Halbbereich von Φ bzw. Φ_1 ins Auge fassen. Es entspricht dann einem Werte von k_0' ein und nur ein Wert von k_1' in der rechten Halbebene, und zwar entspricht die volle k_0'-Ebene der doppelten $k_1'^2$-Vollebene; einem Werte von $k_1'^2$ korrespondieren zwei verschiedene Werte von k_0'. Man sieht also, daß

$k_1'^2$ eine eindeutige Funktion von k_0' sein, k_0' aber durch eine quadratische Relation mit $k_1'^2$ verbunden sein muß, d.h. zwischen k_0' und k_1' besteht eine binär-quadratische Beziehung der Form

$$k_0'^2 k_1'^2 + \alpha k_0' k_1'^2 + \beta k_0'^2 + \gamma k_1'^2 + \delta k_0' + \varepsilon = 0.$$

Die Koeffizienten sind ebenfalls aus der Figur sehr leicht zu bestimmen, es entspricht nämlich die Ecke

$$0, \quad \pm \tfrac{1}{2}, \quad \pm 1, \quad \infty i$$

der Ecke $\quad 0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, \quad \infty i,$ d. h. dem Werte

$$k_0' = 0, \quad -1, \quad -1, \quad \infty, \quad \infty, \quad +1$$

der Wert $\quad k_1' = 0, \quad \infty, \quad \infty, \quad 0, \quad 0, \quad +1;$

wir finden somit sukzessive $\quad \varepsilon = 0,$

$$k_0'^2 + \alpha k_0' + \gamma \equiv (k_0' + 1)^2, \quad \alpha = 2, \quad \gamma = 1,$$

$$\beta = 0,$$

$$1 + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 0, \quad \delta = -4,$$

also die Relation

$$k_0'^2 k_1'^2 + 2 k_0' k_1'^2 + k_1'^2 - 4 k_0' = 0,$$

d. i. aber die Gleichung (5), die für den Algorithmus des *agM* gilt.

Eine entsprechende Überlegung gilt bezüglich der Verbindung von k_0 und k_1. Wiederum entnimmt man der Figur folgendes: Einem Werte von k_0 entsprechen zwei verschiedene Werte von k_1, z. B. gehen der erste und vierte Quadrant der k_0-Ebene sowohl in den 1. + 2., als auch in den 3. + 4. Quadranten der k_1-Ebene über. Umgekehrt korrespondieren einem Werte von k_1 stets zwei verschiedene Werte von k_0, z. B. einem Werte von k_1 aus dem 1. + 2. Quadranten ein Wert von k_0 sowohl aus dem 1. + 4., als auch aus dem 2. + 3. Quadranten; diese beiden Werte von k_0 sind aber entgegengesetzt gleich, d. h. einem k_1 entspricht nur *ein* k_0^2, denn einem k_1 entspricht nur ein k_0', also nur ein $k_0'^2$, also nur ein k_0^2. Daß einem Werte von k_1 nur ein k_0' korrespondiert, erkennt man sofort aus der Figur, da wir wiederum nur je einen Halbbereich ins Auge zu fassen brauchen. Es ist mithin k_0^2 eine eindeutige Funktion von k_1, andererseits k_1 mit k_0^2 durch eine quadratische Relation verbunden, d. h. es besteht eine Beziehung der Form

$$k_0^2 k_1^2 + \alpha' k_0^2 k_1 + \beta' k_0^2 + \gamma' k_1^2 + \delta' k_1 + \varepsilon' = 0.$$

Aus dem Entsprechen der gleichen Ecken wie oben entnehmen wir die Tabelle

$$k_0 = 1,\quad 0,\quad 0,\quad \infty,\quad \infty,\quad 0;$$
$$k_1 = 1,\quad \infty,\quad \infty,\quad -1,\quad -1,\quad 0,$$

woraus man folgert, daß $\varepsilon' = 0,$

$$k_1^2 + \alpha' k_1 + \beta' \equiv (k_1 + 1)^2, \quad \alpha' = 2, \quad \beta' = 1,$$
$$\gamma' = 0,$$
$$1 + \alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' + \varepsilon' = 0, \quad \delta' = -4,$$

somit

$$k_0^2 k_1^2 + 2k_0^2 k_1 + k_0^2 - 4k_1 = 0$$

wird, und dies ist in der Tat die Relation (7).

Damit ist es uns also gelungen, aus der funktionentheoretischen Deutung des Schrittes $\omega \to 2\omega$ den Algorithmus des *agM* herauszukristallisieren. Man erkennt übrigens, daß durch sukzessive Ausführung des Verfahrens die uniformisierende Variable der Ecke ∞i zustrebt, d. h.

$$\lim_{\nu \to \infty} k_\nu' = 1, \quad \lim_{\nu \to \infty} k_\nu = 0 \quad \text{wird.}$$

Es erübrigt noch ein Wort darüber zu sagen, wie man zu gegebenen Anfangselementen a_0, b_0, c_0 die uniformisierende Variable des Normalalgorithmus findet. Ist nicht gleichzeitig $\Re(k_0) < 0$ und $\Re(k_0') < 0$, so ist diese gegeben durch

(9)
$$\omega = i\,\frac{M(a_0, b_0)}{M(a_0, c_0)} = i\,\frac{M(1, k_0')}{M(1, k_0)};$$

im erwähnten Ausnahmefall hingegen berechnet man ω erst nach (9) für das entgegengesetzte Zeichen von k_0 und addiert dann 2 hinzu. Jedenfalls ist beachtenswert, daß ω in jedem Falle als Grenzfunktion eines algebraischen Algorithmus dargestellt werden kann, nämlich

$$\omega = \lim_{n \to \infty} \frac{2^n a_n i}{a_{-n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^n a_n i}{c_{-n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^n b_n i}{a_{-n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^n b_n i}{c_{-n}}.$$

Auch an diesem Ausdruck kann man die Tatsache ablesen, daß einem Schritt des Algorithmus der Übergang von ω in 2ω entspricht, denn nach Ausführung des ersten Schrittes ist die uniformisierende Variable

$$\omega' = \lim_{n \to \infty} \frac{2^n a_{n+1} i}{a_{-n+1}} = 2 \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{2^{n-1} a_{n-1} i}{a_{-(n-1)}} \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_{n-1}} = 2\omega$$

geworden.

(Eingegangen am 1. 10. 1927.)

Eine Bemerkung über geodätische Kegelschnitte auf Flächen allgemeiner Metrik.

Von Gerhard Grüss in Berlin.

Mit 1 Figur im Text.

1. Auf Flächen mit Riemannscher Metrik heißen Kurven geodätische Kegelschnitte, wenn ihre Punkte von zwei festen Punkten geodätische Abstände besitzen, deren Summe (geod. Ellipsen) oder Differenz (geod. Hyperbeln) konstant ist. Allgemeiner können noch die gegebenen Punkte durch feste Kurven ersetzt werden. Diese geodätischen Kegelschnitte haben folgende Eigenschaften[1]): Sie schließen mit den geodätischen Normalen (bzw. Linien) von einem ihrer Punkte nach den gegebenen Kurven (bzw. Punkten) gleiche Winkel ein und bilden ein Orthogonalsystem. Dabei ist stillschweigend vorausgesetzt, daß man die Betrachtungen auf einen Bereich beschränkt, in dem die geodätischen Entfernungen eines Punktes von einem Punkte bzw. einer Kurve eindeutig konstruiert werden können.

Vom Standpunkte der Differentialgeometrie allgemein-metrischer Räume, wie sie von Finsler[2]) und in neuerer Zeit von Berwald[3]) entwickelt wurde, entsteht die Frage, ob bei entsprechender Definition der Kegelschnitte die obengenannten Sätze ihre Gültigkeit behalten. Dies soll, was die Finslersche Theorie betrifft, im folgenden untersucht werden.

Die Fläche sei auf das Netz der Parameterlinien $u =$ konst. und $v =$ konst. bezogen, und die Bogenlänge s einer Flächenkurve $u = u(t)$, $v = v(t)$ werde durch das Grundintegral eines einfachsten regulären definiten Variationsproblems gemessen:

$$f(u, v, u', v') > 0, \qquad s = \int_{t_0}^{t_1} f(u, v, u', v')\, dt \qquad \left(u' = \frac{du}{dt}, \quad v' = \frac{dv}{dt}\right),$$

so daß den Kurven ein Richtungssinn zuerteilt werden kann. Die

1) U. Dini, Annali di matematica 3, 1869, S. 269. Bianchi-Lukat, Vorles. über Differentialgeometrie S. 163. G. Darboux, Théorie des surfaces, Vol. II, p. 418 u. Vol. III, p. 16.

2) P. Finsler, Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen, Inaug.-Diss. Göttingen 1918.

3) L. Berwald, Über zweidimensionale allgemeine metrische Räume, Crelles Journal Bd. 156, Heft 3 u. 4.

„Maßbestimmung" $f(u, v, u', v')$ soll die üblichen Voraussetzungen erfüllen:

Existenz für alle u, v eines gewissen Bereiches und alle u', v' mit Ausnahme von $u' = 0$, $v' = 0$.

Positive Homogenität erster Ordnung in bezug auf u', v'.

Existenz und Stetigkeit der Ableitungen nach allen Variabeln bis zu einer genügend hohen Ordnung.

Die geodätischen Linien auf der Fläche sind die Extremalen des Variationsproblems $\delta s = 0$. Der geodätische Abstand zweier Punkte ist die Bogenlänge s des die Punkte verbindenden Extremalenbogens; der geodätische Abstand eines Punktes von einer Kurve ist die Bogenlänge s des Extremalenbogens, der von dem Punkt ausgeht und transversal in die Kurve mündet, d. h. so, daß die Tangente der Kurve im Schnittpunkt die zu der Extremalen transversale Richtung hat. Damit ein Punkt P einen eindeutigen geodätischen Abstand von einem zweiten Punkt P_0 bzw. einer Kurve C hat, ist notwendig und hinreichend, daß P in einem uneigentlichen Feld von Extremalen um den Punkt P_0 bzw. in einem eigentlichen Feld von Extremalen liegt, die von der Kurve C transversal geschnitten werden. Um also von geodätischen Ellipsen und Hyperbeln im Sinne der Metrik f sprechen zu können, müssen die Betrachtungen auf einen Bereich $B(u, v)$ beschränkt werden, der für beide Punkte (bzw. Kurven) ein Feld von Extremalen ist. Dies wird im folgenden stets vorausgesetzt.

Den Winkel ω, unter dem sich die Kurven $C_1 = (u_1(t), v_1(t))$ und $C_2(u_2(\tau), v_2(\tau))$ schneiden, definiert Finsler folgendermaßen: es ist

$$\cos\omega = \lim_{s_2 \to 0} \frac{s_1}{s_2},$$

worin s_2 eine auf der Kurve C_2 vom Schnittpunkte mit C_1 aus abgetragene Bogenlänge bedeutet und s_1 die Projektion von s_2 auf C_1 durch eine zu C_1 transversale Kurve; ferner ist $|\omega|$ möglichst klein, sign ω beliebig. Außer bei $\omega = 0$ ist nur im Sinne Riemannscher Metrik ω von der Reihenfolge der Schenkel unabhängig[1]), im allgemeinen muß man den von der Kurve C_1 zur Kurve C_2 gemessenen Winkel $\overset{\frown}{C_1 C_2}$ von dem im entgegengesetzten Sinne gemessenen Winkel $\overset{\frown}{C_2 C_1}$ unterscheiden; es ist

$$\cos \overset{\frown}{C_1 C_2} = \lim_{s_1 \to 0} \frac{s_2}{s_1} = \frac{u_1' f_{u'}(u_2, v_2, u_2', v_2') + v_1' f_{v'}(u_2, v_2, u_2', v_2')}{f(u_1, v_1, u_1', v_1')},$$

$$\cos \overset{\frown}{C_2 C_1} = \lim_{s_2 \to 0} \frac{\bar{s}_1}{\bar{s}_2} = \frac{u_2' f_{u'}(u_1, v_1, u_1', v_1') + v_2' f_{v'}(u_1, v_1, u_1', v_1')}{f(u_2, v_2, u_2', v_2')}.$$

1) Finsler, l. c. S. 38ff.

Also ist $\widehat{C_1 C_2} = \frac{\pi}{2}$, wenn die Richtung von C_1 transversal ist zur Richtung von C_2, und umgekehrt.

2. Gegeben seien zwei Punkte $P_1(u_1^0, v_1^0)$ und $P_2(u_2^0, v_2^0)$.

(1) $$u = u_1(s_1, a_1), \quad v = v_1(s_1, a_1)$$

sei die Gleichung der ∞^1 Extremalen durch P_1, a_1 sei der die einzelne Extremale kennzeichnende Parameter, s_1, der Parameter auf jeder Kurve, bedeute die von P_1 aus gemessene Bogenlänge $\int f dt$.

(2) $$u = u_2(s_2, a_2), \quad v = v_2(s_2, a_2)$$

sei entsprechend die Gleichung der ∞^1 Extremalen durch P_2. In dem Bereich $B(u, v)$, der den Feldern um P_1 und P_2 zugleich angehört, lassen sich die Gleichungen (1) und (2) nach den „geodätischen Polarkoordinaten" s_1, a_1, s_2, a_2 auflösen;

(1') $$s_1 = s_1(u, v), \quad a_1 = a_1(u, v),$$

(2') $$s_2 = s_2(u, v), \quad a_2 = a_2(u, v).$$

Der Ort der Punkte u, v in $B(u, v)$, für die

(3) $$s_1(u, v) \pm s_2(u, v) = p = \text{konst.}$$

ist, heißt geodätischer Kegelschnitt; Ellipse, wenn das $+$-Zeichen gilt, Hyperbel, wenn das $-$-Zeichen gilt.

Satz I. *In jedem Punkt eines geodätischen Kegelschnittes sind die cosinus der von dem Kegelschnitt zu den Extremalen durch P_1 und P_2 gemessenen Winkel absolut gleich; ist der Kegelschnitt eine Ellipse, dann sind sie entgegengesetzt gleich, ist er eine Hyperbel, dann haben sie auch gleiche Vorzeichen.* Dabei sind die Extremalen so orientiert gedacht, daß sie positiv im Sinne wachsender Bogenlängen (von P_1, P_2 an gemessen) durchlaufen werden. Der Inhalt des Satzes läßt sich auch als *Reflexionsgesetz* aussprechen: Ein von dem einen „Brennpunkt" P_1 ausgesandter Lichtstrahl wird an dem Kegelschnitt so reflektiert, daß der ausfallende und der einfallende Strahl gleiche Winkel mit dem Kegelschnitt einschließen. Also trifft der an der Ellipse reflektierte Strahl den zweiten „Brennpunkt" P_2, denn da die Ellipse mit den geodätischen Linien nach P_1 und P_2 Winkel einschließt, deren cosinus entgegengesetzt gleich sind, durchläuft der reflektierte Lichtstrahl die geodätische Linie PP_2 im Sinne abnehmender Bogenlänge, also nach P_2 hin. Dagegen trifft ein an der Hyperbel reflektierter Strahl den Punkt P_2 nicht, wohl aber die rückwärtige Verlängerung des reflektierten Strahles.

Beweis. Durch den Punkt $P(u, v)$ des Kegelschnittes K

(3) $$s_1(u, v) \pm s_2(u, v) = \text{konst.}$$

mögen die durch die Parameterwerte a_1^0 und a_2^0 charakterisierten geodätischen Linien

(1) $$u = u_1(s_1, a_1^0), \quad v = v_1(s_1, a_1^0)$$ und

(2) $$u = u_2(s_2, a_2^0), \quad v = v_2(s_2, a_2^0)$$

der Extremalenfelder um P_1 und P_2 gehen. Dann gilt der obigen Verabredung zufolge für die cosinus der von dem Kegelschnitt K zu den geodätischen Linien gemessene Winkel

(4) $$\cos \widehat{K a_1^0} = \frac{du\, f_{u'}\left(u_1, v_1, \frac{\partial u_1}{\partial s_1}, \frac{\partial v_1}{\partial s_1}\right) + dv\, f_{v'}\left(u_1, v_1, \frac{\partial u_1}{\partial s_1}, \frac{\partial v_1}{\partial s_1}\right)}{f(u, v, du, dv)}$$ und

(5) $$\cos \widehat{K a_2^0} = \frac{du\, f_{u'}\left(u_2, v_2, \frac{\partial u_2}{\partial s_2}, \frac{\partial v_2}{\partial s_2}\right) + dv\, f_{v'}\left(u_2, v_2, \frac{\partial u_2}{\partial s_2}, \frac{\partial v_2}{\partial s_2}\right)}{f(u, v, du, dv)},$$

wobei du, dv der Differentialgleichung

(6) $$du\left(\frac{\partial s_1}{\partial u} \pm \frac{\partial s_2}{\partial u}\right) + dv\left(\frac{\partial s_1}{\partial v} \pm \frac{\partial s_2}{\partial v}\right) = 0$$

genügen. Aus

(7) $$\begin{cases} s_1 = \int_{(P_1)}^{(P)} f(u_1, v_1, u_1', v_1')\, ds_1 \\ \qquad = \int_{(P_1)}^{(P)} \left(f_{u'}(u_1, v_1, u_1', v_1')\, du + f_{v'}(u_1, v_1, u_1', v_1')\, dv\right) \\ s_2 = \int_{(P_2)}^{(P)} f(u_2, v_2, u_2', v_2')\, ds_2 \\ \qquad = \int_{(P_2)}^{(P)} \left(f_{u'}(u_2, v_2, u_2', v_2')\, du + f_{v'}(u_2, v_2, u_2', v_2')\, dv\right) \end{cases}$$

folgt

(8) $$\begin{cases} \frac{\partial s_1}{\partial u} = f_{u'}(u_1, v_1, u_1', v_1'), \quad \frac{\partial s_1}{\partial v} = f_{v'}(u_1, v_1, u_1', v_1') \\ \frac{\partial s_2}{\partial u} = f_{u'}(u_2, v_2, u_2', v_2'), \quad \frac{\partial s_2}{\partial v} = f_{v'}(u_2, v_2, u_2', v_2'). \end{cases}$$

Damit geht Gl. (6) über in

(9) $$du\{f_{u'}(u_1, v_1, u_1', v_1') \pm f_{u'}(u_2, v_2, u_2', v_2')\} \\ + dv\{f_{v'}(u_1, v_1, u_1', v_1') \pm f_{v'}(u_2, v_2, u_2', v_2')\} = 0$$

oder

(10) $$\{f_{u'}(u_1, v_1, u_1', v_1')\,du + f_{v'}(u_1, v_1, u_1', v_1')\,dv\} \pm \{f_{u'}(u_2, v_2, u_2', v_2')\,du + f_{v'}(u_2, v_2, u_2', v_2')\,dv\} = 0,$$

wobei für die Ellipsen das +-Zeichen, für die Hyperbeln das —-Zeichen gilt. Aus Gl. (4) und (5) folgt, daß die linke Seite von Gl. (10) gleich

$$f(u, v, du, dv)\,\{\cos \widehat{K a_1^0} \pm \cos \widehat{K a_2^0}\}$$

ist, und da $f(u, v, du, dv) \neq 0$ ist, ergibt sich für geodätische Ellipsen E

$$\cos \widehat{E a_1^0} + \cos \widehat{E a_2^0} = 0,$$

für geodätische Hyperbeln H

$$\cos \widehat{H a_1^0} - \cos \widehat{H a_2^0} = 0,$$

womit der Satz bewiesen ist.

3. Der Satz läßt sich wörtlich auf den Fall übertragen, in dem der Kegelschnitt als Ort aller Punkte (u, v) definiert wird, für die die Summe oder Differenz der geodätischen Abstände von zwei gegebenen *Kurven* konstant ist. Man muß sich hier auf einen Bereich beschränken, der ein Feld von ∞^1 Extremalen ist, die sämtlich von der ersten Kurve transversal geschnitten werden, und zugleich ein solches von Extremalen mit der zweiten Kurve als gemeinsamer Transversalen. Die Gleichungen (1) und (2) mögen jetzt diese beiden Extremalscharen darstellen, die Parameter s_1, s_2 sollen die auf den Extremalen gemessenen Bogenlängen $\int f\,dt$ bedeuten, so daß die Gleichungen

(1′) $$s_1 = s_1(u, v)$$ und

(2′) $$s_2 = s_2(u, v)$$

geodätische Äquidistante zu der ersten und zweiten Grundkurve darstellen. Der Beweis des Satzes geht genau wie oben vor sich, es gibt aber einen Fall, in dem er versagt: wenn die beiden Grundkurven Transversalen einer und derselben Extremalenschar sind. Dann sind die beiden Grundkurven geodätisch äquidistant, also ist

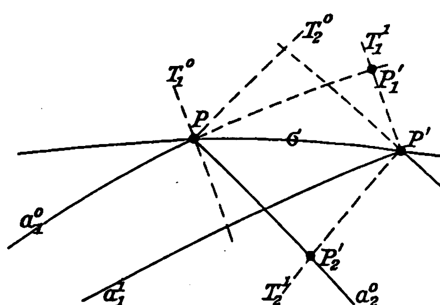
(11) $$s_1(u, v) - s_2(u, v) = \text{konst.},$$

und daher versagt die Differentialgleichung der geodätischen Kegelschnitte: die Ellipsen entarten zu den Kurven $s_1(u, v) = $ konst., und die Differentialgleichung der Hyperbeln ist identisch erfüllt. Der Satz verliert jetzt überhaupt seine Bedeutung, da die beiden geodätischen Lote zu einem zusammenfallen.

Wenn dagegen die Grundkurven nicht geodätisch äquidistant sind, gilt der Satz genau wie in dem Fall, daß die Grundkurven auf die Punkte P_1 und P_2 zusammenschrumpfen.

4. Wenn man die Finslersche Definition des cosinus eines Winkels als limes des Verhältnisses zweier Bogenlängen beachtet, läßt sich der Satz einfach geometrisch beweisen.

PP' sei ein Stück eines Ellipsenbogens, $\sigma = \int_{(P)}^{(P')} f(u, v, u', v')\,dt$ seine Länge. a_1^0, a_1^1 seien die geodätischen Linien von P und P' nach P_1 (bzw. die geodätischen Lote von P und P' auf die erste Grundkurve), entsprechend a_2^0 und a_2^1 die geodätischen Linien nach P_2. Man konstruiere in P und P' die Transversalen T_1^0 und T_1^1 des zu P_1 (bzw. der ersten Grundkurve) gehörenden Extremalenfeldes,



entsprechend die Transversalen T_2^0 und T_2^1 des zweiten Extremalenfeldes. s_1^0, s_1^1 seien die geodätischen Abstände der Punkte P und P' von P_1 (bzw. der ersten Grundkurve), entsprechend s_2^0 und s_2^1 die Abstände von P_2 (bzw. der zweiten Grundkurve). Da die Transversalen geodätisch äquidistant sind, ist

$$\overline{PP_1'} = s_1^1 - s_1^0,$$

$$\overline{PP_2'} = -(s_2^0 - s_2^1),$$

ferner gilt
$$s_1^0 + s_2^0 = s_1^1 + s_2^1,$$

weil PP' ein Ellipsenbogen ist. Also folgt

$$\overline{PP_1'} + \overline{PP_2'} = 0$$

und für $P' \to P$
$$\lim_{P' \to P} \frac{\overline{PP_1'}}{\sigma} + \lim_{P' \to P} \frac{\overline{PP_2'}}{\sigma} = 0$$

oder
$$\cos \overset{\frown}{E a_1^0} + \cos \overset{\frown}{E a_2^0} = 0.$$

Entsprechend beweist man für eine geodätische Hyperbel

$$\cos \overset{\frown}{H a_1^0} - \cos \overset{\frown}{H a_2^0} = 0.$$

5. Offenbar gilt auch die *Umkehrung des Satzes* I, die für den

speziellen Fall der Riemannschen Metrik von Weingarten[1]) bewiesen wurde:

Die Winkelhalbierenden eines Netzes geodätischer Linien stellen geodätische Kegelschnitte dar. Genau: Wenn eine Kurve in jedem Punkt mit den durch ihn gehenden geodätischen Linien zweier Felder um P_1 und P_2 Winkel bildet, deren cosinus gleich bzw. entgegengesetzt gleich sind, dann stellt diese Kurve eine Hyperbel bzw. eine Ellipse dar. Dabei sollen die Winkel stets von der Kurve zu den geodätischen Linien gemessen werden.

Beweis. Die Koordinaten $u(t)$, $v(t)$ der Winkelhalbierenden C genügen, wenn die geodätischen Linien durch P_1 und P_2 die Gleichungen

$$(1) \qquad u = u_1(s_1, a_1), \qquad v = v_1(s_1, a_1) \qquad \text{und}$$

$$(2) \qquad u = u_2(s_2, a_2), \qquad v = v_2(s_2, a_2)$$

besitzen, der folgenden Differentialgleichung:

$$\cos \widehat{Ca_1} = \frac{\frac{du}{dt} f_{u'}(u_1, v_1, u_1', v_1') + \frac{dv}{dt} f_{v'}(u_1, v_1, u_1', v_1')}{f\left(u, v, \frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}\right)}$$

$$= \pm \frac{\frac{du}{dt} f_{u'}(u_2, v_2, u_2', v_2') + \frac{dv}{dt} f_{v'}(u_2, v_2, u_2', v_2')}{f\left(u, v, \frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}\right)} = \pm \cos \widehat{Ca_2}$$

oder

$$(9) \quad du\{f_{u'}(u_1, v_1, u_1', v_1') \mp f_{u'}(u_2, v_2, u_2', v_2')\} + dv\{f_{v'}(u_1, v_1, u_1', v_1') \mp f_{v'}(u_2, v_2, u_2', v_2')\} = 0.$$

Bedeuten nun s_1 und s_2 die Bogenlängen der geodätischen Linien von den Punkten P_1 und P_2 aus gemessen, ist also

$$s_1(u, v) = \int_{(P_1)}^{(u,v)} \{f_{u'}(u_1, v_1, u_1', v_1')\, du + f_{v'}(u_1, v_1, u_1', v_1')\, dv\},$$

$$s_2(u, v) = \int_{(P_2)}^{(u,v)} \{f_{u'}(u_2, v_2, u_2', v_2')\, du + f_{v'}(u_2, v_2, u_2', v_2')\, dv\},$$

dann geht die Gl. (9) über in

$$(6) \qquad \left(\frac{\partial s_1}{\partial u} du + \frac{\partial s_1}{\partial v} dv\right) \mp \left(\frac{\partial s_2}{\partial u} du + \frac{\partial s_2}{\partial v} dv\right) = 0.$$

Die Winkelhalbierenden sind also die geodätischen Kegelschnitte

$$s_1(u, v) \mp s_2(u, v) = \text{konst.}$$

1) Vgl. R. Rothe, Bemerkungen über die Gewebe („Kurvennetze ohne Umwege“) auf einer Fläche, Jahresber. d. dtsch. Mathem.-Verein. Bd. 17 (1908), Heft 9/10, S. 331.

Auch hier können die Punkte P_1 und P_2 durch Grundkurven ersetzt werden, die nicht geodätisch äquidistant sind.

6. Während im Vorhergehenden bewiesen werden konnte, daß die Spiegelungseigenschaft auch geodätischen Kegelschnitten auf Flächen mit Nicht-Riemannscher Metrik zukommt, hat es den Anschein, als ob die Orthogonalität der Scharen geodätischer Kegelschnitte mit gleichen Brennpunkten nur auf Flächen mit Riemannscher Metrik gilt. Wie man sich leicht überlegt, versagt die hier angewandte Beweisführung im allgemeinen Fall schon deshalb, weil die Winkel im Sinne allgemeiner Maßbestimmung nicht additiv sind; daß die Orthogonalität der Kegelschnitte allgemein gilt, scheint auch fraglich, weil die Transversalität der Ellipsen- und Hyperbelschar im allgemeinen nicht vertauschbar ist; vielleicht ließe sie sich für Scharen von Kegelschnitten auf solchen Flächen beweisen, deren Maßbestimmung eine symmetrische Transversalitätsbedingung besitzt. Auf diese Möglichkeit wird hier nicht eingegangen, vielmehr soll zum Schluß eine andere Eigenschaft der geodätischen Kegelschnitte untersucht werden, die ihnen auf Flächen mit beliebiger Metrik zukommt.

Der *Begriff des Diagonalnetzes eines Kurvennetzes* läßt sich folgendermaßen rein lagegeometrisch einführen:

Die Kurvennetze

$$(14) \qquad (\mathrm{I}) \quad \begin{cases} u = u(t_1, t_2) \\ v = v(t_1, t_2) \end{cases} \qquad \textit{und}$$

$$(15) \qquad (\mathrm{II}) \quad \begin{cases} u = U(\tau_1, \tau_2) \\ v = V(\tau_1, \tau_2) \end{cases}$$

sind Diagonalnetze zueinander, wenn gegenüberliegende Ecken eines einfachen Netzvierecks des einen Netzes auf einer und derselben Kurve des anderen Netzes liegen für den Fall, daß sämtliche Seitenlängen des Netzvierecks gegen Null streben.

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Diagonaleigenschaft der Netze (I) und (II) ist

$$(16) \quad D = \left(\frac{\partial u}{\partial t_1}\frac{\partial V}{\partial \tau_1} - \frac{\partial v}{\partial t_1}\frac{\partial U}{\partial \tau_1}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t_2}\frac{\partial V}{\partial \tau_2} - \frac{\partial v}{\partial t_2}\frac{\partial U}{\partial \tau_2}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial t_1}\frac{\partial V}{\partial \tau_2} - \frac{\partial v}{\partial t_1}\frac{\partial U}{\partial \tau_2}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t_2}\frac{\partial V}{\partial \tau_1} - \frac{\partial v}{\partial t_2}\frac{\partial U}{\partial \tau_1}\right) = 0.$$

Es gilt nun folgender Satz II:

Das Netz der geodätischen Kreise um P_1 und P_2 ist das Diagonalnetz des Netzes der geodätischen Kegelschnitte mit den Brennpunkten P_1 und P_2 und umgekehrt.

Beweis. Die geodätischen Kreise um P_1 bzw. P_2 haben die Gleichungen

(17a) $$s_1(u, v) = \int_{(P_1)}^{(u,v)} f(u_1, v_1, u_1', v_1')\,dt = \text{konst.}$$ bzw.

(17b) $$s_2(u, v) = \int_{(P_2)}^{(u,v)} f(u_2, v_2, u_2', v_2')\,dt = \text{konst.},$$

die geodätischen Kegelschnitte die Gleichungen

(18 a, b) $$s_1(u, v) \pm s_2(u, v) = \text{konst.}$$

Also gelten die Differentialgleichungen

(19) $$\begin{cases} \frac{\partial s_1}{\partial u} du_1 + \frac{\partial s_1}{\partial v} dv_1 = 0 \\ \frac{\partial s_2}{\partial u} du_2 + \frac{\partial s_2}{\partial v} dv_2 = 0 \\ \left(\frac{\partial s_1}{\partial u} + \frac{\partial s_2}{\partial u}\right) du + \left(\frac{\partial s_1}{\partial v} + \frac{\partial s_2}{\partial v}\right) dv = 0 \\ \left(\frac{\partial s_1}{\partial u} - \frac{\partial s_2}{\partial u}\right) dU + \left(\frac{\partial s_1}{\partial v} - \frac{\partial s_2}{\partial v}\right) dV = 0, \end{cases}$$

worin du_1, dv_1; du_2, dv_2; du, dv; dU, dV die zu den Kurven (17a), (17b), (18a), (18b) gehörenden Differentiale sind. Da nicht zugleich

$$\frac{\partial s_1}{\partial u} = \frac{\partial s_1}{\partial v} = \frac{\partial s_2}{\partial u} = \frac{\partial s_2}{\partial v} = 0$$

sein kann, ist

(20) $$D' = \begin{vmatrix} du_1 & dv_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & du_2 & dv_2 \\ du & dv & du & dv \\ dU & dV & -dU & -dV \end{vmatrix} = 0.$$

Man erkennt leicht, daß die Determinanten D und D' bis auf das Produkt $dt_1 \cdot dt_2 \cdot d\tau_1 \cdot d\tau_2$ der Parameterdifferentiale identisch sind, womit der Satz bewiesen ist.

(Eingegangen am 12. 1. 1928.)

Einstein-Geschwindigkeiten und Hyperbelsektoren.

Von F. KADNER in Chemnitz.

Mit 3 Figuren im Text.

Einsteins Additionstheorem der Geschwindigkeiten ist in der Form

$$\frac{v_{1+2}}{c} = \frac{\frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c}}{1 + \frac{v_1}{c} \cdot \frac{v_2}{c}}$$

analog dem Additionstheorem

$$\mathfrak{Tan}\,(S_1 + S_2) = \frac{\mathfrak{Tan}\,S_1 + \mathfrak{Tan}\,S_2}{1 + \mathfrak{Tan}\,S_1 \cdot \mathfrak{Tan}\,S_2}$$

der hyperbolischen $\mathfrak{Tan}$-Funktion.

Nun ist bekanntlich

$$\mathfrak{Tan}\,S = \tan\varphi;$$

trägt man also die einzelnen $v = \overline{H_0 T}$ auf der Scheiteltangente der Hyperbel $x^2 - y^2 = c^2$ vom Scheitel H_0 aus ab, so gibt die Summe der einzelnen zugehörigen Sektoren OH_0H einen Sektor, dessen Randstrahl OH auf der Scheiteltangente die Summengeschwindigkeit abgrenzt.

$OH_0H = \frac{1}{2}S$

Fig. 1.

Elementargeometrische Methoden zur Addition bzw. Verwandlung von Hyperbelsektoren finden sich in der Literatur über Hyperbelfunktionen; sie sind jedoch umständlich und geben kein anschauliches Bild von der Art des Wachsens der Einstein-Geschwindigkeit.

Zieht man nun bei einem beliebigen Hyperbelsektor OH_1H durch den Schnittpunkt K_1 von OH_1 mit dem Scheitelkreis $x^2 + y^2 = c^2$ die zu OH_1 bezüglich der Hyperbel konjugierte Gerade, so hat ihr Schnittpunkt P mit OH die Koordinaten

$\overline{K_1P} = v$

Fig. 2.

$$\left.\begin{aligned} x &= c\cos\varphi_1 + v\sin\varphi_1 \\ y &= c\sin\varphi_1 + v\cos\varphi_1 \end{aligned}\right\}, \quad \text{woraus} \quad \left\{\begin{aligned} \tan\varphi &= \frac{c\sin\varphi_1 + v\cos\varphi_1}{c\cos\varphi_1 + v\sin\varphi_1} \\ \cos 2\varphi &= \frac{(c^2 - v^2)\cos 2\varphi_1}{c^2 + 2cv\sin 2\varphi_1 + v^2} \\ d\varphi &= \frac{c\cos 2\varphi_1\,dv}{c^2 + 2cv\sin 2\varphi_1 + v^2} \end{aligned}\right.$$

folgt; demnach wird die Sektorfläche

$$F = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi} r^2 d\varphi = \frac{c^2}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{c^2}{2}\int^{v}\frac{dv}{c^2-v^2} = \frac{c^2}{4}\log\frac{c+v}{c-v}$$

als Funktion der „Sehne" v an Stelle des Winkels $\varphi-\varphi_1$ unabhängig von dem Anfangswinkel φ_1, d. h.

Hyperbelsektoren mit gleichlanger „Sehne" $\overline{K_1P}$ sind flächengleich.

Daraus ergibt sich die folgende einfache geometrische Addition von Einstein-Geschwindigkeiten als Hyperbelsektoren: Auf der Scheiteltangente $x = c$ der Hyperbel $x^2 - y^2 = c^2$ trägt man $\overline{H_0T_1} = v_1$ ab, zieht den Strahl OT_1 und durch dessen Schnittpunkt K_1 mit dem Scheitelkreis $x^2 + y^2 = c^2$ die zu OT_1 bezüglich der Hyperbel konjugierte Gerade bis zur Länge $\overline{K_1P_2} = v_2$; der Strahl OP_2 schneidet auf der Scheiteltangente die Summengeschwindigkeit $\overline{H_0T_2} = v_{1+2}$ ab.

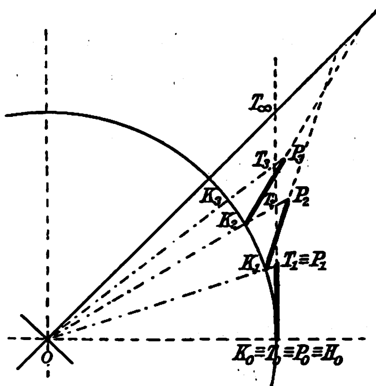


Fig. 3.

Die Richtigkeit dieser Konstruktion läßt sich selbstverständlich auch rein analytisch-geometrisch beweisen:

$$K_1\begin{cases} x = c\dfrac{c}{\sqrt{c^2+v_1^2}} \\ y = c\dfrac{v_1}{\sqrt{c^2+v_1^2}}\end{cases} \quad \left|\quad \begin{matrix}\text{Richtung von } K_1P_2 \\ \mu = \dfrac{c}{v_1}\end{matrix}\quad\right| \quad P_2\begin{cases} x = c\dfrac{c}{\sqrt{c^2+v_1^2}} + v_2\dfrac{v_1}{\sqrt{c^2+v_1^2}} \\ y = c\dfrac{v_1}{\sqrt{c^2+v_1^2}} + v_2\dfrac{c}{\sqrt{c^2+v_1^2}}\end{cases}$$

also

$$T_2\begin{cases} x = c \\ y = \dfrac{v_1+v_2}{1+\dfrac{v_1v_2}{c^2}}.\end{cases}$$

Das Verfahren läßt sich wiederholen; um eine weitere Geschwindigkeit v_3 zu addieren, zieht man $\overline{K_2P_3} = v_3$ durch K_2 konjugiert zu OT_2 und schneidet OP_3 mit der Scheiteltangente in T_3; dann ist $\overline{H_0T_3} = v_{1+2+3}$.

Je näher ein Hyperbelsektor der Asymptote $y = x$ liegt, um so schmaler ist er bei bestimmter „Sehne" v_n; entsprechend wird der Geschwindigkeitszuwachs durch bestimmtes v_n um so geringer, je größer die vorherige Geschwindigkeit ist. Die Asymptote wird durch Addition von $v_n < c$ nicht erreicht; die Summe von Unterlichtgeschwindigkeiten bleibt unterhalb der Lichtgeschwindigkeit.

Nur die Addition von $v_n = c$ liefert in *jedem* Falle P_n auf der Asymptote; durch Hinzufügung der Lichtgeschwindigkeit ergibt sich stets die Lichtgeschwindigkeit.

Daß die Summengeschwindigkeit eine *symmetrische* Funktion der Einzelgeschwindigkeiten ist, läßt die Konstruktion indirekt aus der Flächengleichheit von Hyperbelsektoren mit gleicher „Sehne" $\overline{K_{n-1}P_n}$ erkennen. Entsprechend dem allgemeinen Additionstheorem

$$\mathfrak{Tan}\,\Sigma S = \frac{\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_3 + \mathfrak{T}_5 + \cdots}{1 + \mathfrak{T}_2 + \mathfrak{T}_4 + \cdots},$$

wenn die $t_i = \mathfrak{Tan}\,S_i$ die Wurzeln der Gleichung

$$t^n - \mathfrak{T}_1 t^{n-1} + \cdots (-1)^{n-1}\mathfrak{T}_{n-1} t + (-1)^n \mathfrak{T}_n = 0$$

sind, lautet das Einsteinsche Additionstheorem für beliebig viele Geschwindigkeiten $v_1 \ldots v_n$

$$\frac{v_{1+\cdots n}}{c} = \frac{\frac{V_1}{c} + \frac{V_3}{c^3} + \frac{V_5}{c^5} + \cdots}{1 + \frac{V_2}{c^2} + \frac{V_4}{c^4} + \cdots},$$

wobei die v_i die Wurzeln der Gleichung

$$v^n - V_1 v^{n-1} + \cdots (-1)^{n-1} V_{n-1} v + (-1)^n V_n = 0 \quad \text{sind.}$$

(Eingegangen am 24. 4. 1928.)

Berichtigung zu meiner Arbeit „Bemerkung zu einem Satze von Hartogs" in Bd. 36.

Von Hans Wäsche in Barmen.

Herr Prof. Hartogs war so liebenswürdig, mich auf einen Fehler in meiner Note „Bemerkung zu einem Satze von Hartogs" (dieser Jahresbericht Bd. 36, S. 359) aufmerksam zu machen. Die gleichmäßige Konvergenz der $f_\nu(z)\,y^{(1)\mu_\nu}$ gegen Null gilt nämlich nur in jedem abgeschlossenen Teilbereich von B'. Das steht aber in keinem Widerspruch zu der vorher gemachten Annahme. Eine einfache Verbesserung des Beweises ist mir geglückt.

(Eingegangen am 4. 1. 1929.)

Bericht über differentialgeometrische Untersuchungen zur Kugelgeometrie.

(Vortrag, gehalten auf der Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Hamburg 1928.)

Von G. THOMSEN in Hamburg.

Mit 1 Figur im Text.

I.

Mein Referat über differentialgeometrische Untersuchungen zur Kugelgeometrie[1]) möchte ich beginnen mit einem Bericht über ein ganz spezielles Problem. An diesem Problem lassen sich gewisse allgemeine Zusammenhänge der Kugelgeometrie besonders klar erkennen.

Ein von zwei Parametern abhängiges System reeller Kugeln kann zwei, eine oder keine reellen Hüllflächen haben.[2]) Wir wollen uns hier nur mit Kugelsystemen beschäftigen, die zwei reelle Hüllflächen besitzen. Durch die Kugeln des Systems wird dann eine punktweise Zuordnung der beiden Hüllflächen vermittelt: Zu jeder Kugel gehört nämlich von jeder Hüllfläche je ein Berührungspunkt[3]), und die Paare der zur selben Kugel gehörigen Berührungspunkte können wir einander entsprechen lassen. Darboux[4]) hat nun die Frage gestellt, wenn auch nicht vollständig gelöst: *Bei welchen Kugelsystemen sind die Hüllflächen aufeinander winkeltreu bezogen?*

Diese Frage gehört offenbar ins Gebiet der Konform- oder Inversionsgeometrie des Raumes oder, wie wir auch sagen wollen, der Möbiusgeometrie des Raumes, denn sie ist invariant gegenüber der

1) Die Untersuchungen, über die in diesem Vortrag berichtet wird, finden sich ausführlich dargestellt in dem Buche von W. Blaschke, Differentialgeometrie, Bd. III, das im Herbst 1928 bei J. Springer erschienen ist. (Vgl. besonders § 78—81.)

2) Das gilt nur in der Ausdrucksweise der Differentialgeometrie, in der algebraischen Geometrie pflegt man ja in dem ersten der drei Fälle die beiden Mäntel des Hüllgebildes als eine einzige Fläche zu betrachten.

3) Das gilt natürlich nur im Sinne der „Differentialgeometrie im Kleinen". Im Großen kann eine Kugel eine Hüllfläche natürlich in sehr vielen verschiedenen Punkten berühren.

4) Vgl. G. Darboux, Sur les surfaces isothermiques (Annales de l'École Normale Supérieure 1899. Seite 498ff.)

Gruppe der Kugeltransformationen von **Möbius**. Ihre rechnerische Lösung erleichtert sich daher außerordentlich, wenn man statt mit bewegungsgeometrischen, ganz mit möbiusinvarianten Formeln arbeitet. Man wird zweckmäßig die Kugeln des Systems in ihren *pentasphärischen Kugelkoordinaten* darstellen.

II.

Lassen Sie mich hier kurz daran erinnern, wie man von den gewöhnlichen kartesischen Koordinaten ξ, η, ζ des Mittelpunktes der Kugel und dem Radius R zu den fünf pentasphärischen Kugelkoordinaten x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 gelangt. Es geschieht dies nach der Vorschrift der Formeln

$$(1)\quad \begin{cases} x_0 = \varrho \cdot \dfrac{1 + (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - R^2)}{2}; \quad x_1 = \varrho \cdot \dfrac{1 - (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - R^2)}{2} \\ x_2 = \varrho \cdot \xi; \quad x_3 = \varrho \cdot \eta; \quad x_4 = \varrho \cdot \zeta. \end{cases}$$

Den Faktor ϱ haben wir hinzugefügt, da die pentasphärischen Koordinaten als homogene Koordinaten verwendet werden, man also aus den ξ, η, ζ, R nur die Verhältnisse der fünf Größen x eindeutig ermitteln kann. Sind umgekehrt die pentasphärischen Koordinaten gegeben, und sucht man die kartesischen, so hat man in (1) fünf Gleichungen für die unbekannten ϱ, ξ, η, ζ und R, die, falls $x_0 + x_1 \neq 0$, die folgende Auflösung besitzen:

$$(2)\qquad \varrho = x_0 + x_1,$$

$$(3)\qquad \xi = \frac{x_2}{x_0 + x_1}; \quad \eta = \frac{x_3}{x_0 + x_1}; \quad \zeta = \frac{x_4}{x_0 + x_1},$$

$$(4)\qquad R^2 = \frac{-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}{(x_0 + x_1)^2}.$$

Aus (3), (4) ersieht man, daß den reellen Kugeln nur die Systeme von vier Verhältnisgrößen $x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ eindeutig entsprechen, für die erstens

$$(5)\qquad x_0 + x_1 \neq 0$$

gilt und für die zweitens die quadratische Form

$$(6)\qquad (\mathfrak{x}\mathfrak{x}) \doteq -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \quad \text{positiv ist.}$$

Die Systeme der Verhältnisgrößen x mit $(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) > 0$ und $x_0 + x_1 = 0$ kann man nun weiter in einer Art, die wir hier nicht im einzelnen beschreiben wollen, gerade den sämtlichen Ebenen des Raumes eineindeutig als pentasphärische Koordinaten zuordnen. Fassen wir ferner die Punkte als Kugeln vom Radius 0 auf, die auf ihren Mittelpunkt zusammengeschrumpft sind, so liefern die Formeln (1) für

$R = 0$ die sogenannten *pentasphärischen Punktkoordinaten* x des Punktes mit den kartesischen Koordinaten ξ, η, ζ. Aus den Umkehrungsformeln (3), (4) ersieht man dann, daß den Punkten die Systeme der Verhältnisgrößen x eineindeutig entsprechen, für die $(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = 0$ und $x_0 + x_1 \neq 0$ gilt. Für reelle x folgt aus dem gleichzeitigen Bestehen von $(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = 0$ und $x_0 + x_1 = 0$ nach (6) auch $x_2 = x_3 = x_4 = 0$, so daß überhaupt nur ein System solcher Verhältnisgrößen in Frage kommt. Ihm ordnen wir den sogenannten *uneigentlichen Punkt* der Möbiusgeometrie zu. Wie ist es nun schließlich mit den Systemen mit $(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) < 0$? Für reelle x kann dann nach (6) nicht $x_0 + x_1 = 0$ sein, und aus (3), (4) ersieht man, daß sich diesen Systemen keine reellen Kugeln zuordnen lassen. Wir ordnen diesen Systemen dann als ideale Elemente sogenannte *nullteilige Kugeln* zu.[1] (Diese Bezeichnung stammt von F. Klein.) Wir werden weiter unten sehen, daß man gewisse Systeme reeller Kugeln als anschauliche Repräsentanten der nullteiligen Kugeln ansehen kann. Zusammenfassend können wir jetzt sagen:

Es entsprechen

1. den Systemen mit $(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) > 0$: die Kugeln und Ebenen,
2. den Systemen mit $(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = 0$: die Punkte [d. h. die gewöhnlichen Punkte, und der uneigentliche Punkt],
3. den Systemen mit $(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) < 0$: die nullteiligen Kugeln.

Die pentasphärischen Kugelkoordinaten sind deshalb für die Möbiusgeometrie besonders geeignet, weil sich in ihnen die Kugeltransformationen von Möbius als lineare Transformationen darstellen, was durch die kartesischen Koordinaten nicht geleistet wird. In diesen letzteren stellen sich die Abbildungen von Möbius nämlich als gebrochene quadratische Transformationen, also ziemlich kompliziert dar. Der genaue Sachverhalt für die pentasphärischen Koordinaten ist der, daß diejenigen linearen Transformationen, die die quadratische Form (6) in sich überführen, gerade die Gruppe von Möbius darstellen.

Daraus ersehen wir, daß bei den Abbildungen von Möbius die Punkte $((\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = 0)$ in ebensolche übergeführt werden, daß wir es also mit Punkttransformationen zu tun haben. Da die Gleichung $x_0 + x_1 = 0$ keineswegs in sich übergeht, sieht man weiter, daß Kugeln und Ebenen sehr wohl miteinander vertauscht werden können, weshalb man in der Möbiusgeometrie die Ebenen als Grenzfall von Kugeln mit unendlichem Radius mit zu den Kugeln rechnet. Die Gruppe der linearen

1) In der Sprache der komplexen Geometrie wären die nullteiligen Kugeln als Kugeln mit reellem Mittelpunkt und rein imaginärem Radius anzusprechen.

Transformationen, die die Form (6) absolut invariant lassen, ist im wesentlichen identisch mit der Gruppe der orthogonalen Substitutionen in fünf Variablen. Der einzige Unterschied ist, daß in (6) vor x_0^2 das negative Zeichen steht, man kann ihn durch Einführung einer imaginären Koordinate $x_0' = \sqrt{-1}\, x_0$ natürlich leicht beseitigen. Die Systeme der fünf pentasphärischen Koordinaten spielen gegenüber unserer Gruppe die Rolle der *Vektoren*. Es entsprechen den „Nullvektoren“, für die die Form (6) verschwindet, also die Punkte, den Vektoren mit $(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) > 0$ die reellen Kugeln und Ebenen und den Vektoren mit $(\mathfrak{x}\mathfrak{x} < 0)$ die nullteiligen Kugeln.

Es ist nun sehr leicht für eine Anzahl gegebener Punkte und Kugeln auf rein analytischem Wege, ohne geometrische Betrachtungen, das vollständige System der möbiusgeometrischen Invarianten zu bestimmen. Zunächst haben wir für unsere Punkte und Kugeln, die ja durch Vektoren dargestellt werden, die Invarianten gegenüber der Gruppe unserer „orthogonalen Substitutionen“ zu bestimmen. Diese Invarianten lassen sich aber nach bekannten Sätzen, von gewissen Ausnahmefällen abgesehen[1]), alle durch die *skalaren Produkte* [und Quadrate] der Vektoren ausdrücken. Als das skalare Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ bezeichnen wir dabei die zu (6) gehörige Bilinearform

$$(7) \qquad (\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4,$$

als das skalare Quadrat eines Vektors $\mathfrak{x}$ aber die Form (6) selbst. Da wir homogene Koordinaten haben, sind die Invarianten der Möbiusgeometrie aber noch nicht durch diese Skalarprodukte gegeben, sondern wir haben aus ihnen noch Ausdrücke zu bilden, die in den Koordinaten eines jeden Vektors homogen vom Grade 0 sind. Wir wollen dies Vorgehen zur Bestimmung von Invarianten an zwei Beispielen erläutern.

1. Es seien zwei Kugeln mit den pentasphärischen Fünfervektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ gegeben. Dann sind die skalaren Quadrate und Produkte

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{x}), \quad (\mathfrak{x}\mathfrak{y}), \quad (\mathfrak{y}\mathfrak{y})$$

invariant gegenüber unseren „orthogonalen Substitutionen“. Aus ihnen läßt sich ein Ausdruck bilden, der in den Koordinaten beider Kugeln homogen vom Grade 0 ist:

$$J = \frac{(\mathfrak{x}\mathfrak{y})^2}{(\mathfrak{x}\mathfrak{x})\cdot(\mathfrak{y}\mathfrak{y})}.$$

Die Möbiusinvariante J ist einfach das Quadrat des Kosinus *des Winkels der beiden Kugeln*, wie man erkennt, wenn man die

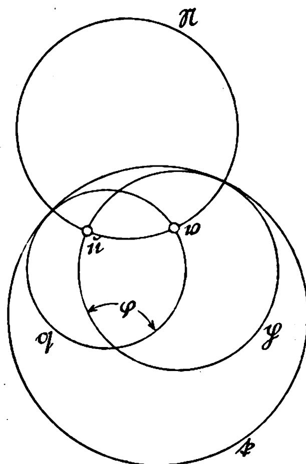
1) Vgl. darüber W. Blaschke, l. c. § 10.

pentasphärischen Koordinaten nach (1) durch die kartesischen ausdrückt. Für senkrechte Kugeln gilt dann $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = 0$. Wenn von den Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ einer, etwa $\mathfrak{y}$ nullteilig ist, so werden wir von allen reellen Kugeln $\mathfrak{x}$, die dieser Gleichung genügen, sagen, daß sie *zu der nullteiligen Kugel* $\mathfrak{y}$ *senkrecht* sind. Die Rechnung zeigt dann leicht: *Alle reellen Kugeln, die zu einer festen nullteiligen Kugel senkrecht sind, schneiden gleichzeitig immer eine zweite feste Kugel in Großkreisen.* Wir können eine solche Konfiguration reeller Kugeln direkt als geometrischen Repräsentanten einer nullteiligen Kugel auffassen.

2. Es seien zwei Punkte $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ und eine Kugel $\mathfrak{k}$ gegeben. Man hat dann die sechs Skalarprodukte

$$(\mathfrak{u}\mathfrak{u}),\quad (\mathfrak{v}\mathfrak{v}),\quad (\mathfrak{k}\mathfrak{k}),\quad (\mathfrak{u}\mathfrak{k}),\quad (\mathfrak{v}\mathfrak{k}),\quad (\mathfrak{u}\mathfrak{v}).$$

Über zwei von ihnen ist durch die Annahme schon verfügt, daß $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ Punkte sind. Es wird dann ja $(\mathfrak{u}\mathfrak{u}) = (\mathfrak{v}\mathfrak{v}) = 0$. Wir behalten nur die vier letzten Skalarprodukte übrig. Aus ihnen kann man einen Ausdruck bilden, der in den Vektoren $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{k}$ homogen vom Grade 0 ist, nämlich



$$G = \frac{(\mathfrak{u}\mathfrak{v})\,(\mathfrak{k}\mathfrak{k})}{(\mathfrak{u}\mathfrak{k})\,(\mathfrak{v}\mathfrak{k})}. \tag{8}$$

Die Möbiusinvariante G läßt sich in einfacher Weise durch eine Winkelbeziehung an der Figur der beiden Punkte $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ und der Kugel $\mathfrak{k}$ geometrisch deuten. Wir denken uns den Kreis $\mathfrak{N}$ gezeichnet, der durch $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ hindurchgeht und auf $\mathfrak{k}$ senkrecht steht (vgl. die Figur, die wir uns als eine ebene Schnittfigur in der Ebene durch $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ und den Mittelpunkt der Kugel $\mathfrak{k}$ vorzustellen haben). Dann konstruieren wir die beiden auf $\mathfrak{N}$ senkrecht stehenden Hilfskugeln $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$, von denen die erste, $\mathfrak{p}$, nach Art der Figur durch $\mathfrak{u}$ hindurchgeht und $\mathfrak{k}$ berührt, während $\mathfrak{q}$ durch $\mathfrak{v}$ hindurchgeht und $\mathfrak{k}$ berührt. Diese beiden Hilfskugeln $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ schneiden sich unter einem Winkel φ. Die Invariante G ist eine einfache Funktion dieses Winkels.

III.

Kehren wir jetzt zu unseren Kugelsystemen zurück! Wir werden ein Kugelsystem darstellen, indem wir den pentasphärischen Vektor der Kugel als Funktion zweier Parameter vorgeben. Die Methoden, nach denen man dann einen möbiusinvarianten Formelapparat für

die Theorie der Kugelsysteme aufstellt und nach denen man das vollständige System der Invarianten einer solchen kontinuierlichen Mannigfaltigkeit von Kugeln bestimmt, passen sich in gewisser Weise dem Verfahren an, das wir soeben zur Bestimmung der Invarianten einer endlichen Anzahl von Kugeln angegeben haben. Nur hat man hier noch die Substitutionen der Parameter zu berücksichtigen, auf welche das Kugelsystem bezogen ist. Aber hier können wir durch den Riccikalkül und ähnliche Methoden der Schwierigkeiten leicht Herr werden. Wir wollen auf diese Dinge hier nicht eingehen und auch bei unserem Problem von Darboux nur das Ergebnis angeben. Es zeigt sich, daß die Forderung der winkeltreuen Abbildung der Hüllflächen eine sehr starke ist. Es ergibt sich nämlich, daß in den wesentlichsten Fällen der Lösung nicht nur die Kugelsysteme von spezieller Art sein müssen, sondern auch, daß als Hüllflächen der gesuchten Kugelsysteme überhaupt nur ganz spezielle Flächen auftreten können. Als die Hüllflächen unserer Kugelsysteme ergeben sich dabei gerade einige der bemerkenswertesten Flächenklassen der Möbiusgeometrie. Aus diesem Grunde ist unser Problem vielleicht auch von Interesse, wenn man nur das Resultat ohne Rechnung angibt. Die rechnerische Lösung unserer Frage führt auf eine ziemlich verwickelte Fallunterscheidung. Wir erhalten nämlich drei Fälle 1. 2. 3., von denen der dritte wieder in drei Unterfälle 3a), 3b), 3c) zerfällt. Wir geben die einzelnen Lösungen nach der Reihe an.

Fall 1. Hier erhalten wir spezielle sogenannte *Ribaucoursche Kugelsysteme*. Als Ribaucoursche Systeme pflegt man diejenigen zu bezeichnen, auf deren Hüllflächen sich die Krümmungslinien entsprechen. Diese Systeme hängen ja durch die bekannte Geraden-Kugeltransformation von Lie in einfacher Weise mit den W-Strahlensystemen der Liniengeometrie zusammen. Wir erhalten in unserem Fall ganz spezielle Ribaucoursche Systeme, nämlich solche, deren *Hüllflächen beide zugleich Isothermflächen* sind, d. h. Flächen, auf denen das Netz der Krümmungslinien ein isothermes Netz ist. Während dieser Fall 1. auf Darboux zurückgeht, findet sich der folgende bei ihm noch nicht.

Fall 2. Hier erhalten wir keine Ribaucourschen Systeme, sondern solche der folgenden Art: Konstruiert man in einem Flächenpunkt eine die Fläche berührende Kugel, so schneidet diese, wenn nur ihr Radius in einem gewissen, leicht anzugebenden Bereich variiert, die Fläche in einer reellen Kurve, die an der Berührungsstelle einen Doppelpunkt mit zwei hindurchgehenden Kurvenästen besitzt. Nur für eine besondere berührende Kugel stehen nun diese Kurvenäste im Berührungspunkt aufeinander senkrecht, und zwar für die so-

genannte *Zentralkugel.* Diese Kugel kann man auch definieren als die Kugel, die in dem Büschel der die Fläche berührenden Kugeln zusammen mit dem Flächenpunkt (als Kugel vom Radius 0) das Paar der Krümmungskugeln harmonisch trennt. In unserem Fall 2. erhalten wir nun die Systeme von Kugeln, die aus den Zentralkugeln beider Hüllflächen gleichzeitig bestehen. Bei einem System, dessen Kugeln nur für die eine Hüllfläche Zentralkugeln sind, kann diese Fläche natürlich noch von ganz allgemeiner Art sein. Denn jeder Fläche können wir ja ihr System von Zentralkugeln anbeschreiben. Aber nur ganz spezielle Flächen besitzen die Eigenschaft, daß das System ihrer Zentralkugeln von einer zweiten Fläche eingehüllt wird, für die sie wieder die Zentralkugeln sind. Diese Flächen sind in der möbiusgeometrischen Flächengeometrie noch aus einem anderen Grunde bemerkenswert. Sie stellen nämlich die Extremalen des Variationsproblems dar, das zu dem einfachsten invarianten Doppelintegral einer Fläche gehört. Diese *Konformminimalflächen* stellen somit das möbiusgeometrische Analogon zu den gewöhnlichen Minimalflächen dar. Fall 2. liefert uns also *Kugelsysteme, deren beide Hüllflächen Konformminimalflächen sind.*

Von ganz anderer Art als die Fälle 1. und 2. ist nun unser Fall 3. Hier erhalten wir als Hüllflächen gar keine Flächen aus speziellen Klassen, sondern die Hüllflächen können noch ganz allgemeiner Natur sein.

Fall 3a). Wir erhalten *Systeme, deren Kugeln alle zu einer festen Kugel senkrecht sind.* Hier kann man sich die eine Hüllfläche und die feste Kugel ganz willkürlich vorgeben. Dann sind die Kugeln des Systems bestimmt als die Kugeln, die die Fläche berühren und zur festen Kugel senkrecht stehen. Die zweite Hüllfläche ist dann einfach invers zu der ersten in bezug auf die feste Kugel. Die Hüllflächen sind also trivialerweise winkeltreu aufeinander bezogen.

Fall 3b). Hier bekommen wir *Systeme von Kugeln, die alle eine feste Kugel in Großkreisen schneiden.* Dieser Fall ist dem vorigen verwandter, als es auf den ersten Blick scheint, wenn man an den schon ausgesprochenen Satz denkt: Alle reellen Kugeln, die zu einer festen nullteiligen Kugel senkrecht sind, schneiden gleichzeitig immer eine zweite feste reelle Kugel in Großkreisen. *Fall* 3b) *liefert uns also Systeme, die zu einer festen nullteiligen Kugel senkrecht sind.*

Fall 3c). Dieser Fall, der bei der Rechnung mit herauskommt, stellt eine Ausartung der vorigen dar. Wir haben hier *Systeme, deren Kugeln alle durch einen festen Punkt gehen.* Die eine Hüllfläche schrumpft dann auf diesen festen Punkt zusammen, und wir können natürlich

nur in einem ausgearteten Sinne von einer winkeltreuen Abbildung der Hüllflächen reden. Wir führen diesen Fall nur der Vollständigkeit halber an.

IV.

Der Fall 3. liefert zwar keine bemerkenswerten Flächenklassen, aber er ist aus einem anderen Grunde von Interesse.

Es ist nämlich die Untergruppe aller Möbiustransformationen, die eine feste Kugel $\mathfrak{k}$ in sich überführen, isomorph zu der *Gruppe der* sogenannten *hyperbolischen nichteuklidischen Bewegungen*, welche aus der projektiven Geometrie bekannt ist. Hat doch Klein gezeigt, daß der Inhalt der durch Lobatschewsky und Bolyai axiomatisch begründeten nichteuklidischen Geometrie gleichbedeutend ist mit der Invariantentheorie dieser Gruppe, die bekanntlich aus allen projektiven Abbildungen besteht, die eine feste Fläche zweiter Ordnung (vom Typ der Kugel) in sich überführen. Die Punkte im Innern der Fläche zweiter Ordnung sind dann die Punkte des Lobatschewskyschen Raumes, die im Innern verlaufenden geradlinigen Strecken aber die Geraden dieser nichteuklidischen Geometrie. Die nichteuklidische Entfernung zweier Punkte erklärt man dann ja durch das Doppelverhältnis, welches sie mit den beiden Punkten bilden, in denen ihre Verbindungsgerade die absolute Fläche zweiter Ordnung trifft.

Da nun, wie erwähnt, in der Möbiusgruppe eine zu den hyperbolischen Bewegungen isomorphe Gruppe enthalten ist, können wir die Lobatschewskysche oder hyperbolische nichteuklidische Geometrie statt in die projektive Geometrie auch in die Möbiusgeometrie einbauen. Wir haben dann in den Möbiusschen Raum eine absolute Kugel $\mathfrak{k}$ eingeführt zu denken und bekommen bei geeigneter Deutung der einzelnen geometrischen Gebilde eine neue Veranschaulichung der hyperbolischen Geometrie, welche zuerst von Poincaré verwendet worden ist. Man hat hier die zu der absoluten Kugel $\mathfrak{k}$ inversen Punktepaare als die Punkte und die zur absoluten Kugel $\mathfrak{k}$ senkrechten Kreise und Kugeln als die Geraden und Ebenen des nichteuklidischen Raumes zu deuten. Ebenso wie man die nichteuklidische Entfernung bei dem Einbau in die projektive Geometrie auf ein Doppelverhältnis zurückführt, kann man sie bei dem Einbau in die Möbiusgeometrie durch eine Möbiusinvariante, nämlich durch einen Winkel erklären. Die beiden Punkte, um deren nichteuklidische Entfernung es sich handelt, sind jetzt durch zwei zur absoluten Kugel $\mathfrak{k}$ inverse Punktepaare $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{u}^*$ und $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{v}^*$ dargestellt, und die nichteuklidische Entfernung ist eine Möbiusinvariante der aus den Punktepaaren und der Kugel $\mathfrak{k}$

bestehenden Figur. Es genügt offenbar, außer der Kugel $\mathfrak{k}$ von jedem der inversen Punktepaare einen Punkt zu nehmen, etwa so, daß die gewählten Punkte $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ auf derselben Seite der Kugel liegen, und dann die Invariante der Figur $\{\mathfrak{k}, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}\}$ zu bestimmen, denn die inversen Punkte $\mathfrak{u}^*$, $\mathfrak{v}^*$ sind ja durch diese Figur automatisch mitbestimmt. Die Invariante von zwei Punkten und einer Kugel haben wir ja aber im Abschnitt II in (8) analytisch bestimmt und geometrisch auf den in der dortigen Figur angedeuteten Winkel der Hilfskugeln zurückgeführt. Durch diesen Winkel läßt sich die nichteuklidische Entfernung in einfacher Weise erklären.

Der Einbau der hyperbolischen Geometrie in die Möbiusgeometrie hat einen zweifachen Vorteil vor dem Einbau in die projektive Geometrie. Während in der projektiven Geometrie die absolute Fläche, die man einzuführen hat, vom Standpunkt der homogenen projektiven Punktkoordinaten aus als ein quadratisches Gebilde anzusehen ist, haben wir in der Möbiusgeometrie ein absolutes lineares Gebilde, den absoluten pentasphärischen Fünfervektor der Kugel $\mathfrak{k}$. Die hyperbolischen Invarianten etwa einer Reihe gegebener Punkte sind dann einfach die Möbiusinvarianten, die sich aus ihren Vektoren und dem absoluten Vektor $\mathfrak{k}$ bilden lassen. Die Aufstellung dieser Invarianten geschieht nach Abschnitt II sehr einfach. An einer Stelle steckt natürlich auch bei unserer neuen Behandlung der hyperbolischen Geometrie „etwas Quadratisches“: Wir gehen ja in der Möbiusgeometrie von vornherein von einer Gruppe mit einer quadratischen Form (6) aus, während wir bei der projektiven Begründung ausgehen von der Gruppe aller linearen Abbildungen der projektiven Punktkoordinaten. Darin aber besteht nun gerade der zweite Vorteil unserer neuen Behandlungsweise: Die analytische Behandlung einer Gruppe „orthogonaler Substitutionen“ (d. h. einer Gruppe mit einer quadratischen Form) ist viel bequemer als die einer allgemeinen linearen Gruppe. Denn bei der ersteren stehen die skalaren Produkte von Vektoren gleich als Invarianten zur Verfügung, während man bei letzteren erst zwei Arten von Vektoren, kovariante und kontravariante, einführen muß, um skalare Produkte bilden zu können.

Genau so, wie man in der Möbiusgeometrie durch Einführung eines Vektors $\mathfrak{k}$ mit $(\mathfrak{k}\mathfrak{k}) > 0$ zur hyperbolischen nichteuklidischen Geometrie gelangt, so kommt man, wie sich zeigt, durch Einführung eines absoluten Vektors $\mathfrak{k}$ mit $(\mathfrak{k}\mathfrak{k}) < 0$, also durch Einführung einer absoluten nullteiligen Kugel *zur elliptischen nichteuklidischen Geometrie*. Ferner gelangt man durch Einführung eines absoluten Punktes $\mathfrak{k}$ mit $(\mathfrak{k}\mathfrak{k}) = 0$ *zur gewöhnlichen euklidischen Bewegungsgeometrie*. Denn die

Untergruppe aller Möbiustransformationen, die einen Punkt festlassen, ist isomorph zur Gruppe der gewöhnlichen ähnlichen Abbildungen. Die Kreise und Kugeln durch den absoluten Punkt sind dabei als die Geraden und Ebenen zu deuten.

Man kann nun im Rahmen der Möbiusgeometrie die beiden nichteuklidischen Geometrien und die euklidische Bewegungsgeometrie sehr weitgehend gemeinsam behandeln, indem man einen absoluten Vektor $\mathfrak{k}$ annimmt, bei dem man über den Wert des skalaren Quadrates zunächst noch nichts voraussetzt. Gerade weil man nur ein lineares absolutes Gebilde einzuführen hat, ist hier eine formal viel innigere und einheitlichere Zusammenfassung der drei Geometrien möglich als auf dem Boden der projektiven Geometrie, wo die euklidische Geometrie ja als ein verhältnismäßig unangenehmer Grenzfall der nichteuklidischen erscheint.

V.

In unserem Fall 3a) war das Kugelsystem durch eine Hüllfläche und die feste Kugel, zu der alle Systemkugeln senkrecht sind, völlig bestimmt. Denken wir uns nun die feste Kugel als die absolute Kugel $\mathfrak{k}$ der hyperbolischen Geometrie, so treiben wir Möbiusgeometrie der Hüllfläche bezüglich dieser festen Kugel, d. h. wir haben hier einfach die *hyperbolische nichteuklidische Flächentheorie.* Die beiden zueinander bezüglich der absoluten Kugel inversen Hüllflächen sind dann als eine Fläche aufzufassen, und die Kugeln des Systems sind die Tangentenebenen der Fläche. Haben wir also einmal die Möbiusgeometrie der Kugelsysteme systematisch entwickelt, so liefert uns unser Spezialfall 3a) einfach die hyperbolische Flächentheorie, wie sie etwa von *Bianchi* behandelt worden ist. In ganz ähnlicher Weise führt uns der Fall 3b) *zur elliptischen nichteuklidischen Flächentheorie* und endlich der Fall 3c) *zur gewöhnlichen euklidischen Flächentheorie. Der Fall* 3. *liefert uns also eine gemeinsame Behandlung der hyperbolischen, elliptischen und euklidischen Flächentheorie.*

VI.

Damit ist die Besprechung der Lösungen unseres Darbouxschen Problems beendet. Von diesem Problem ausgehend wollen wir jetzt aber noch andere Ideen und Zusammenhänge der Kugelgeometrie entwickeln, die wichtiger und weitertragend sind als die soeben geschilderten. Es zeigt sich: Wenn wir mit gewissen Verhältnissen der Kugelgeometrie vertraut sind, dann können wir aus der Lösung unseres Darbouxschen Problems ohne jede neue Rechnung auch die Lösung eines anderen Problems unmittelbar ablesen, das eine Art Grenzfall

von jenem darstellt. Wir können uns nämlich die beiden Hüllflächen unseres Kugelsystems auf die Einheitskugel von Gauß sphärisch abbilden. Damit eine solche Abbildung auf eindeutige Weise bestimmt ist, denken wir uns jetzt die Kugeln des Systems *gerichtet* oder *orientiert*, d. h. wir denken uns entweder das Äußere oder das Innere unserer Kugeln als ihre positive Seite ausgezeichnet. Dann wird auch auf die Hüllflächen ein bestimmter positiver Normalensinn übertragen, und für diesen ist das sphärische Bild eindeutig bestimmt. Der punktweisen Zuordnung der Hüllflächen entspricht auch eine punktweise Zuordnung ihrer sphärischen Bilder auf der Einheitskugel. Unsere neue Frage ist nun die folgende: *Bei welchen Kugelsystemen sind die sphärischen Bilder der Hüllflächen einander auf der Einheitskugel winkeltreu zugeordnet?*

Dies neue Problem nimmt in der sogenannten *Kugelgeometrie von Laguerre* eine ganz entsprechende Stellung ein wie das Darbouxsche in der Geometrie von Möbius. Und daß das zweite Problem als ein Grenzfall des ersten erscheint, das hängt mit der Tatsache zusammen, daß sich überhaupt die Geometrie von Laguerre als eine Art Grenzfalls aus der von Möbius gewinnen läßt. Was ist nun die Geometrie von Laguerre? Wie es in der Geometrie von Möbius die Punkte und Kugeln sind, die die einfachsten Grundgebilde darstellen, so sind dies in der Geometrie von Laguerre die Ebenen und Kugeln, und zwar hat man sich hier die Ebenen und Kugeln als gerichtet vorzustellen. Ebenso wie in der Geometrie von Möbius die Ebenen keine selbständige Bedeutung haben und den Kugeln zuzurechnen sind, so muß man in der Geometrie von Laguerre die Punkte den Kugeln zuzählen. Dem *Winkel* der Möbiusgeometrie entspricht in der Geometrie von Laguerre als Invariante zweier (gerichteter) Kugeln die *Tangentenentfernung*, das ist die Entfernung der beiden Berührungspunkte auf einer beliebigen gemeinsamen gerichteten Tangentenebene der beiden Kugeln. *Wie sich nun der Inhalt der Möbiusgeometrie erschöpft in den Beziehungen der vereinigten Lage von Punkten und Kugeln, in den Winkelbeziehungen von Kugeln und in den Beziehungen, die sich auf diese Grundbeziehungen zurückführen lassen, so handelt es sich in der Geometrie von Laguerre ausschließlich um die gleichsinnige Berührung von gerichteten Ebenen und Kugeln und um die Tangentenentfernungen von Kugeln.*

Die Gruppe der Kugeltransformationen von Laguerre ist wie die Gruppe von Möbius zehngliedrig. Die zehngliedrige Gruppe ist die sogenannte *engere Gruppe von Laguerre*, sie erzeugt gemeinsam mit den gewöhnlichen Ähnlichkeitstransformationen eine elfgliedrige Gruppe, die sogenannte *erweiterte Gruppe von Laguerre*. Gegenüber dieser letzten Gruppe ist nur das Verhältnis zweier Tangenten-

entfernungen invariant. *Beide Gruppen von Laguerre sind nun ebenso wie die von Möbius als Untergruppen in der fünfzehngliedrigen Gruppe der höheren Kugeltransformationen von Lie enthalten.*

Im Zusammenhang damit kann man die beiden Geometrien von Möbius und Laguerre in die *höhere Kugelgeometrie von Lie* einbauen. Und zwar ergibt sich, wie wir im nächsten Abschnitt zeigen werden, die Gruppe von Laguerre auf dem Boden der Geometrie von Lie als ein Grenzfall der Gruppe von Möbius.

Der Invariante zweier Fortschreitungsrichtungen auf einer Fläche, die in der Möbiusgeometrie durch den Winkel dargestellt wird, entspricht, wie sich zeigt, bei dem Grenzübergang zur Geometrie von Laguerre der Winkel dieser Fortschreitungsrichtungen im sphärischen Bild, und daher kommt es auch, daß unser zweites Problem aus der Theorie der Kugelsysteme sich als ein Grenzfall des ersten Problems von Darboux auffassen läßt.

Wir teilen noch einiges über seine Lösung mit: Es ergeben sich wieder die drei Fälle 1., 2., 3. Im Fall 1. erhalten wir wieder spezielle Ribaucoursche Systeme. Die Hüllflächen sind jetzt aber nicht Isothermflächen, sondern sie müssen *Flächen* sein, *bei denen das Netz der Krümmungslinien im sphärischen Bild ein isothermes Netz ist.* Im Fall 2. erhalten wir Kugelsysteme, deren Hüllflächen jetzt statt der Konformminimalflächen sogenannte *L-Minimalflächen* sind. Die L-Minimalflächen sind die Extremalen des einfachsten laguerreinvarianten Variationsproblems für Flächen. Auf die Bedeutung dieser Flächenklasse, auf die man im Laufe der Zeiten schon von den verschiedensten Seiten aus gestoßen war[1]), für die Geometrie von Laguerre hat zuerst W. Blaschke hingewiesen. Sie hängt von einer Differentialgleichung vierter Ordnung in den Punktkoordinaten der Fläche ab, die sich vollständig integrieren läßt. Im Fall 3. erhalten wir wieder in drei Unterfällen Kugelsysteme, deren Hüllflächen nicht spezieller Natur zu sein brauchen. Wir wollen auf sie nicht näher eingehen.

VII.

Was ist nun die höhere Kugelgeometrie von Lie?[2]) Man geht in dieser Geometrie statt von den pentasphärischen von den sogenannten

1) Vgl. W. Blaschke, l. c. § 81, § 83, Aufg. 13, 14.

2) E. Study hat in seinen Arbeiten „S. Lies Geometrie der Kreise und Kugeln" (Math. Ann. 86—91) sowie in „Vereinfachte Begründung von Lies Kugelgeometrie" (Sitzber. der preuß. Akad. der Wissensch. 1926) eine Begründung der *komplexen* Kugelgeometrie gegeben. Jedoch sind die Begriffsbildungen dieser Arbeit für die reelle Kugelgeometrie nicht nötig, und um diese handelt es sich in unserm Referat ausschließlich.

hexasphärischen Kugelkoordinaten aus. Man erhält diese, indem man den Gleichungen (1) noch eine sechste

(9) $$x_5 = \varrho \cdot R$$

hinzufügt. Zu gegebenen ξ, η, ζ, R kann man jetzt die Verhältnisse $x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5$ der sechs hexasphärischen Koordinaten eindeutig bestimmen. Jetzt kommt aber nicht nur R^2, sondern auch R selbst in den Formeln vor, und für $+R$ und $-R$ ergeben sich wesentlich verschiedene Systeme der Koordinaten x. Nur wenn wir von gerichteten Kugeln ausgehen und diesen einen positiven oder negativen Radius zuordnen, je nachdem ihre positive Seite das Äußere oder das Innere ist, können wir zu jeder gerichteten Kugel eindeutig ein System von Verhältnisgrößen x bestimmen. Da wir jetzt fünf Verhältnisgrößen haben, eine Kugel aber nur von vier Bestimmungsstücken abhängt, müssen die hexasphärischen Kugelkoordinaten einer Bedingung genügen. In der Tat erhalten wir

$$R^2 = \frac{x_5^2}{\varrho^2} \quad \text{oder nach (2)} \quad R^2 = \frac{x_5^2}{(x_0 + x_1)^2};$$

mit (4) kombiniert gibt das

(10) $$\langle \mathfrak{x}\mathfrak{x} \rangle = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 = 0,$$

wo wir die quadratische Form (10) in den sechs Variablen jetzt durch die eckigen Klammern von der in den fünf Variablen unterscheiden. Es ist aus (3), (4) dann leicht zu ersehen, daß sich die Systeme der fünf Verhältnisse der sechs hexasphärischen Koordinaten, die den Bedingungen

(11) $$\langle \mathfrak{x}\mathfrak{x} \rangle = 0 \quad \text{und} \quad x_0 + x_1 \neq 0 \quad \text{sowie} \quad x_5 \neq 0$$

genügen, eineindeutig den gewöhnlichen gerichteten Kugeln zuordnen lassen. Den gerichteten Ebenen kann man nun wieder, wie wir nur berichten, gerade die Systeme der homogenen hexasphärischen Koordinaten mit

(12) $$\langle \mathfrak{x}\mathfrak{x} \rangle = 0 \quad \text{und} \quad x_0 + x_1 = 0 \quad \text{sowie} \quad x_5 \neq 0$$

eineindeutig zuordnen. Für $R = 0$ in (1) und (9) erhält man weiter, daß die gewöhnlichen Punkte den Systemen mit

(13) $$\langle \mathfrak{x}\mathfrak{x} \rangle = 0 \quad \text{und} \quad x_5 = 0 \quad \text{sowie} \quad x_0 + x_1 \neq 0$$

eineindeutig entsprechen. Für $\langle \mathfrak{x}\mathfrak{x} \rangle = 0$ und $x_0 + x_1 = x_5 = 0$ endlich muß bei reellen x nach (10) auch $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ sein, so daß nur ein einziges solches System von Verhältniswerten existiert, dem wir dann wieder den uneigentlichen oder unendlich fernen Punkt zu-

ordnen. Fassen wir die gerichteten Kugeln und die gerichteten Ebenen ($R \longrightarrow \infty$), die gewöhnlichen Punkte ($R = 0$) und den uneigentlichen Punkt alle in den Begriff der *Lie-Kugel* zusammen, so können wir sagen: *Den Systemen* $x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5$, *die der quadratischen Gleichung* (10) *genügen, entsprechen eineindeutig die Lie-Kugeln des Raumes.* Wir wollen nun von einer *Berührung zweier Lie-Kugeln* in den folgenden Fällen sprechen: Bei der gleichsinnigen Berührung von gerichteten Kugeln und Ebenen, bei dem gleichsinnigen Parallelismus zweier gerichteter Ebenen und bei der vereinigten Lage von Punkten mit gerichteten Kugeln und Ebenen.

Da die Ebenen als Kugeln durch den uneigentlichen Punkt aufzufassen sind, wollen wir dann auch eine beliebige gerichtete Ebene und den uneigentlichen Punkt immer als sich berührende Liekugeln betrachten. Bei dieser Auffassung des Begriffes Berührung ist nun die Bedingung für das Berühren zweier Liekugeln $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ durch die zu (10) bilineare Gleichung

$$(14) \quad \langle \mathfrak{x}\mathfrak{y} \rangle = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 - x_5 y_5 = 0$$

gegeben, wie man durch Rückgang auf kartesische Koordinaten bestätigen kann.

Die Abbildungen von Lie lassen sich weiter erklären als die allgemeinsten eineindeutigen Abbildungen von Liekugeln, die sich berührende Liekugeln immer wieder in ebensolche überführen. Es ergibt sich dann, daß die Gruppe derjenigen linearen Transformationen der hexasphärischen Koordinaten, die die Form $\langle \mathfrak{x}\mathfrak{x} \rangle$ invariant lassen, gerade schon die gesamte Gruppe dieser Abbildungen von Lie darstellt. Wir haben also wieder eine Gruppe, die, abgesehen von den zwei negativen Zeichen in der Form (14), eine Gruppe orthogonaler Substitutionen ist. Die analytische Behandlung der Geometrie von Lie geschieht daher ganz analog zu der für die Möbiusgeometrie angegebenen, wir sind hier nur eine Dimension höher. Die Liekugeln werden jetzt durch Sechservektoren dargestellt, und für die analytische Bestimmung der Invarianten einer gegebenen Anzahl von Sechservektoren gelten ganz dieselben Regeln, wie wir sie in Abschnitt II angegeben haben. Im Gegensatz zur Möbiusgeometrie können jetzt durch eine Abbildung von Lie die Punkte in beliebige gerichtete Kugeln und Ebenen übergeführt werden.

Wir müssen nun noch auf einen wichtigen Begriff der Liegeometrie zu sprechen kommen, auf den Begriff des *linearen Kugelkomplexes.* Während in der Möbiusgeometrie den Nullvektoren, für welche die Form (6) verschwand, die Punkte entsprachen, den übrigen Vektoren

aber die reellen Kugeln (Ebenen) und die nullteiligen Kugeln, sind bei den Sechservektoren der Geometrie von Lie die Nullvektoren den sämtlichen Kugeln, Ebenen und Punkten, genauer den sämtlichen Liekugeln zugeordnet. Es fragt sich nun, welche geometrischen Gebilde hier den Vektoren $\mathfrak{x}$ mit $\langle\mathfrak{x}\mathfrak{x}\rangle \neq 0$ zuzuordnen sind.

Wir wollen allgemein eine Mannigfaltigkeit aller der Liekugeln $\mathfrak{x}$, die einer linearen Gleichung

$$(15) \qquad \langle\mathfrak{x}\mathfrak{a}\rangle = -x_0a_0 + x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 - x_5a_5 = 0$$

mit beliebigen, nur nicht gleichzeitig verschwindenden Koeffizienten a genügen, als einen *linearen Kugelkomplex* bezeichnen. Offenbar besteht ein solcher Komplex aus ∞^3 Kugeln. Wir können die sechs Größen a als homogene Koordinaten des Kugelkomplexes auffassen. Da sich die a bei unseren orthogonalen Substitutionen von einem gemeinsamen Faktor abgesehen, genau so transformieren, wie die hexasphärischen Koordinaten der Liekugeln, können wir somit den allgemeinen Vektoren die linearen Komplexe zuordnen. Ein solcher Vektor $\mathfrak{a}$ hat nun eine Invariante gegenüber der Gruppe der orthogonalen Substitutionen, sein skalares Quadrat $\langle\mathfrak{a}\mathfrak{a}\rangle$. Bei einer Umnormierung der homogenen Koordinaten $a_i = \lambda \cdot a_i^*$ $(i = 0, 1 \text{ bis } 5)$, mit einem gemeinsamen reellen Faktor λ multipliziert sich $\langle\mathfrak{a}\mathfrak{a}\rangle$ mit λ^2. Es ist also das Vorzeichen sgn $\langle\mathfrak{a}\mathfrak{a}\rangle$ eine Invariante der Geometrie von Lie. Wir haben also drei wesentlich verschiedene Typen von linearen Komplexen, je nachdem $\langle\mathfrak{a}\mathfrak{a}\rangle > 0$, $\langle\mathfrak{a}\mathfrak{a}\rangle = 0$ oder $\langle\mathfrak{a}\mathfrak{a}\rangle < 0$ gilt. Wir bezeichnen die Komplexe mit $\langle\mathfrak{a}\mathfrak{a}\rangle > 0$ als *elliptische*, die mit $\langle\mathfrak{a}\mathfrak{a}\rangle = 0$ als *parabolische* und die mit $\langle\mathfrak{a}\mathfrak{a}\rangle < 0$ als *hyperbolische*. Im Fall des parabolischen Komplexes besteht nach (14) der Komplex (15) einfach aus allen Liekugeln $\mathfrak{x}$, die die feste Liekugel $\mathfrak{y}$ mit den hexasphärischen Koordinaten $y_i = a_i$ berühren. Der parabolische Komplex ist dann überhaupt äquivalent mit der Kugel $\mathfrak{y} = \mathfrak{a}$. Ein spezieller parabolischer Komplex ist der mit den Koordinaten $\{a_0 = -1,\ a_1 = 1,\ a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0\}$, dessen Gleichung nach (15) $x_0 + x_1 = 0$ ist. Dieser Komplex besteht nach (12) einfach aus den *sämtlichen gerichteten Ebenen* des Raumes. Diese können wir ja auch als diejenigen Liekugeln erklären, die die feste Liekugel des uneigentlichen Punktes berühren.

Indem man in (15) die hexasphärischen Koordinaten $\mathfrak{x}$ nach (1), (9) durch die kartesischen ersetzt, kann man leicht nachweisen, daß ein elliptischer linearer Komplex immer aus den sämtlichen Liekugeln besteht, die eine feste gerichtete Kugel oder Ebene unter einem festen Winkel schneiden. Auf die Konfigurationen, die die hyperbolischen

Komplexe bilden, wollen wir hier nicht näher eingehen, sondern nur erwähnen, *daß die sämtlichen Punkte des Raumes einen speziellen hyperbolischen Komplex bilden.* Für den Komplex $\{a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0;\ a_5 = -1\}$ gilt nämlich $\langle \mathfrak{a}\mathfrak{a} \rangle < 0$, und die zugehörige Gleichung (15) wird dann $x_5 = 0$. Diese Gleichung kennzeichnet nach (13) aber unter den Liekugeln die Punkte.

Wir wollen zum Schluß unserer Ausführungen über die Liegeometrie noch erwähnen, daß eine absolute Invariante dieser Geometrie durch das *Doppelverhältnis von vier Liekugeln* gegeben ist, die alle einem Büschel durch ein festes gerichtetes Flächenelement angehören. *Auf die Begriffe Liekugel, Berührung von Liekugeln und Doppelverhältnis von vier Kugeln eines Büschels läßt sich dann die ganze Geometrie von Lie aufbauen.*[1] Auch die Konfigurationen, welche die Liekugeln der elliptischen und hyperbolischen Komplexe bilden, lassen sich mit Hilfe dieser Begriffe kennzeichnen.[2]

VIII.

Wir kommen jetzt zum Einbau der Geometrien von Möbius und Laguerre in die Geometrie von Lie. Während durch die Abbildungen von Lie Punkte, Ebenen und Kugeln alle miteinander vertauscht werden konnten, macht die Untergruppe derjenigen Abbildungen von Lie, die Punkte immer wieder in Punkte überführen, gerade die Gruppe von Möbius aus. Dagegen ist die Untergruppe, die Ebenen immer wieder mit Ebenen vertauscht, die (erweiterte) Gruppe von Laguerre. Wir können das auch so ausdrücken: Die Möbiusgruppe ist die Untergruppe, die den hyperbolischen Komplex $x_5 = 0$ aller Punkte in sich überführt, und die Gruppe von Laguerre ist die Untergruppe, die den parabolischen Komplex aller Ebenen $x_0 + x_1 = 0$ in sich überführt. Da alle hyperbolischen Komplexe unter sich und auch alle parabolischen Komplexe unter sich in der Liegeometrie äquivalent sind, *ist jede Untergruppe der Gruppe von Lie, die einen beliebigen hyperbolischen Komplex invariant läßt, isomorph zur Möbiusgruppe.* Man kann daher im Rahmen der Liegeometrie einfach Möbiusgeometrie treiben, indem man den Sechservektor eines absoluten hyperbolischen Komplexes $\mathfrak{a}$ ($\langle \mathfrak{a}\mathfrak{a} \rangle < 0$) in den Formeln mitführt, in ganz ähnlicher Weise, wie wir im Abschnitt IV bei der nichteuklidischen Geometrie den absoluten Fünfervektor $\mathfrak{k}$ verwendet haben. Die Liekugeln in dem Komplex $\mathfrak{a}$ sind dabei einfach als die Punkte zu deuten. Die Möbiusinvarianten einer Reihe gegebener Punkte und Kugeln

1) Vgl. W. Blaschke, l. c. § 52. 2) Vgl. W. Blaschke, l. c. § 53.

sind dann einfach die Lieinvarianten, die sich aus ihren Sechservektoren gemeinsam mit dem des absoluten Komplexes $\mathfrak{a}$ bilden lassen. Ihre Bestimmung geschieht, wie wir wissen, ja sehr einfach. In ganz entsprechender Weise gelangen wir von der Liegeometrie zur *Laguerregeometrie*, indem wir einen absoluten parabolischen Komplex $\mathfrak{a}(\langle\mathfrak{a}\mathfrak{a}\rangle = 0)$ mitführen, und dabei die diesem angehörenden Liekugeln als die gerichteten Ebenen deuten. Wir können Möbiusgeometrie und Laguerregeometrie gemeinsam behandeln, indem wir zunächst offen lassen, welchen Wert das skalare Quadrat des absoluten Vektors $\mathfrak{a}$ besitzt. Wir haben hier auf der höheren Stufe der Sechservektoren ganz die entsprechenden Verhältnisse, wie wir sie beim Einbau der nichteuklidischen und euklidischen Geometrie in die Möbiusgeometrie im Abschnitt IV antrafen. Wir können sagen, daß die Möbiusgeometrie sich zur Laguerregeometrie ähnlich verhält, wie die nichteuklidische Geometrie zur euklidischen. Wieder gestaltet sich die Zusammenfassung der Geometrien so einheitlich, weil das absolute Gebilde, das man einzuführen hat, ein lineares Gebilde ist.

Wir erwähnen der Vollständigkeit halber noch, daß man auch von der Liegeometrie direkt zu der nichteuklidischen und euklidischen Geometrie gelangen kann, indem man in gewisser Weise zwei absolute Sechservektoren einführt.

Die Flächentheorie läßt sich für die Möbius- und für die Laguerregeometrie gemeinsam entwickeln, indem man ein zweiparametriges System von Liekugeln annimmt, das in dem absoluten Komplex $\mathfrak{a}$ enthalten ist. Nehmen wir dann $\mathfrak{a}$ als hyperbolisch an, so stellt das System die Punkte einer Fläche dar, nehmen wir $\mathfrak{a}$ aber als parabolisch an, so haben wir ∞^2 Ebenen, die eine Fläche umhüllen. Man kann dann die Flächentheorie in hexasphärischen Koordinaten systematisch entwickeln, indem man nach dem Muster anderer differentialgeometrischer Theorien hier ein die Fläche begleitendes Sechsbein von Vektoren einführt. Als den einen dieser Vektoren wird man am besten den absoluten Komplex $\mathfrak{a}$ annehmen. Läßt man dann $\langle\mathfrak{a}\mathfrak{a}\rangle$ von negativen Werten gegen 0 wandern, so erhält man zu jedem Satz der Möbiusgeometrie als Grenzfall einen der Laguerregeometrie. Es fließen dabei oft Sätze aus einer gemeinsamen Quelle, denen man es ohne weiteres gar nicht ansieht. So kann man z. B. in der Möbiusgeometrie die *Orthogonalflächen einer Kugelschar* behandeln, d. h. die Flächen, welche aus einer einparametrigen Kurvenschar von orthogonalen Trajektorien einer Kugelschar gebildet werden. Beim Grenzübergang zur Laguerregeometrie entspricht dieser Flächenklasse einfach die Klasse der *Flächen mit einer Schar ebener Krümmungslinien. Aus jedem Satz*

über die Orthogonalflächen einer Kugelschar erhält man also als Grenzfall einen Satz über Flächen mit einer Schar ebener Krümmungslinien. Auch der Grenzübergang zwischen unseren beiden Problemen über Kugelsysteme (vgl. VI) ergibt sich in einer solchen Weise.

IX.

Es war das Ziel dieser Ausführungen, zu zeigen, daß die Kugelgeometrie eigentlich ein noch schlagenderes Beispiel für die Fruchtbarkeit der Ideen des Erlanger Programms darstellt als die projektive Geometrie. Gerade bei den schwierigeren Problemen der Differentialgeometrie kommt das in vollem Maße zur Geltung. Alles das, was an den Kleinschen Ideen von Reiz und von besonderer Bedeutung erscheint, die Zusammenfassung einzelner Zweige der Geometrie in ein einheitliches System und die gemeinsame Behandlung einander scheinbar ganz fremder Probleme, alles das kommt in der Kugelgeometrie in besonders deutlicher Weise zum Ausdruck.

Die wichtigsten endlichen geometrischen Gruppen sind entweder Untergruppen der projektiven Gruppe oder solche der Gruppe von Lie. Da die Differentialgeometrie der projektiven Gruppen heute in ihren Grundzügen vorliegt[1]), wird der Ausbau der Differentialgeometrie im Sinne des Erlanger Programms durch die entsprechenden Entwicklungen der Kugelgeometrie vielleicht zu einem gewissen Abschluß gebracht, wenigstens soweit endliche Gruppen in Frage kommen.

Während die Ideen des Erlanger Programms sich ihrem historischen Werdegange nach an der projektiven Geometrie entwickelt haben, erscheint die Kugelgeometrie als ein zunächst wohl weniger zugängliches, aber in seinem ganzen Ausbau besonders vollkommenes Stück Geometrie.

---

1) Über die Differentialgeometrie der affinen Gruppe vergleiche W. Blaschke, Differentialgeometrie. Bd. II (J. Springer, Berlin); über die projektive Differentialgeometrie das zweibändige Lehrbuch „Fubini-Čech „Geometria proiettiva differenziale" (Zanichelli, Bologna), sowie auch die §§ 90ff. des III. Bd. des Lehrbuches von Blaschke.

(Eingegangen am 1. 11. 1928.)

Albert Victor Bäcklund.[1])

Von C. W. OSEEN in Uppsala.

1. Leben.

Albert Victor Bäcklund wurde am 11. Jan. 1845 im Kirchspiel Väsby in Schonen geboren. Seine Eltern waren Hans Peter Bäcklund, damals Kassenführer bei den Steinkohlenwerken in Höganäs, und seine Gattin Maria Wilhelmina Pride. Nachdem die Eltern 1853 nach der Stadt Hälsingborg übersiedelt waren, wo der Vater später Kassenführer bei einer Bank wurde, wurde Bäcklund 1854 in die Elementarschule in Hälsingborg aufgenommen, von der er sieben Jahre später an die Universität Lund abging. Am 28. Mai 1861 bestand er dort die Reifeprüfung. Als Student in Lund widmete sich Bäcklund hauptsächlich den exakten Wissenschaften. Unter seinen Lehrern zu dieser Zeit nannte er später mit Dankbarkeit den Mathematiker E. v. Zeipel. Am 27. Februar 1864 wurde Bäcklund zum Assistenten an der Sternwarte ernannt. Er kam durch diese Ernennung in enge Verbindung mit dem Professor für Astronomie A. Möller, welcher selbst Bäcklunds astronomische Studien leitete. Wenn auch Bäcklund sein Lebenswerk nicht im Rahmen der Astronomie schuf, haben doch diese astronomischen Studien eine entscheidende Bedeutung für seine Entwicklung gehabt. Wesentlich durch die Astronomie wurde er zur höheren Mathematik und zur Mechanik geführt. „Es war", schrieb er selbst später, „die Astronomie, die mich lehrte, wie fruchtbar die abstrakten Regeln der Mathematik sind und mit welch wunderbarer Kraft die Mathematik und Mechanik in Verbindung miteinander von den Beobachtungen der Gegenstände der Natur zu tieferer Einsicht in das Wesen derselben führen." — Am 14. September 1866 bestand Bäcklund die Kandidatenprüfung. Am 7. Mai 1868 fand die Disputation für die philosophische Doktorwürde statt. Die Dissertation trägt den Titel: „Bestimmung der Polhöhe der Sternwarte Lunds mittels Beobachtungen im ersten Vertikal." Sie wurde mit den Preisen für die beste Dissertation mathematischen Inhalts belohnt und in den vierten Band der Jahresschrift der Universität aufgenommen. Sie ist das nach außen sichtbare Ergebnis von Bäcklunds astronomischen Studien. Bäck-

1) Übersetzung des Verfassers aus dem Schwedischen Text, der in K. Svenska vetenskapsakademiens årsbok för år 1924 erschien.

lund promovierte am 29. Mai 1868 zum „Doktor Philosophiae" und wurde unmittelbar danach zum Privatdozenten für Astronomie ernannt. Nach kurzer Zeit (Januar 1869) vertauschte er indessen diese Dozentenstelle gegen eine ebensolche für Geometrie. Seine Befähigung für diese neue Stellung hatte er durch eine Abhandlung „Einige Sätze über ebene algebraische Kurven, welche durch dieselben Schnittpunkte gehen" (Lunds universitets årsskrift T. 5, 1868) erwiesen. Als Grund für diesen Übergang hat Bäcklund selbst später hervorgehoben, daß seine Neigung entschieden zur reinen Mathematik übergegangen war. Man darf indessen wohl annehmen, daß auch der Umstand, daß die Professur für Mathematik wegen des hohen Alters des Inhabers, Professor C. J. D. Hill, bald frei werden mußte, einen Einfluß auf diesen Entschluß gehabt hat. In der Tat trat Hill 1870 in den Ruhestand ein. Bäcklund, der die kurze Zeit, welche zu seiner Verfügung stand, zu einer umfassenden schriftstellerischen Tätigkeit benutzt hatte, bewarb sich um die Professur und erhielt auf dem Vorschlag des Konsistoriums den dritten Platz. Ein anderer Beweis der Achtung, welche Bäcklund schon jetzt erworben hatte, ist der Umstand, daß er damals Mitglied der Physiographischen Gesellschaft in Lund wurde (Februar 1872). — Im Jahre 1874 machte Bäcklund mit Hilfe eines Staatsstipendiums eine halbjährige Reise ins Ausland. Den größeren Teil jener Zeit brachte er in Leipzig und Erlangen zu, wo er mit mehreren von den bedeutendsten deutschen Mathematikern, u. a. Klein und Lindemann, in Verbindung trat. Wieder zu Hause, bewarb er sich um die Professur für Mechanik in Uppsala und wurde vom Konsistorium an zweiter Stelle empfohlen. Nach der Errichtung eines Extraordinariats für Mechanik und mathematische Physik in Lund wurde Bäcklund, der schon in zwei Jahren in diesem Fach vorgetragen und geprüft hatte, 1878 der erste Inhaber desselben. Während mehrerer Jahrzehnte wirkte er in dieser Stellung als Lehrer und Forscher an der südschwedischen Universität. Von seinem wachsenden Ansehen geben die Ernennungen zum Mitgliede der K. Akademie der Wissenschaften in Stockholm 1888 und der Sozietät der Wissenschaften in Uppsala 1897 Zeugnis. Als das Ordinariat für Physik 1897 durch K. A. Holmgrens Eintritt in den Ruhestand frei wurde, bewarb sich Bäcklund darum. Während der Behandlung dieser Angelegenheit fand er Gelegenheit zu betonen, daß er kein neues Fach wünsche, sondern nur für die Gleichberechtigung der mathematischen Physik mit der Experimentalphysik eintreten wolle. Er wurde in der Tat 1900 zum Professor der Physik mit Lehrpflicht in Mechanik und mathematischer Physik ernannt. Auch im neuen Amt ging seine Tätigkeit auf der alten Bahn weiter. Während der

Jahre 1907—1909 war er Rektor der Universität in Lund. 1910 trat er in den Ruhestand.

Seiner Lehrtätigkeit widmete sich Bäcklund mit Liebe und Eifer. Mehr als einmal hörte man ihn über die Freude sprechen, die seine Vorträge ihm selbst machten. Auch durch Taten gab er dieser Freude Ausdruck. Ohne irgendeinen Vorteil für sich selbst hielt er jahrzehntelang außer seinen vier pflichtgemäßen Vorträgen noch vier andere Vorträge. Sein Interesse für die Zuhörer zeigte er unter anderem dadurch, daß er, der Junggeselle, sie jedes Jahr einmal zu einem Gastmahl einlud. Bei diesen Festen wurde immer Hummer gegessen. Während der Rektorjahre nahm seine Gastlichkeit sehr große Dimensionen an.

Die Jahre des Ruhestandes wurden durch eine umfassende schriftstellerische Tätigkeit ausgefüllt. Zum größeren Teil kann Bäcklunds Forschung während dieser Jahre als die Fortsetzung der Bestrebungen seiner kräftigsten Zeit aufgefaßt werden. Doch kommen auch Beiträge zu einer wichtigen Theorie der neuesten Zeit, der Relativitätstheorie, vor. Er starb nach kurzer Krankheit am 23. Februar 1922.

2. Mathematische Jugendarbeiten.

Ich gebe hier eine kurze Übersicht der mathematischen Arbeiten, welche Bäcklund während der Jahre 1868—1872 veröffentlichte. Sie sind alle in schwedischer Sprache geschrieben. Wie oben erwähnt, hatten sie den Zweck, Bäcklunds Fähigkeit für die mathematische Professur zu erweisen.

Die Anregung zum mathematischen Denken und zur mathematischen Schriftstellerschaft erhielt Bäcklund durch das Studium der Arbeiten von Chasles und von Cremona. Chasles' „Aperçu historique" und Cremonas „Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Kurven" in Curtzes 1865 erschienener deutscher Übertragung sind die Werke, welche Bäcklund in seiner ersten mathematischen Periode am häufigsten zitiert.

Bäcklunds erste mathematische Abhandlung, die oben erwähnten „Einige Sätze über ebene algebraische Kurven, welche durch dieselben Schnittpunkte gehen", enthält eine Untersuchung über die Involutionen, welche von den Kurven eines Büschels auf einer beliebigen geraden Linie ausgeschnitten werden. Die Ergebnisse werden auf die Theorie der Kurven angewandt, wobei die Kurven dritter und vierter Ordnung besonders berücksichtigt werden. Als methodisches Hilfsmittel wird oft die Entstehung einer Kurve durch den Schnitt entsprechender Kurven in zwei projektivisch aufeinander bezogenen Büscheln benutzt. Besondere Aufmerksamkeit wird dem Falle ge-

widmet, wo die erzeugte Kurve in mehrere Kurven niedrigerer Ordnung zerfällt. Einige Ergebnisse stimmen mit Sätzen überein, die Zeuthen früher (1863) gefunden hatte.

Eine nachfolgende Abhandlung „Einige Sätze über die Normalen algebraischer Kurven", Lunds universitets årsskrift T. 5, 1869, ist in drei Abschnitte geteilt:

1. Eine Kurve m-ter Ordnung, C_m, und ein Netz von Kurven n-ter Ordnung sind gegeben. Die Parameter, welche eine bestimmte Kurve des Netzes kennzeichnen, werden als die Koordinaten eines Punktes einer Ebene aufgefaßt. Die Forderung, daß eine Kurve des Netzes in einem Punkte die C_m senkrecht schneiden soll, gibt zu einer Beziehung zwischen diesen Parametern und damit zu einer Kurve in der Ebene der Parameter Anlaß. Bäcklund bestimmt durch geometrische Methoden die Plückerschen Charaktere dieser Kurve für den Fall, daß die C_m keine andere Punktsingularitäten als Doppelpunkte und Spitzen besitzt.

2. Es wird angenommen, daß das Netz aus den geraden Linien der Ebene besteht. Die Resultate des ersten Abschnittes geben unmittelbar die Plückerschen Charaktere einer Kurve, welche zu der Evolute der C_m reziprok ist. Mittelbar geben sie also die Charaktere der Evolute selbst. Das Ergebnis wird nur für den Fall formuliert, daß die C_m keine Punktsingularitäten besitzt. Als eine andere Methode, dasselbe Problem zu behandeln, gibt Bäcklund (ohne doch dieses Wort zu nennen) eine Berührungstransformation an, welche eine beliebige C_m in ihre Evolute transformiert. In dem speziellen Fall, wo die C_m ein Kegelschnitt ist, wird die Transformation sehr einfach. Eine Reihe von Sätzen über die Ellipsenevolute werden mitgeteilt, welche bei dieser Transformation aus bekannten Sätzen über die Ellipse hervorgehen.

3. Der dritte Abschnitt ist dem Krümmungsradius gewidmet. Man erhält ein Bild der C_m in der Weise, daß von einem festen Punkte O aus Strecken gezogen werden, welche mit den Normalen der C_m parallel sind und dieselben Längen wie die entsprechenden Krümmungsradien haben. Durch geometrische Betrachtungen bestimmt Bäcklund die Plückerschen Charaktere der so erhaltenen Kurve. Im Anschluß an Chasles entwickelt er dann eine Methode, den Krümmungsradius einer gezeichnet vorliegenden algebraischen Kurve zu bestimmen. Als weiteres Hilfsmittel bei dem Studium des Krümmungsradius wird die Theorie der homologen Kurven benutzt. Als Beispiel der Resultate führe ich den Satz an, der den Schluß der Abhandlung bildet: Wenn von einem beliebigen Punkte O die Tangenten einer Kurve der n-ten Klasse gezogen werden, und wenn $R_1, R_2, \ldots, R_n$ die Krümmungs-

radien der Kurve in den Berührungspunkten mit diesen Tangenten sind, so ist stets

$$\frac{R_1}{Om_1^3} + \frac{R_2}{Om_2^3} + \cdots + \frac{R_n}{Om_n^3} = 0.$$

Die Charaktere der Evolute einer C_m mit Doppelpunkten und Spitzen wurden schon 1852 von Salmon in seinem Werke „Higher plane Curves" gegeben. Dieses Werk wird von Bäcklund zitiert. Die Sätze über den Krümmungsradius waren, wie Bäcklund in einem späteren Aufsatze selbst hervorhebt, zum Teil schon früher von Liouville gefunden.

Von der ebenen Geometrie ging Bäcklund zur Flächengeometrie über. In Bd. 9 der Verhandlungen der Ak. d. Wiss. veröffentlichte er 1870 eine umfangreiche Abhandlung: „Über geometrische Flächen." Ein Bericht über diese Abhandlung ist kaum möglich, weil der Inhalt wesentlich aus einer großen Zahl von anzahlgeometrischen Sätzen besteht. Ich muß mich deshalb mit einigen Andeutungen begnügen. Die ersten zwei Kapitel handeln über die Erzeugung einer Fläche durch den Schnitt entsprechender Flächen in zwei projektivisch aufeinander bezogenen Büscheln. Die Methoden, welche Bäcklund hier in der Theorie der Flächen benutzt, sind dieselben, die er in seinem ersten Aufsatz auf die Geometrie der Kurven angewandt hatte. Das dritte Kapitel gibt eine mit den Methoden der synthetischen Geometrie ausgeführte anzahlgeometrische Theorie der Polaren einer algebraischen Fläche. Das vierte Kapitel behandelt von demselben anzahlgeometrischen Gesichtspunkte aus die Theorie der Büschel, Netze und Systeme von Flächen. Als Beispiele der Ergebnisse führe ich die folgenden zwei Sätze an:

„In einem geometrischen Netze der Ordnung n gibt es im allgemeinen

$$\tfrac{1}{2} m (m-1)(m-2)(m^3 + 4m^2 n - 5m^2 + 10\,mn^2 - 20\,mn + 11\,m + 12\,n^3 - 26\,n^2 + 20\,n - 8) + \tfrac{1}{2} m (m-1)(n-1)(9n^3 - 3n^2 - n - 36) + \tfrac{1}{2} n (n-1)(n-2)(3n^2 - 3n - 11)$$

Flächen, welche in je zwei Punkten eine gegebene Fläche m-ter Ordnung berühren."

„In einem geometrischen Netze von Flächen n-ter Ordnung gibt es im allgemeinen $2(n-1)^2(n-2)(4n^3 - 8n^2 + 8n - 25)$ Flächen mit je zwei Doppelpunkten."

Das fünfte und letzte Kapitel untersucht die Singularitäten der letzten Polare einer Fläche in bezug auf eine andere gegebene Fläche und in Verbindung damit die Steinersche Fläche. Als Beispiel führe ich den folgenden Satz an:

„Der Ort der Berührungspunkte einer Fläche C_m und derjenigen Flächen n-ter Ordnung eines Systems, die mit dieser Fläche doppelte Berührung haben, geht $m(m+n-2)^2 + 2m(n-1)^2 - 7$ Male durch $2m(n-1)(2m+3n-5)$ Punkte der C_m."

Durch die oben besprochenen drei Abhandlungen hatte Bäcklund seine Herrschaft über die Methoden der synthetischen Geometrie gezeigt. Daß auch die analytische Geometrie ihm nicht fremd war, zeigt ein Aufsatz: „Beitrag zur Theorie der Kegelschnitte", der im März 1871 der Ak. d. Wiss. vorgelegt wurde. Durch Betrachtung der Sehnen einer Ellipse, welche einen mit der Ellipse konzentrischen Kreis berühren, leitet er hier das Additionstheorem der elliptischen Integrale erster Gattung ab. Er benutzt dann die entwickelten Methoden, um eine Reihe von Sätzen über die Kegelschnitte zu beweisen. Ich führe ein Beispiel an. Unter homologen Punkten zweier konfokaler Ellipsen versteht Bäcklund solche Punkte, für welche sowohl die Abszissen wie die Ordinaten sich zueinander wie die mit ihnen parallelen Achsen der Ellipsen verhalten. Dann gilt der Satz:

„Wenn eine Sehne mm' einer Ellipse sich bewegt und dabei eine zweite, mit der ersten konfokale Ellipse berührt und wenn μ, μ' die mit m, m' homologen Punkte der zweiten Ellipse sind, dann beschreibt der Schnittpunkt der Tangenten in μ und μ' eine dritte mit den beiden ersten konfokale Ellipse."

„Über einige Eigenschaften der ebenen Kurve dritter Ordnung" ist der gemeinsame Titel von zwei Aufsätzen, welche der Akademie im Juni 1871 und im Februar 1872 mitgeteilt wurden. Steiner hat gezeigt, daß wenn γ ein Punkt einer C_3 ist, es auf derselben Kurve andere Punkte, C, gibt, welche derart mit γ verbunden sind, daß es unendlich viele Polygone mit $2n$ Seiten gibt, deren Ecken auf der C_3 liegen, während die Seiten mit gerader Ordnungszahl durch γ und die Seiten mit ungerader Ordnungszahl durch C hindurchgehen. Bäcklund gibt einen neuen Beweis für diesen Satz. Er benutzt dazu eine Transformation, welche die Punkte der C_3 auf die Kegelschnitte eines Büschels abbildet. Das Prinzip dieser Abbildung geht aus dem Folgenden, von Bäcklund bewiesenen Satz hervor: „Wenn C_3 eine Kurve dritter Ordnung und K ein Kegelschnitt in der Ebene derselben, endlich γ ein Schnittpunkt von C_3 und K ist; wenn ferner durch die Schnittpunkte zwischen K und den vier nicht in γ berührenden Tangenten der C_3, welche von γ gezogen werden können, ein Kegelschnitt C gelegt wird, dann haben die gemeinsamen Tangenten von K und C die Eigenschaft, daß die geraden Linien, welche γ mit den Berührungspunkten der Tangenten mit K verbinden, die C_3 außer in γ in acht

Punkten schneiden, deren Tangenten zu je vier durch zwei Punkte, c und c', der C_3 hindurchgehen, und dabei liegen c, c' und γ auf einer geraden Linie." Einem beliebigen Punkte c der C_3 entspricht nach diesem Satze ein Kegelschnitt des Büschels K, C. Einem Kegelschnitt des Büschels entsprechen dagegen zwei Punkte, c und c', der Kurve. Durch diese Transformation wird die Theorie der Steinerschen Polygone auf die elementare Theorie der Polygone zurückgeführt, welche gleichzeitig einem Kegelschnitt eingeschrieben und einem anderen Kegelschnitt umgeschrieben sind.

In dem zweiten der beiden Aufsätze gibt Bäcklund eine neue Transformation, welche die Punkte einer C_2 auf die einzelnen Kurven eines einfach unendlichen Systemes von Kurven vierter Ordnung abbildet, die je drei Spitzen besitzen. Die Theorie der Steinerschen Polygone gibt mit Hilfe dieser Transformation Anlaß zu einer entsprechenden Theorie für die Kurven vierter Ordnung mit drei Spitzen.

Die Abhandlung, welche Bäcklund zur Grundlage der Disputation wählte, mit welcher er nach damaliger Sitte seine Fähigkeit für die mathematische Professur beweisen wollte, hat den Titel: „Über geometrische Kurven mit doppelter Krümmung." Die Methoden, mit denen er hier die Eigenschaften der Raumkurven untersucht, sind dieselben, die er in seinen drei ersten mathematischen Abhandlungen zur Untersuchung der ebenen Kurven und der Flächen angewandt hatte. Der erste Paragraph behandelt die Schnittpunkte zwischen Flächen und Kurven. Er gibt eine Ableitung und eine (doch nur geringfügige) Verallgemeinerung von Sätzen, die früher von Liouville, Chasles und Clebsch aufgestellt worden waren. Der zweite Paragraph behandelt die letzte Polare einer Kurve in bezug auf eine Fläche. Es wird gezeigt, wie sich die Jacobische Fläche von vier Flächen zur Schnittkurve zwischen zwei von ihnen verhält. Dann wird eine Reihe von Sätzen aufgestellt, von denen hier zwei erwähnt werden mögen:

„In einem Büschel von Flächen n-ter Ordnung gibt es im allgemeinen $m\,m'\,(m + m' + 2n - 1) - 2\delta - 3\varkappa$ Flächen, welche die Schnittkurve zweier Flächen m-ter bzw. m'-ter Ordnung berühren, wenn diese Flächen in δ Punkten eine einfache und in $\varkappa$ Punkten eine stationäre Berührung haben."

„In einem geometrischen Netz von Flächen n-ter Ordnung gibt es im allgemeinen $3\,mm'\,(m + m' + n - 4) - 6\,\delta - 8\,\varkappa$ Flächen, welche die Schnittkurve zweier Flächen m-ter bzw. m'-ter Ordnung oskulieren, wenn diese Flächen in δ Punkten eine einfache und in $\varkappa$ Punkten eine stationäre Berührung haben."

Der dritte Paragraph behandelt die Flächen eines linearen „Systemes", welche eine gegebene Fläche senkrecht schneiden. Zuerst wird eine Reihe von Sätzen anzahlgeometrischer Natur aufgestellt. Ich erwähne als Beispiele die folgenden zwei Sätze:

„Es gibt im allgemeinen $mm'(m+m'-2)-m(2\delta'+3\varkappa')-m'(2\delta+3\varkappa)$ Punkte, in denen zwei gegebene Flächen C_m, $C_{m'}$ einander senkrecht schneiden, wenn δ, $\varkappa$, δ', $\varkappa'$ die Ordnungszahlen der Doppel- und Cuspidalkurven dieser Flächen sind."

„In einem geometrischen Netz n-ter Ordnung gibt es im allgemeinen $mm'(m+m'+3n-4)-2\delta-3\varkappa$ Flächen, welche die Schnittkurve zweier Flächen senkrecht schneiden, wenn die Flächen m-ter bzw. m'-ter Ordnung sind und wenn sie in δ Punkten eine einfache und in $\varkappa$ Punkten eine stationäre Berührung haben."

Bäcklund faßt dann in derselben Weise wie in älteren Untersuchungen die in der Gleichung eines Flächen-„Systems" eingehenden drei Parameter als die Koordinaten eines Punktes im Raume auf. Er untersucht mit geometrischen Methoden die Kurve, welche den Ort der Punkte bildet, deren entsprechende Flächen im Systeme eine gegebene Kurve μ-ter Ordnung und ν-ter Klasse senkrecht schneiden.

Der vierte Paragraph hat den Titel: Über die Normalen und Normalebenen geometrischer Kurven. In den im vorigen Paragraphen gefundenen Ergebnissen wird n, die Ordnung des Flächensystems, gleich 1 gesetzt. So werden Sätze über die developpable Fläche erhalten, welche von den Normalebenen einer Kurve umhüllt werden.

Der letzte Paragraph enthält: „Einige Sätze über die Krümmungs- und Torsionsradien geometrischer Kurven." Die früher für den Krümmungsradius der ebenen Kurve gefundenen Sätze werden hier auf den Raum übertragen. Bäcklund bewegt sich hier wieder auf einem schon von Liouville abgeernteten Felde. Auch ist hier W. Schell, Allgemeine Theorie der Curven, Leipzig 1859, zu erwähnen.

Zu der hier behandelten Gruppe von Abhandlungen gehört endlich, wenigstens zum größten Teil, ein Aufsatz: „Über den Ort der Krümmungszentra von Flächen", der im Oktober 1872 der Akademie vorgelegt wurde. Darboux hatte im Jahre 1870 eine Untersuchung dieser Fläche veröffentlicht. Offenbar lag unter diesen Umständen für Bäcklund etwas Verlockendes darin, an demselben Problem die Reichweite seiner Methoden zu prüfen. Er bestimmt wie Darboux die Ordnung und Klasse des betreffenden Ortes, geht aber über Darboux hinaus, indem er auch die Ordnung der Cuspidalkurve und der Doppelkurve bestimmt. Betreffend das Verhalten des Ortes im unendlich Fernen stimmen Bäcklunds Ergebnisse mit den von Darboux gefundenen

überein. Im dritten Paragraphen gibt er eine Transformation, welche das raumgeometrische Gegenstück der oben besprochenen Transformation ist, die eine ebene Kurve in ihre Evolute überführt. Sie führt eine Fläche in den Ort der Krümmungszentra über. Auch hier wird die Transformation besonders einfach, wenn die vorgelegte Fläche zweiter Ordnung ist. Der vierte Paragraph gibt eine ausführliche Theorie für den Ort der Krümmungszentra einer Fläche zweiten Grades. In diesem vierten Paragraphen begegnet man zum ersten Male in Bäcklunds Schriften Sophus Lies Namen. Die Normalen einer Fläche zweiten Grades gehören zu einem tetraedralen Komplex, und der tetraedrale Komplex war 1870 Gegenstand einer Untersuchung von Lie gewesen.

Die Jugendschriften von Bäcklund, von denen hier die Rede war, sind, wie schon oben erwähnt wurde, alle in schwedischer Sprache geschrieben. Ein Einfluß dieser Schriften auf die europäische Mathematik ist schon durch diesen Umstand ausgeschlossen. Es bleibt aber die Frage zu beantworten, ob sie einen Einfluß auf die Entwicklung der schwedischen Mathematik gehabt haben. Es kann scheinen, als ob auch diese Frage verneinend zu beantworten wäre. Ich kenne keine mathematische Untersuchung, die man als die direkte Fortsetzung von Bäcklunds algebraisch-geometrischen Arbeiten auffassen könnte. Trotzdem gibt es einen Grund zu glauben, daß sie eine nicht geringe Bedeutung für die schwedische Mathematik gehabt haben. Inhaber der nach Hill frei gewordenen mathematischen Professur wurde 1873 C. F. E. Björling. Seine Arbeiten vor der Ernennung hatten verschiedene Fragen aus der Analysis behandelt. Man findet in diesen früheren Schriften nichts, was auf die algebraisch-geometrische Richtung hindeutet, welche das mathematische Studium in Lund unter seiner Leitung nehmen sollte. Daß sie auch nicht durch einen Hinweis auf die zu dieser Zeit im mathematischem Leben Europas vorherrschenden Strömungen erklärt werden kann, geht daraus hervor, daß Mittag-Leffler etwa gleichzeitig dem mathematischen Studium in Hälsingfors und Stockholm eine exklusiv analytische Richtung gab. Es liegt unter diesen Umständen nahe zu vermuten, daß Bäcklunds Jugendschriften eines der Momente gewesen sind, die für Björling bestimmend waren. Es gibt einige Umstände, die jene Vermutung zu bestätigen scheinen. In der Abhandlung von Björling, welche die Grundlage so vieler Dissertationen in Lund wurde: „Über entsprechende Singularitäten algebraischer ebener Kurven“, Uppsala 1879, gibt Björling unter anderem eine neue und tiefere Behandlung eines der von Bäcklund in seinen Jugendschriften behandelten Problems, der

Aufgabe, die Plückerschen Charaktere der Evolute einer algebraischen Kurve zu bestimmen. In einer Anmerkung scheint er direkt auf Bäcklunds Arbeit hinzuweisen. Er wendet sich, ohne Namen zu nennen, gegen eine in der Literatur vorkommende Behauptung, daß eine Evolute keine Wendetangenten haben kann. Es gab vom Gesichtspunkte der europäischen Mathematik kaum einen Grund für diese Kritik. Zeuthen hatte schon 1865 in seiner Dissertation eine vollkommen richtige Darstellung des Gegenstandes gegeben. Aber vom lokalen Gesichtspunkte aus gab es einen Grund für diese Kritik, indem Bäcklund sich in der Abhandlung über die Normalen der algebraischen Kurven unleugbar mit größerer Bestimmtheit und größeren Ansprüchen auf Allgemeingültigkeit, als berechtigt war, über die Wendetangenten der Evolute äußerte. Es scheint mir, daß man unter diesen Umständen das Recht hat, in den zahlreichen geometrischen Abhandlungen, die während der letzten zwei Jahrzehnte des 19. Jahrhunderts von Lund ausgingen, unter anderem auch eine Fortsetzung von Bäcklunds Jugendtätigkeit zu sehen.

3. Mathematische Hauptperiode, 1873—1883.

Zu der durch Hills Abschied 1870 frei gewordenen Professur wurde zu spät eine Bewerbung von Sophus Lie eingereicht. Seiner Bewerbung hatte er seine damals erschienenen Schriften beigefügt. Über die Bewerbung konnte nicht mehr verhandelt werden, aber es wurde bestimmt, daß während der Beratung der Universitätsbehörden über die Bewerbungen sämtliche eingereichten Akten in Lund bleiben sollten. Dieser Umstand hat eine entscheidende Bedeutung für Bäcklunds wissenschaftliche Tätigkeit gehabt. Durch das Entgegenkommen des Universitätssekretärs Krüger erhielt er Erlaubnis, die Schriften Lies leihweise von der Kanzlei zu bekommen. Er las sie. Daß sie einen tiefen Eindruck auf ihn machten, ist nur natürlich. Er hatte ja selbst schon mehrmals die von Lie so genannten Berührungsformationen benutzt. Ich gebe seine eigenen Worte wieder: „Diese Arbeiten schienen mir für die Forschung weite Ausblicke sowohl innerhalb der Analysis wie innerhalb der Geometrie zu eröffnen. Es war unter diesen Umständen ganz natürlich, daß ich selbst mit Methoden, welche den Lieschen ähnelten, versuchte, einen Teil der Analysis zu behandeln, der mir früher unzugänglich war. So kam es, daß meine folgenden mathematischen Aufsätze sich mit der Theorie der partiellen Differentialgleichungen zu beschäftigen begannen."

Die erste Abhandlung, welche der neuen Periode angehört, ist der Aufsatz: „Ein Beitrag zur Theorie der Kugelkomplexe", Lunds

Universitets årsskrift T. 9, 1873 (schwedisch). Sein Inhalt ist folgender: Wenn die Gleichung einer Kugel in der Form

$$(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2 + H^2 = 0$$

geschrieben wird, so definiert eine Gleichung $F(X, Y, Z, H) = 0$ einen Kugelkomplex. Mit einem solchen Komplex ist nach Lie eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung verbunden. Wenn man zwei Kugelkomplexe hat, so kann es vorkommen, daß die zugehörigen Differentialgleichungen ∞^1 gemeinsame Integralflächen haben. Die Bedingung dafür hat Lie angegeben. Bäcklund stellt dieselbe Bedingung noch einmal auf und gibt außerdem die Bedingungen an, die erfüllt werden müssen, damit die oben erwähnten ∞^1 Integralflächen von zwei anderen Flächensystemen senkrecht geschnitten werden, welche außerdem einander senkrecht schneiden. Er gibt die Form an, welche diese Bedingungen annehmen, wenn man statt X, Y, Z, H Kleinsche Linienkoordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_6$ einführt, welche miteinander durch die Beziehung

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0$$

verbunden sind. Eine Anwendung der gefundenen Ergebnisse auf Komplexe zweiten Grades gibt sofort den folgenden Satz: „Zwei konfokale Kugelkomplexe zweiten Grades, für welche die Punkte des Raumes, als Kugeln mit dem Radius Null aufgefaßt, ein Fundamentalkomplex sind, haben ∞^1 gemeinsame Integralflächen, die ein System von Flächen eines dreifach orthogonalen Flächensystems bilden."

Im Anfang des Jahres 1874 bekam Bäcklund, wie oben erwähnt wurde, durch ein sogenanntes „kleineres Reisestipendium des Reichsstaates" Gelegenheit, eine Studienreise ins Ausland zu machen. Wie fruchtbringend eine solche Studienreise sein kann, dafür legt Bäcklunds wissenschaftliche Tätigkeit ein sprechendes Zeugnis ab. Wenn seine Schriften vor der Reise schöne Proben von Wissen waren und Bedeutung für die Enwicklung der schwedischen Mathematik gehabt haben, so wurde schon seine erste Abhandlung nach der Reise ein Beitrag von prinzipieller Bedeutung zur internationalen Wissenschaft. Jene Abhandlung hat den Titel: „Einiges über Kurven- und Flächentransformationen." Sie wurde im September 1874 der K. Physiographischen Gesellschaft in Lund vorgelegt und in den zehnten Band von Lunds Universitets årsskrift eingenommen. Wegen ihrer Bedeutung gebe ich einen etwas ausführlicheren Bericht über ihren Inhalt.

Die Frage, welcher diese Abhandlung gewidmet ist, ist die folgende: welches ist die allgemeinste Transformation, die jede ebene Kurve in

eine andere ebene Kurve, jede Fläche in eine andere Fläche usw. überführt? Wenn wir uns zunächst auf die Ebene beschränken, kann die Frage auch folgendermaßen formuliert werden: Welches ist die allgemeinste Transformation

$$X = F(x, y, p, p', \ldots), \quad Y = F_1(\ ), \quad P = \Phi(\ ), \ldots,$$

die das System: $dy - p\,dx = 0$, $dp - p'dx = 0, \ldots$ in das System: $dY - P\,dX = 0$, $dP - P'dX = 0, \ldots$ überführt? Wie Bäcklund hervorhebt, sind indessen hier zwei Fälle zu unterscheiden, der Fall, daß die Transformationsgleichungen in bezug auf $x, y, p, p', \ldots$ aufgelöst werden können, und der Fall, wo eine solche Auflösung nicht möglich ist. Nur der erste Fall wird zur Behandlung aufgenommen.

Um die Frage zu beantworten, betrachtet Bäcklund eine dreifach unendliche Schar von ebenen Kurven

$$f(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0.$$

Er stellt die Bedingung dafür auf, daß zwei benachbarte Kurven $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und $\lambda_1 + d\lambda_1$, $\lambda_2 + d\lambda_2$, $\lambda_3 + d\lambda_3$ einander berühren. Diese Bedingung hat die Form einer Mongeschen Gleichung

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, d\lambda_1, d\lambda_2, d\lambda_3) = 0.$$

Dieser Mongeschen Gleichung entspricht eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung. Ein vollständiges Integral dieser Differentialgleichung ist durch die Gleichung $f = 0$ gegeben, wo x und y als Parameter aufzufassen sind. Die Gleichung $f = 0$ vermittelt eine Korrespondenz zwischen der xy-Ebene und dem λ-Raume. Einem Punkte der xy-Ebene entspricht im λ-Raume eine Fläche $f = 0$. Einem Linienelemente x, y, p der xy-Ebene entspricht im λ-Raume die Schnittkurve von zwei benachbarten Flächen $f = 0$, d. h. eine Charakteristik der partiellen Differentialgleichung.

Nehmen wir jetzt an, daß zwei verschiedene Systeme von ∞^3 Kurven der xy-Ebene derart aufeinander bezogen sind, daß einander berührende Kurven des einen Systems im anderen Systeme Kurven entsprechen, die sich ebenfalls berühren. Man kann es immer so einrichten, daß die Parameter für entsprechende Kurven dieselben Werte haben. Wenn dann

$$f(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0 \quad \text{und} \quad f'(x, \bar{y}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0$$

die Gleichungen zweier aufeinander bezogenen Kurven sind, so müssen $f = 0$ und $f' = 0$ zwei vollständige Integrale derselben partiellen Differentialgleichung erster Ordnung im λ-Raum sein. $f = 0$ definiert eine

Beziehung zwischen den Charakteristiken dieser Differentialgleichung und den Linienelementen der xy-Ebene. $f' = 0$ definiert in derselben Weise eine Beziehung zwischen den Charakteristiken und den Linienelementen der $\bar{x}\bar{y}$-Ebene. Beide Gleichungen definieren also eine Korrespondenz zwischen den Linienelementen der beiden Ebenen. Eine Korrespondenz zwischen Kurvensystemen gibt also eine Berührungstransformation zwischen ihren Ebenen.

Wir betrachten jetzt eine Oskulationstransformation, d. h. eine Transformation

$$X = X(x, y, p, p'), \quad Y = Y(x, y, p, p'),$$
$$P = P(x, y, p, p'), \quad P = P(x, y, p, p'),$$

welche das System $dy - p\,dx = 0$, $dp - p'dx = 0$ in das System $dY - P\,dX = 0$, $dP - P'dX = 0$ überführt. Wir betrachten in der xy-Ebene zwei Kurven, welche sich in einem Punkte berühren. Es gibt dann eine dritte Kurve, welche diese beiden Kurven in benachbarten Punkten oskuliert. Diesem System entspricht in der XY-Ebene ein System von zwei Kurven, welche in benachbarten Punkten von einer dritten Kurve oskuliert werden. Solche Kurven müssen sich aber berühren. Die Transformation führt also Kurven, welche einander berühren, in Kurven über, welche sich ebenfalls berühren. Es gibt also keine anderen Oskulationstransformationen als die Berührungstransformationen.

Wenn es eine Berührungstransformation zweiter Ordnung gäbe, welche nicht gleichzeitig eine Berührungstransformation erster Ordnung wäre, so würde man sie als aus ∞^1 Berührungstransformationen zusammengesetzt auffassen können, indem jedem Element xyp ∞^1 Elemente XYP entsprechen, die einer Kurve angehören, und also einem Punkte xy ∞^1 Kurven entsprechen. In derselben Weise würde man eine Berührungstransformation dritter Ordnung als aus ∞^1 Berührungstransformationen zweiter Ordnung zusammengesetzt auffassen können. Da Berührungstransformationen zweiter Ordnung nicht existieren, so können folglich auch nicht Berührungstransformationen dritter Ordnung existieren. Das Ergebnis ist also, daß Lies Berührungstransformationen die einzigen Transformationen sind, welche jede ebene Kurve in eine andere ebene Kurve überführen.

Alle Überlegungen und Resultate lassen sich schließlich auf den dreidimensionalen xyz-Raum und den darauf bezogenen vierdimensionalen λ-Raum übertragen.

Etwa zu derselben Zeit, wo Bäcklund der Physiographischen Gesellschaft in Lund die oben besprochene Abhandlung vorlegte, ver-

öffentlichte S. Lie in den Mathematischen Annalen eine Abhandlung: „Begründung einer Invariantentheorie der Berührungstransformationen", in der er unter anderem die Frage aufstellte, ob Berührungstransformationen höherer Ordnung existieren. Bäcklund wurde dadurch veranlaßt, in derselben Zeitschrift eine ausführlichere (und in einem Punkt berichtigte) Darstellung seines Beweises für die Nicht-Existenz solcher Transformationen zu veröffentlichen. Die Abhandlung hat den Titel: „Über Flächentransformationen" und findet sich im neunten Bande der Zeitschrift. Im letzten Paragraphen dieser Abhandlung behandelt Bäcklund zum ersten Male eine „unendlich-deutige" Transformation, d. h. eine Transformation, bei welcher wohl $X, Y, Z, P, Q, \ldots$ als Funktionen von $x, y, z, p, q, \ldots$, aber nicht umgekehrt $x, y, z, p, q, \ldots$ als Funktionen von $X, Y, Z, P, Q, \ldots$ ausgedrückt werden können. Die betrachtete Transformation ist: $X = x$, $Y = y$, $Z = q$. Bäcklund zeigt, daß sie eine nicht-lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung: $r = f(x, y, q, s, t)$ in eine Differentialgleichung überführt, welche ebenfalls zweiter Ordnung ist, die aber in R, S, T linear ist:

$$R - S\frac{\partial f}{\partial P} - T\frac{\partial f}{\partial Q} = \frac{\partial f}{\partial y} + Q\frac{\partial f}{\partial Z},$$
$$f = f(X, Y, Z, P, Q).$$

Die allgemeine Theorie der unendlich-deutigen Transformationen wurde während der nächsten Jahre der hauptsächliche Gegenstand von Bäcklunds Forschungen. In zwei kurzen Noten in den Sitzungsberichten der physikalisch-medizinischen Sozietät zu Erlangen (März 1876) und in Lunds Universitets årsskrift (ebenfalls März 1876) teilte er einige seiner damals gewonnenen Ergebnisse mit. Die definitive Darstellung derselben gab er in zwei großen Abhandlungen: „Über partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung, die intermediäre erste Integrale besitzen", I und II, in Bd. 11 und 13 der Mathematischen Annalen. Zu diesen Abhandlungen gehen wir jetzt über. Wir betrachten zunächst die Abhandlung I. Sie ist Hälsingborg, den 6. Juli 1876 datiert.

Bäcklund untersucht zunächst die Transformation

$$\begin{aligned} X_1 &= F_1(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) \\ X_2 &= F_2(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Z &= F(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n). \end{aligned}$$

Er zeigt, daß einer Fläche des Z-Raumes im z-Raume eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung entspricht. Ebenso wie die Fläche

von ∞^n Ebenen eingehüllt wird, so kann die partielle Differentialgleichung als die Enveloppe von ∞^n partiellen Differentialgleichungen von der Form

$$F - P_1F_1 - \cdots - P_nF_n = \text{Konst.}$$

aufgefaßt werden.

Eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung im Z-Raume gibt im z-Raume eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit unendlich vielen intermediären Integralen von der Form $f(F, F_1, \ldots, F_n) = 0$. Aus einer Schar von ∞^n solchen Integralen können die übrigen als Enveloppen erhalten werden. Einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung im z-Raume entspricht im Z-Raume ein System von partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung. Im Falle $n = 2$ besteht dieses System aus zwei Gleichungen zweiter Ordnung.

Eine Berührungstransformation im Z-Raume führt die oben betrachteten Transformationen in neue Transformationen über, bei welchen Z, X_i, P_i alle als Funktionen von z, x_i, p_i, p_{ik} ausgedrückt werden können. Bäcklund wurde dadurch veranlaßt, die besondere Gattung von Flächentransformationen zu betrachten, bei welchen Z, X_i, P_i Funktionen derselben Größen $z, x_i, p_i, p_{ik}, \ldots, p_{k_1k_2\ldots k_m}$ sind. Er beweist betreffs dieser Transformationen, daß die Größen $p_{k_1k_2\ldots k_m}$ aus den Gleichungen $Z = F$, $X_i = F_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ eliminiert werden können. Wenn man dabei nur eine Beziehung zwischen $Z, X_i, z, x_i, p_i, p_{ik}, \ldots, p_{k_1k_2\ldots k_{m-1}}$ erhält, so kann man sie auf die Form

$$Z = f(z, x_1, \ldots, x_n, p_i, p_{ik}, \ldots, p_{k_1k_2\ldots k_{m-1}}, X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

bringen. Die übrigen Transformationsgleichungen sind dann

$$\frac{df}{dx_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i\frac{\partial f}{\partial z} + \sum_k p_{ik}\frac{\partial f}{\partial p_k} + \cdots$$
$$+ \sum_{k_1k_2\ldots k_{m-1}} p_{k_1k_2k_{m-1}i}\,\frac{\partial f}{\partial p_{k_1k_2\ldots k_{m-1}}} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Hieraus folgt, daß die Gleichung

$$f(z, x_1, \ldots, x_n, p_i, p_{ik}, \ldots, p_{k_1k_2\ldots k_{m-1}}, c_1, c_2, \ldots, c_n) = c$$

ein gemeinsames Integral der Differentialgleichungen

$$F = c,\quad F_1 = c_1,\quad F_2 = c_2, \ldots, F_n = c_n$$

ist. Die Existenz eines solchen gemeinsamen Integrales ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $n + 1$ Gleichungen

$Z = F$, $X_i = F_i$ eine Flächentransformation von der hier betrachteten Art definieren.

Es kann vorkommen, daß zwischen $Z, X_i, z, x_i, p_i, \ldots, p_{k_1 k_2 \ldots k_{m-1}}$ mehrere, etwa k Beziehungen bestehen:

$$f_1(z, x_i, p_i, \ldots, p_{k_1 k_2 \ldots k_{m-1}}, z, x_i) = 0, \quad f_2 = 0, \ldots, f_k = 0.$$

Die übrigen Transformationsgleichungen werden dann aus dem System

$$\sum_{m=1}^{m=k} \lambda_m \frac{d f_m}{d x_i} = \sum_{m=1}^{m=k} \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial x_i} + p_i \sum_{m=1}^{m=k} \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial z} = 0$$

durch Elimination der Größen λ erhalten.

Man kann fragen, ob es Transformationen gibt, bei welchen nicht nur Z, X_i, P_i sondern auch P_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ Funktionen derselben Größen $z. x_i, p_i, \ldots, p_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ sind. Bäcklund zeigt, daß solche Transformationen nicht existieren. Damit ist ein neuer Beweis für den Satz gegeben, daß es keine Berührungstransformationen höherer Ordnung gibt. Gleichzeitig wurde offenbar eine wesentliche Verallgemeinerung jenes Satzes gewonnen.

Im einfachsten Falle, $n = 2$, kann man leicht äußere Kennzeichen für die Differentialgleichungen zweiter Ordnung des z-Raumes angeben, welche bei jenen Transformationen den Differentialgleichungen erster Ordnung im Z-Raume entsprechen. Bäcklund betrachtet zuerst die Transformation: $Z = F(z, x, y, p, q)$, $X = F_1$, $Y = F_2$. Er findet, daß die in Rede stehenden Differentialgleichungen zweiter Ordnung die gemeinsame Eigenschaft haben, daß sie, wenn man r, s, t als die Koordinaten eines Raumpunktes auffaßt, Regelflächen definieren, deren Erzeugende einer Kongruenz von Geraden angehören, welche sowohl die Schnittkurve des Kegels $rt - s^2 = 0$ mit der unendlich entfernten Ebene wie eine durch einen Punkt derselben Kurve hindurchgehende gerade Linie schneiden. Er zeigt dann, daß die Differentialgleichungen zweiter Ordnung des z-Raumes, welche bei der Transformation: $f(z, x, y, p, q, Z, X, Y) = 0$ den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung des Z-Raumes entsprechen, dieselbe Eigenschaft haben.

Im zweiten Teile seiner Abhandlung betrachtet Bäcklund partielle Differentialgleichungen im xyz-Raume, die intermediäre Integrale besitzen. Er untersucht zuerst Gleichungen zweiter Ordnung mit ∞^2 intermediären Integralen vom Typus $f(zxypq\lambda) = \mu$. Er zeigt, daß diese Differentialgleichungen, wenn z, x, y, p, q als Konstanten und r, s, t als Koordinaten eines Punktes aufgefaßt werden, Regelflächen der oben angegebenen Art definieren müssen. Wenn man die Gleichungen

einer geraden Linie des rst-Raumes, welche die Kurve $rt - s^2 = 0$ der unendlich entfernten Ebene schneidet, in der Form

$$r = ms + \mu, \quad s = mt + \nu$$

schreibt, so kann man also jede solche Differentialgleichung durch zwei Gleichungen

$$A(z, x, y, p, q, m, \mu, \nu) = 0, \quad B(z, x, y, p, q, m, \mu, \nu) = 0$$

ersetzen. Die Funktionen A und B sind aber hier nicht willkürlich. Bäcklund unterwirft die Frage, wie B zu wählen ist, wenn A gegeben ist, einer eingehenden Untersuchung und findet dabei, daß alle Differentialgleichungen von diesem Typus durch eine Transformation, welche durch eine, zwei oder drei Gleichungen von der Form $f(z, x, y, p, q, Z, X, Y) = 0$ vermittelt wird, aus den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung des Z-Raumes erhalten werden können.

Bäcklund untersucht dann die Gleichungen zweiter Ordnung, welche ∞^1 intermediäre Integrale erster Ordnung haben. Seine Ergebnisse betreffs der Integration der beiden hier in Rede stehenden Gattungen von Differentialgleichungen zweiter Ordnung faßt er in dem folgenden Satze zusammen: Man kann immer durch rein algebraische Operationen entscheiden, ob eine vorgelegte partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung erste Integrale hat. Wenn ∞^2 solche Integrale existieren, so erhält man sie durch Lösung einer homogenen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung in drei Veränderlichen. Wenn es nur ∞^1 Integrale gibt, leitet man sie aus einer gewöhnlichen Differentialgleichung ab. Existieren erste Integrale nur in endlicher Zahl, erhält man sie durch rein algebraische Operationen.

Betreffs derjenigen Systeme

$$A(z, x, y, p, q, m, \mu, \nu) = 0, \quad B(z, x, y, p, q, \mu, \nu) = 0,$$

welche nicht in der oben angegebenen Weise mit partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung verknüpft sind, zeigt Bäcklund, daß sie die charakteristische Eigenschaft haben, daß jede Integralfläche längs einer beliebigen Charakteristik unendlich viele andere Integralflächen berührt.

Eine Untersuchung der Gleichungen, die erste Integrale von der Form $\varphi(f_1, f_2) = 0$ besitzen, wo f_1, f_2 bestimmte Funktionen von z, x, y, p, q sind, φ aber eine willkürliche Funktion ist, führt zu den Monge-Ampèreschen und speziell zu den in r, s, t linearen Gleichungen. Von ähnlicher Art sind die Gleichungen dritter Ordnung, welche ein Integral von der Form: willkürliche Funktion von $f_1(z, x, y, p, q, r, s, t)$, $f_2(z, x, y, p, q, r, s, t) = 0$ haben. Ein zweites

Integral von derselben Form kann eine Gleichung dieser Art nur dann haben, wenn die beiden Gleichungen $f_1 =$ Konst., $f_2 =$ Konst. für jedes Element z, x, y, p, q, r, s, t eine gemeinsame charakteristische Richtung haben.

Die Erweiterung der Theorie auf den $n + 1$-dimensionalen Raum wird in Kürze gegeben.

Der elfte Band der Mathematischen Annalen enthält noch eine Abhandlung: „Über Systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung" von Bäcklund. Er beantwortet hier eine Frage, welche Klein in seinem berühmten Erlanger Programm gestellt hatte. Ein System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung in $z, x_1, \ldots, x_n$ hat im allgemeinen keine Lösungen gewöhnlicher Art, d. h. Lösungen der Dimension n. Wie kann man in einfachster Weise die Integrale möglichst hoher Dimension bestimmen, welche das System besitzt? Das Problem kann auf das Pfaffsche Problem zurückgeführt werden. Der Weg zur Lösung desselben, den Bäcklund weist, besteht darin, daß man durch konsequente Anwendung von Berührungstransformationen schrittweise die Zahl der Veränderlichen vermindert. Als ein Nebenresultat seiner Untersuchung erhält Bäcklund den folgenden Satz: Wenn alle Flächenelemente z, x_i, p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, welche dem System

$$f(z x_i p_i) = 0, \quad f_1(z x_i p_i) = 0, \ldots, \quad f_{m-1}(z x_i p_i) = 0$$

genügen, sich zu Integralmannigfaltigkeiten der Dimension $n - k$, M_{n-k}, aber nicht zu Mannigfaltigkeiten höherer Dimension zusammenfassen lassen, so hat das System außerdem Integralmannigfaltigkeiten der Dimension $m - 2k$ derart, daß zwei M_{n-k}, welche ein Flächenelement gemeinsam haben, sich längs einer Mannigfaltigkeit der Dimension $m - 2k$ berühren. Diese Mannigfaltigkeiten werden von Bäcklund Charakteristiken des vorgelegten Systems genannt.

Die zweite Abhandlung: „Über partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung, die intermediäre erste Integrale besitzen", besteht aus zwei Teilen, von denen der erste die durch eine Gleichung von der Form $f(z, x_i, p_i, Z, X_i) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ definierten Transformationen zur erneuten und vertieften Behandlung aufnimmt. Zuerst wird für $n = 2$ gefragt, was im Z-Raume einem System von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung im z-Raume entspricht. Als Beispiel der gewonnenen Ergebnisse erwähne ich den Satz, daß die Integralflächen einer partiellen Differentialgleichung des z-Raumes bei der Transformation in Flächen übergehen, welche von ∞^4 charakteristischen Streifen erzeugt werden. Hieraus wird der Schluß gezogen,

daß einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung im z-Raume zwei partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung im Z-Raume entsprechen müssen, welche, wenn man X, Y, Z, P, Q als Konstanten und R, S, T als Raumkoordinaten auffaßt, Regelflächen definieren, deren Erzeugende die unendlich entfernte Kurve $RT - S^2 = 0$ schneiden und eine gemeinsame Erzeugende haben. Dieser gemeinsamen Erzeugenden entsprechen eine gemeinsame Schar von Charakteristiken und unendlich viele gemeinsame Integralflächen der beiden Differentialgleichungen. Mit ähnlichen Methoden werden dann die Gebilde des Z-Raumes untersucht, denen im z-Raume zwei partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit gemeinsamen, eine willkürliche Funktion enthaltenden Integralen entsprechen. Die Ergebnisse, die im Falle $n = 2$ betreffs Systeme von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung im z-Raume gewonnen sind, werden dann auf den allgemeinen Fall, wo n eine beliebige ganze Zahl ist, ausgedehnt.

Andere Verallgemeinerungen können ebenso naheliegend erscheinen, wie die Untersuchung der Gebilde des Z-Raumes, welche partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung des z-Raumes entsprechen, oder die Untersuchung der durch Gleichungen vom Typus

$$f(z, x_i, p_i, p_{ik}, \ldots, p_{k_1 \ldots k_m}, Z, X_i) = 0$$

definierten Transformationen. Bäcklund findet aber zu dieser Zeit (1877) die Lehre von den partiellen Differentialgleichungen nicht genügend entwickelt, um eine solche Verallgemeinerung zu ermöglichen.

Der zweite Teil ist dem Studium partieller Differentialgleichungen mit intermediären Integralen gewidmet. Im dritten Paragraphen behandelt er Gleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen x und y und mit ersten Integralen von der Form $F(f_1, f_2) = 0$, wo F eine willkürliche Funktion ist, f_1 und f_2 dagegen bestimmte Funktionen von z, y, x und den partiellen Ableitungen von z bis zur Ordnung $n - 1$. Für den Fall $n = 2$ war schon in der ersten Abhandlung bewiesen worden, daß, wenn es noch ein Integral vom Typus $F(f_1, f_2)$ geben soll, es notwendig ist, daß die zwei Paare von charakteristischen Richtungen, welche die Gleichungen $f_1 =$ Konst. und $f_2 =$ Konst. einem Element z, x, y, p, q, r, s, t zuordnen, eine gemeinsame Richtung haben. Jetzt wird darüber hinaus gezeigt, daß zwei Integrale, welche verschiedenen Scharen angehören, die größte mögliche Zahl von gemeinsamen Integralflächen haben. Durch eine beliebige Kurve mit in jedem Punkte vorgeschriebenen (möglichen) Werten von p, q, r, s, t geht eine gemeinsame Integralfläche der beiden Gleichungen. Ähnliche Sätze

gelten für Differentialgleichungen vierter Ordnung. Die Bedingung dafür, daß zwei erste Integrale vom Typus $F(f_1, f_2) = 0$ existieren, ist, daß für die beiden Gruppen von je drei charakteristischen Richtungen, welche den beiden Gleichungen $f_1 = \text{Konst.}$, $f_2 = \text{Konst.}$ entsprechen, zwei Richtungen gemeinsam sind. Zwei erste Integrale, die verschiedenen Scharen angehören, haben wieder gemeinsame Integralflächen in größtmöglicher Anzahl. Die Theorie wird schließlich auf die partiellen Differentialgleichungen von der Ordnung n ausgedehnt. Besondere Aufmerksamkeit wird dem Fall gewidmet, wenn $n-k$ der Integrale $n-1$-ster Ordnung als gemeinsames Integral eine partielle Differentialgleichung von der Ordnung k haben. So erhält man eine Verallgemeinerung der von Darboux gegebenen Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Der letzte Paragraph gibt die Ausdehnung der Theorie auf den $n+1$-dimensionalen Raum. Gegenstand der Untersuchung sind also die partiellen Differentialgleichungen mit n unabhängigen Veränderlichen, die erste Integrale vom Typus $F(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0$ haben. Zunächst wird für Differentialgleichungen zweiter Ordnung dieser Art gezeigt, daß auf jeder Integralmannigfaltigkeit, M_n, von der Dimension n, zwei Scharen von Charakteristiken von der Dimension 1 existieren. Unter einer Charakteristik von der Dimension 1, M_1, wird dabei eine stetige, von einem Parameter abhängige Folge von Werten z, p_i, p_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ verstanden, welche den Bedingungen

$$dz = \sum_{i=1}^{n} p_i \, dx_i, \quad dp_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} \, dx_k$$

genügt und die Eigenschaft hat, daß die Beziehungen

$$dp_{ik} = \sum_{l=1}^{n} p_{ikl} \, dx_l$$

eine Folge der vorgelegten Differentialgleichungen sind. Dann werden Differentialgleichungen dritter Ordnung mit einem vollständigen ersten Integral betrachtet. Es wird gezeigt, daß auf jeder M_n drei Scharen von M_1 existieren. Dann wird gezeigt, daß eine notwendige Bedingung dafür, daß eine Gleichung mit dem ersten Integral $F(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0$ außerdem noch ein bzw. zwei Integrale derselben Art habe, ist, daß die n Gleichungen $u_1 = 0$, $u_2 = 0, \ldots, u_n = 0$ einem beliebigen Element z, x_i, p_i, p_{ik} je ein Paar von charakteristischen Richtungen zuordnen, welche im ersten Falle eine, im zweiten Falle beide Richtungen gemeinsam haben. Dann wird gezeigt, daß, wenn drei partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung vorliegen, und wenn von den $3n$ Gleichungen, welche zur Bestimmung der partiellen Ablei-

tungen dritter Ordnung erhalten werden, drei eine Folge der übrigen sind, es vorkommen kann, daß es eine Schar von eindimensionalen Streifen gibt, die alle Elemente z, x_i, p_i, p_{ik} umfassen und die für die drei Gleichungen charakteristisch sind. Diese haben also gemeinsame Integralmannigfaltigkeiten in größtmöglicher Zahl. Wenn vier Gleichungen in dieser Beziehung stehen sollen, so ist notwendig, daß von den $4n$ Gleichungen zur Bestimmung von p_{ik} 6 eine Folge der übrigen sind. Für 5, 6, ..., n Gleichungen wird die zulässige Zahl von Gleichungen zur Bestimmung von p_{ikk}: $5n-10$, $6n-15$, ..., $\frac{n(n+1)}{2}$. Im letzten Falle verlangt die Lösung des Systems nur die Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Schließlich werden die Ergebnisse angedeutet, die man durch Ausdehnung der Theorie auf Gleichungen beliebiger Ordnung erhält.

In der Abhandlung, über welche wir oben Bericht erstattet haben, war Bäcklund auf geometrischem Wege zum Begriff „eindimensionale Charakteristik" gewisser partieller Differentialgleichungen mit n unabhängigen Variablen geführt worden. Das Bedürfnis, auch analytisch die Natur dieser Charakteristiken festzustellen, wurde der Ausgangspunkt fortgesetzter Untersuchungen, deren Ergebnisse in der Abhandlung: „Zur Theorie der Charakteristiken der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung", Math. Annalen Bd. 13 niedergelegt sind. Bäcklund stellt hier den Begriff „charakteristische Mannigfaltigkeit" von $n-k$ Dimensionen auf ($1 \leqq k \leqq n-1$). Er zeigt, ungefähr in der jetzt üblichen Weise, daß jede partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung charakteristische Mannigfaltigkeiten von der Dimension $n-1$ besitzt. Er stellt die Bedingungen für die Existenz charakteristischer M_{n-k} auf. Im Falle $k = n-1$ sind diese Bedingungen, daß die Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial p_{11}} dx_i^2 - \frac{\partial F}{\partial p_{1i}} dx_i dx_1 + \frac{\partial F}{\partial p_{ii}} dx_1^2 = 0,$$

$$2\frac{\partial F}{\partial p_{11}} dx_i dx_k - \frac{\partial F}{\partial p_{1i}} dx_k dx_1 - \frac{\partial F}{\partial p_{1k}} dx_i dx_1 + \frac{\partial F}{\partial p_{ik}} dx_1^2 = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

gemeinsame Lösungen besitzen. Man sieht leicht, daß, wenn $dx_1 = a_1$, $d_2x = a_2, \ldots, dx_n = a_n$ eine Lösung dieses Systems ist,

$$dx_1 = \frac{1}{a_1}\frac{\partial F}{\partial p_{11}}, \quad dx_2 = \frac{1}{a_2}\frac{\partial F}{\partial p_{22}}, \ldots, dx_n = \frac{1}{a_n}\frac{\partial F}{\partial p_{nn}}$$

eine andere Lösung ist. Wenn eine charakteristische Mannigfaltigkeit von n Dimensionen eine Schar von charakteristischen M_1 enthält, so gibt es also auf derselben Mannigfaltigkeit auch eine andere Schar von charakteristischen M_1. Bäcklund betrachtet dann ein System von

zwei partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung $F = 0$ und $\Phi = 0$, derart, daß von den $2n$ Gleichungen

$$\frac{dF}{dx_i} = 0, \quad \frac{d\Phi}{dx_i} = 0$$

eine aus den übrigen folgt. Er zeigt, daß das System in diesem Fall charakteristische Mannigfaltigkeiten hat, die in z, x_i, p_i, p_{ik} von der Dimension $n - 1$ sind und von eindimensionalen charakteristischen Mannigfaltigkeiten erzeugt werden. Mit Hilfe dieses Satzes kann er ein in der vorigen Abhandlung gewonnenes Resultat präzisieren. Wenn ein System von drei, vier, ... Gleichungen zweiter Ordnung die Eigenschaft hat, daß die Gleichungen zur Bestimmung von p_{ikl} sich auf $3n - 3$, $4n - 6$, ..., Gleichungen reduzieren, so haben nicht nur diese Gleichungen Integralmannigfaltigkeiten von der Dimension n in größtmöglicher Zahl, sondern diese Integralmannigfaltigkeiten sind von charakteristischen M_1 erzeugt, die den Gleichungen gemeinsam sind.

In der zweiten Abhandlung über partielle Differentialgleichungen mit intermediären Integralen hatte **Bäcklund** untersucht, wie die ersten Integrale einer Gleichung, die zwei oder mehrere vollständige erste Integralscharen von gewisser bestimmter Form hat, sich zueinander verhalten. Der Zweck dieser Untersuchungen war, die Kenntnis derjenigen Systeme von partiellen Differentialgleichungen, die gemeinsame Lösungen besitzen, zu erweitern. Denselben Zweck verfolgt er in einer in Bd. 15 der Math. Annalen 1879 veröffentlichten Abhandlung: „Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung." Im ersten Teile dieser Abhandlung betrachtet er eine partielle Differentialgleichung $n$ter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen x und y, die zwei erste Integrale der Ordnung $n - 1$, $f = 0$, $\varphi = 0$ hat, von denen das erste, $f = 0$, selbst ein Integral von der Ordnung k, $F = 0$, hat, während das Zweite, $\varphi = 0$, ein Integral von der Ordnung m : $\Phi = 0$ hat. Er zeigt, daß, wenn F und φ in dieser Beziehung zueinander stehen, von den charakteristischen Richtungen, die einem Element — durch die Werte von $z, x, y, p, q, \ldots$, den Ableitungen von z von der Ordnung $n - 1$ definiert — einerseits durch $F = 0$ und die daraus durch Differentiation erhaltenen Gleichungen, andererseits durch $\varphi = 0$ zugeordnet werden, mindestens $k - 1$ gemeinsam sein müssen. Diese notwendige Bedingung ist jedoch nicht hinreichend. Wenn k Richtungen gemeinsam sind, muß außerdem $F = 0$ ein Integral von $\varphi = 0$ sein. Wenn $k - 1$ Richtungen gemeinsam sind, muß φ einer linearen homogenen partiellen Differentialgleichung von der ersten Ordnung genügen. — **Bäcklund** betrachtet

dann die gemeinsamen Integralflächen von $F = 0$ und $\Phi = 0$. Er setzt $m = n - k + r$ $(r < k - 1)$ und findet, daß $F = 0$ und $\Phi = 0$ jedem gemeinsamen Element mindestens r gemeinsame Richtungen zuordnet. Wenn $r > 0$ ist, entspricht jeder gemeinsamen Richtung eine gemeinsame Charakteristik und damit ∞^∞ gemeinsame Integralflächen. Auch wenn $k = 0$ ist, und es also keine gemeinsamen Charakteristiken gibt, können solche gemeinsame Integralflächen existieren. — Die gefundenen Ergebnisse werden zur Untersuchung der Mannigfaltigkeiten von Integralflächen angewandt, die eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, sei es mit einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, sei es mit einer anderen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung gemeinsam haben kann.

Im zweiten Teil der Abhandlung gibt Bäcklund eine Darstellung der Theorie der infinitesimalen Berührungstransformationen und ihrer Anwendung auf die partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Er zeigt, daß man eine Gleichung dieser Art, die eine infinitesimale Berührungstransformation gestattet, auf eine solche Form bringen kann, daß die abhängige Veränderliche z darin nicht vorkommt. Wenn die Gleichung zwei vertauschbare infinitesimale Transformationen gestattet, kann man sowohl z wie p entfernen. Durch Bäcklunds erste unendlich vieldeutige Transformation, Math. Annalen Bd. 9, kann man dann die Gleichung in eine in r, s, t lineare partielle Differentialgleichung überführen. Auf diese Anwendung der Transformation hatte Lie in einem Brief 1876 Bäcklund aufmerksam gemacht.

Der dritte Paragraph behandelt einige Fälle, die vorkommen können, wenn ein System von partiellen Differentialgleichungen erster oder zweiter Ordnung mit drei unabhängigen Veränderlichen x_1, x_2, x_3 und einer abhängigen Veränderlichen z vorgelegt ist. Es wird gezeigt, daß eine Gleichung zweiter Ordnung und eine Gleichung erster Ordnung in der Beziehung zueinander stehen können, daß alle gemeinsamen Elemente $z, x_i, p_i, p_{ik}, \ldots$ sich zu dreidimensionalen Integralmannigfaltigkeiten zusammenfassen lassen. Jede solche Integralmannigfaltigkeit enthält zwei Scharen von zwei-dimensionalen Charakteristiken. Dann wird die Bedingung dafür aufgestellt, daß zwei Gleichungen, eine zweiter Ordnung und eine erster Ordnung, in dieser Beziehung zueinander stehen. Notwendig dafür ist unter anderem, daß die Gleichung zweiter Ordnung einem gewissen Typus angehört. Eine infinitesimale Berührungstransformation zu gestatten, ist eine nicht notwendige, aber hinreichende Bedingung dafür, daß eine Gleichung zu diesem Typus gehört. — Zwei partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung und eine Gleichung erster Ordnung können so verknüpft sein,

daß sie gemeinsame zweidimensionale Charakteristiken in größtmöglicher Anzahl — also so, daß jedem gemeinsamen Element z, x_i, p_i, p_{ik} eine gemeinsame charakteristische M_2 entspricht — und von ihnen erzeugte dreidimensionale Integralmannigfaltigkeiten haben. — Zwei partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung können so beschaffen sein, daß alle ihre gemeinsamen Elemente $z, x_i, p_i, p_{ik}, p_{ikl}$ sich zu M_3 zusammensetzen lassen. Bäcklund zeigt analytisch, daß in diesem Fall jede M_3 ∞^1 gemeinsame charakteristische M_2 enthält. Durch mehrere Beispiele zeigt er, daß dieser Fall tatsächlich vorkommen kann.

Der vierte Paragraph enthält eine Auseïnandersetzung über die Charakteristiken eines Systems von zwei partiellen Differentialgleichungen dritter Ordnung, zwischen deren ersten Ableitungen eine lineare Beziehung besteht. Es wird gezeigt, daß jede den beiden Gleichungen gemeinsame Integralmannigfaltigkeit von der Dimension drei eine Schar von gemeinsamen zweidimensionalen Charakteristiken enthält. Man erhält sie durch Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades. Wenn die beiden Gleichungen je ein erstes Integral $f = 0$ und $\varphi = 0$ haben, und wenn keines von diesen beiden Integralen gleichzeitig der anderen Gleichung dritter Ordnung genügt, so werden die gemeinsamen Integralmannigfaltigkeiten von der Dimension drei von gemeinsamen eindimensionalen Charakteristiken erzeugt.

Der letzte Paragraph dehnt die Theorie auf den $n + 1$-dimensionalen Raum aus. Die aufgestellten Sätze wurden indessen bald danach von Bäcklund widerrufen.

Der siebzehnte Band der Math. Annalen enthält eine umfangreiche Abhandlung von Bäcklund: „Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung." Sie ist Juli 1880 datiert. Ihr Zweck ist, der Einleitung nach, eine eingehende Diskussion der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zu geben, die vollständige erste Integrale besitzen, welche im Gegensatz zu den üblichen Verhältnissen durch mehr als eine Beziehung zwischen der abhängigen und den unabhängigen Veränderlichen charakterisiert sind. Wie aus dem folgenden Bericht über den Inhalt dieser Abhandlung hervorgehen wird, hat sie indessen eine Bedeutung, die sich weit über die Grenzen jener Aufgabe erstreckt.

Bäcklund betrachtet zunächst eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit drei unabhängigen Veränderlichen x_1, x_2, x_3 und einer abhängigen Veränderlichen z. Wenn man $\frac{\partial z}{\partial x_i} = p_i$ setzt, so hat diese Gleichung die Form

$$F(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = 0.$$

Bäcklund zeigt, daß eine notwendige Bedingung für die Existenz eines durch zwei Beziehungen zwischen z, x_1, x_2, x_3 charakterisierten, vollständigen Integrals ist, daß die Gleichung $F = 0$, wenn z, x_1, x_2, x_3 als Konstanten und p_1, p_2, p_3 als Raumkoordinaten aufgefaßt werden, eine Regelfläche darstellt. Wenn man die Gleichungen der geraden Linie in der Form: $p_2 = p - p'p_1$, $p_3 = q - q'p_1$ schreibt, so muß die Gleichung $F = 0$ durch mindestens drei, vielleicht mehr, Beziehungen zwischen den Linienkoordinaten p, q, p', q' und z, x_1, x_2, x_3 dargestellt werden können. Bäcklund setzt jetzt $x_1 = z'$, $x_2 = x$, $x_3 = y$. p, q, p', q' haben dann die Bedeutungen $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z'}{\partial x}, \frac{\partial z'}{\partial y}$. Die Frage, welche vorliegt, ist dann, ob drei oder mehr Gleichungen von der Form $f(z, z', x, y, p, q, p', q') = 0$ gemeinsame Lösungen $z = z(x, y)$, $z' = z'(x, y)$ besitzen können, die von drei willkürlichen Parametern abhängen. Bäcklund zeigt zunächst, daß zwei Gleichungen: $f = 0$, $\varphi = 0$ immer ∞^∞ gemeinsame Lösungen besitzen. Er zeigt dann, daß, wenn gemeinsame Lösungen der Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$ auch einer dritten Gleichung $\psi = 0$ genügen sollen, die Funktion ψ, als Funktion von 6 Veränderlichen aufgefaßt, einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen muß, die in den partiellen Ableitungen zweiter Ordnung linear ist und ∞^1 Lösungen hat, welche willkürliche Funktionen von je vier Funktionen $\psi, \psi', \psi'', \psi'''$ sind, wobei jede Gruppe von je vier Funktionen ψ zwei involutorischen, linearen, partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung genügt. Diese ∞^1 Involutionssysteme stellen ein vollständiges intermediäres Integral der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung dar. — Bäcklund diskutiert dann die Fälle, wenn $F = 0$ zu mehr als drei Beziehungen zwischen $z, z', x, y, p, q, p', q'$ Anlaß gibt. Lösungen vom Typus $z = z(x, y)$, $z' = z'(x, y)$, welche drei unabhängige Parameter enthalten, sind in diesem Fall nicht möglich. Dagegen kann es, je nachdem die Anzahl der Beziehungen 4, 5 oder 6 ist, Scharen von ∞^2, ∞^1 oder eine endliche Zahl solcher Lösungen geben.

Nach einer Untersuchung der Enveloppen der zwei-, drei- oder vierfach unendlichen Scharen von zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten eines vierdimensionalen Raumes geht Bäcklund zu einer Verallgemeinerung des oben behandelten Problems über. Wenn man ein System der oben betrachteten Art: $f = 0$, $\varphi = 0$ in der Form

$$x' = x, \quad y' = y, \quad f(z, x, y, p, q, z', x', y', p', q') = 0,$$
$$\varphi(z, x, y, p, q, z', x', y', p', q') = 0$$

schreibt, so kann man diese vier Gleichungen als Definitionsgleichungen

einer Transformation zwischen einem xyz-Raume, R, und einem $x'y'z'$-Raume, R', auffassen. Bäcklund wird dadurch veranlaßt, die folgende allgemeine Frage zu stellen. Eine Transformation zwischen R und R' ist durch k Gleichungen von der Form: $F(z, x, y, p, q, z', x', y', p', q') = 0$ definiert. Welches ist das Gebiet, innerhalb dessen diese Transformationen eine Flächentransformation definieren? Er beantwortet diese Frage für die Fälle $k = 3$ und $k = 4$. Im Falle $k = 3$ entspricht einem beliebigen Streifen in R, d. h. einer beliebigen, eindimensionalen Mannigfaltigkeit z, x, y, p, q, die der Bedingung $dz = p\,dx + q\,dy$ genügt, ein System von zwei partiellen Differentialgleichungen in R'. Diese Gleichungen haben in allgemeinen keine gemeinsamen Integralflächen. Wenn man verlangt, daß die beiden Gleichungen, wie auch der Streifen in R gewählt wird, ein Involutionssystem bilden sollen, so muß die Transformation der von Bäcklund früher untersuchten Art sein, die durch eine oder mehrere Beziehungen von der Form $F(z, x, y, p, q, z', x', y') = 0$ definiert wird. Wenn dies nicht der Fall ist, so kann doch, wenn zwei der Transformationsgleichungen gegeben sind, die dritte so gewählt werden, daß jeder Streifen einer beliebig gewählten, vierfach unendlichen Schar in ∞^1 Flächen in R' transformiert wird. Bäcklund zeigt, daß alle diese Flächen einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen. — Im Falle $k = 4$ findet Bäcklund als Bedingung dafür, daß einer Fläche in R eine oder mehrere Flächen in R' entsprechen, daß die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$\begin{aligned}(34)\,[F_1F_2]_{z'x'p'} &+ (42)\,[F_1F_3]_{z'x'p'} + (23)\,[F_1F_4]_{z'x'p'} \\ &+ (12)\,[F_3F_4]_{z'x'p'} + (13)\,[F_4F_2]_{z'x'p'} + (14)\,[F_2F_3]_{z'x'p'} = \end{aligned}$$

Hier ist $$(mn) = \frac{dF_m}{dx}\frac{dF_n}{dy} - \frac{dF_m}{dy}\frac{dF_n}{dx},$$

$$\frac{dF_m}{dx} = \frac{\partial F_m}{\partial x} + p\frac{\partial F_m}{\partial z} + r\frac{\partial F_m}{\partial p} + s\frac{\partial F_m}{\partial q},$$

$$\frac{dF_m}{dy} = \frac{\partial F_m}{\partial y} + q\frac{\partial F_m}{\partial z} + s\frac{\partial F_m}{\partial p} + t\frac{\partial F_m}{\partial q}.$$

$$\begin{aligned}[F_iF_k]_{z'x'p'} = &\left(\frac{\partial F_i}{\partial x'} + p'\frac{\partial F_i}{\partial z'}\right)\frac{\partial F_k}{\partial p'} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial y'} + q'\frac{\partial F_i}{\partial z'}\right)\frac{\partial F_k}{\partial q'} \\ &- \left(\frac{\partial F_k}{\partial x'} + p'\frac{\partial F_k}{\partial z'}\right)\frac{\partial F_i}{\partial p'} - \left(\frac{\partial F_k}{\partial y'} + q'\frac{\partial F_k}{\partial z'}\right)\frac{\partial F_i}{\partial q'}.\end{aligned}$$

Wenn diese Gleichung für eine vorgelegte Fläche in R erfüllt ist, so entsprechen jener Fläche ∞^1 Flächen in R'. Wenn die Gleichung nicht erfüllt ist, so kann es dennoch vorkommen, daß der vorgelegten Fläche in R eine Fläche in R' entspricht. Dies ist jedoch nur dann der Fall,

wenn die Fläche in R gemeinsame Integralfläche von zwei partiellen Differentialgleichungen dritter Ordnung ist. Diese sind so miteinander verknüpft, daß eine der vier Gleichungen zur Bestimmung der Ableitungen vierter Ordnung von z in bezug auf x und y, die man durch Differentiation der beiden Differentialgleichungen erhält, eine Folge der übrigen ist. Die beiden Differentialgleichungen dritter Ordnung haben also stets gemeinsame Lösungen.

In der Fortsetzung seiner Abhandlung zeigt Bäcklund, wie man in einem fünfdimensionalen Raume partielle Differentialgleichungen erster Ordnung bilden kann, welche Lösungen besitzen, die durch zwei oder mehr Beziehungen zwischen den Koordinaten definiert sind. Er betrachtet schließlich einige spezielle Probleme, die als Spezialfälle der schon behandelten aufgefaßt werden können.

Was dieser Abhandlung Bedeutung gibt, ist vor allem, daß Bäcklund hier zum ersten Male die Transformationen untersucht hat, mit denen später sein Name verbunden worden ist, diejenigen, welche durch drei oder vier Beziehungen von der Form

$$F(z, x, y, p, q, z', x', y', p', q') = 0$$

definiert werden. Es ist unter diesen Umständen von Interesse, daß zu der Zeit, Juli 1880, wo Bäcklund seine Abhandlung abschloß, Sophus Lie schon auf anderem Wege zur Betrachtung einer speziellen Transformation dieser Art geführt worden war. In seinem dritten Aufsatze über Flächen mit konstanter Krümmung zeigte er, daß Bianchis Transformation einer Fläche konstanter Krümmung in eine andere Fläche mit derselben Eigenschaft analytisch durch vier Beziehungen der oben angegebenen Form ausgedrückt werden kann. Nichts deutet darauf hin, daß Bäcklund während der Beschäftigung mit der oben referierten Abhandlung von dieser Untersuchung von Lie Kenntnis gehabt hat.

Die Abhandlung „Zur Theorie der Flächentransformationen", Math. Annalen Bd. 19, 1881, kann als eine Fortsetzung der Abhandlung von 1880 aufgefaßt werden. Der Beweggrund zu dieser Untersuchung war einmal der Wunsch, in gewissen Beziehungen die früher erhaltenen Ergebnisse zu vervollständigen, anderseits der Wunsch, die Bianchi-Liesche Transformation im Systeme von Bäcklunds allgemeinen Flächentransformationen einzuordnen.

Bäcklund gibt zunächst eine genauere Untersuchung des Systems

$$f(z, z', x, y, p, q, p', q') = 0, \quad \varphi(z, z', x, y, p, q, p', q') = 0.$$

Er zeigt, daß man durch jede eindimensionale Mannigfaltigkeit M_1^0 des vierdimensionalen z, z', x, y-Raumes, welche durch Gleichungen

von der Form $z = z(x)$, $y = y(x)$, $z' = z'(x)$ definiert wird, eine zweidimensionale Integralmannigfaltigkeit: $z = z(x, y)$, $z' = z'(x, y)$ des obigen Systems legen kann. Jede solche zweidimensionale Integralmannigfaltigkeit enthält indessen zwei Systeme von M_1^0, längs welcher sie von unendlich vielen anderen zweidimensionalen Integralmannigfaltigkeiten berührt wird. Diese M_1^0 mit ihren Systemen von ∞^1 Tangentialebenen bezeichnet Bäcklund als Charakteristiken des Systems. Wenn eine dritte Gleichung

$$\psi(z, z', x, y, p, q, p', q') = 0$$

mit $f = 0$, $\varphi = 0$ Lösungen gemeinsam haben soll, so muß, wie Bäcklund früher gezeigt hatte, ψ einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen. Bäcklund untersucht jetzt den Fall, wo jene Gleichung ein erstes Integral besitzt, das die Form einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, $\Omega = 0$, hat. Er zeigt, daß jedem Elemente $z, z', x, y, p, q, p', q'$ eine und nur eine eindimensionale Schar von Elementen $z, z', x, y, p, q, p', q'$ entspricht, die sowohl für $f = 0$ und $\varphi = 0$ wie für $\Omega = 0$ eine Charakteristik ist. Er schließt hieraus, daß $\Omega = 0$ eine lineare partielle Differentialgleichung ist. Er zeigt schließlich durch ein einfaches Beispiel, daß dieser Fall wirklich vorkommen kann.

Die beiden Funktionen $z(x, y)$, $z'(x, y)$, die den Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$ genügen, müssen im allgemeinen je ein System von partiellen Differentialgleichungen dritter Ordnung befriedigen. Zwischen diesen beiden Systemen vermittelt $f = 0$, $\varphi = 0$ eine Korrespondenz, bei welcher Flächen, die mit einander eine Berührung zweiter Ordnung haben, in Flächen überführt werden, die ebenfalls eine Berührung zweiter Ordnung haben. Es kann scheinen, daß dieses Resultat mit einem früher von Bäcklund bewiesenen Satz in Widerspruch stehe, welcher aussagt, daß die Transformationen, welche alle Integralflächen einer partiellen Differentialgleichung, die von höherer Ordnung als der ersten ist, in alle Integralflächen einer anderen Differentialgleichung von derselben Art überführen, und bei welchen Berührung einer gewissen Ordnung invariant ist, notwendig Berührungstransformationen sind. Bäcklund zeigt durch eine Analyse seines Beweises, daß er wohl in bezug auf *eine* partielle Differentialgleichung angewendet werden darf, dagegen nicht in bezug auf ein System von partiellen Differentialgleichungen. Aus seiner Untersuchung geht überdies hervor, daß die beiden partiellen Differentialgleichungen dritter Ordnung für z (oder z'), zu welchen $f = 0$, $\varphi = 0$ Anlaß geben, nie ein erstes Integral haben können, das von einem willkürlichen Parameter abhängt.

Betreffs der durch die Gleichungen

$$F_i(z, x, y, p, q, z', x', y', p', q') = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

definierten Transformationen hatte **Bäcklund** früher gezeigt, daß, wenn F_1 und F_2 gegeben sind, man F_3 so bestimmen kann, daß jedem Streifen einer im z-Raume vorgelegten, vierfach unendlichen Schar von Streifen eine Schar von ∞^1 Flächen des z'-Raumes entspreche. Er zeigt jetzt, daß, wenn F_1 gegeben ist, man F_2 und F_3 so bestimmen kann, daß jedem Integralstreifen zweier partieller Differentialgleichungen erster Ordnung

$$f(z, x, y, p, q) = C, \quad \varphi(z, x, y, p, q) = C',$$

also jedem den Gleichungen

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy = 0$$

genügenden Streifen, ∞^1 Flächen des z'-Raumes entsprechen. Jene Flächen sind gemeinsame Integralflächen zweier partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$F(z', x', y', p', q', r', s', t') = C, \quad \Phi(z', x', y', p', q', r', s', t') = C'.$$

Diese Gleichungen haben die folgenden Eigenschaften. Von jedem Element $z', x', y', p', q', r', s', t'$ geht eine gemeinsame Charakteristik der beiden Gleichungen aus. Aus diesen Charakteristiken kann man ∞^∞ gemeinsame Integralflächen bilden. Von den vier Gleichungen, die man aus $F = C$ und $\Phi = C'$ durch Differentiation in bezug auf x' und y' erhält, ist eine eine Folge der übrigen. Es gibt ∞^∞ gemeinsame Integralflächen der beiden Gleichungen $F = C$, $\Phi = C'$, die längs einer beliebigen Charakteristik eine Berührung erster Ordnung haben. — Entsprechende Ergebnisse werden für die durch drei oder vier Gleichungen von der Form

$$F_i(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3, z', x_1', x_2', x_3', p_1', p_2', p_3') = 0$$

definierten Transformationen des vierdimensionalen Raumes abgeleitet.

Bäcklund geht schließlich zu der durch vier Gleichungen

$$F_i(z, x, y, p, q, z', x', y', p', q') = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

definierten Korrespondenz zwischen dem z- und dem z'-Raume über. Er reproduziert in neuer Form seinen Beweis, daß die Gleichungen $F_i = 0$ für die Funktionen z und z' je ein System von partiellen Differentialgleichungen dritter Ordnung geben. Er hebt hervor, daß die beiden Gleichungen desselben Systemes so miteinander verknüpft sind, daß man durch Differenzierung in bezug auf x und y, bzw. x' und y',

nur drei unabhängige Gleichungen zur Bestimmung der Ableitungen vierter Ordnung von z bzw. z' erhält. Sie haben also ∞^∞ gemeinsame Lösungen. Die einer bekannten Lösung $z(x, y)$ entsprechende Lösung $z'(x', y')$ erhält man durch Eliminationen. — Bäcklund betrachtet dann den Fall, daß die Funktionen F_i nicht z' enthalten. Zur Bestimmung von z erhält man in diesem Falle eine Monge-Ampèresche Differentialgleichung zweiter Ordnung. Wenn $z(x, y)$ bekannt ist, so bekommt man $z'(x', y')$ durch Quadraturen. Einem Element z, x, y, p, q, r, s, t entsprechen ∞^1 Elemente $z', x', y', p', q', r', s', t'$. $z'(x', y')$ muß immer noch zwei partiellen Differentialgleichungen dritter Ordnung genügen. Wenn $z'(x', y')$ bekannt ist, erhält man $z(x, y)$ durch Eliminationen. — Wenn die Funktionen F weder z noch z' enthalten, erhält man offenbar zur Bestimmung dieser beiden Funktionen partielle Differentialgleichungen von dem Monge-Ampèreschen Typus. Einer Integralfläche einer dieser Gleichungen entsprechen ∞^1 Integralflächen der anderen Gleichung. Die beiden Gleichungen haben offenbar genau dieselbe Form, wenn die Transformationsgleichungen in bezug auf die beiden Systeme z, x, y, p, q und z', x', y', p', q' symmetrisch sind.

Die Eigenschaft, eine Integralfläche einer Monge-Ampèreschen Differentialgleichung in unendlich viele andere Integralflächen derselben Gleichung überzuführen, hat auch die Bianchische Transformation, die nach Lie durch die vier Beziehungen

$$(x'-x)\,p + (y'-y)\,q - (z'-z) = 0,$$
$$(x'-x)\,p' + (y'-y)\,q' - (z'-z) = 0,$$
$$pp' + qq' + 1 = 0, \quad (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2 = \frac{1}{a^2}.$$

dargestellt wird. Bäcklund wendet auf dieses System seine Methoden an und findet so das schon bekannte Resultat wieder, daß diese Transformation die Gleichung

$$rt - s^2 + a^2(1 + p^2 + q^2)^2 = 0$$

in sich überführt und daß dabei asymptotische Linien in asymptotische Linien übergeführt werden. Er findet darüber hinaus, daß die Bestimmung der geodätischen Linien einer Fläche konstanter negativer Krümmung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung zurückgeführt werden kann.

In enger Verbindung mit der Arbeit, über die wir zuletzt berichtet haben, steht die Abhandlung, welche den Höhepunkt und gleichzeitig den Abschluß des Zeitabschnitts in Bäcklunds Leben bezeichnet, mit dem wir uns jetzt beschäftigen. Ihr Titel ist in deutscher Über-

setzung: „Über Flächen mit konstanter negativer Krümmung." Sie wurde in T. 19 von Lunds Universitets årsskrift 1882—1883 veröffentlicht und ist von einem Résumé en français begleitet.

Bäcklund gibt in dieser Abhandlung zuerst eine neue geometrische Darstellung der Bianchischen Transformation einer Fläche mit konstanter negativer Totalkrümmung in eine andere Fläche derselben Art. Sein Ausgangspunkt ist der Ribaucoursche Satz, daß, wenn man in den Tangentenebenen einer Fläche C Kreise mit den Mittelpunkten in den Berührungspunkten der Tangentenebenen und mit konstantem Radius a zeichnet, jene Kreise nur dann eine andere Fläche, C', senkrecht schneiden, wenn die Fläche C konstante Totalkrümmung $-1/a^2$ hat. Wenn es eine Fläche C' gibt, so gibt es unendlich viele Flächen, welche die Kreise senkrecht schneiden. Sie bilden eine Reihe eines dreifach unendlichen Flächensystems. Bäcklund hebt hervor, daß die Beziehung zwischen C und C' analytisch durch die Formeln

$$(x'-x)\,p+(y'-y)\,q-(z'-z)=0,$$
$$(x'-x)\,p'+(y'-y)\,q'-(z'-z)=0,$$
$$1+pp'+qq'=0, \qquad (x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2=a^2$$

dargestellt wird. Aus der Symmetrie in bezug auf die beiden Variabelngruppen z, x, y, p, q und z', x', y', p', q' geht hervor, daß die ∞^1 Flächen C' ebenso wie C die konstante Totalkrümmung $-1/a^2$ haben. Da die obigen Transformationsformeln mit den Formeln identisch sind, die nach Lie der analytische Ausdruck der Bianchischen Transformation sind, so müssen die neuen Flächen C' gerade die Flächen sein, die man bei der Bianchischen Transformation aus C erhält. Diese Flächen bilden also eine Reihe in einem dreifach unendlichen Flächensystem. Die übrigen beiden Reihen erhält man aus C' durch Eliminationen.

Bäcklund teilt dann seine Verallgemeinerung von Bianchis Transformation mit. Er definiert ∞^2 Transformationen durch die Formeln

$$(x'-x)\,p+(y'-y)\,q-(z'-z)=0,$$
$$(x'-x)\,p'+(y'-y)\,q'-(z'-z)=0,$$
$$1+pp'+qq'-K\sqrt{1+p^2+q^2}\,\sqrt{1+p'^2+q'^2}=0,$$
$$(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2=a^2.$$

Er zeigt, daß diese Differentialgleichungen für z nur dann miteinander verträglich sind, wenn

$$rt-s^2+\frac{1-K^2}{a^2}(1+p^2+q^2)^2=0,$$

d. h. wenn die Fläche $z = z(x, y)$ die konstante Totalkrümmung $-\frac{1-K^2}{a^2}$ hat. Wegen der Symmetrie muß $z' = z'(x', y')$ dieselbe konstante Totalkrümmung haben. Wenn eine Fläche mit der konstanten Totalkrümmung $-\frac{1}{m^2}$ vorgelegt ist, so gibt es also ∞^1 Transformationen (deren Konstanten K und a der Bedingung $\frac{1-K^2}{a^2} = \frac{1}{m^2}$ unterworfen sind), welche die vorgelegte Fläche in je ∞^1 neue Flächen mit derselben konstanten Totalkrümmung überführen.

Als Vorbereitung zum näheren Studium seiner Transformation beweist Bäcklund dann durch eine Untersuchung der Gleichung

$$rt - s^2 + \frac{1}{m^2}(1 + p^2 + q^2)^2 = 0,$$

wobei besondere Aufmerksamkeit den Charakteristiken gewidmet wird, einige Hauptsätze in der Theorie der Flächen konstanter Krümmung.

Durch eine infinitesimalgeometrische Betrachtung wird jetzt gezeigt, daß einem gegebenen Streifen — d. h. einer eindimensionalen Mannigfaltigkeit z, x, y, p, q, die der Bedingung $dz = p\,dx + q\,dy$ genügt — ∞^1 Streifen des z'-Raumes entsprechen und daß die Bestimmung jener Streifen die Integration einer Riccatischen Differentialgleichung erster Ordnung erheischt. Es wird gezeigt, daß asymptotische Linien und Krümmungslinien oder, genauer, die aus diesen Linien und den zugehörigen Tangentenebenen gebildeten Streifen in je ∞^1 neue Streifen übergeführt werden, die auf je einer Fläche entsprechende Bedeutung haben. Endlich wird gezeigt, daß die Bestimmung der Flächen des z'-Raumes, die einer gegebenen Fläche des z-Raumes entsprechen, auf eine Riccatische Differentialgleichung mit einem willkürlichen Parameter zurückgeführt werden kann. Wenn man jetzt annimmt, daß zwei Flächen mit derselben konstanten negativen Krümmung gegeben sind, die sich bei einer Bäcklundschen Transformation entsprechen, und wenn man alle Flächen des z'-Raumes sucht, welche der im z-Raume gegebenen Fläche entsprechen, so hat man eine Riccatische Gleichung zu integrieren und kennt dabei eine Lösung im voraus. Man erhält dann die übrigen Lösungen durch Quadraturen. Aus einem Paar entsprechender Flächen erhält man also durch Quadraturen ∞^1 neue Flächen. Jede neue Fläche kann dann weiter mit der bekannten Fläche des z-Raumes kombiniert werden und gibt somit zu ∞^1 neuen Flächen Anlaß. So kann man fortfahren. Aus einem Paar entsprechender Flächen mit derselben konstanten Krümmung kann man durch Quadraturen ∞^∞ neue Flächen mit derselben Krümmung ableiten.

In seiner vorhergehenden Abhandlung hatte Bäcklund gezeigt, daß die Bestimmung der geodätischen Linien einer Fläche konstanter negativer Krümmung auf die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung zurückgeführt werden kann. Er nimmt jetzt diese Frage wieder auf. Er zeigt durch eine einfache geometrische Betrachtung, daß das Problem durch Quadraturen gelöst werden kann, wenn man die Flächen C' kennt, die in Verbindung mit der gegebenen Fläche C den vollständigen Ort der Krümmungszentra einer dritten Fläche darstellen. Jene Flächen C' sind diejenigen, die man aus C durch die Bianchische Transformation erhält. Ihre Bestimmung erheischt also nur die Integration einer Riccatischen Differentialgleichung.

Der Satz, daß die Bestimmung der geodätischen Linien einer Fläche mit konstanter negativer Krümmung auf eine Riccatische Differentialgleichung zurückgeführt werden kann, wurde etwa gleichzeitig auf anderem Wege von Bianchi entdeckt.

Auf seine eingehende Untersuchung der Geometrie der neuen Transformation gestützt, leitet Bäcklund sehr einfache Ausdrücke für das Linienelement ds' und die Krümmungsradien der Flächen C' ab, die einer gegebenen Fläche C entsprechen. Er beweist dann den folgenden Satz. Wenn man auf C und C' dieselbe Parallelverschiebung: $R = R_1 + \sqrt{R_1 R_2}$, $R' = R_2 + \sqrt{R_1 R_2}$ ausübt, so erhält man zwei Flächen Γ und Γ', deren Krümmungsradien der Bedingung

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2}}$$

genügen. Die Korrespondenz zwischen diesen Flächen, die man aus der Transformation erhält, welche C mit C' verbindet, gibt eine konforme Abbildung von Γ' auf Γ.

Ossian Bonnet hat gezeigt, daß man jede Fläche mit konstanter mittlerer Krümmung durch infinitesimale Deformationen in unendlich viele andere Flächen mit derselben konstanten mittleren Krümmung überführen kann. Man kann also von einer Fläche C mit konstanter Totalkrümmung ausgehen, aus dieser Fläche durch die oben angegebene Parallelverschiebung eine Fläche mit konstanter mittlerer Krümmung ableiten, jene Fläche nach der Methode von Ossian Bonnet in eine neue Fläche mit konstanter mittlerer Krümmung überführen, endlich diese Fläche durch eine gegenüber der vorigen inverse Parallelverschiebung in eine neue Fläche mit konstanter Totalkrümmung transformieren. Dies ergibt eine neue Methode, aus einer Fläche mit konstanter Totalkrümmung ∞^1 neue Flächen mit derselben

konstanten Totalkrümmung abzuleiten. Daß diese Transformation von ganz anderer Art als die Bäcklundsche Transformation ist, geht daraus hervor, daß bei ihr die Fläche C selbst zu den Flächen gehört, die man bei der Transformation daraus erhält. Wegen der Bedeutung, welche die Transformationen von Ossian Bonnet somit für die Theorie der Flächen mit konstanter Totalkrümmung haben, entwickelt Bäcklund im letzten Paragraphen seiner Abhandlung die analytische Theorie derselben.

In einer Note (Note II) teilt Bäcklund drei Beispiele von Transformationen mit, welche vom Typus

$$x' = f_1(x, y, p, q), \quad y' = f_2(x, y, p, q),$$
$$p' = f_3(x, y, p, q), \quad q' = f_4(x, y, p, q)$$

sind. Sie sind: $x' = ap, \quad y' = aq, \quad p' = \frac{y}{a}, \quad q = -\frac{x}{a},$

welche die Laplacesche Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{in sich überführt;}$$

$$x' = \sqrt{-1} \cdot y, \quad y' = -\sqrt{-1} \cdot x,$$
$$p' = \sqrt{-1}\,\frac{p}{1 + p^2 + q^2}, \quad q' = \sqrt{-1}\,\frac{q}{1 + p^2 + q^2},$$

welche jede Minimalfläche in eine neue Minimalfläche überführt;

$$x' = a\,\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad y' = x, \quad p' = \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad q' = \frac{y}{a},$$

welche die Differentialgleichung der Flächen konstanter Krümmung

$$a^2(rt - s^2) + (1 + p^2 + q^2)^2 = 0$$

in $$(a^2 - x'^2)(r't' - s'^2) + p'x'(r' - t') + 1 - p'^2 = 0$$

überführt.

Die Abhandlung, über deren Inhalt ich hier einen Bericht erstattet habe, ist, obwohl sie in schwedischer Sprache geschrieben ist, diejenige von Bäcklunds Abhandlungen, die am meisten bekannt geworden ist. Lie bezeichnete Bäcklunds Transformation als äußerst interessant. Darboux teilt sie im dritten Teile seiner „Théorie générale des surfaces" mit. Eisenhart erwähnt in seinem Lehrbuch der Differentialgeometrie, daß eine Dame in Princeton die Abhandlung ins Englische übersetzt hat.

Bäcklunds mathematische Jugendarbeiten gehören der synthetischen Geometrie an. Als er zur Theorie der partiellen Differential-

gleichungen überging, behielt er die Methode bei, die er auf seinem früheren Arbeitsgebiete benutzt hatte. Bäcklunds Resultate sind oft, um nicht meistens zu sagen, durch geometrische Intuition gewonnen. Dies macht seine Schriften sehr schwer zugänglich. Trotzdem haben sie einen nicht geringen Einfluß ausgeübt. Ich stelle kurz die wichtigsten Dienste zusammen, die Bäcklund durch seine Arbeiten während der Jahre 1873—1883, soweit jetzt zu beurteilen ist, der Mathematik geleistet hat. Zuerst ist zu erwähnen sein Satz, daß Berührungstransformationen höherer Ordnung nicht existieren. Dieser Satz wird oft zitiert. Einen neuen Beweis hat Liebmann gegeben. Ich erwähne dann Bäcklunds Arbeiten über Systeme partieller Differentialgleichungen und seine damit zusammenhängenden Untersuchungen über Charakteristiken. Goursat zählt wegen dieser Arbeiten Bäcklund zu den Gründern der Theorie der Charakteristiken. Die größte Bedeutung haben indessen Bäcklunds unendlich vieldeutige Transformationen gewonnen. Daß solche vieldeutige Transformationen Interesse verdienen, wurde erst dann allgemeiner anerkannt, als Bäcklund seine Transformation einer Fläche konstanter negativer Krümmung in unendlich viele andere Flächen derselben Art veröffentlichte. Wie diese Entdeckung aufgenommen wurde, habe ich schon erwähnt. Dem soll jetzt noch hinzugefügt werden, daß sie der Ausgangspunkt neuer, tiefgehender und umfassender Untersuchungen von Bianchi wurde. Durch diese Untersuchungen wurde nicht nur die Theorie der Bäcklundschen Transformationen pseudosphärischer Flächen vertieft, sondern zugleich wurde auf der Grundlage dieser Transformationen eine Transformationstheorie der Flächen mit konstanter positiver Krümmung und der Flächen, die auf eine beliebige Fläche zweiten Grades abwickelbar sind, gewonnen. Unter dem Einfluß dieser Arbeiten ist das Interesse für die Bäcklundschen Transformationen gewachsen. Zu erwähnen sind hier Arbeiten von Goursat, Clairin, Cerf und anderen. Trotz alledem sind noch viele Fragen zu beantworten, ehe man übersehen kann, was durch diese Transformationen zu erreichen ist.

Daß Bäcklund durch seine Arbeiten während der Jahre 1873—1883 einer der bedeutendsten Mathematiker ist, die Schweden bis jetzt gehabt hat, ist unzweifelhaft.

4. Physikalische Theorien.

Durch seine anzahlgeometrischen Arbeiten hatte Bäcklund seine Fähigkeit für eine mathematische Professur erwiesen. Durch seine folgenden, ersten Arbeiten über die geometrische Theorie der partiellen

Differentialgleichungen hatte er wertvolle Beiträge zur internationalen mathematischen Forschung gegeben. Es war nur natürlich, daß die führenden Männer der südschwedischen Universität den Wunsch hegten, den hervorragenden und unermüdlich tätigen jungen Privatdozenten dauernd an die Universität zu fesseln. Das Richtige wäre offenbar gewesen, für Bäcklund eine Professur für Mathematik oder für Geometrie zu errichten. Da dies unmöglich war, wurde der oben erwähnte Ausweg gefunden. Bäcklund wurde im Februar 1878 zum Professor für Mechanik und mathematische Physik ernannt. Bis dahin gab es keine Arbeit von Bäcklund, die nach unserer jetzigen Auffassung in die Mechanik oder die mathematische Physik fällt. Es war nur natürlich, daß Bäcklund nach der Ernennung im Dienste der Wissenschaften arbeiten wollte, deren Vertreter er geworden war. Schon ein Jahr nach seiner Ernennung hatte er als Promotor die Einladung zur Philosophischen Doktorpromotion auszufertigen. Seiner Einladung fügte er eine Abhandlung bei: „Über eine besondere Art von Bewegung einer unbegrenzten, unzusammendrückbaren Flüssigkeit, in welcher unzusammendrückbare Körper verteilt sind." Bäcklund betrat mit dieser Abhandlung ein neues Gebiet. Es wurde einige Jahre später das Feld, auf das er seine große Arbeitskraft konzentrierte. Einen Grund dieses Wechsels des Arbeitsgebiets habe ich schon erwähnt. Es gab aber auch einen anderen. Aus Äußerungen, die ich während der 90er Jahre von Bäcklund hörte, geht hervor, daß er sich auf seinem mathematischen Arbeitsgebiet isoliert gefühlt hat. Auch ein inneres Bedürfnis hat den Wechsel veranlaßt.

Von Norwegen hatte Bäcklund den Anstoß zu seinen wichtigsten mathematischen Entdeckungen erhalten. Von Norwegen holte er auch den Ausgangspunkt seiner Arbeit in der theoretischen Physik. Durch Untersuchungen theoretischer und experimenteller Natur hatte C. A. Bjerknes gezeigt, daß, wenn in einer unzusammendrückbaren, idealen Flüssigkeit zwei Kugeln sich abwechselnd erweitern und zusammenziehen, durch Vermittlung der Flüssigkeit eine scheinbare Fernkraft zwischen ihnen wirkt, anziehend, wenn die beiden Kugeln sich gleichzeitig erweitern und gleichzeitig zusammenziehen, abstoßend, wenn eine Kugel sich erweitert, während die andere sich zusammenzieht. Bei konstanter Amplitude der Volumoszillationen ist die Kraft dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional. Sie gibt also in gewissem Sinne ein mechanisches Bild der elektrostatischen Kraft.

Bäcklunds erste theoretisch-physikalischen Arbeiten sind Beiträge zu Bjerknes' Theorie. Er entwickelt in zwei Abhandlungen

(1879 und 1885) Formeln, die insofern über die von Bjerknes veröffentlichten hinausgehen, als sie auch für andere Körper als die kugelförmigen gelten. Er ging dann im Januar 1886 an die Entwicklung einer Theorie, die sich in einer so wichtigen Hinsicht von Bjerknes Theorie unterscheidet, daß man sie als Bäcklunds eigene Theorie bezeichnen muß. Bjerknes' Theorie ruhte wesentlich auf der Annahme, daß die Flüssigkeit, der „Äther", der den Raum erfüllen sollte, unzusammendrückbar ist. Bäcklund dagegen faßte den Äther als ein zusammendrückbares Gas auf. Er stellte sich zunächst die Frage, wie zwei kugelförmige Körper im Äther ihr Volumen abändern müssen, damit zwischen ihnen durch Vermittlung des Gasdruckes eine abstoßende Kraft wirke, die dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional ist. Er findet, daß dies der Fall sein wird, wenn jeder Körper eine periodische Volumänderung ausführt, die aus einer plötzlichen Erweiterung und einer langsamen Zusammenziehung besteht. Wie kann man aber erklären, daß die Atome solche Volumschwingungen ausführen? Bäcklund erklärt sie durch eine Theorie der Struktur der Atome, für welche er eine Stütze in Helmholtz' Theorie der Dispersion des Lichtes findet. Ein Atom besteht nach dieser Theorie aus einem festen, kugelförmigen Kern, einer Gashülle und einer dünnen Membran, die das Atom nach außen abschließt. Wenn ein solches Atom von einer im Äther vorschreitenden Verdünnungswelle getroffen wird, so wird die Folge sein, daß es sich zunächst schnell erweitert und dann langsam zusammenzieht. Eine periodische Folge von Verdünnungswellen ruft also bei jedem Atom eine Pulsation der für die Theorie nötigen Art hervor.

Es gibt in der Natur zwei Arten von Kräften, welche dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional sind, die Newtonsche Gravitation und die elektrostatische Kraft. Um diese beiden Arten von Kräften zu erklären, muß Bäcklund annehmen, daß der Äther eine Mischung von mindestens zwei Gasen ist. Ihre Dichten, ϱ und ϱ' sollen sehr klein sein, jedoch ϱ im Verhältnis zu ϱ' groß. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten einer Welle in den beiden Gasen, a und a', sollen groß sein, so daß ϱa^2 und $\varrho' a'^2$ endliche Zahlen sind. Das dünnere Gas wird sich unter diesen Umständen etwa wie eine unzusammendrückbare Flüssigkeit verhalten. Wenn sich alle Atome in Volumoszillationen befinden, die periodisch und gleicher Phase sind, so wird, wegen der im dünneren Gase erzeugten Wellen, scheinbar zwischen ihnen eine Newtonsche Anziehung wirken. Wenn einige der Atome überdies die explosiven Erweiterungen und langsamen Zusammenziehungen ausführen, wovon oben die Rede war, so wirkt

wegen der Wellen des dichteren Gases scheinbar zwischen ihnen eine Abstoßung.

Auf der hier dargelegten Grundlage baut Bäcklund seine Theorie der elektrostatischen Erscheinungen und der quasistationären Ströme auf. Der Gegensatz zwischen einem negativ und einem positiv geladenen Körper ist nach dieser Theorie derselbe wie der Gegensatz zwischen einem Körper, der von Verdünnungswellen durchfahren wird, und einem Körper, der von Verdichtungswellen durchfahren wird. Ein elektrischer Strom besteht nach dieser Theorie aus einem System von Verdichtungswellen, die sich in einer Richtung des Stromleiters bewegen, und einem System von Verdünnungswellen, die sich in der entgegengesetzten Richtung bewegen. In quantitativer Beziehung findet Bäcklund die bekannten Gesetze der elektrostatischen Erscheinungen und der Wechselwirkung zwischen quasistationären Strömen wieder. Die Theorie der magnetischen Erscheinungen führt er nach Ampère auf die Theorie der quasistationären Ströme zurück.

Wenn man das Wesen der elektrischen und magnetischen Erscheinungen kennt, so muß es möglich sein, eine Theorie des Erdmagnetismus zu geben. Dieser Frage ist „Eine Untersuchung in der Theorie der elektrischen Ströme" gewidmet, die während der Jahre 1893—1897 in den Schriften der Akademie der Wissenschaften erschien. Einen Bericht über diese Untersuchung will ich nicht geben. Ich beschränke mich auf einige Andeutungen. Um den Erdmagnetismus zu erklären, nimmt Bäcklund an, daß die Sonne gleichmäßig magnetisiert ist und daß die magnetische Achse zur Ekliptik senkrecht ist. Er berechnet die Abänderungen, welche die Bahnelemente der Planeten nach dieser Theorie durch den Magnetismus der Sonne erleiden. Er findet weiter, daß die Partikeln, aus denen die Erde besteht, in Rotation um ihre magnetischen Achsen begriffen sein müssen. Für diese Rotationen gibt er eine ausführliche mathematische Theorie und findet aus den beobachteten Wanderungen des magnetischen Nordpols, daß die Zeitperiode jener Rotationen der Partikeln 5 Stunden 26 Minuten ist. Im Anschluß an diese Theorie gibt er Ausdrücke für die täglichen Variationen der magnetischen Inklination und Deklination. Er geht dann zu einer Untersuchung des Einflusses der Sonnenwärme auf den Erdmagnetismus über. Für vier Örter vergleicht er die Ergebnisse seiner Theorie mit den magnetischen Messungen. Die Abweichungen zwischen Theorie und Erfahrung, die dabei zutage treten, werden der Ausgangspunkt einer eingehenden Untersuchung über die jährlichen Variationen der Lufttemperatur und des Luftdruckes und einer sich daran anschließenden Berechnung der von der

Temperatur eines Ortes abhängigen Variation der magnetischen Elemente desselben. Bäcklund findet, daß die oben erwähnten Abweichungen zwischen Theorie und Erfahrung zum Teil durch die täglichen Temperaturvariationen des Beobachtungsortes erklärt werden können. Das letzte Kapitel der Abhandlung ist den unregelmäßigen Störungen der magnetischen Elemente gewidmet. Die Erklärung derselben sucht Bäcklund in Schwankungen der elektrischen Ströme der Sonne. In einem Zusatz der Abhandlung wird schließlich untersucht, wie die Ergebnisse derselben modifiziert werden, wenn man annimmt, daß die magnetische Achse der Sonne, statt zur Ekliptik senkrecht zu sein, mit der Rotationsachse derselben zusammenfällt.

Was ich hier erwähnt habe, ist nur ein Teil der Theorien, die Bäcklund auf der Grundlage seiner Hypothese von der Struktur der Materie aufgebaut hat. Es dürfte jedoch genügen, um eine Vorstellung von dem Umfang des Gebäudes zu geben, das er auf dieser Grundlage aufführte.

Es gibt physikalische Theorien mehrerer Arten. Unmittelbare Bedeutung für die experimentelle Forschung haben die Theorien, die auf der Grundlage einer anerkannten Theorie, zusammenfassend und systematisierend, die zuletzt gewonnenen experimentellen Ergebnisse behandeln. Die größte Bedeutung für die theoretische Physik hat die theoretische Arbeit, die aus einem Widerspruch zwischen der überlieferten Theorie und der Erfahrung eine neue Grundhypothese ausmeißelt. Als Beispiel kann hier Plancks Theorie der Energiequanten dienen. Von noch einer anderen Art ist die theoretische Arbeit, die durch vertiefte mathematische Behandlung einer schon bestehenden Theorie einen Widerspruch wegzuräumen oder der experimentellen Forschung zu dienen versucht. Keinem von diesen Typen gehört Bäcklunds physikalische Theorie an. Zu der gleichzeitigen experimentellen Forschung hatte sie keine Beziehungen. Auch der theoretischen Arbeit, die gleichzeitig in England und auf dem Kontinente ausgeführt wurde, stand sie fremd gegenüber. Das Ziel dieser Theorie war weder, der Experimentalforschung zu dienen, noch, einen Widerspruch zwischen Theorie und Erfahrung wegzuräumen. Was war denn das Ziel dieser Theorie? Die Antwort lautet: die ganze Physik auf die Mechanik zurückzuführen! Zu zeigen, daß alle physikalischen Erscheinungen aus verschiedenen Bewegungsformen abgeleitet werden können! Es war dies mehr ein philosophisches als ein physikalisches Ziel, das Bäcklund in seiner Tätigkeit als mathematischer Physiker zu erreichen suchte. Während seiner Jugendjahre war es das allgemein anerkannte Endziel aller theoretisch-physikalischen Forschung. Er

blieb dieser Auffassung treu, während rings herum die Physik eine Entwicklung durchmachte, die für fast alle Vertreter der theoretischen Physik die Problemlage vom Grund aus veränderte. Seine Theorie wurde aus diesem Grund kaum einer Prüfung unterworfen. Zu der Zeit, wo sie in so ausgeführter Form vorlag, daß eine Prüfung möglich gewesen wäre, hatte sich der Schwerpunkt der Physik von der Mechanik zu der Theorie des Elektromagnetismus verschoben. Die Grundlage seiner Theorie war untergraben, ehe die Theorie selbst geprüft werden konnte. Dies war Bäcklunds Tragik als physikalischer Theoriebildner. Oder genauer: dies war eine Seite seiner Tragik. Denn es gab auch eine andere. In der großen Welt, die sein Gedanke geschaffen hatte, war er der einzige Lebende. Er war während seiner 25 jährigen Arbeit auf dem Gebiete der theoretischen Physik ein vollständig isolierter Mann. Es gibt Äußerungen von ihm, die darauf hindeuten, daß er diese Isolierung als eine Tragik empfunden hat.

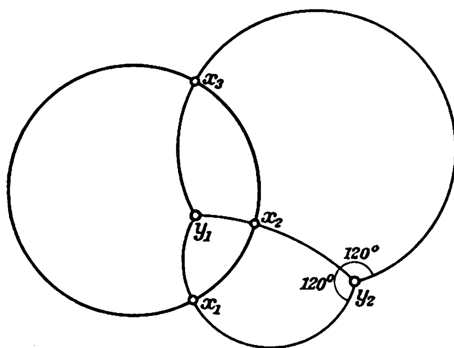
(Eingegangen am 22. 9. 1927.)

Eine Auflösung der kubischen Gleichung.

Von FRANK LÖBELL in Cannstatt.

Mit 1 Figur im Text.

Die Funktion $f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 \qquad (a_0 \neq 0)$



habe eine nicht verschwindende Diskriminante D. Sie hat somit drei verschiedene Nullstellen x_1, x_2, x_3, und es gibt eine gebrochene lineare Transformation R, die diese zyklisch miteinander vertauscht. Man bestätigt dies sofort, wenn man x_1, x_2, x_3 durch eine gebrochene lineare Transformation T in die Punkte $\varepsilon = e^{\frac{2\pi}{3}i}$, ε^2, 1 überführt. Die Fixpunkte von R sind zwei verschiedene Punkte y_1 und y_2; denn sie entsprechen vermöge T den Punkten 0 und ∞.[1])

1) Die Verwandtschaft dieser Entwicklung und ihrer Deutung durch die Figur mit bekannten Gedankengängen der Theorie der binären Formen braucht wohl kaum besonders betont zu werden; als Literaturangabe genüge der Hinweis auf die Encyklopädie der math. Wiss. III A B 8, S. 823ff.

Scheiden wir weiterhin den Fall aus, daß eine der Zahlen y_1, y_2 unendlich ist, daß sich also die Gleichung $f(x) = 0$ durch eine ganze lineare Substitution in eine reine kubische Gleichung verwandeln läßt, so können wir R in der Form schreiben

(R) $$\frac{w' - y_1}{w' - y_2} = \varepsilon \cdot \frac{w - y_1}{w - y_2}.$$

Da, wenn $w = x_{(l)}$ ist, $w' = x_{(l+1)}$ wird — es bedeute (l) den kleinsten positiven Rest der ganzen Zahl l mod. 3 —, so gilt also für jedes l

$$x_{(l)}\, x_{(l+1)} - x_{(l)} \frac{y_1 - \varepsilon y_2}{1 - \varepsilon} - x_{(l+1)} \frac{y_2 - \varepsilon y_1}{1 - \varepsilon} + y_1 y_2 = 0.$$

Addieren wir die drei hierdurch dargestellten Gleichungen erst ungeändert, dann nach Multiplikation mit $x_{(l-1)}$, so finden wir

$$a_2 + a_1(y_1 + y_2) + 3a_0 y_1 y_2 = 0,$$
$$3a_3 + a_2(y_1 + y_2) + a_1 y_1 y_2 = 0;$$

y_1 und y_2 sind folglich die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(a_1^2 - 3a_0 a_2)\, y^2 + (a_1 a_2 - 9a_0 a_3)\, y + a_2^2 - 3a_1 a_3 = 0.$$

Wir können ferner T den Ausdruck geben

(T) $$w' = z\, \frac{w - y_1}{w - y_2}.$$

Demnach ist $$\varepsilon^n = z\, \frac{x_n - y_1}{x_n - y_2} \qquad (n = 1, 2, 3).$$

Durch Multiplikation dieser drei Gleichungen erhalten wir daher

$$1 = z^3\, \frac{f(y_1)}{f(y_2)},$$

mithin[1]) $$x_n = \frac{y_1 \sqrt[3]{f(y_2)} - \varepsilon^n y_2 \sqrt[3]{f(y_1)}}{\sqrt[3]{f(y_2)} - \varepsilon^n \sqrt[3]{f(y_1)}},$$

wo $$\left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \frac{9a_0 a_3 - a_1 a_2 \pm \sqrt{-3D}}{2(a_1^2 - 3a_0 a_2)}$$ ist.

Auf Grund der geometrisch anschaulichen Bedeutung aller Schritte der Rechnung ist eine Diskussion der Realität der Wurzeln sehr leicht. — Auch kann man rasch zu den notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür gelangen, daß die kubische Gleichung zyklisch ist.

1) $\sqrt[3]{f(y_1)}$ und $\sqrt[3]{f(y_2)}$ bedeuten hier selbstverständlich je einen bestimmten, für die verschiedenen n festzuhaltenden Wurzelwert.

(Eingegangen am 1. 4. 1928.)

Über ganze rationale Funktionen vierten Grades und ihre Kovarianten.

Von GERHARD HAENZEL in Berlin.

Mit 3 Figuren im Text.

1. Die ganze rationale Funktion $n$ten Grades $f_n(z)$ der komplexen Variablen z besitzt für $n > 2$ gewisse Kovarianten, die aus den Kovarianten der binären Form $n$ter Ordnung $f_n(x_1, x_2)$ durch die Substitution $\frac{x_1}{x_2} = z$ hervorgehen. Die Kovarianten sind gegenüber den linearen Transformationen $z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ invariant bis auf ganzzahlige Potenzen von $\alpha\delta - \beta\gamma$.

Dementsprechend hat die ganze rationale Funktion vierten Grades

$$f(z) = a_0 z^4 + 4a_1 z^3 + 6a_2 z^2 + 4a_3 z + a_4$$

eine Kovariante $H(z)$ vom vierten und eine Kovariante $J(z)$ vom sechsten Grade, daneben zwei Invarianten

$$i = 2(a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2)$$

und
$$k = 6(a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4).$$

Durch Lösung der kubischen Resolvente

$$m^3 - \frac{i}{2} m - k = 0$$

kann $J(z)$ als Produkt dreier quadratischer Faktoren φ, χ, ψ dargestellt werden. $J(z) = 0$ ist eine durch Wurzelziehen lösbare Gleichung sechsten Grades. Sind m_1, m_2, m_3 die Lösungen der kubischen Resolvente, so gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} H(z) + m_1 f(z) &= -2\varphi^2 \\ H(z) + m_2 f(z) &= -2\psi^2 \qquad J(z) = 2\varphi\psi\chi. \\ H(z) + m_3 f(z) &= -2\chi^2 \end{aligned}$$

2. Die sechs Nullstellen von $J(z)$ werden nach Nr. 1 durch die drei Wurzeln m_1, m_2, m_3 der kubischen Resolvente eindeutig in drei Paare $z_{\mathrm{I}} z_{\mathrm{II}}$, $z_{\mathrm{III}} z_{\mathrm{IV}}$, $z_{\mathrm{V}} z_{\mathrm{VI}}$ geordnet, welche die Nullstellenpaare von φ, ψ, χ darstellen. Werden die beiden Nullstellen irgendeines solchen

Paares durch lineare Transformation nach $+1$ und -1 verlegt, so nimmt die zu ihnen gehörige Gleichung

$$H(z) + m_i f(z) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

die Form an

$$z^4 - 2z^2 + 1 = 0.$$

Durch Koeffizientenvergleich folgen daraus die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} a_0a_2 - a_1^2 + a_0m_i &= 1 \\ a_0a_3 - a_1a_2 + 2a_1m_i &= 0 \\ a_0a_4 + 2a_1a_3 - 3a_2^2 + 6a_2m_i &= -2 \\ a_1a_4 - a_2a_3 + 2a_3m_i &= 0 \\ a_4a_2 - a_3^2 + a_4m_i &= 1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{und daraus:} \\ &a_1 = a_3,\ a_0 = a_4, \\ &a_2 = a_0 + 2m_i. \end{aligned}$$

Unter diesen Umständen nehmen $f(z)$ und $H(z)$ die Form an

$$f(z) = a_0z^4 + 4a_1z^3 + 6a_2z^2 + 4a_1z + a_0$$
$$H(z) = A_0z^4 + 4A_1z^3 + 6A_2z^2 + 4A_1z + A_0.$$

Mit Rücksicht auf die invarianten Eigenschaften der Kovarianten gegenüber linearen Transformationen ist somit bewiesen:

„*Werden die sechs Nullstellen der Kovariante $J(z)$ durch die drei Lösungen der kubischen Resolvente in drei Paare geordnet, so gehen sowohl die vier Nullstellen der Funktion $f(z)$ als auch die vier Nullstellen der Kovariante $H(z)$ je paarweise in sich über durch Inversion an jedem Kreise über der Verbindungsstrecke eines Nullstellenpaares von $J(z)$ als Durchmesser und durch Spiegelung an diesem Durchmesser.*“

3. Wird über der Strecke AB als Durchmesser der Kreis geschlagen, so stellt die Inversion an diesem Kreise und die Spiegelung an der Geraden AB die lineare Transformation dar

$$w = \frac{(A+B)z - 2AB}{2z - (A+B)} \quad \text{oder} \quad \frac{w-A}{w-B} = e^{i\pi}\ \frac{z-A}{z-B}.$$ [1]

Durch die Nullstellenpaare der Kovariante $J(z)$ sind also drei solche lineare Transformationen H, V, D bestimmt. Jede von ihnen vertauscht sowohl die Nullstellen z_1, z_2, z_3, z_4 der Funktion $f(z)$ untereinander paarweise, als auch die Nullstellen $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_4$ ihrer Kovariante $H(z)$, so daß den drei Transformationen H, V, D die drei möglichen Zerlegungen der vier Elemente z_1, z_2, z_3, z_4 in je zwei Paare entsprechen. Außerdem vertauscht H sowohl die beiden Fixpunkte

1) Vgl. hierzu die Abhandlung: Haenzel, Über ganze rationale Funktionen dritten Grades und ihre Kovarianten, Nr. 3, 4. Sitz.-Berichte der Berl. Mathem. Gesellschaft XXVII.

von V miteinander, als auch die von D. Entsprechendes gilt von V und D. Der ganze Zusammenhang läßt sich durch folgende Symbole darstellen:

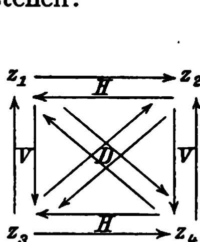


Fig. 1. Nullstellenpaare $f(z)$.

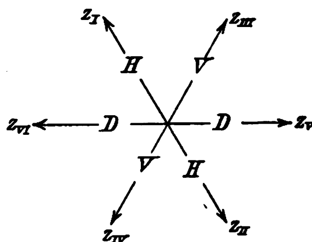


Fig. 2. Fixpunktpaare $J(z)$.

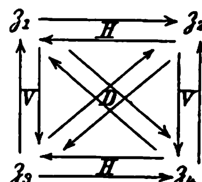


Fig. 3. Nullstellenpaare $H(z)$.

Werden die drei Transformationen H, V, D in irgendeiner Reihenfolge nacheinander ausgeführt, so geht jede Nullstelle von $f(z)$, $H(z)$ und $J(z)$ in sich über. Daher gilt:

„*Durch eine ganze rationale Funktion vierten Grades $f(z)$ sind drei lineare Transformationen gegeben. Jede von ihnen hat ein Nullstellenpaar der Kovariante $J(z)$ zu Fixpunkten und vertauscht sowohl die vier Nullstellen von $f(z)$ paarweise miteinander, als auch die vier Nullstellen der Kovariante $H(z)$. Jede vertauscht die beiden Fixpunkte der beiden übrigen, und aus allen dreien resultiert die Identität. Die drei Transformationen sind dabei untereinander vertauschbar, und aus je zwei von ihnen resultiert die dritte.*"

(Eingegangen am 30. 5. 1928.)

Über die Nullstellen der Besselschen Funktionen.

Von NIKOLA OBRESCHKOFF in Sofia.

In einer klassischen Arbeit[1]) hatte Hurwitz bewiesen, daß die Besselsche Funktion $J_{-\nu}(x)$, wo $\nu > 0$ und nicht ganzzahlig ist, $2[\nu]$ imaginäre Nullstellen hat. Der Beweis von Hurwitz ist sehr lang. Herr Hilb[2]) hat zum erstenmal durch Stetigkeitsbetrachtungen das Theorem von Hurwitz kürzer abgeleitet.

1) A. Hurwitz, Über die Nullstellen der Besselschen Funktionen, Math. Ann. 33 (1889), S. 246—266.

2) E. Hilb, Die komplexen Nullstellen der Besselschen Funktionen, Math. Zeitschr. 15 (1922), S. 274—279. Der Beweis von Herrn Hilb stützt sich jedoch auf die asymptotische Darstellung der Besselschen Funktionen, aus welcher folgt, daß es einen Kreis mit endlichem Radius gibt, außerhalb dessen die Funktionen nur reelle Nullstellen haben (S. 276). Man kann aber leicht Beispiele finden, aus welchen zu ersehen ist, daß dieser Teil des Beweises nicht genügend begründet ist.

Herr Pólya[1]) hat ein elementares Theorem von Laguerre-Jensen erweitert und dadurch dessen Brauchbarkeit gezeigt, um Fragen bezüglich der Realität der Nullstellen von wichtigen Klassen ganzer Funktionen zu beantworten. Indem ich das Theorem von Laguerre-Pólya erweitere, gebe ich in dieser Arbeit einen kurzen Beweis des Theorems von Hurwitz und erhalte außerdem noch andere Sätze.

1. Hilfssatz I. *Es sei*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0 \tag{1}$$

eine algebraische Gleichung mit reellen Koeffizienten und $2q$ *imaginären Wurzeln. Wenn* $\varphi(x)$ *ein Polynom mit nur reellen Nullstellen ist, von welchen* p *positiv sind, so wird die Gleichung*

$$a_0\varphi(0) + a_1\varphi(1)x + a_2\varphi(2)x^2 + \cdots + a_n\varphi(n)x^n = 0 \tag{2}$$

höchstens $2(p+q)$ *imaginäre Wurzeln besitzen.*

Beweis. Es sei $f(x) = 0$ eine algebraische Gleichung mit reellen Koeffizienten, welche μ positive Wurzeln $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_\mu$ und ν negative $\beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_\nu$ hat. Ferner sei

$$F(x) = xf'(x) + \lambda f(x),$$

wo λ eine reelle Zahl ist. Da

$$F(\alpha_s) = \alpha_s f'(\alpha_s), \quad s = 1, 2, \ldots, \mu,$$

so wird für zwei benachbarte α_i, α_{i+1}

$$F(\alpha_i)F(\alpha_{i+1}) < 0,$$

woraus folgt, daß die Gleichung $F(x) = 0$ wenigstens $\mu - 1$ positive Wurzeln hat. Auf gleiche Weise folgt, daß dieselbe Gleichung wenigstens $\nu - 1$ negative Wurzeln hat. Wenn $\lambda > 0$, so ist es klar, daß

$$F(\varepsilon)F(\alpha_1 - \varepsilon) < 0, \quad F(\beta_\nu + \varepsilon)F(-\varepsilon) < 0,$$

wenn $\varepsilon > 0$ genügend klein ist. Daraus folgt, daß die Gleichung $F(x) = 0$ wenigstens je eine Wurzel in beiden Intervallen $(0, \alpha_1)$, $(\beta_\nu, 0)$ hat. Der Fall, daß $f(x) = 0$ mehrfache Wurzeln hat, wird auf ähnliche Weise erledigt. Beachten wir, daß $F(x)$ auf diese Weise geschrieben werden kann

$$a_0\lambda + a_1(1+\lambda)x + a_2(2+\lambda)x^2 + \cdots + a_n(n+\lambda)x^n,$$

so erhalten wir durch Iteration den Hilfssatz. Für $p = 0$ ergibt sich aus diesem Hilfssatz das Laguerresche Theorem.

1) G. Pólya, a) The Messenger of Mathematics 52 (1923), S. 185—188. b) Journal für die reine und angewandte Mathematik 158 (1927), S. 6—18.

Es sei $g(z)$ eine ganze Funktion vom Geschlecht $\leqq 2$ und von der Art

$$g(z) = A z^q e^{-\gamma z^2 + \delta z} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \delta_n z) e^{-\delta_n z},$$

wo die ganze Zahl $q \geqq 0$ ist, sämtliche Konstanten $A, \gamma, \delta, \delta_1, \delta_2, \ldots$ reell sind, $\gamma \geqq 0$ ist und $\delta_1^2 + \delta_2^2 + \cdots$ konvergiert. Eine solche Funktion werde ich im folgenden, nach Herrn Pólya, eine gerichtete ganze Funktion nennen. Wie bekannt, sind diese Funktionen die einzigen ganzen Funktionen, welche Grenzwerte von Polynomen mit nur reellen Nullstellen sind. Die Pólyasche Verallgemeinerung[1]) des Laguerreschen Satzes lautet: Wenn die Gleichung (1) nur reelle Wurzeln hat und $\varphi(x)$ eine gerichtete ganze Funktion ist, welche keine positiven Nullstellen hat, so hat die Gleichung (2) nur reelle Wurzeln. Nach dem Hilfssatz I und nach diesem Satz erhält man den

Hilfssatz II.[2]) *Wenn die Gleichung* (1) *nur reelle Wurzeln hat und* $\varphi(z)$ *ein Produkt eines reellen Polynoms s-ten Grades und einer gerichteten ganzen Funktion ohne positive Nullstellen ist, so hat die Gleichung* (2) *höchstens* $2s$ *imaginäre Wurzeln.*

Es sei $g(z)$ eine ganze gerichtete Funktion, dann wird es Polynome $g_n(z) = \sum_{\mu=0}^{\lambda_n} a_{n\mu} z^\mu$ geben, welche nur reelle Nullstellen haben, und welche gleichmäßig gegen $g(z)$ konvergieren in jedem endlichen Gebiet von z. Nach dem obigen Satz haben die Polynome

$$F_n(z) = a_{n0}\varphi(0) + a_{n1}\varphi(1)z + \cdots + a_{n\lambda_n}\varphi(\lambda_n) z^{\lambda_n}$$

höchstens $2s$ imaginäre Wurzeln. In bekannter Weise ersieht man, daß

$$F(z) = a_0 \varphi(0) + a_1 \varphi(1) z + \cdots + a_n \varphi(n) z^n + \cdots$$

eine ganze Funktion ist und daß die Polynome $F_n(z)$ gegen $F(z)$ konvergieren. Dann folgt nach einem klassischen Satz von Hurwitz, daß $F(z)$ höchstens $2s$ imaginäre Nullstellen hat. Wenn wir $g(z) = e^{-z^2}$ nehmen, so erhalten wir den

Hilfssatz III.[3]) *Es sei* $\varphi(z)$ *eine reelle ganze Funktion vom Geschlecht null oder eins mit nur reellen Nullstellen, von welchen* s *positiv seien. Dann hat die Funktion* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \varphi(2n)}{n!} z^{2n}$ *höchstens* $2s$ *imaginäre Nullstellen.*

1) G. Pólya und G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Bd. 2, 1925, Nr. 167, S. 68 und 256.

2) Die Hilfssätze I und II finden sich ohne Beweis bei Jensen, Acta Math. 36 (1913), S. 190.

3) Nicht unmittelbar in Jensen, l. c.

2. Als Anwendungen des Hilfssatzes III werden wir einige Sätze beweisen, darunter auch den Satz von Hurwitz. Für die Besselsche Funktion $J_\nu(z)$ haben wir

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \varphi_\nu\left(\frac{z}{2}\right), \quad \varphi_\nu(z) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda z^{2\lambda}}{\lambda!\,\Gamma(\nu+\lambda+1)} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda h(2\lambda)}{\lambda!} z^{2\lambda},$$

wo $h(z)$ eine ganze Funktion vom Geschlecht eins ist mit Nullstellen $-2\nu-2\varkappa$ ($\varkappa > 0$ eine ganze Zahl ist). Die Funktion $h(z)$ hat nur reelle Nullstellen, welche alle negativ sind, wenn $\nu > -1$ ist; wenn $\nu < -1$ ist, so sind nur $2[-\nu]$ von den Nullstellen positiv. Also erhalten wir nach Hilfssatz III

Satz 1. *Die Funktion $J_\nu(z)$, $\nu > -1$, hat nur reelle Nullstellen und die Funktion $J_{-\nu}(z)$ hat höchstens $2[\nu]$ imaginäre Nullstellen.*

Betrachten wir die Funktion

$$\alpha(z) = aJ_\nu(z) + bJ_{\nu-2}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu-2} \alpha_1\left(\frac{z}{2}\right),$$

wo
$$\alpha_1(z) = az^2\varphi_\nu(z) + b\varphi_{\nu-2}(z).$$

Für $\alpha_1(z)$ haben wir

$$\alpha_1(z) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda \psi(2\lambda)}{\lambda!} z^{2\lambda}, \quad \text{wo} \quad \psi(z) = \frac{2b\left(\nu-1+\frac{z}{2}\right)-az}{2\Gamma\left(\nu+\frac{z}{2}\right)}.$$

Die Funktion $\psi(z)$ hat als Nullstellen -2ν, $-2\nu-2$, $-2\nu-4, \ldots$ und $\frac{2b(\nu-1)}{a-b}$, wenn $a-b \neq 0$. Es gilt der

Satz 2. *Die Funktion $aJ_\nu(z) + bJ_{\nu-2}(z)$,* wo $\nu > 1$, *hat nur reelle Nullstellen, wenn $a-b=0$, oder $\frac{b}{a-b} < 0$, und höchstens zwei imaginäre Nullstellen, wenn $\frac{b}{a-b} > 0$ ist.*

Satz 3. *Die Funktion $aJ_{-\nu}(z) + bJ_{-\nu-2}(z)$,* wo $\nu > 1$, *hat höchstens $2[\nu]+2$ imaginäre Nullstellen, wenn $a-b=0$, oder wenn $\frac{b}{a-b} > 0$, und höchstens $2[\nu]+4$ imaginäre Nullstellen, wenn $\frac{b}{a-b} < 0$.*

Aus dem Satz 1. erhalten wir durch stetige Veränderung von ν den Satz von Hurwitz. Aus der Differentialgleichung von Bessel

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz} + (z^2-\nu^2)y = 0, \tag{3}$$

für welche die Funktionen J_ν und $J_{-\nu}$ partikuläre Integrale sind, folgt direkt, daß diese Funktionen nur einfache Nullstellen haben, außer eventuell die Null. Es sei (a, b) ein reelles Intervall von z, welches nicht die Null enthält. Im Intervalle (a, b) hat, nach einem elementaren

Satz von Sturm, jedes andere linear unabhängige Integral y_2 zwischen zwei benachbarten Nullstellen eines Integrals y_1 der Gleichung (3) nur eine Nullstelle. Da bei der Substitution $z = it$ die Gleichung ihre lineare Form bewahrt und die Koeffizienten reell bleiben, so bleibt der Satz von Sturm auch für rein imaginäre Werte von z in Kraft.

Aus den Formeln

$$\varphi_\nu(ix) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)}, \quad \nu > 0,$$

$$\varphi_\nu(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^{4p}\,[(2p+1)(\nu+2p+1)-z^2]}{(2p+1)!\,\Gamma(\nu+2p+2)},$$

schließen wir

a) daß die Funktion $J_\nu(z)$ keine rein imaginären, und in den Intervallen $(-2, 0)$, $(0, 2)$ keine reellen Nullstellen hat. Also kann die Funktion $J_{-\nu}(z)$ höchstens zwei rein imaginäre Nullstellen haben und in jedem der Intervalle $(-2, 0)$, $(0, 2)$ höchstens eine reelle Nullstelle. Setzen wir $\varphi_{-\nu}(-z^2) = \frac{1}{\Gamma(-\nu+1)} F(z^2)$, so wird nach Obigem die Funktion $F(z)$ höchstens eine positive reelle Nullstelle haben.

In der Funktion

$$F(z) = 1 + \frac{z}{1!\,(-\nu+1)} + \frac{z^2}{2!\,(-\nu+1)(-\nu+2)} + \cdots$$
$$+ \frac{z^{p+1}}{(p+1)!\,(-\nu+1)\cdots(-\nu+p+1)} + \cdots, \quad p = [\nu],$$

sind die Koeffizienten von z^μ für $\mu \geqq p+1$ alle positiv, wenn p gerade ist, und alle negativ, wenn p ungerade ist, woraus folgt, daß im ersten Fall $F(z)$ keine positive reelle Nullstelle und im zweiten nur eine positive Nullstelle hat. Auf diese einfache Weise erhalten wir den Hilfssatz von Hurwitz:

b) die Funktion $J_{-\nu}(z)$ hat, wenn $[\nu]$ ungerade ist, zwei rein imaginäre Nullstellen, und wenn $[\nu]$ gerade ist, keine solche Nullstelle.

Es soll ν abnehmend gegen eine ganze Zahl n konvergieren. Da[1]) die Nullstellen von $J_{-\nu}(z)$ stetige Funktionen von ν sind und $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$, da also $z = 0$ eine $2n$-fache Nullstelle von $\varphi_{-\nu}(z)$ ist, so müssen $2n$ Nullstellen von $\varphi_{-\nu}(z)$ gegen Null konvergieren. Aber zufolge des Satzes a) können von diesen letzteren Nullstellen höchstens zwei reell sein, wenn ν genügend nahe an n herankommt. Da die Funktion $\varphi_{-\nu}(z)$ nur einfache Nullstellen hat, so folgt,

1) Vgl. die zitierte Arbeit von Herrn Hilb, S. 276.

daß die imaginären Nullstellen nicht reell werden können, wenn ν variiert, außer wenn sie gegen Null konvergieren. Also hat $J_{-\nu}(z)$ wenigstens $2[\nu]-2$ imaginäre Nullstellen, wenn ν nicht ganzzahlig ist. Da $\varphi_{-\nu}(z)$ eine gerade Funktion ist, so wird die Anzahl der imaginären Nullstellen, welche keine rein imaginären sind, ein Vielfaches von vier sein. Demzufolge ergibt sich aus dem Satz I sofort, daß die Anzahl der imaginären Nullstellen der Funktion $J_{-\nu}(z)$, ($\nu > 0$ und nicht ganzzahlig), gleich $2[\nu]$ ist. Auf diese Weise ist das Theorem von Hurwitz bewiesen.

(Eingegangen am 22. 5. 1928.)

Über einen Satz von Laguerre.

Von G. PÓLYA in Zürich.

In der vorstehenden Arbeit[1]) gibt Herr Obreschkoff einen neuen Beweis für das wohlbekannte Resultat von Hurwitz[2]), betreffend die Besselsche Funktion $J_{-\nu}(z)$, daß die ganze Funktion

$$(1)\qquad (\sqrt{z})^{\nu} J_{-\nu}(2\sqrt{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!} \frac{1}{\Gamma(n+1-\nu)}$$

genau $[\nu]$ nichtpositive Nullstellen besitzt, falls $\nu \geqq 0$. (Ich wähle diese Fassung, weil sie auch für ganzzahliges ν gültig bleibt.) In der ersten Hälfte seines Beweises gibt Herr Obreschkoff eine obere Abschätzung der Anzahl der fraglichen Nullstellen, indem er sich auf die Reihendarstellung (1) stützt und an einen algebraischen Satz von Laguerre[3]) anknüpft; in der zweiten Hälfte benützt er auch die Differentialgleichung von $J_{-\nu}(z)$ und knüpft an die Kontinuitätsbetrachtungen an, die Herr Hilb zum Beweis desselben Hurwitzschen Satzes verwendet hat.[2])

Ich bemerke, daß der ganze Beweis auf Grund der Reihendarstellung mit Hilfe des Laguerreschen Ansatzes geführt werden kann. Ich werde nämlich aus diesem Ansatz den in Nr. 1 formulierten Satz I herleiten, der geeignet ist, die Anzahl der nichtpositiven Nullstellen von gewissen rationalen oder transzendenten ganzen Funktionen nicht bloß abzuschätzen, sondern genau zu bestimmen. Satz I ergibt durch unmittelbare Spezialisierung einerseits das genannte Hurwitzsche

1) Siehe S. 156—161.

2) A. Hurwitz, Math. Annalen 33 (1889) 246—266. Vgl. auch E. Hilb, Math. Zeitschrift 15 (1922) 274—279.

3) E. Laguerre, Œuvres (Paris 1898) Bd. I, S. 200—202.

Resultat, andererseits einige kuriose Sätze über Polynome mit nur negativen Nullstellen (vgl. unter Nr. 4), die ich schon vor einiger Zeit angekündigt habe.[4])

1. Ich bezeichne im folgenden eine ganze Funktion als *reell gerichtet* bzw. als *positiv gerichtet*, wenn sie als Grenzwert einer reellkoeffizientigen Polynomfolge mit nur reellen bzw. mit nur positiven Nullstellen dargestellt werden kann. Wie bekannt[5]), ist diese Definition mit der folgenden äquivalent: Die ganze Funktion $G(z)$ heißt reell gerichtet, wenn

$$G(z) = e^{-\gamma z^2} H(z)$$

ist, wobei γ reell und nichtnegativ ist und $H(z)$ eine ganze rationale oder eine ganze transzendente Funktion vom Geschlechte Null oder Eins bedeutet, die für reelles z reelle Werte annimmt und nur reelle Nullstellen hat. Die ganze Funktion $g(z)$ heißt positiv gerichtet, wenn $g(z^2)$ reell gerichtet ist. Unter Verwendung dieser Bezeichnungen behaupte ich den Satz:

I. *Es sei*

$$g(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots \tag{2}$$

entweder ein Polynom m-ten Grades mit lauter positiven Nullstellen oder eine positiv gerichtete ganze transzendente Funktion ohne verschwindende Nullstellen; mit $\mathfrak{J}$ *bezeichne man im ersten, algebraischen Fall das abgeschlossene Intervall* $[0, m]$, *im zweiten, transzendenten Fall das von links abgeschlossene Intervall* $[0, +\infty)$.[6]) *Es sei* $G(z)$ *eine reell gerichtete ganze Funktion, die im Intervalle* $\mathfrak{J}$ *genau s Nullstellen besitzt, und zwar seien diese s Nullstellen einfach, und der Abstand zwischen zwei konsekutiven sei nicht kleiner als* 1. *Im ersten Fall besitzt*

$$a_0 G(0) + a_1 G(1) z + a_2 G(2) z^2 + a_3 G(3) z^3 + \cdots \tag{3}$$

genau $m - s$ *positive, im zweiten genau s nichtpositive Nullstellen.*

Im algebraischen Fall läßt sich die Anzahl der nichtpositiven Nullstellen nicht genau angeben, da $G(m) = 0$ sein kann, im transzendenten Fall ist die Anzahl der positiven Nullstellen im allgemeinen $= \infty$. Der transzendente Fall wird aus dem algebraischen hergeleitet, vgl. unter Nr. 3.

---

4) Comptes Rendus 183 (1926) 413—414 und 467—468, insbesondere S. 468. Von der an jener Stelle angekündigten und zu jener Zeit abgeschlossenen Untersuchung ist das hier Mitgeteilte nur ein Ausschnitt.

5) a) G. Pólya und I. Schur, Journal f. d. reine u. angew. Math. 144 (1914) 89—113. b) G. Pólya, daselbst 145 (1915) 224—249.

6) In der Hervorhebung des abgeschlossenen Intervallendes mittels [bzw.] und des offenen mittels (bzw.) schließe ich mich an F. Hausdorff an.

Setzt man $g(z) = e^{-z} = \lim_{m \to \infty} \left(1 - \frac{z}{m}\right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!}$,

$$G(z) = \frac{1}{\Gamma(z - \nu + 1)} \qquad (\nu \geqq 0),$$

so sind die Bedingungen des Satzes I (des zweiten, transzendenten Falles) offenbar erfüllt, $s = [\nu]$, die Reihe (3) spezialisiert sich zu (1), und so folgt der volle Hurwitzsche Satz auf einen Schlag aus Satz I.

2. Es sei angenommen, daß $g(z)$ ein Polynom m-ten Grades ist.

Zwei Koeffizienten a_k und $a_l (k < l)$ eines Polynoms von der Form (2) bilden einen Zeichenwechsel, wenn $a_k a_l < 0$ und $a_{k+1} = \cdots = a_{l-1} = 0$ ist. (Die letztere Bedingung betrifft die zwischen a_k und a_l liegenden Koeffizienten und tritt nur auf, wenn es solche gibt, das heißt, wenn $l - k > 1$ ist.)

Wir versetzen uns nun in die Voraussetzungen des algebraischen Falles des Satzes I. Die im Intervalle $[0, m]$ gelegenen Nullstellen von $G(z)$ seien mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ bezeichnet:

$$(4) \qquad 0 \leqq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_s \leqq m,$$

$$(5) \qquad \alpha_{k+1} \geqq \alpha_k + 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, s-1),$$

und es sei

$$(6) \qquad G(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \ldots (z - \alpha_s) G^*(z) \qquad \text{gesetzt.}$$

Ich bezeichne generell mit α eine im Intervall $[0, m]$ gelegene, mit β eine außerhalb davon gelegene reelle Zahl. Es sind also $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ spezielle α, und die Nullstellen, die $G^*(z)$ eventuell besitzt, sind β.

a) Die Koeffizienten von (2) zeigen, nach Voraussetzung und gemäß der Descartesschen Zeichenregel, m Zeichenwechsel, sie sind abwechselnden Vorzeichens. Dasselbe gilt von den Koeffizienten des Polynoms

$$(7) \qquad g^*(z) = a_0 G^*(0) + a_1 G^*(1) z + \cdots + a_m G^*(m) z^m,$$

da doch $G^*(z)$ im Intervalle $[0, m]$ nicht verschwindet und folglich auch das Zeichen nicht wechselt.

Nun zeigen die Koeffizienten des Polynoms

$$(8) \qquad a_0(0 - \alpha) G^*(0) + a_1(1 - \alpha) G^*(1) z + \cdots + a_m(m - \alpha) G^*(m) z^m$$

genau einen Zeichenwechsel weniger als (7); um sich hiervon zu überzeugen, geht man alle Fälle durch: Es kann α Endpunkt oder innerer Punkt von $[0, m]$ und als innerer Punkt ganzzahlig oder nichtganzzahlig sein.

Geht man von (7) zu (3) in s Schritten über, indem man, gemäß (6), bei jedem Schritt einen neuen Linearfaktor $z - \alpha$ heranzieht (es stellt (8) mit $\alpha = \alpha_1$ den ersten solchen Schritt dar), so wird mit jedem Schritt ein Zeichenwechsel zerstört, wie man sich auf Grund von (5) überzeugt; diese Bedingung sichert nämlich, daß der durch α_k zerstörte Zeichenwechsel durch α_{k+1} nicht wieder hergestellt wird.

Somit hat (3) genau $m - s$ Zeichenwechsel und folglich, auf Grund der Descartesschen Regel, höchstens $m - s$ positive Nullstellen.

b) Man bilde mit dem Polynom unter (2) die für positive x reellwertige und analytische Funktion $x^{-\beta} g(x)$. Diese hat, nach Voraussetzung, m Nullstellen im offenen Intervalle $(0, +\infty)$ und strebt gegen 0, wenn x gegen einen der beiden Endpunkte dieses Intervalles konvergiert; es kommt der linke oder der rechte Endpunkt in Betracht, je nachdem $\beta < 0$ oder $\beta > m$ ist. Man schließt aus einer geeigneten Fassung des Rolleschen Satzes[7]), daß

$$(9)\quad x^{\beta+1} \frac{d\, x^{-\beta} g(x)}{dx} = x g'(x) - \beta g(x)$$

$$= a_0(0-\beta) + a_1(1-\beta)x + a_2(2-\beta)x^2 + \cdots + a_m(m-\beta)x^m$$

mindestens m, also genau m positive Nullstellen besitzt. Hieraus folgt durch Iteration und Grenzübergang, daß das Polynom (7) genau m positive Nullstellen hat. Es ist zuerst zu beachten, daß $G^*(z)$ als Grenzwert von Polynomen darstellbar ist, die nur reelle, außerhalb $[0, m]$ gelegene Nullstellen wie β besitzen, und ferner, daß die Zahlen $a_0, a_m, G^*(0), G^*(m)$ von Null verschieden sind; letzterer Umstand sichert nämlich, daß die m, bei jeder Annäherung von $G^*(z)$ durch die besagten Polynome im offenen Intervall $(0, +\infty)$ vorhandenen Nullstellen bei dem Grenzübergang nicht in die Endpunkte entweichen.

Von $x^{-\alpha} g^*(x)$ kann man, im Gegensatz zu $x^{-\beta} g(x)$, nicht behaupten, daß sie gegen Null strebt, wenn x gegen einen Endpunkt von $(0, +\infty)$ konvergiert, da α in $[0, m]$ gelegen ist. Daher kann man jetzt, im Gegensatz zu (9), nur so viel aus dem Rolleschen Satz schließen, daß das Polynom

$$(10)\quad x^{\alpha+1} \frac{d\, x^{-\alpha} g^*(x)}{dx} = x \frac{d g^*(x)}{dx} - \alpha g^*(x),$$

das mit dem unter (8) angeschriebenen identisch ist, mindestens $m-1$ positive Nullstellen hat. Wenn wir, wie unter a), von (7) zu (3) in s Schritten übergehen, von denen (10) und (8) mit $\alpha = \alpha_1$ den ersten

7) Vgl. z. B. G. Pólya u. G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis (Berlin, 1925) Bd. II, Nr. V 16, S. 39 u. 223.

darstellen, mit jedem Schritt einen neuen Linearfaktor $z-\alpha$ heranziehend, so finden wir, daß (3) mindestens $m-s$ positive Nullstellen hat.

Unter a) und b) haben wir den algebraischen Fall von Satz I bewiesen, nämlich daß das Polynom (3) $m-s$ positive Nullstellen besitzt, also daß es, vgl. unter a), *genau so viel positive Nullstellen wie Zeichenwechsel besitzt.*

3. Durch Grenzübergang aus dem algebraischen Fall des Satzes I kann in bezug auf den transzendenten Fall davon unmittelbar geschlossen werden, daß die Anzahl der nichtpositiven Nullstellen $\leqq s$ ist, aber auch nicht mehr. Daß es $= s$ ist, erhält man mit Hilfe des folgenden Satzes, den ich bei anderer Gelegenheit[8]) im Anschluß an Jensen[9]) bewiesen habe.

II. *Die unendliche Potenzreihe*

$$c_0 + \frac{c_1 z}{1!} + \frac{c_2 z^2}{2!} + \cdots = f(z)$$

sei nicht stets divergent, ihre Koeffizienten $c_0, c_1, c_2, \ldots$ *seien reell, das mit diesen Koeffizienten gebildete Polynom*

$$c_0 + \binom{m}{1} c_1 z + \binom{m}{2} c_2 z^2 + \cdots + c_m z^m$$

soll t_m *nichtpositive Nullstellen haben. Dann ist* $t_1 \leqq t_2 \leqq t_3 \leqq \cdots$. *Die Funktion* $f(z)$ *ist dann und nur dann das Produkt einer positiv gerichteten ganzen Funktion mit einem reellkoeffizientigen Polynom, wenn*

$$\lim_{m \to \infty} t_m = t$$

endlich ist. Ist diese Bedingung erfüllt, so hat $f(z)$ *genau* t *nichtpositive Nullstellen.*

Man kann zeigen, daß die Reihe (3) unter den Voraussetzungen des Satzes I (wir sind jetzt im transzendenten Falle) stets konvergiert.[10]) Ich will mit diesem Nachweis den Text nicht belasten und den Beweis unter der Annahme führen, daß (3) nicht stets divergiert; dies ist für die Anwendungsbeispiele [wie für (1)] gewöhnlich leicht direkt nachzuprüfen.

8) a. a. O. 5 b), S. 245, Satz III.

9) J. L. W. V. Jensen, Acta Math. 36 (1913) 181—195, vgl. S. 187.

10) Es ist nämlich $G(n) = O(a^n)$ mit passendem, von n unabhängigem positiven a, wie man entweder durch direkte Diskussion der Produktdarstellung von $G(z)$ findet oder aus dem Umstande, daß, wenn p eine, die größte positive Nullstelle von $G(z)$ übersteigende ganze Zahl ist, $G(p)$, $G(p+1)$, $G(p+2)$, ... in der Terminologie a. a. O. 5a) eine Faktorenfolge erster Art bilden.

Wir schließen zuerst, uns auf die Voraussetzung des transzendenten Falles von Satz I stützend, mittels Satz II von der Reihe (2) auf das Polynom

$$a_0 + \binom{m}{1} 1!\, a_1 z + \binom{m}{2} 2!\, a_2 z^2 + \cdots + m!\, a_m z^m.$$

Dieses hat nur positive Nullstellen. Es sei m größer als die größte der s nichtnegativen Nullstellen von $G(z)$; dann ist das Polynom

(11) $$a_0 G(0) + \binom{m}{1} 1!\, a_1 G(1) z + \cdots + m!\, a_m G(m) z^m$$

genau vom Grade m und hat m Nullstellen, von welchen, wie wir mittels des schon bewiesenen algebraischen Falles von Satz I weiterschließen, genau s nichtpositiv sind. Endlich schließen wir mittels Satz II von den Polynomen (11) auf die Reihe (3): Dieses hat genau s nichtpositive Nullstellen. Somit ist auch der transzendente Fall von Satz I bewiesen.

4. Beide nachfolgenden Beispiele erläutern den algebraischen Fall des Satzes I.

a) Man schreibe das unter (2) betrachtete Polynom mit nur positiven Wurzeln in der Form

(12) $$g(z) = b_0 - b_1 z + b_2 z^2 - + \cdots$$

Die Zahlen $b_0, b_1, b_2, \ldots$ sind alle von Null verschieden und desselben Zeichens, sagen wir positiv. Es seien k, l ganze Zahlen $0 \leqq k < l$. Dann sind die Bedingungen von Satz I durch

(13) $$G(z) = \frac{(-1)^k \sin \pi (z-k)}{l \sin \dfrac{\pi (z-k)}{l}} = (-1)^{l-1} G(z+l)$$

sämtlich erfüllt. Satz I ergibt, daß das aus (12) und (13) konstruierte Polynom

$$b_0 G(0) - b_1 G(1) z + b_2 G(2) z^2 - + \cdots$$
$$= b_k z^k - b_{k+l} z^{k+l} + b_{k+2l} z^{k+2l} - + \cdots$$

ebensoviel positive Nullstellen wie Zeichenwechsel besitzt; vgl. den Schluß von Nr. 2. Aber je zwei konsekutive stehengebliebene Koeffizienten weisen einen Zeichenwechsel auf; so kommen wir zu dem Satz:

Wenn das Polynom

$$b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_m z^m$$

nur negative Nullstellen hat, so hat das Polynom

$$b_k + b_{k+l} z + b_{k+2l} z^2 + \cdots + b_{k+ql} z^q,$$

wobei $\quad 0 \leqq k < l, \quad k + ql \leqq m < k + (q+1)l,$

ebenfalls nur negative Nullstellen.

b) Wir schreiben jetzt das Polynom (2) mit lauter positiven Wurzeln so:

$$g(z) = b_0 - \frac{b_1 z}{1!} + \frac{b_2 z^2}{2!} - \frac{b_3 z^3}{3!} + - \cdots \tag{14}$$

und wählen, die Bedeutung von k und l beibehalten,

$$G(z) = \frac{\Gamma\left(-\frac{z-k}{l}\right)}{l\,\Gamma(-z)} = \frac{(-1)^k \sin \pi (z-k)}{l \sin \frac{\pi (z-k)}{l}} \; \frac{\Gamma(1+z)}{\Gamma\left(1+\frac{z-k}{l}\right)}. \tag{15}$$

Die Funktion (15) ist ganz; denn es sind die Pole des Zählers des ersten Bruches

$$z = k, \quad k+l, \quad k+2l, \ldots$$

unter denen des Nenners

$$z = 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \ldots$$

enthalten. Hieraus sieht man ferner, daß (15) nur nichtnegative ganzzahlige Nullstellen hat. Endlich ist die Funktion (15), wie $1/\Gamma(z)$ vom Geschlecht Eins. Somit sind alle Bedingungen des Satzes I erfüllt, und folglich hat das aus (14) und (15) konstruierte Polynom

$$b_0 G(0) - \frac{b_1}{1!} G(1) z + \frac{b_2}{2!} G(2) z^2 - + \cdots$$
$$= b_k z^k - \frac{b_{k+l}}{1!} z^{k+l} + \frac{b_{k+2l}}{2!} z^{k+2l} - + \cdots$$

ebensoviel positive Nullstellen wie Zeichenwechsel. Wir gelangen so zu dem Satz (q ist wie in Beispiel a) bestimmt):

Wenn das Polynom

$$b_0 + \frac{b_1}{1!} z + \frac{b_2}{2!} z^2 + \cdots + \frac{b_m}{m!} z^m$$

nur negative Nullstellen hat, so hat das Polynom

$$b_k + \frac{b_{k+l}}{1!} z + \frac{b_{k+2l}}{2!} z^2 + \cdots + \frac{b_{k+ql}}{(k+ql)!} z^q$$

ebenfalls nur negative Nullstellen.

Die unter a) und b) gefundenen Sätze erweitert man ohne Schwierigkeit (mit oder ohne Gebrauch des Satzes II) auf negativ gerichtete ganze Funktionen, das heißt auf solche, die Grenzwerte von Polynomen mit nur negativen Nullstellen sind. ($g(z)$ ist negativ gerichtet, wenn $g(-z)$ positiv gerichtet ist.) An Stelle einer allgemeinen Formulierung

begnüge ich mich mit einem Beispiel: Der erweiterte Satz unter a), angewandt auf

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots$$

ergibt, daß die ganze Funktion

$$\frac{1}{k!} + \frac{z}{(k+l)!} + \frac{z^2}{(k+2l)!} + \cdots$$

negativ gerichtet ist, also insbesondere, daß sie nur negative Nullstellen hat. Der (erweiterte) Satz unter b) führt e^z in e^z über, ergibt also nichts Neues.[11])

(Eingegangen am 17. 6. 1928.)

Mathematische Miszellen. XV.

Zur konformen Abbildung einfach zusammenhängender Gebiete.

Von ALEXANDER OSTROWSKI in Basel.

I.

Mit Hilfe einer in diesem Zusammenhange zuerst wohl von Carathéodory[1]) benutzten Quadratwurzelabbildung hat Koebe[2]) einen sehr einfachen Beweis für den Fundamentalsatz der konformen Abbildung angegeben, d. h. für die Existenz der Funktion, die ein im Einheitskreise gelegenes einfach zusammenhängendes Gebiet auf das Innere des Einheitskreises schlicht und konform abbildet.[3]) Zugleich enthält der Koebesche Beweis ein Verfahren zur Approximation der Abbildungsfunktion, das sich auch in andern Fällen als anwendbar erwiesen und von Koebe den Namen des *Schmiegungsverfahrens* erhalten hat.

11) Die Sätze unter a), b) sind a. a. O. 4) S. 468 angekündigt. In einem gewissen Sinne ist unter allen möglichen analogen Sätzen b) der „stärkste", z. B. „stärker" als a), der sich aus b) mit Hilfe von Mitteln, die auf beliebige Polynome mit nur negativen Nullstellen anwendbar sind, ableiten läßt, nämlich, in der Terminologie a. a. O. 5a), mit Hilfe einer Faktorenfolge erster Art. Vgl. N. Obreschkoff, Universitätsschriften Sofia 23 (1927) 177—200, insb. S. 200.

1) Carathéodory, Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten. Math. Annalen, Bd. 72, S. 107—144 (1912).

2) P. Koebe, Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung I. Die Kreisabbildung des allgemeinsten einfach und zweifach zusammenhängenden schlichten Bereiches und die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung. Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 145, S. 177—223 (1915).

3) Auf diesen Fall läßt sich bekanntlich der allgemeinste durch eine einfache Transformation zurückführen.

Vor einigen Jahren haben Fejér und F. Riess[4]) aus der Quadratwurzelabbildung einen besonders kurzen Beweis des Fundamentalsatzes der konformen Abbildung hergeleitet, der aber ein Existenzbeweis reinsten Wassers ist, während bei Koebe auch ein Konstruktionsverfahren zur Bildung der Abbildungsfunktion angegeben wird.

Ich möchte im folgenden zeigen, wie man eine direkte Abschätzung der Güte der Approximation beim Koebeschen Verfahren finden kann. Es handelt sich darum, den Radius ϱ_{n+1} des größten Kreises um den Nullpunkt zu finden, dessen Inneres ganz im Innern des beim n-ten Schritt entstehenden Bildgebietes G_{n+1} liegt. Wir erhalten (im Abschnitt III) das Resultat $1-\varrho_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$. In IV. betrachten wir den praktisch wichtigeren Fall, in dem man beim n-ten Schritt anstatt der günstigsten Quadratwurzelabbildung, zu deren Aufstellung die Ermittelung des dem Ursprung zunächst gelegenen Randpunktes von G_n nötig wäre, eine weniger günstige, aber leichter aufstellbare Transformation benutzt, bei der ein in hohem Maße willkürlicher Randpunkt von G_n zu verwenden ist. Wenn der Abstand dieses Randpunktes von der Peripherie des Einheitskreises mit $k_n(1-\varrho_n)$ bezeichnet wird, ergibt sich, daß das Verfahren jedenfalls gegen die genannte Abbildungsfunktion konvergiert, wenn $\sum_{\nu=1}^{\infty} k_\nu^2$ divergiert, und ferner gilt, wenn die Summen $\sum_{\nu=1}^{\infty} k_\nu^2$ einigermaßen regulär wachsen,

$$1-\varrho_{n+1} = O\left(\frac{1}{\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu^2}\right).$$

Nimmt man nur die Divergenz von $\sum_{\nu=1}^{\infty} k_\nu^2$ an, so läßt sich immerhin

$$1-\varrho_{n+1} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu^2}}\right)$$

beweisen (Abschnitt V). Während die Methode des Abschnitts V das Problem direkt in Angriff nimmt, wird in den Abschnitten III und IV die Bemerkung benutzt, daß aus einer Relation von der Form

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} k_\nu a_\nu = O(a_n^{\gamma}) \qquad \gamma > 0$$

4) In der Arbeit von T. Radó, Über die Fundamentalabbildungen schlichter Gebiete, Acta litterarum ac scientiarum, Univ. Hung. Szeged. Bd. I, S. 240—251 (1923).

für eine konvergente Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} k_\nu a_\nu$ für $k_\nu \geqq 0$, $a_\nu \downarrow 0$[5]), sich eine relativ günstige Abschätzung für a_ν herleiten läßt. Z. B. gilt für $k_\nu \equiv 1$, $\gamma = \frac{1}{2}$

$$a_\nu = O\left(\frac{1}{\nu^2}\right).$$

Wir geben in VI. die independente Formulierung und den Beweis von zwei solchen Sätzen. — Der Darstellung dieser Abschätzungen schicken wir in Abschnitt II eine modifizierte Darstellung des Fejér-Riess-schen Existenzbeweises, die uns in einigen Einzelheiten einfacher zu sein scheint, namentlich weil dabei sämtliche Rechnungen — auch die Berechnung der Nullpunktsableitung der Abbildungsfunktion — vermieden werden.

II.

Wir geben zunächst eine vielleicht in einigen Details einfachere Darstellung des Existenzbeweises von Fejér und F. Riess. Wir benutzen die folgenden Hilfssätze:

Hilfssatz 1. *Ist G ein im Innern des Einheitskreises E_z der z-Ebene liegendes aber mit diesem Innern nicht identisches einfach zusammenhängendes Gebiet, das den Nullpunkt im Innern enthält, so gibt es eine in G reguläre und schlichte Funktion $\varphi(z)$, mit $\varphi(0) = 0$, $|\varphi'(0)| > 1$, $|\varphi(z)| \leqq 1$.*

Beweis. Ist ζ ein Randpunkt von G, der im Innern des Einheitskreises liegt, so bilde man durch

$$z' = \frac{z - \zeta}{1 - z\bar{\zeta}} \tag{1}$$

E_z auf $E_{z'}$ so ab, daß ζ in den Nullpunkt (und Null in den Punkt $-\zeta$) übergeht. G gehe dabei in G' über. Sodann wende man auf G' die Abbildung an:

$$z'' = \sqrt{z'}, \tag{2}$$

indem man die Wurzel etwa so normiert, daß das Argument des Bildes $\sqrt{-\zeta}$ von $-\zeta$ zwischen 0 und π (0 eingeschlossen, π ausgeschlossen) liegt. Dann bildet sich G', wenn man (2) in das ganze Innere von G' fortsetzt, auf ein in $E_{z''}$ liegendes Gebiet G'' ab. Endlich wende man auf G'' die Abbildung

$$w = \frac{z'' - \sqrt{-\zeta}}{1 - \overline{\sqrt{-\zeta}}\, z''} \tag{3}$$

5) Mit $\uparrow a$ bzw. $\downarrow a$ deuten wir das monotone Zunehmen bzw. monotone Abnehmen gegen a an.

an, die das Bild des Nullpunktes in der z-Ebene wieder in den Nullpunkt der w-Ebene wirft und G'' auf G^* abbildet. So erhalten wir eine in E_z schlichte Funktion $w = \varphi(z)$ mit $|\varphi(z)| \leqq 1$. Um aber $|\varphi'(0)|$ abschätzen zu können, genügt es, sich zu überlegen, daß die zu $w = \varphi(z)$ inverse Funktion $z = \psi(w)$, wie aus ihrer Zusammensetzung aus den zu (1), (2) und (3) inversen Funktionen folgt, offenbar im ganzen Innern von E_w regulär ist und dort absolut < 1 bleibt, daß ferner $\psi(w)$ sicher nicht von der Form $e^{i\theta}w$ ist. Daher folgt aus dem Schwarzschen Lemma, das $\left|\frac{\psi(w)}{w}\right| < 1$ für $|w| < 1$ ist[6]) und daher erst recht $|\psi'(0)| < 1$, $|\varphi'(0)| > 1$ gilt.

Aus $|\psi(w)| < |w|$ folgt ferner $|\varphi(z)| > |z|$, so daß bei unserer Abbildung jeder Punkt (bis auf $z = 0$) weiter vom Nullpunkt gerückt wird. — Wir wollen die eben gebildete Funktion $\varphi(z)$ mit $\varphi_{G,\zeta}(z)$ bezeichnen.

Als Hilfssatz 2 benutzen wir den Montelschen Auswahlsatz: *Aus einer beliebigen unendlichen Schar von in E_z gleichmäßig beschränkten und regulären Funktionen läßt sich eine Teilfolge herausgreifen, die im Innern von E_z gleichmäßig konvergiert.*[7])

Als Hilfssatz 3 bezeichnen wir endlich den Satz, daß *die Grenzfunktion einer im Innern von E_z gleichmäßig konvergenten Folge schlichter Funktionen, dort wiederum schlicht ist, wenn sie sich nicht auf eine Konstante reduziert.*[8])

Nunmehr behaupten wir den

Satz. *Es sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet, das im Innern des Einheitskreises E_z der z-Ebene liegt und den Nullpunkt im Innern enthält. Dann gibt es eine in G schlichte und reguläre Funktion $\Phi(z)$ mit $\Phi(0) = 0$ derart, daß das durch $w = \Phi(z)$ vermittelte Bild von G mit dem ganzen Innern von E_w identisch ist.*

Beweis. Man betrachte die Gesamtheit $\mathfrak{M}$ aller in G schlichten Funktionen $f(z)$, die dort durchweg absolut $\leqq 1$ sind und im Nullpunkt verschwinden; z. B. ist z eine solche Funktion. Zu jeder Funktion $f(z)$ von $\mathfrak{M}$ betrachte man $d(f) = |f'(0)|$. Ist $\varrho > 0$ der Radius eines Kreises $|z| < \varrho$, der ganz in G liegt, so folgt nach der Cauchyschen Abschätzung $d(f) \leqq \frac{1}{\varrho}$. Es sei nun $\varDelta$ die obere Grenze aller $d(f)$.

---

6) Vgl. hierzu die in Fußnote 2) zitierte Abhandlung von Koebe, S. 185.

7) Darunter verstehen wir hier (und auch im folgenden) daß diese Folge in einer Umgebung eines jeden inneren Punktes von E_z gleichmäßig konvergiert.

8) Vgl. für den einfachsten Beweis etwa Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. II, S. 7.

Es gilt offenbar $d(z) = 1 \leqq \Delta \leqq \frac{1}{\varrho}$. Wir behaupten zuerst, daß *es eine Funktion F in $\mathfrak{M}$ gibt mit $d(F) = \Delta$*. Denn sonst gäbe es eine Folge von Funktionen f_ν aus $\mathfrak{M}$ mit $d(f_\nu) \to \Delta$. Nach dem Hilfssatz 2 kann ich annehmen, daß die Folge der $f_\nu(z)$ in E_z gleichmäßig konvergiert. Ist $F(z)$ die Grenzfunktion von $f(z)$, so gilt $F'(0) = \lim_{\nu\to\infty} f_\nu'(0)$, $|F'(0)| = \Delta \geqq 1$. Da daher $F(z)$ nicht konstant ist, muß es nach dem Hilfssatz 3 in G schlicht sein, und daher zu $\mathfrak{M}$ gehören, während nunmehr $d(F) = \Delta$ ist. — Wir behaupten nun, daß das durch eine Funktion $w = F(z)$ aus $\mathfrak{M}$ mit $d(F) = \Delta$ vermittelte Bild G^* von G mit dem ganzen Innern von E_w zusammenfällt. Denn sonst gäbe es nach dem Hilfssatz 1 eine in G^* reguläre und schlichte Funktion $\varphi(w)$ mit $\varphi(0) = 0, |\varphi'(0)| > 1$, $|\varphi(w)| \leqq 1$, dann aber wäre $\varphi(F(z))$ eine in G schlichte und reguläre Funktion aus $\mathfrak{M}$ mit dem absoluten Betrag $\Delta|\varphi'(0)| > \Delta$ der Ableitung im Nullpunkt, was der Definition von Δ widerspricht, w. z. b. w.

III.

Um nun eine Funktion $\Phi(z)$, deren Existenz im Satze des Abschnitts II behauptet wurde, zu bilden, liegt es nahe, die im Hilfssatz 1 benutzte Konstruktion zu iterieren. Ist $G = G_1$ in E_z enthalten und ist ζ_1 ein Randpunkt von G, für den $|\zeta_1| = \varrho_1$ am kleinsten ist, so bilde man G_1 durch $\varphi_1(z) = \varphi_{G_1, \zeta_1}(z)$ auf ein Gebiet G_2 ab, das auch im Innern des Einheitskreises liegt. Ist ζ_2 der bei G_2 analog zu ζ_1 definierte Punkt, so bildet $\varphi_2(z) = \varphi_{G_2, \zeta_2}$ G_2 auf ein im Innern des Einheitskreises liegendes Gebiet G_3 ab, usw. Die Funktion $\varphi_n(\varphi_{n-1} \ldots (z) \ldots)$, die G auf G_{n+1} abbildet, bezeichnen wir mit $\Phi_n(z)$. Wir haben den Radius ϱ_{n+1} des größten Kreises $|z| < \varrho_{n+1}$ abzuschätzen, dessen Inneres ganz in G_{n+1} liegt, und festzustellen, wann sich ϱ_{n+1} hinreichend nahe dem Werte 1 genähert hat, da ja offenbar alle Randpunkte von G_{n+1} im Kreisring $\varrho_{n+1} \leqq |z| \leqq 1$ liegen. Setzt man nun für einen Augenblick für $m > n$ $\Phi_{m,n}(z) = \varphi_m(\varphi_{m-1}(\ldots \varphi_{n+1}(z) \ldots))$, so gilt offenbar $\Phi_m(z) = \Phi_{m,n}(\Phi_n(z))$. Da die Funktion $\Phi_{m,n}(z)$ in G_{n+1}, daher auch für $|z| < \varrho_{n+1}$ regulär und absolut $\leqq 1$ ist, gilt

$$(4) \qquad |\Phi'_{m,n}(0)| \leqq \frac{1}{\varrho_{n+1}}.$$

Andererseits gilt offenbar

$$|\Phi'_{m,n}(0)| = |\varphi'_{n+1}(0)| \ldots |\varphi'_m(0)|,$$

so daß wir die Ungleichung erhalten

$$(5) \qquad |\varphi'_{n+1}(0)| \ldots |\varphi'_m(0)| \leqq \frac{1}{\varrho_{n+1}},$$

die für ein $n \geqq 1$ und für alle $m > n$ gilt. Nun liefert die direkte Berechnung der Ableitung von $\varphi_{G,\zeta}(z)$ im Nullpunkt den Wert

$$\varphi'_{G,\zeta}(0) = \frac{1+|\zeta|}{2|\sqrt{-\zeta}|},$$

so daß allgemein $\varphi'_\nu(0) = \dfrac{1+\varrho_\nu}{2\sqrt{\varrho_\nu}}$ ist. Daher geht (5) in

$$(6) \qquad \prod_{\nu=n+1}^{m} \frac{1+\varrho_\nu}{2\sqrt{\varrho_\nu}} \leqq \frac{1}{\varrho_{n+1}}$$

über. Man beachte nun, daß

$$\frac{1+\varrho_\nu}{2\sqrt{\varrho_\nu}} = 1 + \frac{(1-\sqrt{\varrho_\nu})^2}{2\sqrt{\varrho_\nu}} = 1 + \frac{(1-\varrho_\nu)^2}{2\sqrt{\varrho_\nu}(1+\sqrt{\varrho_\nu})^2}$$

ist. Da aus der Ungleichung (6) wegen $\dfrac{1+\varrho_\nu}{2\sqrt{\varrho_\nu}} > 1$ die Konvergenz des Produktes $\prod\limits_{\nu=n+1}^{\infty} \dfrac{1+\varrho_\nu}{2\sqrt{\varrho_\nu}}$ und daher insbesondere $\varrho_\nu \to 1$ folgt, erhalten wir schließlich

$$(7) \qquad \prod_{\nu=n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{(1-\varrho_\nu)^2}{2\sqrt{\varrho_\nu}(1+\sqrt{\varrho_\nu})^2}\right) \leqq \frac{1}{\varrho_{n+1}}.$$

Ferner folgt aus der am Schlusse des Beweises von Hilfssatz 1 bewiesenen Relation $|\varphi(z)| > |z| : \varrho_\nu \uparrow 1$. Nunmehr beachte man, daß für $1 > \Theta \geqq |x|$

$$-\frac{\lg(1-\Theta)}{\Theta} \geqq \frac{\lg(1+x)}{x} \geqq \frac{\lg(1+\Theta)}{\Theta}$$

ist, da $\dfrac{\lg(1+x)}{x}$ mit wachsenden x von $-\Theta$ an monoton abnimmt. Daher folgt aus (7) wegen $\varrho_\nu < 1$

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \lg\left(1 + \frac{(1-\varrho_\nu)^2}{8}\right) \leqq -\lg(1-(1-\varrho_{n+1})),$$

und ferner wegen $\dfrac{\lg(1+\frac{1}{8})}{\frac{1}{8}} > \dfrac{1}{2}$

$$(8) \qquad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot \sum_{\nu=n+1}^{\infty} (1-\varrho_\nu)^2 \leqq \frac{\lg\frac{1}{\varrho_1}}{1-\varrho_1}(1-\varrho_{n+1}).$$

Setzen wir $16\,\dfrac{\lg\frac{1}{\varrho_1}}{1-\varrho_1} = c > 1$, so folgt aus (8)

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \left(\frac{1-\varrho_\nu}{4c}\right)^2 \leqq \frac{1}{4}\left(\frac{1-\varrho_{n+1}}{4c}\right)$$

und daher

$$\sum_{\nu=n+1}^{2n}\left(\frac{1-\varrho_\nu}{4c}\right)^2 \leqq \frac{1}{4}\left(\frac{1-\varrho_{n+1}}{4c}\right),\ n\left(\frac{1-\varrho_{2n}}{4c}\right) \leqq \frac{1}{4}\left(\frac{1-\varrho_n}{4c}\right),$$

$$\left(2n\,\frac{1-\varrho_{2n}}{4c}\right)^2 \leqq n\,\frac{1-\varrho_n}{4c},$$

$$\left(2^\nu\,\frac{1-\varrho_{2^\nu}}{4c}\right)^{2^\nu} \leqq \frac{1-\varrho_1}{4c} < 1,$$

(9) $$1-\varrho_{2^\nu} < \frac{4c}{2^\nu}.$$

Ist nun für ein $n > 1 : 2^{\nu-1} \leqq n < 2^\nu$, so folgt aus (9)

$$1-\varrho_n \leqq 1-\varrho_{2^{\nu-1}} < \frac{4c}{2^{\nu-1}} < \frac{8c}{2^\nu} < \frac{8c}{n},$$

so daß wir schließlich für $n \geqq 1$ erhalten

(10) $$1-\varrho_n < 128\,\frac{\lg\frac{1}{\varrho_1}}{1-\varrho_1}\cdot\frac{1}{n}.$$

Dies ist die in Aussicht gestellte Abschätzung. Insbesondere ist also $1-\varrho_n \leqq \frac{1}{2}$, sobald

(10⁰) $$n \geqq N_0 = 512\lg\frac{1}{\varrho_1} \quad \text{ist.}$$

IV.

Praktisch wird man allerdings das eben diskutierte Verfahren selten genau in der angegebenen Form anwenden, da die Bestimmung des dem Nullpunkt zunächst gelegenen Randpunktes ζ_n gelegentlich sehr umständlich sein kann. Versteht man unter ϱ_n den Radius des größten Kreises um den Nullpunkt, dessen Inneres im Gebiete G_n liegt, so kann man allgemeiner als ζ_n einen Randpunkt von G_n nehmen, dessen Distanz von der Peripherie des Einheitskreises nicht $1-\varrho_n$ ist, sondern allgemeiner $k_n(1-\varrho_n)$, wo $0 < k_n \leqq 1$ ist, aber natürlich k_n nicht zu klein angenommen werden darf. Wir nehmen an, daß die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} k_\nu^2$ divergiert. Dann gilt für $\varphi'_{G_n,\zeta_n}(0)$

$$|\varphi'_{G_n,\zeta_n}(0)| = \frac{1+1-k_n(1-\varrho_n)}{2\sqrt{1-k_n(1-\varrho_n)}} = 1 + \frac{\left(1-\sqrt{1-k_n(1-\varrho_n)}\right)^2}{2\sqrt{1-k_n(1-\varrho_n)}}$$

$$= 1 + \frac{k_n^2(1-\varrho_n)^2}{2\sqrt{1-k_n(1-\varrho_n)}\left(1+\sqrt{1-k_n(1-\varrho_n)}\right)^2} > 1 + \frac{k_n^2(1-\varrho_n)^2}{8}.$$

Dann liefert (5) für alle $m > n$

$$\prod_{\nu=n+1}^{m}\left(1+\frac{k_\nu^2(1-\varrho_\nu)^2}{2\sqrt{1-k_\nu(1-\varrho_\nu)}\left(1+\sqrt{1-k_\nu(1-\varrho_\nu)}\right)^2}\right) \leqq \frac{1}{\varrho_{n+1}} \leqq \frac{1}{\varrho_n}$$

und daher

$$\prod_{\nu=n+1}^{\infty}\left(1+\frac{k_\nu^2(1-\varrho_\nu)^2}{8}\right) < \frac{1}{\varrho_n}. \tag{11}$$

Da $1-\varrho_\nu$ jedenfalls monoton abnimmt, muß $1-\varrho_\nu \downarrow 0$ sein, da sonst wegen der Divergenz von $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} k_\nu^2$ auch das Produkt divergieren müßte.

Daher konvergiert für divergente $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} k_\nu^2$ *auch unsere Modifikation des Schmiegungsverfahrens.* Aus (11) folgt wie oben

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \lg\left(1+\frac{k_\nu^2(1-\varrho_\nu)^2}{8}\right) \leqq \lg(1-(1-\varrho_n)),$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\sum_{\nu=n+1}^{\infty} k_\nu^2\cdot(1-\varrho_\nu)^2 \leqq \frac{\lg\frac{1}{\varrho_1}}{1-\varrho_1}(1-\varrho_n)$$

oder, $16\,\dfrac{\lg\frac{1}{\varrho_1}}{1-\varrho_1} = c > 1$ gesetzt,

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} k_\nu^2(1-\varrho_\nu)^2 \leqq c\,(1-\varrho_n). \tag{12}$$

Um eine Abschätzung für $1-\varrho_n$ aus (12) herzuleiten, machen wir über die k_ν eine weitere Annahme:

Es sei $\sum\limits_{\nu=1}^{n} k_\nu^2 = K_n$, dann verlangen wir, daß es zwei positive Konstanten $d > 0$, $D > 1$ geben soll, so daß für alle $n \geqq 1$

$$1-d \geqq \frac{K_n}{K_{2n}} \geqq \frac{1}{D} \tag{13}$$

ist. (Diese Annahme ist z. B. stets erfüllt, wenn $k_\nu = \frac{1}{\nu^s}$, $0 \leqq s \leqq \frac{1}{2}$, gesetzt wird.) Dann folgt aus (12) und (13)

$$(K_{2n}-K_n)(1-\varrho_{2n})^2 = \sum_{\nu=n+1}^{2n} k_\nu^2(1-\varrho_{2n})^2 \leqq \sum_{\nu=n+1}^{2n} k_\nu^2(1-\varrho_\nu)^2 \leqq c(1-\varrho_n),$$

oder $\quad dK_{2n}(1-\varrho_{2n})^2 \leqq K_{2n}\left(1-\frac{K_n}{K_{2n}}\right)(1-\varrho_{2n})^2 \leqq c\,(1-\varrho_n),$

$$dK_{2n}^2(1-\varrho_{2n})^2 \leqq cK_{2n}(1-\varrho_n) \leqq cDK_n(1-\varrho_n),$$

$$\left(\frac{dK_{2n}(1-\varrho_{2n})}{cD}\right)^2 \leqq \frac{dK_n(1-\varrho_n)}{cD},$$

und daher $$\left(\frac{d K_{2^\nu}(1-\varrho_{2^\nu})}{cD}\right)^{2^\nu} \leqq \frac{d K_1(1-\varrho_1)}{cD} < 1,$$

$$\frac{d K_{2^\nu}(1-\varrho_{2^\nu})}{cD} < 1.$$

Ist nun für ein $n > 1$: $2^{\nu-1} \leqq n < 2^\nu$, so folgt weiter nach (13) wegen der Monotonie der K_ν

$$1-\varrho_n \leqq 1-\varrho_{2^{\nu}-1} < \frac{cD}{d K_{2^\nu-1}} \leqq \frac{cD^2}{d K_n},$$

so daß wir schließlich erhalten

$$1-\varrho_n < \frac{cD^2}{d} \frac{1}{\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu^2} = O\left(\frac{1}{\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu^2}\right). \tag{14}$$

Die Abschätzung (14) gilt indessen nur unter der Annahme (13) über k_ν, während wir die Konvergenz für den allgemeinsten Fall divergenter $\sum_{\nu=1}^{\infty} k_\nu^2$ bewiesen haben. Wir wollen nun eine andere Methode angeben, die in jedem Falle divergenter $\sum_{\nu=1}^{\infty} k_\nu^2$ eine Abschätzung herzuleiten gestattet, welche indessen in den soeben hehandelten Fällen schwächer ist als die oben hergeleitete, nämlich nur

$$1-\varrho_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \text{ bzw. } O\left(\frac{1}{\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu^2}}\right) \quad \text{besagt.}$$

V.

Wir kehren jetzt wieder zur Funktion $w = \varphi_{G,\zeta}(z)$ zurück, die beim Beweise des Hilfssatzes 1 im Abschnitt II aufgestellt wurde und G auf G^* abbildet, um direkt eine Abschätzung für den Radius des größten Kreises um den Nullpunkt zu erhalten, dessen Inneres im Gebiete G^* liegt. Den Radius der größten in G bzw. in G^* enthaltenen offenen Kreisscheibe um den Nullpunkt bezeichnen wir mit ϑ bzw. ϑ^*. Wir bezeichnen $\varphi'_{G,\zeta}(0)$ mit d_ζ. Es ist, wie wir gesehen haben,

$$|d_\zeta| = \frac{1+|\zeta|}{2\sqrt{|\zeta|}}.$$

Wir betrachten nun die Umkehrfunktion $z = \psi(w)$ von $w = \varphi(z)$,

$$\psi(w) = \psi_{G,\zeta}(w) = \frac{w}{d_\zeta} + \cdots,$$

die im ganzen Einheitskreis regulär ist und dem absoluten Betrage nach 1 nicht übersteigt. Dasselbe gilt daher auch für

$$\psi^*(w) = \frac{\psi(w)}{w} = \frac{1}{d_\zeta} + \cdots$$

Aus dem Schwarzschen Lemma folgt, daß allgemein $|\psi(w)| < |w|$ ist, so daß der Bildpunkt eines jeden Punktes von G weiter vom Nullpunkt entfernt ist als der ursprüngliche Punkt. Sodann aber wenden wir auf $\psi(w)$ die bekannte Verallgemeinerung des Schwarzschen Lemmas an: *Wenn $f(z)$ regulär und $|f(z)| \leqq 1$ für $|z| < 1$ ist, dann gilt für jedes z mit $|z| \leqq \varrho < 1$*

$$|f(z)| \leqq \frac{\varrho + |f(0)|}{1 + \varrho |f(0)|}.$$

Daraus folgt für $|w| \leqq \varrho < 1$

$$|\psi^*(w)| \leqq \frac{\varrho + \frac{1}{|d_\zeta|}}{1 + \frac{\varrho}{|d_\zeta|}},$$

$$|\psi(w)| \leqq \varrho \frac{\varrho + \frac{1}{|d_\zeta|}}{1 + \frac{\varrho}{|d_\zeta|}}.$$

Wenn daher für ein ϱ

$$(15) \qquad \vartheta \geqq \varrho \frac{\varrho + \frac{1}{|d_\zeta|}}{1 + \frac{\varrho}{|d_\zeta|}} = \varrho \left(1 - \frac{(1-\varrho)\left(1 - \frac{1}{|d_\zeta|}\right)}{1 + \frac{\varrho}{|d_\zeta|}}\right),$$

d. h. also
$$\varrho^2 + \frac{\varrho}{|d_\zeta|}(1 - \vartheta) - \vartheta \leqq 0$$

ist, liegen die Bildpunkte von allen w mit $|w| < \varrho$ im Kreise $|z| < \vartheta$, d. h. im Gebiet G, und daher enthält dann G^* die Kreisscheibe $|w| < \varrho$. Nun gilt (15) sicher, wenn

$$\vartheta \geqq \varrho \left(1 - (1-\varrho) \frac{1 - \frac{1}{|d_\zeta|}}{1 + \frac{1}{|d_\zeta|}}\right), \qquad \varrho \leqq \frac{\vartheta}{1 - (1-\varrho) \frac{1 - \frac{1}{|d_\zeta|}}{1 + \frac{1}{|d_\zeta|}}}$$

gilt, und dies gilt sicher, sobald

$$\varrho \leqq \vartheta \left(1 + (1-\varrho) \frac{1 - \frac{1}{|d_\zeta|}}{1 + \frac{1}{|d_\zeta|}}\right)$$

oder
$$1-\varrho \geqq 1-\vartheta-\vartheta \frac{1-\frac{1}{|d_\zeta|}}{1+\frac{1}{|d_\zeta|}}(1-\varrho),$$

oder endlich, wenn noch
$$\frac{1-\frac{1}{|d_\zeta|}}{1+\frac{1}{|d_\zeta|}}=\left(\frac{1-\sqrt{|\zeta|}}{1+\sqrt{|\zeta|}}\right)^2$$

berücksichtigt wird, sobald
$$\frac{1-\varrho}{1-\vartheta} \geqq \frac{1}{1+\vartheta\left(\frac{1-\sqrt{|\zeta|}}{1+\sqrt{|\zeta|}}\right)^2}$$

ist. Bestimmt man also ein ϱ aus
$$\frac{1-\varrho}{1-\vartheta}=\frac{1}{1+\vartheta\left(\frac{1-\sqrt{|\zeta|}}{1+\sqrt{|\zeta|}}\right)^2},$$

so gilt $\varrho<\vartheta^*$, so daß also

(16)
$$\frac{1-\vartheta^*}{1-\vartheta}<\frac{1}{1+\vartheta\left(\frac{1-\sqrt{|\zeta|}}{1+\sqrt{|\zeta|}}\right)^2}$$

gilt und $1-\vartheta^*$ in der Tat in einem angebbaren Verhältnis kleiner ist als $1-\vartheta$. —

Betrachtet man nun die am Eingang des Abschnittes III eingeführte Folge von Funktionen $\varphi_\nu(z)=\varphi_{G_\nu, \zeta_\nu}(z)$, indem man wieder ζ_ν so wählt, daß $1-|\zeta_\nu|=k_\nu(1-\varrho_\nu)$ ist, so gilt dann für die zu den Gebieten G_ν gehörenden ϱ_ν nach (16) für $\varrho_\nu=\vartheta$, $\varrho_{\nu+1}=\vartheta^*$:

(17)
$$\frac{1-\varrho_{\nu+1}}{1-\varrho_\nu}<\frac{1}{1+\varrho_\nu\left(\frac{1-\sqrt{1-k_\nu(1-\varrho_\nu)}}{1+\sqrt{1-k_\nu(1-\varrho_\nu)}}\right)^2}.$$

Nehmen wir zunächst allgemein $k_\nu\equiv 1$ an, so gilt
$$1-\varrho_{n+1}<\frac{1-\varrho_n}{1+\frac{\varrho_n}{16}(1-\varrho_n)^2}.$$

Wenn nun $\vartheta_n \leqq \frac{1}{2}$ ist, folgt wegen $1-\varrho_n \geqq \frac{1}{2}$
$$1-\varrho_{n+1}<(1-\varrho_n)\left(1+\frac{\varrho_n}{64}\right)^{-1}<(1-\varrho_n)\left(1+\frac{\varrho_1}{64}\right)^{-1}$$

und daher $(1-\varrho_{n+1})<(1-\varrho_1)\left(1+\frac{\varrho_1}{64}\right)^{-n}<\left(1+\frac{\varrho_1}{64}\right)^{-n}.$

Daher wird $\varrho_n > \frac{1}{2}$ für $n > \dfrac{\lg 2}{\lg\left(1 + \frac{\varrho_1}{64}\right)}$ und a fortiori für

$$n_0 > N_0 = \frac{64}{\varrho_1}.$$

Dieser Wert von N_0 ist in bezug auf ϱ_1 weniger günstig als der in (10^0) erhaltene, da dort ja nur $\lg \frac{1}{\varrho_1}$ steht. — Wir nehmen nun allgemeiner an, daß

(18) $$(1 - |\zeta_n|) \geqq k_n (1 - \varrho_n), \quad 0 < k_n \leqq 1$$

und $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} k_\nu^2$ divergent ist. Dann folgt aus (17)

(19) $$1 - \varrho_{n+1} < \frac{1 - \varrho_n}{1 + k_n^2 \frac{\varrho_n}{16} (1 - \varrho_n)^2}.$$

Für $\varrho_n < \frac{1}{2}$ folgt daher

$$(1 - \varrho_{n+1}) < (1 - \varrho_n) \left(1 + \frac{k_n^2 \varrho_n}{64}\right)^{-1}$$
$$< (1 - \varrho_1) \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 + \frac{k_\nu^2}{64} \varrho_1\right)^{-1} < \frac{(1 - \varrho_1)\, 64}{\varrho_1 \sum\limits_{\nu=1}^{n} k_\nu^2},$$

so daß ϱ_{n_0} sicher $< \frac{1}{2}$ ist, sobald

$$\sum_{1}^{n_0 - 1} k_\nu^2 > \frac{128}{\varrho_1}$$

ist. Ist aber $\varrho_n \geqq \frac{1}{2}$, so folgt, $\varrho_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{u_n}}$ gesetzt, aus (19):

$$\sqrt{u_{n+1}} > \sqrt{u_n} \left(1 + k_n^2 \frac{\varrho_n}{16} \frac{1}{u_n}\right) > \sqrt{u_n} \left(1 + \frac{k_n^2}{32 u_n}\right).$$

$$u_{n+1} > u_n \left(1 + \frac{k_n^2}{16} \frac{1}{u_n}\right) = u_n + \frac{k_n^2}{16},$$

daher für $m > n$

(20) $$u_m > u_n + \frac{1}{16} \sum_{\nu=n}^{m-1} k_\nu^2$$

und daher für $n > n_0$, wenn $\varrho_{n_0} \geqq \frac{1}{2}$ ist,

(21) $$1 - \varrho_n < \frac{4}{\sqrt{\sum\limits_{\nu=n_0}^{n-1} k_\nu^2}}, \quad \varrho_{n_0} \geqq \frac{1}{2},$$

bzw., wenn $\varrho_1 \geqq \frac{1}{2}$,

(22) $$1 - \varrho_n < \frac{4}{\sqrt{16 u_1 + \sum\limits_{\nu=1}^{n-1} k_\nu^2}}, \quad u_1 = \frac{1}{(1 - \varrho_1)^2} \geqq 4.$$

In jedem Falle ist also

$$1 - \varrho_{n+1} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu^2}}\right), \tag{23}$$

und diese Abschätzung gilt gleichmäßig für alle Gebiete G, die im Einheitskreise enthalten sind und eine gemeinsame Kreisscheibe um den Nullpunkt enthalten.

VI.

Es ist von einigem Interesse, die einfachen Sätze über Reihen mit positiven Gliedern zu formulieren, die hinter der Methode der Abschnitte III und IV stecken.

I. *Es sei* $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ *konvergent*, $a_\nu \downarrow 0$ *und*

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu < c\, a_n^\gamma, \quad 0 < \gamma < 1, \quad c > 0.\text{[9])} \tag{24}$$

Dann gilt

$$a_n = O\left(n^{-\frac{1}{1-\gamma}}\right), \quad a_n < \left[\left(2^{-\frac{1}{(1-\gamma)^2}} c^{-\frac{1}{1-\gamma}}\right) a_1 + 1\right] \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}. \tag{25}$$

Für $\gamma = \frac{1}{2}$ *folgt also*

$$a_n < \frac{\frac{a_1}{4c^2} + 4}{n^2}, \quad a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Beweis. Aus (24) folgt

$$n\, a_{2n} \leqq \sum_{\nu=n+1}^{2n} a_\nu \leqq c\, a_n^\gamma,$$

oder, wenn wir auf beiden Seiten mit $c^{\frac{1}{\gamma-1}}\, 2^{-\frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}}\, n^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$ multiplizieren,

$$2^{-\frac{1}{(1-\gamma)^2}} c^{\frac{1}{\gamma-1}} (2n)^{\frac{1}{1-\gamma}} a_{2n} < \left(2^{-\frac{1}{(1-\gamma)^2}} c^{\frac{1}{\gamma-1}} n^{\frac{1}{1-\gamma}} a_n\right)^\gamma$$

und daher, $2^{-\frac{1}{(1-\gamma)^2}} c^{-\frac{1}{1-\gamma}} = E$ gesetzt,

$$E\,(2n)^{\frac{1}{1-\gamma}} a_{2n} \leqq \left(E\, n^{\frac{1}{1-\gamma}} a_n\right)^\gamma,$$

$$2^{\frac{\nu}{1-\gamma}} E\, a_{2^\nu} \leqq (E\, a_1)^{\gamma^\nu} < E\, a_1 + 1. \tag{26}$$

---

9) Für $\gamma \geqq 1$ würde man sehr viel schärfere Abschätzungen erhalten, z. B. für $\gamma = 1$

$$a_n = O\left(e^{-\alpha n}\right)$$

für geeignete (von c abhängige) positive α.

Ist nun für ein $n > 1$ $\quad 2^{\nu-1} \leqq n < 2^{\nu}$,

so folgt aus (26) wegen $a_\nu \downarrow 0$

$$n^{\frac{1}{1-\gamma}} a_n < 2^{\frac{1}{1-\gamma}} 2^{(\nu-1)\frac{1}{1-\gamma}} a_{2^{\nu-1}} < 2^{\frac{1}{1-\gamma}} (E a_1 + 1),$$

$$a_n < \frac{2^{\frac{1}{1-\gamma}} (E a_1 + 1)}{n^{\frac{1}{1-\gamma}}},$$

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{1-\gamma}}}\right).$$

II. *Es sei* $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ *konvergent,* $a_\nu \downarrow 0$, $\sum_{\nu=1}^{\infty} k_\nu$ *divergent,* $k_\nu \geqq 0$ *und,* $\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu = K_n$ *gesetzt, für* $d > 0$, $D > 1$

$$1 - d > \frac{K_n}{K_{2n}} > \frac{1}{D}. \tag{27}$$

Ferner sei $\sum_{\nu=1}^{\infty} k_\nu a_\nu$ *konvergent, und es gelte für alle* $n \geqq 1$

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} k_\nu a_\nu \leqq c\, a_n^{\gamma}, \qquad 0 < \gamma < 1. \tag{28}$$

Dann gilt

$$a_n = O\left(\frac{1}{K_n^{\frac{1}{1-\gamma}}}\right), \quad a_n < \left(k_1^{\frac{1}{1-\gamma}} a_1 + D^{\frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}} c^{\frac{1}{1-\gamma}} d^{-\frac{1}{1-\gamma}}\right) \left(\frac{D}{K_n}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}. \tag{29}$$

Beweis. Aus (27) folgt nach (28)

$$(K_{2n} - K_n)\, a_{2n} = a_{2n} \sum_{\nu=n+1}^{2n} k_\nu \leqq c\, a_n^{\gamma},$$

$$d K_{2n} a_{2n} \leqq c\, a_n^{\gamma},$$

$$d K_{2n}^{\frac{1}{1-\gamma}} a_{2n} \leqq c K_{2n}^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} a_n^{\gamma} < c D^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} K_n^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} a_n^{\gamma} = c D^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \left(K_n^{\frac{1}{1-\gamma}} a_n\right)^{\gamma}.$$

Multiplizieren wir hier die beiden Seiten mit $c^{-\frac{1}{1-\gamma}} D^{-\frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}} d^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$, so ergibt sich

$$c^{\frac{1}{\gamma-1}} D^{-\frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}} d^{\frac{1}{1-\gamma}} K_{2n}^{\frac{1}{1-\gamma}} a_{2n} \leqq \left(c^{\frac{1}{\gamma-1}} D^{-\frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}} d^{\frac{1}{1-\gamma}} K_n^{\frac{1}{1-\gamma}} a_n\right)^{\gamma}$$

und daher, $c^{\frac{1}{\gamma-1}} D^{-\frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}} d^{\frac{1}{1-\gamma}} = E$ gesetzt,

$$E K_{2^\nu}^{\frac{1}{1-\gamma}} a_{2^\nu} \leqq \left(E K_1^{\frac{1}{1-\gamma}} a_1\right)^{\gamma^\nu} < E k_1^{\frac{1}{1-\gamma}} a_1 + 1. \tag{30}$$

Ist nun für ein $n > 1$ $\quad 2^{\nu-1} \leqq n < 2^{\nu}$,

so folgt aus (30) wegen $a_\nu \downarrow 0$

$$E K_n^{\frac{1}{1-\gamma}} a_n \leqq E K_{2^\nu}^{\frac{1}{1-\gamma}} a_{2^{\nu-1}}$$

$$\leqq E D^{\frac{1}{1-\gamma}} K_{2^{\nu-1}}^{\frac{1}{1-\gamma}} a_{2^{\nu-1}} < D^{\frac{1}{1-\gamma}} \left(E \cdot k_1^{\frac{2}{1-\gamma}} a_1 + 1\right),$$

$$a_n < \frac{D^{\frac{1}{1-\gamma}} \left(k_1^{\frac{1}{1-\gamma}} a_1 + \frac{1}{E}\right)}{K_n^{\frac{1}{1-\gamma}}},$$

und dies ist gerade (29).

(Eingegangen am 20. 6. 1929.)

Anmerkungen zu einer Arbeit des Herrn Nicolaus Ogloblin.

Von KARL BOEHM in Karlsruhe.

Eine „Anwendung der Fareyschen Reihen" nennt Herr Nicolaus Ogloblin das Verfahren zur Abzählung der rationalen Zahlen, welches er in Bd. 38, Heft 1/4 dieses Jahresberichtes veröffentlicht hat.

Wenn der Verfasser damit mehr sagen will, als daß es die Beschäftigung mit jenen Reihen war, die ihn zu seiner schönen Entdeckung geführt hat, so wird man die Bezeichnung nicht gelten lassen dürfen; denn weder das Ergebnis, noch seine Begründung braucht mit den Farey-Brüchen in Zusammenhang gebracht zu werden. Ja, es ist ein besonderer Vorzug der Methode, daß sie nur von den einfachsten arithmetischen Begriffen Gebrauch macht und in jeder elementaren Vorlesung, vielleicht sogar im Schulunterricht, vorgetragen werden kann. Daher darf ich hoffen, dem einen oder dem anderen Leser einen Dienst zu erweisen, indem ich den Kern der Sache aus der unnatürlichen Verbindung herausschäle. Dies soll in den drei ersten Paragraphen der folgenden Note geschehen.

Sind die Untersuchungen, welche Herr Ogloblin über die Abbildung der Menge der Farey-Brüche auf die Menge der Dualbrüche zwischen 0 und 1 anstellt, für die Abzählung der rationalen Zahlen überflüssig, so sind sie doch an sich außerordentlich interessant. Da es einige Mühe kostet, den Beweis, wie ihn der Verfasser für seinen Hauptsatz gibt, zu verstehen und als allgemeingültig zu erkennen, so erlaube ich mir, in einem letzten Paragraphen eine Fassung mitzuteilen, welche mir durchsichtiger zu sein scheint.

I. Eindeutige Darstellung der positiven rationalen Zahl $\frac{a_0}{a_1}$ durch einen Kettenbruch von ungerader Anzahl der Teilnenner.

$$(1)\quad \begin{cases} \frac{a_0}{a_1} = m_0 + \frac{a_2}{a_1}, & \text{wo } m_0 \geqq 0, \quad 0 \leqq a_2 < a_1, \\ \frac{a_1}{a_2} = m_1 + \frac{a_3}{a_2}, & m_1 > 0, \quad 0 \leqq a_3 < a_2, \\ \vdots & \\ \frac{a_{\mu-1}}{a_\mu} = m_{\mu-1} + \frac{a_{\mu+1}}{a_\mu}, & m_{\mu-1} > 0, \quad 0 \leqq a_{\mu+1} < a_\mu, \\ \frac{a_\mu}{a_{\mu+1}} = m_\mu, & m_\mu > 1. \end{cases}$$

Die endliche Folge ganzer Zahlen

(2) $$(m_0, m_1, m_2, \ldots, m_\mu),$$ worin

(3) $$m_0 \geqq 0, \quad m_i > 0, \quad m_\mu > 1 \qquad [i = 1, 2, \ldots, \mu - 1],$$

ist also durch die rationale Zahl $\frac{a_0}{a_1}$ in umkehrbar eindeutiger Weise festgelegt.

Verzichtet man auf die Forderung $m_\mu > 1$ und ersetzt sie durch die schwächere: $m_\mu > 0$, so ergibt sich für dieselbe rationale Zahl $\frac{a_0}{a_1}$ eine zweite Zahlenfolge:

(2a) $$(m_0, m_1, m_2, \ldots, m_{\mu-1}, m_\mu - 1, 1),$$

worin $$m_0 \geqq 0, \quad m_i > 0 \qquad [i = 1, 2, \ldots, \mu].$$

Die eine dieser beiden Zahlenfolgen enthält eine gerade, die andere eine ungerade Anzahl von Zahlen.

Es ist also die Menge der rationalen Zahlen äquivalent mit der Menge aller Kettenbrüche von ungerader Anzahl der Teilnenner:

(4) $$(m_0, m_1, m_2, \ldots, m_{2\nu}),$$

worin $$m_0 \geqq 0, \quad m_i \geqq 1 \qquad [i = 1, 2, \ldots, 2\nu].$$

II. Eindeutige Beziehung jeder natürlichen Zahl auf eine Folge natürlicher Zahlen mit ungerader Anzahl der Glieder.

Ist M irgendeine positive ganze Zahl, so liefert der Ansatz

$$(5)\quad \begin{cases} M = -1 + 2^{m_0} M_1, \\ M_1 = +1 + 2^{m_1} M_2, \\ M_2 = -1 + 2^{m_2} M_3, \\ M_3 = +1 + 2^{m_3} M_4, \\ \vdots \qquad \vdots \end{cases}$$

verbunden mit der Festsetzung

(6) $$M_1 \equiv M_2 \equiv M_3 \equiv M_4 \equiv \cdots \equiv 1 \pmod{2}$$

eine eindeutig bestimmte Folge von ganzen Zahlen $m_0, m_1, m_2, m_3, \ldots$; und zwar ist

(7) $$m_0 \begin{cases} = 0, & \text{wenn } M \equiv 0 \pmod 2, \\ \geqq 1, & \text{wenn } M \equiv 1 \pmod 2, \end{cases}$$

dagegen stets

(8) $$m_i \geqq 1 \qquad [i = 1, 2, 3, \ldots].$$

Da, für $i = 1, 2, 3, \ldots$,

(9) $$M_{i+1} \leqq \tfrac{1}{2}(M_i + (-1)^i) \leqq \tfrac{1}{2}(M_i + 1) \leqq Mi,$$

und zwar

(10) $$M_{i+1} \begin{cases} < M_i, & \text{wenn } M_i > 1 \text{ oder } i \equiv 1 \pmod 2 \text{ oder } m_i > 1 \\ = M_i, & \text{wenn } M_i = 1 \text{ und } i \equiv 0 \pmod 2 \text{ und } m_i = 1 \end{cases}$$

ist, so bilden die M_i eine monoton nicht zunehmende Folge ganzer Zahlen, und es muß eine Stelle kommen, wo das M_{i+1} gleich Null zu setzen ist. Dies kann nur bei ungeradem i eintreten:

$$M_{2\nu+1} = 1.$$

Der oben erwähnte Ausnahmefall, wo $M_{i+1} = M_i$ ist:

$$M_{2\nu-1} = 1 = -1 + 2 \cdot 1,$$

führt beim nächsten Schritt auf eine solche Gleichung.

Demgemäß läßt sich jede positive ganze Zahl M in eindeutig bestimmter Weise so darstellen:

(11) $$M = -1 + 2^{m_0} - 2^{m_0+m_1} + 2^{m_0+m_1+m_2} - \cdots + 2^{m_0+m_1+\cdots+m_{2\nu}},$$

wo $$m_0 \geqq 0, \quad m_i \geqq 1 \qquad [i = 1, 2, 3, \ldots].$$

Durch diese Darstellung ist also mit jeder positiven ganzen Zahl M in eindeutig bestimmter Weise eine endliche Folge von $2\nu + 1$ ganzen Zahlen verknüpft, wie eine solche durch die Kettenbruchentwicklung (4) jeder positiven rationalen Zahl $\frac{a_0}{a_1}$ zugeordnet war.

Mit Benutzung der Identität $2^m - 1 = 1 + 2 + \cdots + 2^{m-1}$ gibt man der Formel (11) leicht die Gestalt der Dualdarstellung der Zahl M. Es ist nämlich

(12a) $$M = [\underbrace{1\ldots1}_{m_{2\nu}}\ \underbrace{0\ldots0}_{m_{2\nu-1}}\ \ldots\ \underbrace{1\ldots1}_{m_2}\ \underbrace{0\ldots0}_{m_1}\ \underbrace{1\ldots1}_{m_0}]_2, \text{ wenn } m_0 > 0,$$

(12b) $$M = [\underbrace{1\ldots1}_{m_{2\nu}}\ \underbrace{0\ldots0}_{m_{2\nu-1}}\ \ldots\ \underbrace{1\ldots1}_{m_2}\ \underbrace{0\ldots0}_{m_1}]_2, \text{ wenn } m_0 = 0.$$

III. Abbildung der Menge der positiven echten Brüche auf die Menge der natürlichen Zahlen.

Wie man sieht, vermitteln die Darstellungen (4) und (11) nicht nur eine Abbildung der Menge aller positiven rationalen Zahlen auf die Menge der natürlichen Zahlen, sondern auch, für $m_0 = 0$, eine Abbildung der Menge der positiven echten Brüche auf die Menge der geraden Zahlen, folglich auch eine Abbildung der Menge der echten Brüche auf die Menge aller natürlichen Zahlen.

Zu dem letztgenannten Zwecke brauchen wir nur jedem durch den Kettenbruch

$$(0, m_1, m_2, \ldots, m_{2\nu}) \quad m_i \geqq 1 \quad [i = 1, 2, \ldots, 2\nu] \tag{4a}$$

dargestellten echten Bruche die ganze Zahl

$$\frac{M}{2} = -2^{m_1-1} + 2^{(m_1-1)+m_2} - 2^{(m_1-1)+m_2+m_3} + \cdots + 2^{(m_1-1)+m_2+\cdots+m_{2\nu}} \tag{13}$$

zuzuordnen, welche, als Dualzahl geschrieben, eine der beiden folgenden Formen annimmt:

$$\frac{M}{2} = [\underbrace{1\ldots1}_{m_{2\nu}}\ \underbrace{0\ldots0}_{m_{2\nu-1}}\ \underbrace{1\ldots1}_{m_{2\nu-2}}\ \ldots\ \underbrace{0\ldots0}_{m_3}\ \underbrace{1\ldots1}_{m_2}]_2 \quad \text{für } m_1 = 1, \tag{14a}$$

$$\frac{M}{2} = [\underbrace{1\ldots1}_{m_{2\nu}}\ \underbrace{0\ldots0}_{m_{2\nu-1}}\ \underbrace{1\ldots1}_{m_{2\nu-2}}\ \ldots\ \underbrace{1\ldots1}_{m_2}\ \underbrace{0\ldots0}_{m_1-1}]_2 \quad \text{für } m_1 > 1. \tag{14b}$$

Dies führt uns zu der von Herrn Ogloblin auf seine Weise ausgedrückten Vorschrift, daß in der Darstellung (12b) die erste von rechts her auftretende Null zu streichen ist.

Ich benutze als Beispiel die Zahl $75 = \frac{M}{2}$, um zugleich einen in der Arbeit des Herrn Ogloblin auf S. 52 sich befindenden Druckfehler berichtigen zu können.

$$75 = -1 + 2^2 - 2^3 + 2^4 - 2^6 + 2^7,$$

also $\quad m_1 = 1, \quad m_2 = 2, \quad m_3 = 1, \quad m_4 = 1, \quad m_5 = 2, \quad m_6 = 1$

$$(0, 1, 2, 1, 1, 2, 1) = \tfrac{18}{25} \text{ (nicht } \tfrac{13}{25}\text{)}.$$

IV. Abbildung der Farey-Brüche auf die Punkte der Strecke (0, 1).

Herr Ogloblin repräsentiert die Symbole $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{0}$ durch die Punkte $s = 0$ und $s = 1$ der reellen Zahlengeraden und erteilt jeder positiven rationalen Zahl $\frac{a}{b}$ eine Abszisse $s\left(\frac{a}{b}\right)$ durch die Vorschrift

$$2s\left(\frac{a+a'}{b+b'}\right) = s\left(\frac{a}{b}\right) + s\left(\frac{a'}{b'}\right), \tag{15}$$

worin $\frac{a}{b}$ und $\frac{a'}{b'}$ zwei Nachbarn irgendeiner Farey-Reihe sein sollen.[1])

Satz: *Ist die positive rationale Zahl $\frac{a}{b}$ durch den endlichen Kettenbruch*

(16) $$\frac{a}{b} = (m_0, m_1, m_2, \ldots, m_{2\nu}), \quad m_0 \geqq 0, \quad m_i \geqq 1 \quad [i = 1, 2, \ldots, 2\nu]$$

dargestellt, so ist

(17) $$s\left(\frac{a}{b}\right) = 1 - 2^{-m_0} + 2^{-(m_0+m_1)} - 2^{-(m_0+m_1+m_2)} + \cdots - 2^{-(m_0+m_1+\cdots+m_{2\nu})},$$

also ein endlicher Dualbruch mit einer der beiden folgenden Entwicklungen:

(18a) $$s\left(\frac{a}{b}\right) = [0, \underbrace{1\ldots1}_{m_0}\ \underbrace{0\ldots0}_{m_1}\ \ldots\ \underbrace{1\ldots1}_{m_{2\nu}}]_2, \text{ wenn } m_0 > 0,$$

(18b) $$s\left(\frac{a}{b}\right) = [0, \underbrace{0\ldots0}_{m_1}\ \underbrace{1\ldots1}_{m_2}\ \ldots\ \underbrace{1\ldots1}_{m_{2\nu}}]_2, \text{ wenn } m_0 = 0.$$

Beweis: Man erkennt sofort die Richtigkeit der Beziehungen

(19) $$s\left(\frac{1}{m}\right) = 2^{-m},$$

(20) $$s\left(\frac{m}{1}\right) = 1 - 2^{-m},$$

(21) $$s\left(\frac{a}{b}\right) + s\left(\frac{b}{a}\right) = 1,$$

wenn m eine beliebige positive ganze Zahl, $\frac{b}{a}$ eine beliebige positive rationale Zahl bedeutet.

Aus (20) erhält man

$$s\left(\frac{m+1}{1}\right) - s\left(\frac{m}{1}\right) = 2^{-m}\left[s\left(\frac{1}{1}\right) - s\left(\frac{0}{1}\right)\right];$$

folglich, wenn p und q irgendwelche positive ganze Zahlen bedeuten:

(22) $$s\left(\frac{mq + (m+1)p}{1\cdot q + 1\cdot p}\right) - s\left(\frac{m}{1}\right) = 2^{-m}\left[s\left(\frac{0\cdot q + 1\cdot p}{1\cdot q + 1\cdot p}\right) - s\left(\frac{0}{1}\right)\right],$$

das heißt

(23) $$s\left(m + \frac{p}{p+q}\right) = s(m) + 2^{-m} s\left(\frac{p}{p+q}\right).$$

---

1) Vergleiche hierzu: Edmund Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie (1927), Band I, S. 98—100.

Ist nun $(m_0, m_1, m_2, \ldots, m_{2\nu})$ ein Kettenbruch, also

$$(24) \qquad (m_0, m_1, m_2, \ldots, m_{2\nu}) = m_0 + \frac{1}{(m_1, m_2, \ldots, m_{2\nu})},$$

so ist, nach (23)

$$(25) \quad s(m_0, m_1, m_2, \ldots, m_{2\nu}) = s(m_0) + 2^{-m_0} s\left(\frac{1}{(m_1, m_2, \ldots, m_{2\nu})}\right)$$

und, nach (21) und (20)

$$(26) \quad \begin{aligned} s(m_0, m_1, m_2, \ldots, m_{2\nu}) &= s(m_0) + 2^{-m_0} - 2^{-m_0} s(m_1, m_2, \ldots, m_{2\nu}) \\ &= 1 - 2^{-m_0} s(m_1, m_2, \ldots, m_{2\nu}). \end{aligned}$$

Die Fortsetzung des Verfahrens führt unmittelbar auf die zu beweisende Darstellung (17).

(Eingegangen am 24. 6. 1929.)

Anwendung eines Koebeschen Satzes auf eine Klasse von Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen.

Von Stefan Bergmann in Berlin.

Eines der interessanten Probleme der Theorie der Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen ist die Frage der Verallgemeinerung der bekannten Sätze über das Verhalten einer Funktion, die durch ihr Funktionselement um den Nullpunkt gegeben ist. Dieser Fragenkomplex bietet im allgemeinen erhebliche Schwierigkeiten; es ist deswegen zweckmäßig, gewisse Klassen von Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen auszusondern, die ein besonders einfaches Verhalten aufweisen. In der Arbeit: „Über Kurvenintegrale von Funktionen $V(x, z)$ zweier komplexen Veränderlichen, welche die Differentialgleichung $\Delta V + V(x, z) = 0$ befriedigen“ [1]), wurde die Klasse von Funktionen betrachtet, die

1. in der Umgebung des Koordinatenanfangspunktes regulär sind,
2. die angegebene partielle Differentialgleichung dort befriedigen.

Wie in der genannten Arbeit gezeigt wurde, läßt sich die Funktion $V(x, z)$ in der Umgebung von $x = z = 0$ in der Form

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} & V(x, z) = \int_{-1}^{+1} \frac{e^{it\sqrt{x^2+z^2}}}{\sqrt{1-t^2}} [f(u) + g(\tilde{u})]\, dt \\ & u \equiv (x + iz)\left(\frac{1-t^2}{2}\right) \qquad \tilde{u} \equiv (x - iz)\left(\frac{1-t^2}{2}\right) \end{aligned} \right.$$

1) Erscheint in der Math. Zeitschrift.

darstellen, wobei $f(u)$ und $g(u)$ in der Umgebung des Koordinatenanfangspunktes reguläre Funktionen der einen komplexen Veränderlichen sind. Es ist dabei

$$(2)\quad \begin{cases} f(u) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} u \sin\vartheta \,\frac{d[V(u\sin^2\vartheta, -iu\sin^2\vartheta)]}{d[u\sin^2\vartheta]}\, d\vartheta \\ g(\tilde{u}) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tilde{u} \sin\vartheta \,\frac{d[V(\tilde{u}\sin^2\vartheta, \tilde{u}\sin^2\vartheta)]}{d[\tilde{u}\sin^2\vartheta]}\, d\vartheta. \end{cases}$$

Diese Darstellung erlaubt gewisse Aussagen über das Verhalten der Integrale $\int_{\mathfrak{S}} V(x,z)\,dx$, $\int_{\mathfrak{S}} V(x,z)\,dz$ zu machen, falls $\mathfrak{S}$ eine Kurve ist, die auf einer algebraischen Fläche $A(x,z) = 0$ des vierdimensionalen Raumes liegt, was der Inhalt der oben angegebenen Arbeit ist.

In dem vorliegenden Aufsatz soll mit Hilfe der Darstellung (1) ein bekannter Satz von Koebe auf die Funktionen $V(x,z)$ übertragen werden.[1])

Es läßt sich — wie man weiß — die Funktion $V(x,z)$, die in der Einheitshyperkugel regulär ist, dort in der Form

$$(3)\quad \begin{cases} A_0 J_0(\sqrt{x^2+z^2}) + A_{1c} J_1(\sqrt{x^2+z^2}) \dfrac{x}{\sqrt{x^2+z^2}} \\ \qquad\qquad + A_{1s} J_1(\sqrt{x^2+z^2}) \dfrac{y}{\sqrt{x^2+z^2}} + \cdots \end{cases}$$

darstellen, wobei J_n die Besselsche Funktion n-ter Ordnung bedeutet. A_{nc}, A_{ns} sind komplexe Konstanten. Es gilt nun der

Satz. *Ist uns eine Funktion $V(x,z)$ gegeben, die*

1. *in der Einheitshyperkugel regulär ist,*

2. *bei der der Koeffizient A_0 in der Entwicklung* (3) *verschwindet und die*

3. *die Eigenschaft hat, daß sowohl $V(x, -ix)$, wie $V(x, ix)$ in dem Einheitskreise der x-Ebene schlichte Funktionen sind,*

so gibt es eine, nur von A_{1c} und A_{1s} abhängige Schrankenfunktion $\Omega(A_{1c}, A_{1s}, \Theta, \Theta^*)$ derart, daß

$$(4)\qquad |V(x,z)| \leqq \Omega(A_{1c}, A_{1s}, \Theta, \Theta^*)$$

1) Vgl. z. B. E. Landau, „Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie". Berlin (1916), S. 101, Satz 3.

ist, sobald x, z *ein innerer Punkt des („analytisch" gedrehten) Bizylinders:*

$$|x+iz| \leqq \Theta < 1$$
$$|x-iz| \leqq \Theta^* < 1 \qquad \textit{ist.}$$

Beweis. Die Beziehung (4) läßt sich sofort aus dem Koebeschen Satz einsehen: nach (1) und (2) ist:

$$(5)\quad \begin{cases} V(x,z) = \displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{e^{it\sqrt{x^2+z^2}}}{\sqrt{1-t^2}} \left[\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u \sin\vartheta \,\frac{d[V(u\sin^2\vartheta,\, -iu\sin^2\vartheta)]}{d[u\sin^2\vartheta]}\, d\vartheta\right] dt \\ \quad + \displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{e^{it\sqrt{x^2+z^2}}}{\sqrt{1-t^2}} \left[\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tilde{u} \sin\vartheta \,\frac{d[V(\tilde{u}\sin^2\vartheta,\, i\tilde{u}\sin^2\vartheta)]}{d[\tilde{u}\sin^2\vartheta]}\, d\vartheta\right] dt. \end{cases}$$

Es beginnen die Funktionselemente von $V(u\sin^2\vartheta,\ -iu\sin^2\vartheta)$ und $V(\tilde{u}\sin^2\vartheta,\ i\tilde{u}\sin^2\vartheta)$ mit den Ausdrücken

$$(6)\quad \left[\frac{A_{1c}+\dfrac{A_{1s}}{i}}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\sin^2\vartheta\right] u + \cdots \quad \text{bzw.} \quad \left[\frac{A_{1c}-\dfrac{A_{1s}}{i}}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\sin^2\vartheta\right] \tilde{u} + \cdots$$

Nach der Voraussetzung 3. sind die beiden Funktionen

$$V(u\sin^2\vartheta,\ -iu\sin^2\vartheta) \quad \text{und} \quad V(\tilde{u}\sin^2\vartheta,\ i\tilde{u}\sin^2\vartheta)$$

in den Einheitskreisen der u-(bzw. $\tilde{u}$-)Ebene für jedes $\vartheta\left(0 \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ schlicht. Nach Koebe (a. a. O.) gilt deshalb

$$(7)\quad \begin{cases} \left|\dfrac{d[V(u\sin^2\vartheta,\, iu\sin^2\vartheta)]}{d(u\sin^2\vartheta)}\right| \leqq \dfrac{\left|A_{1c}+\dfrac{A_{1s}}{i}\right|}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \sin^2\vartheta\, \Omega_4\left[\Theta\,\dfrac{1-t^2}{2}\right] \\[2ex] \left|\dfrac{d[V(\tilde{u}\sin^2\vartheta,\, -i\tilde{u}\sin^2\vartheta)]}{d(\tilde{u}\sin^2\vartheta)}\right| \leqq \dfrac{\left|A_{1c}-\dfrac{A_{1s}}{i}\right|}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \sin^2\vartheta\, \Omega_4\left[\Theta\,\dfrac{1-t^2}{2}\right], \end{cases}$$

wo Ω_4 die in dem in der Fußbemerkung 1) S. 188 erwähnten Satze angegebene Schrankenfunktion bedeutet, und

$$\Theta \geqq |x+iz|$$
$$\Theta^* \geqq |x-iz| \qquad \text{ist.}$$

Es folgt daraus, daß

$$
(8)\left\{\begin{aligned}
|V(x,z)| \leqq \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}} \int\limits_{-1}^{+1} \frac{\left|e^{it\sqrt{x^2+z^2}}\right|}{\sqrt{1-t^2}} \Bigg[\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{A_{1c}+\frac{A_{1s}}{i}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \right| \sin^2\vartheta\, |u| \sin\vartheta\, \Omega_4\left[\Theta \frac{1-t^2}{2}\right] d\vartheta \\
+ \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}} \int\limits_{-1}^{+1} \frac{\left|e^{it\sqrt{x^2+z^2}}\right|}{\sqrt{1-t^2}} \Bigg[\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{A_{1c}-\frac{A_{1s}}{2}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \right| \sin^2\vartheta\, |\tilde{u}| \sin\vartheta\, \Omega_4\left[\Theta^* \frac{1-t^2}{2}\right] d\vartheta \Bigg] \\
= \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}} \left| \frac{A_{1c}+\frac{A_{1s}}{i}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \right| \left(\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\vartheta\, d\vartheta \right) \Bigg[\int\limits_{-1}^{+1} \left| \frac{e^{it\sqrt{x^2+z^2}}}{\sqrt{1-t^2}} \right| |u|\, \Omega_4\left[\Theta \frac{1-t^2}{2}\right] dt \Bigg] \\
+ \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}} \left| \frac{A_{1c}-\frac{A_{1s}}{i}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \right| \left(\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\vartheta\, d\vartheta \right) \Bigg[\int\limits_{-1}^{+1} \left| \frac{e^{it\sqrt{x^2+z^2}}}{\sqrt{1-t^2}} \right| |\tilde{u}|\, \Omega_4\left[\Theta^* \frac{1-t^2}{2}\right] dt \Bigg] \\
= \Omega(A_{1c}, A_{1s}, \Theta, \Theta^*)
\end{aligned}\right.
$$

wird, sobald x, z ein Punkt des (gedrehten) Bizylinders

$$(x + i z) \leqq \Theta$$
$$(x - i z) \leqq \Theta^*$$ ist, w. z. b. w.

(Eingegangen am 3. 9. 1928.)

Bemerkung zu einer früheren Note.

Von F. Löbell in Cannstatt.

Herrn Prof. Schönhardt in Tübingen verdanke ich die Mitteilung, daß die auf S. 364 des 36. Bandes dieses Jahresberichts abgeleitete Konstruktion des von zwei gegebenen Punktepaaren der komplexen Zahlenebene harmonisch getrennten Punktepaares im wesentlichen schon in der Dissertation von L. Wedekind, Beiträge zur geometrischen Interpretation binärer Formen, Erlangen 1875, S. 31 (Math. Ann. IX, S. 213) angegeben ist.

(Eingegangen am 10. 6. 1929.)

Über einen Satz von Herrn H. Tietze.

Von K. Reinhardt in Greifswald.

Herr Tietze hat kürzlich[1]) folgenden Satz bewiesen:

Sei M eine abgeschlossene, zusammenhängende ebene Punktmenge, die innere Punkte enthält. Gibt es dann eine Zahl $\varrho > 0$, *so daß zu jedem Randpunkt von M eine Stützscheibe vom Radius* ϱ *gehört, so ist die Menge M konvex.*

Ich beweise diesen Satz hier auf eine andere Weise. Es muß offenbar gezeigt werden, daß es bei jeder nichtkonvexen Menge M Randpunkte ohne Stützscheiben, oder wenigstens Folgen von Randpunkten mit beliebig kleinen Stützscheiben gibt. Seien P_i, P_r, P_a die inneren Punkte, die Randpunkte, die äußeren Punkte von M. Dann gilt folgendes:

1. Man betrachte einen $P_i A$ und alle von ihm ausgehenden Strahlen. Man suche auf jedem Strahl den am nächsten bei A liegenden P_r, der B sei, und die untere Grenze der auf ihm liegenden P_a, die C sei, beide Male vorausgesetzt, daß der betreffende Punkt existiert. C ist dann auch ein P_r. Nun müssen B und C identisch sein, wenn kein P_r ohne Stützscheibe vorhanden sein soll. Denn sonst wäre B ersichtlich ein solcher P_r. Daraus folgt, daß, falls $AB = AC = d$ gesetzt wird, d eine stetige Funktion des Strahles ist. Denn sonst müßte es, wenn s_0 ein Strahl ist, eine gegen diesen konvergierende Folge von Strahlen s geben, für die $d(s)$ einem von $d(s_0)$ verschiedenen Grenzwert d' zustrebt, und der Punkt D auf s_0, für den $AD = d'$ ist, müßte ein P_r sein, während alle anderen Punkte der Strecke AD, P_r oder P_i sein müßten. Das ergibt aber einen Widerspruch, sowohl wenn $d' < d(s_0)$, als auch wenn $d' > d(s_0)$ ist.

2. Gibt es nun auf einem der Strahlen noch einen Punkt von M, für den der Abstand von $A > d$ ist, so kann er wegen des Zusammenhangs von M mit A durch eine ε-Kette verbunden werden.[2]) Nun muß es zwei aufeinanderfolgende Punkte E und F dieser Kette geben, von denen der eine außerhalb der unter 1. festgestellten stetigen

1) H. Tietze, Eine charakteristische Eigenschaft der abgeschlossenen konvexen Punktmengen, Math. Ann. 99.

2) Anmerkung bei der Korrektur: Da „zusammenhängend" und „ε-verkettet" nur bei abgeschlossenen beschränkten Mengen äquivalente Begriffe sind, wird hier tatsächlich ein etwas allgemeinerer Satz als oben ausgesprochen bewiesen.

Kurve K liegt, während der andere K oder ihrem Inneren angehört. Dann enthält der Kreis um E mit ε Punkte aus dem Inneren von K. Verbindet man einen solchen, G, mit E, und sucht man auf der Strecke GE den P_r von K, der am nächsten an G liegt, so hat dieser eine Stützscheibe, deren Radius jedenfalls $< \varepsilon$ ist. Da dies für jedes ε gilt, gibt es auch dann entweder einen P_r ohne Stützscheibe, oder wenigstens eine Folge von P_r mit beliebig kleinen Stützscheiben.

3. Ist nun M nicht konvex, so gibt es zwei Punkte X und Y, so daß die Strecke XY P_a enthält. Sei Z ferner ein P_i von M. Ist dann Z mit X oder Y identisch, so ist der Beweis nach dem Vorhergehenden geführt. Ist dies aber nicht der Fall, so betrachte man z. B. XZ. Enthält XZ P_a, so ist der Beweis ebenfalls geführt. Enthält aber XZ nur P_r und P_i, so kann nach dem Vorhergehenden höchstens X ein P_r sein, während alle anderen Punkte von XZ P_i sein müssen. Dann kann man aber X auf XZ um ein genügend kleines Stück nach Z zu verschieben, bis X'. Dann enthält $X'Y$ immer noch P_a, und X' ist jetzt ein P_i. Damit ist jedoch der Beweis wieder nach oben erledigt.

4. Man sieht ohne weiteres, daß man den Beweis genau so für das entsprechende Problem im Raume beliebiger Dimensionszahl führen kann.

(Eingegangen am 19. 6. 1928.)

Berichtigung

zu Heft 1/4 dieses Bandes.

Auf S. 93, Z. 2 v. o. muß es heißen: $\int_0^v$ statt $\int^v$.

Auf S. 94 muß es in der letzten Zeile heißen: „nicht geglückt" statt „geglückt".

Über topologische Fragen der Differentialgeometrie.

Nach einem Vortrag, gehalten im Mathematischen Seminar der Universität Königsberg am 20. Juli 1929.

Von WILHELM BLASCHKE in Hamburg.

Mit 10 Figuren im Text.

Seit etwa anderthalb Jahrzehnten versuche ich, auf die Differentialgeometrie die ordnenden gruppentheoretischen Prinzipien aus Felix Kleins Erlanger Programm anzuwenden. Auf diesem Wege bin ich schließlich dazu gekommen, „topologische Differentialgeometrie" zu treiben, d. h. solche infinitesimalgeometrische Eigenschaften zu betrachten, die gegenüber sogenannten „beliebigen" Punkttransformationen invariant sind. Diese Betrachtung kann nur einen sehr geringen Anspruch auf Ursprünglichkeit erheben, denn z. B. Pfaff hat schon vor etwa 100 Jahren ähnliches getan und in den letzten Jahren im Anschluß an Einsteins Relativitätstheorie sind solche Untersuchungen fast Mode geworden. Indessen ist diese Weide saftig und es gibt — um mich an die Worte eines großen Funktionentheoretikers anzulehnen — Platz darauf nicht nur für großes Rindvieh, sondern auch für muntere kleine Kälber. Auch sind, wie es scheint, gerade die sich zunächst darbietenden Fragen noch wenig studiert. Das hat seinen Grund einerseits darin, daß hier der Weg zwischen Trivial und Schwierig noch schmäler ist als anderwärts, und vielleicht auch darin, daß auf diesem Gebiet die gebräuchliche Analysis versagt. Will man nämlich die üblichen Methoden der Infinitesimalrechnung hier anwenden, so sieht man sich immer genötigt, Voraussetzungen einzuführen, die nicht im Wesen der Sache liegen, wie Differenzierbarkeit. Vielleicht darf man aber gerade deshalb hoffen, aus einer eingehenden Beschäftigung mit solchen Aufgaben auch für die Grundlagen der Analysis Fortschritte zu erzielen.

Aus diesem weiten Feld will ich Ihnen hier einiges vorführen, und dabei will ich das Hauptgewicht nicht auf die gesicherten Ergebnisse legen, sondern auf die vielen noch ungelösten Fragen, die sich jedem aufdrängen, der dieses Feld betritt. Wenn ich aber doch bisweilen von einigen Ergebnissen zu sprechen haben werde, so möchte ich gleich

jetzt hervorheben, daß die meisten nicht von mir, sondern von gleichstrebenden jüngeren Geometern stammen. Alles, was ich zu sagen haben werde, trägt durchaus nicht das Gepräge eines einheitlichen Lehrgebäudes, sondern will nur eine Sammlung von Beispielen sein, die mir allerdings recht anziehend zu sein scheinen.

Um Ihnen alles möglichst deutlich vor Augen führen zu können, werde ich in der Hauptsache von der *ebenen* Geometrie berichten. Mancher Geometer scheint heutzutage nur dann beglückt zu sein, wenn er seine Ergebnisse (mindestens) für den n-dimensionalen Raum aussprechen kann. Mir scheinen im Gegenteil *die* geometrischen Tatsachen als die wichtigeren, die sich nicht, oder nicht ohne große Mühe, auf höhere Dimensionenzahlen übertragen lassen. So ist es z. B. in der Topologie oder in der Lehre von den konformen Abbildungen. Erst zum Schluß will ich noch einiges aus der Geometrie des dreidimensionalen Raumes erzählen, wo die Dinge in mancher Hinsicht noch viel hübscher sind als in der Ebene, aber auch viel verwickelter.

§ 1. Ebene Kurvengewebe.

Unter einer „*topologischen Abbildung*" versteht man eine Punkttransformation, die mit ihrer Umkehrung eindeutig und stetig ist. Dabei wird sich alles Folgende, wie ich ein für allemal hervorheben möchte, auf „*Geometrie im Kleinen*" beziehen. In diesem Sinne soll unter „*Kurvenschar*" (= 1-Schar) das topologische Abbild einer Schar paralleler Geraden und unter einem „*Kurvennetz*" (oder 2-Schar) das Abbild zweier verschiedener Scharen paralleler Geraden verstanden werden. Endlich sollen drei Kurvenscharen ein „*Gewebe*" bilden (oder eine 3-Schar), wenn sie zu je zweien ein Kurvennetz bilden. Zwei Kurven derselben Schar schneiden sich also nicht, zwei aus verschiedenen Scharen in einem Punkt und durch „jeden" Punkt gehen drei Gewebekurven, eine aus jeder Schar. Wir wollen zunächst die Topologie dieser Kurvengewebe behandeln, und zwar, wie gesagt, im Kleinen.

Vielleicht ist die nächstliegende Frage, die man hier stellen kann, die folgende: *Wann läßt sich ein Kurvengewebe topologisch auf ein anderes abbilden, das aus drei verschiedenen Scharen paralleler Geraden besteht?*

Um zu notwendigen Bedingungen zu kommen, brauchen wir in einem solchen besonderen Gewebe nur eine geeignete Konfiguration aus Punkten und Geraden zu betrachten. Beispielsweise bietet sich die Figur von Pappos dar, die aus neun Punkten und neun Geraden besteht, derart, daß durch jeden ihrer Punkte drei ihrer Geraden

laufen und auf jeder ihrer Geraden drei ihrer Punkte liegen (Fig. 1), eine ebene Figur mit 10 Freiheitsgraden. Lassen wir drei der neun Punkte ins Unendliche rücken, so bekommen wir als Sonderfall folgende Figur 2, die in einem gegebenen Gewebe aus drei Scharen

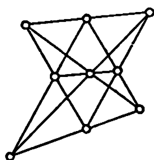


Fig. 1.

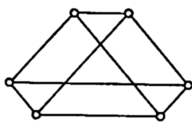


Fig. 2.

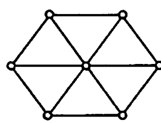


Fig. 3.

paralleler Geraden vier Freiheitsgrade hat, oder noch spezieller die Figur 3 mit drei Freiheitsgraden. G. Thomsen und ich[1]) haben umgekehrt gezeigt:

Satz 1: *Wenn sich aus den Kurven eines Gewebes die Figur 3 mit drei Freiheitsgraden herstellen läßt, dann läßt sich das Gewebe in eines aus drei Scharen paralleler Geraden überführen.*

Die Voraussetzung ist dabei so gemeint, daß sich in jeder genügend engen Umgebung jeder Stelle des betrachteten Gebiets die Figur 3 stets schließt. Wir sprechen deshalb in diesem Falle von „*Sechseckgeweben*". Um so mehr reicht natürlich die Figur 2 zur Kennzeichnung der Sechseckgewebe aus.

Ich möchte nun an einigen Beispielen zeigen, wie diese Sechseckgewebe mit dem *Begriff der stetigen Gruppe von Punkttransformationen* zusammenhängen.

Nehmen wir in einem Gewebe zwei Kurven A und B der „ersten" Schar heraus, und legen wir zwischen ihnen einen „Winkel" aus Kurven der beiden anderen Scharen so, daß ein Dreieck aus Gewebekurven entsteht, das seine Grundlinie aa^* auf A und seine Spitze b auf B hat (Fig. 4). Halten wir A, B fest und „verschieben" wir das Dreieck, so entsteht auf A eine Schar von Punkttransformationen $a \rightarrow a^*$, die von der Wahl von B, also von einem Parameter abhängt.

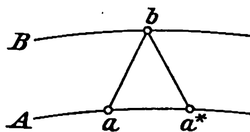


Fig. 4.

Satz 2: *Enthält diese Schar von Transformationen für jede Kurve A der ersten Schar, zu jeder ihrer Transformation $a \rightarrow a^*$ die inverse, so haben wir es mit einem Sechseckgewebe zu tun.* Das möge man aus

1) G. Thomsen, Un teorema topologico ..., Bolletino dell' Unione Mat. Italiana 6 (1927), S. 80—85. — W. Blaschke, Topologische Fragen der Differentialgeometrie 1 (später mit T 1 abgekürzt), Thomsens Sechseckgewebe. Math. Zeitschrift 28 (1928), S. 150—157.

der Figur 5 ersehen, die wieder auf die geschlossenen Sechsecke der Figur 3 zurückführt.

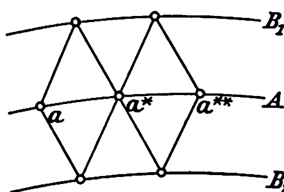


Fig. 5.

Ferner (Satz 3 von Dubourdieu): *Die Bahnkurven einer eingliedrigen Gruppe von Punkttransformationen bilden zusammen mit zwei anderen, gegenüber der Gruppe invarianten Kurvenscharen, ein Sechseckgewebe.*

Ferner (Satz 4): *Soll ein Gewebe eine eingliedrige Gruppe gestatten, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß die Schar der Bahnkurven (punktiert) mit den Gewebekurven die folgende Figur 6 von Desargues mit vier Freiheitsgraden zu zeichnen erlaubt.*

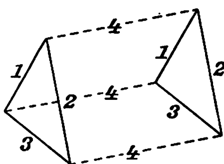


Fig. 6.

Dabei ist angenommen, daß die Bahnkurven nicht Gewebekurven sind.

Schließlich (Satz 5): *Die einzigen Kurvengewebe, die eine stetige Gruppe von Punkttransformationen zulassen, die die Punkte transitiv vertauschen, sind die Sechseckgewebe.*

§ 2. Invariantentheorie der Kurvengewebe.[2])

Nehmen wir jetzt ein Kurvengewebe in einer Ebene mit den krummlinigen Koordinaten u, v an, und machen wir einschränkende Differenzierbarkeitsannahmen! Dann wählen wir drei lineare Differentiatoren ($i = 1, 2, 3$)

$$(1) \qquad \Lambda_i = \alpha_i(u, v)\,\frac{\partial}{\partial u} + \beta_i(u, v)\,\frac{\partial}{\partial v}$$

derart, daß eine Funktion $f(u, v) =$ konst. die i-te Schar unseres Gewebes darstellt, wenn

$$(2) \qquad \Lambda_i f = 0$$

ist. Die Faktoren, die wir bei der Wahl der Λ_i noch offen haben, normen wir zunächst so, daß

$$(3) \qquad \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 = 0$$

wird. Dann bilden wir die sogenannten Klammerausdrücke

$$(4) \qquad \Lambda = \Lambda_2\Lambda_3 - \Lambda_3\Lambda_2 = \Lambda_3\Lambda_1 - \Lambda_1\Lambda_3 = \Lambda_1\Lambda_2 - \Lambda_2\Lambda_1,$$

---

2) W. Blaschke und J. Dubourdieu: T 4, Invarianten von Kurvengeweben. Hamburger Abhandlungen 6 (1928), S. 198—215. Vgl. auch E. Cartan, Annales de l'École Normale 25 (1908), S. 78—83.

die wieder lineare Differentiatoren sind, und kombinieren Λ aus den Λ_i:

(5) $$\Lambda = \varrho_3\Lambda_2 - \varrho_2\Lambda_3 = \varrho_1\Lambda_3 - \varrho_3\Lambda_1 = \varrho_2\Lambda_1 - \varrho_1\Lambda_2;$$
$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = 0.$$

Wir finden

(6) $$\varrho = \Lambda_2\varrho_3 - \Lambda_3\varrho_2 = \Lambda_3\varrho_1 - \Lambda_1\varrho_3 = \Lambda_1\varrho_2 - \Lambda_2\varrho_1$$

und $\varrho = 0$ *wird die notwendige und hinreichende Bedingung für Sechseckgewebe.*

Nehmen wir $\varrho \neq 0$, so können wir die Λ_i endgültig so normen, daß $\varrho = 1$ wird, wodurch die Λ_i jetzt im wesentlichen eindeutig bestimmt sind. Dann werden die ϱ_i absolute Invarianten des Gewebes, die wir mit ω_i bezeichnen wollen. Mit der Bezeichung $f_i = \Lambda_i f$ nehmen dann die Formeln (4), (5) die Gestalt

(7) $$f_{32} - f_{23} = f_{13} - f_{31} = f_{21} - f_{12}$$
$$= \omega_3 f_2 - \omega_2 f_3 = \omega_1 f_3 - \omega_3 f_1 = \omega_2 f_1 - \omega_1 f_2$$

an, und die Formeln (6) ergeben folgende Differentialgleichungen zwischen den ω_i $(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0)$

(8) $$1 = \omega_{32} - \omega_{23} = \omega_{13} - \omega_{31} = \omega_{21} - \omega_{12}.$$

Darin bedeutet also $\omega_{ik} = \Lambda_k\omega_i$. Diese Gleichungen (8) führen mit den Beziehungen $\omega_i =$ konst. zu einem Widerspruch, und darin ist ein Beweis für unseren Satz 5 unter einschränkenden Voraussetzungen enthalten.

Mittels der genormten Λ_i lassen sich jetzt leicht notwendige und hinreichende Bedingungen für die topologische Gleichwertigkeit von Kurvengeweben angeben.

Über die Gewebe mit $\varrho \neq 0$ weiß man recht wenig. Z. B. scheint es nicht leicht zu sein eine geometrische Deutung dafür zu finden, daß alle ω_i nur von *einem* Parameter abhängen.

§ 3. Beziehungen zur projektiven Geometrie und zur Nomographie.

Lassen wir die einschränkenden Differenzierbarkeitsannahmen[3]) jetzt wieder weg! Dann können wir ein schönes Ergebnis der Herren Graf und Sauer[4]) in diesem Zusammenhang so aussprechen:

---

3) Um zu zeigen, daß diese Einschränkungen wesentlich sind, müßte man ein *Beispiel eines Kurvengewebes* angeben, *das durch keine topologische Abbildung in ein differenzierbares übergeführt werden kann.* Es scheint dies eine nicht ganz einfache Aufgabe zu sein.

4) H. Graf und R. Sauer, Über dreifache Geradensysteme in der Ebene, welche Dreiecksnetze bilden. Sitzungsberichte München 1924, S. 119—156.

Satz 5: *Das allgemeinste geradlinige Sechseckgewebe besteht aus Tangenten einer Kurve dritter Klasse.* Natürlich kann diese algebraische Kurve auch zerfallen.

Man sieht leicht, daß je zwei Sechseckgewebe topologisch (im Kleinen!) gleichwertig sind und jedes eine dreigliedrige Gruppe in sich zuläßt. Stellen wir eine Kurve dritter Klasse vom Geschlecht Eins mittels elliptischer Funktionen dar, so können wir die Bedingung zwischen den Parametern dreier Tangenten, damit sie durch einen Punkt gehen, auf die Gestalt

$$u + v + w = 0 \tag{9}$$

bringen. Wir können also u, v, w auch als „krummlinige" überzählige Koordinaten für die Punkte eines Gebietes der Ebene auffassen, das von den Tangenten unserer Kurve dreifach überstrichen wird. Dann hat die Punkttransformation

$$(a + b + c = 0)$$

$$u^* = u + a, \quad v^* = v + b, \quad w^* = w + c \tag{10}$$

die Eigenschaft, nicht projektiv zu sein und trotzdem das geradlinige Gewebe aus den Tangenten unserer Kurve in sich, also wieder in ein geradliniges Gewebe überzuführen.

Ebenso ist es möglich, ein Sechseckgewebe aus drei Scharen paralleler Geraden durch eine logarithmische topologische Abbildung überzuführen in ein Sechseckgewebe aus drei Büscheln gerader Linien, deren Scheitel nicht auf einer Geraden liegen.

Es liegt somit die Frage nahe: *Sind alle geradlinigen Kurvengewebe, die durch eine nicht projektive topologische Abbildung wieder in ein geradliniges Gewebe überführbar sind, Sechseckgewebe?*

Die Antwort scheint nicht leicht zu finden, und ich möchte mir erlauben, Ihre Aufmerksamkeit ganz besonders auf dieses Problem zu lenken. Ich möchte Ihnen die invariante, von Dubourdieu herrührende[5]) Gestalt der Differentialgleichungen dieser Aufgabe vorführen, die in unsymmetrischer und nicht invarianter Form zuerst von Gronwall[6]) gefunden wurden. In der Bezeichnung von § 2 ist die Bedingung dafür, daß ein Gewebe sich in ein geradliniges verwandeln läßt, die Lösbarkeit der Differentialgleichungen

$$\{\lg[(h_{i+1} - h_{i+2}) + (\omega_{i+1} - \omega_{i+2})\,h + 1]\}_i = h - 2\omega_i \tag{11}$$

$$(i \text{ modulo } 3)$$

5) J. Dubourdieu: T 13, Réseaux de courbes et Réseaux de surfaces, erscheint demnächst in den Hamburger Abhandlungen 7 (1929), S. 205—271.

6) T. H. Gronwall, Sur les équations entre trois variables représentables par des nomogrammes à points alignés. Liouville Journal de Math. (6) 8 (1912), S. 59—102.

durch eine Funktion $h(u, v)$. Der angehängte Index i bedeutet dabei (außer bei den ω) die invariante Ableitung von § 2. Das Verschwinden des Ausdrucks in der Klammer [ ] links in (11) bedeutet, daß sich die i-te Kurvenschar in eine Schar paralleler Geraden verwandeln läßt. Es wäre also zu zeigen, daß die Gleichungen (11), wenn überhaupt eine, so nur eine einzige Lösung h besitzen. Indessen scheint die Aufstellung der Integrierbarkeitsbedingungen eine recht verwickelte Angelegenheit zu sein. Mit Fleiß allein scheint die Aufgabe nicht lösbar. Man hat wohl leider einen Gedanken nötig.

Ich will Ihnen die Differentialgleichungen auch noch in einer unsymmetrischen Gestalt hinschreiben, wie sie ähnlich durch recht unübersichtliche Rechnungen von Gronwall[6]) gefunden wurde. Man hat zwei unbekannte Funktionen $a(u, v)$, $b(u, v)$ so zu bestimmen, daß

$$(12) \qquad \frac{\partial}{\partial v} \lg(2a_u + b_v) = a, \quad \frac{\partial}{\partial u} \lg(2b_v + a_u) = b$$

wird und außerdem zwischen a, b noch eine lineare Gleichung besteht

$$(13) \qquad \frac{a}{f_v} + \frac{b}{f_u} = \frac{f_{uu}}{f_u^2} - 2\frac{f_{uv}}{f_u f_v} + \frac{f_{vv}}{f_v^2}.$$

Es ist die Einzigkeit der Lösung in a, b zu erweisen, wenn die Beziehung $w = f(u, v)$ nicht der Gestalt $u + v + w = 0$ gleichwertig ist.

Unsere Frage tritt in dualer Fassung auch als *Eindeutigkeitsproblem der Nomographie* auf. Dabei handelt es sich um folgendes. Wenn in der Ebene (Fig. 7) drei Kurven gezeichnet vorliegen, deren jede eine Skala trägt, die erste die u-Skala, die zweite die v-Skala, die dritte die w-Skala, so hat die Bedingung, daß drei Punkte der drei Kurven auf einer Geraden liegen, eine Abhängigkeit $F(u, v, w) = 0$ zur Folge. Umgekehrt gestattet unsere Figur, wenn sie gezeichnet vorliegt, eine bequeme Beherrschung der Gleichung $F = 0$, und man nennt die Figur ein „Nomogramm“ von $F = 0$.

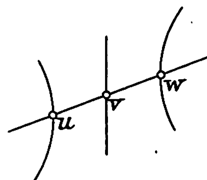


Fig. 7.

Unsere Vermutung lautet nun so: *Wenn die Beziehung $F(u, v, w) = 0$ nicht gleichwertig ist zu $u + v + w = 0$, so gibt es, abgesehen von projektiven Transformationen, höchstens ein zugehöriges Nomogramm.*

Die Lösbarkeit der Gleichungen (12), (13) nach a, b ist die Bedingung dafür, daß die Gleichung $w = f(u, v)$ ein Nomogramm besitzt.

Faßt man den Begriff „Nomographie“ allgemeiner als Studium beliebiger Kurvengewebe, so haben wir in den in § 2 angedeuteten Entwicklungen eine geeignete differentialgeometrische Grundlage für diese vielfach anwendbare Disziplin, die meist mit wenig geeigneten geometrischen Mitteln behandelt wurde.

§ 4. Kurvengeflechte.

Vier Kurvenscharen in der Ebene, die zu zweien ein Netz bilden, sollen ein *Kurvengeflecht* (eine 4-Schar) heißen. Unser Satz 4 handelte schon von solchen Geflechten. In der zugehörigen Desargues-Figur 6 spielt die vierte Schar 4 eine ausgezeichnete Rolle, wir können die Figur deshalb mit D_4 bezeichnen. Dann gilt (Reidemeister[7])

Satz 6: *Das Bestehen der Figuren D_1, D_2, D_3, D_4 mit je vier Freiheitsgraden kennzeichnet die Geflechte, die sich in solche überführen lassen, die aus vier verschiedenen gradlinigen Parallelscharen bestehen.*[8])

Noch anziehender ist folgender von Mayrhofer und Reidemeister[7]) herrührender

Satz 7: *Ein Geflecht läßt sich dann und nur dann in ein solches überführen, das aus vier verschiedenen Büscheln gerader Linien besteht, wenn die vier darin enthaltenen Kurvengewebe Sechseckgewebe sind.*

Diese Geflechte von Satz 7 sind dabei allgemeiner als die von Satz 6. Reidemeister hat erkannt, wie Satz 7 mit zweigliedrigen Gruppen zusammenhängt.[9]) Es sei noch auf folgende sehr einfache Tatsache hingewiesen:

---

7) K. Mayrhofer: T 3, Kurvensysteme auf Flächen. Math. Zeitschrift **28** (1928), S. 728—752. — K. Reidemeister: T 5, Gewebe und Gruppen. Math. Zeitschrift **29** (1928), S. 427—435.

8) Man kann zeigen: *Aus D_1 und D_2 folgt D_3 und D_4.*

9) Aus Satz 1 folgt: Eine Kurvenschar $w = f(u, v) =$ konst. bildet mit den Scharen $u, v =$ konst. dann und nur dann ein Sechseckgewebe, wenn sich ihre Gleichung in die Form $W(w) = U(u) + V(v)$ setzen läßt, worin U, V, W stetig und (im strengen Sinn des Wortes) monoton sind (d. h. aus $u_1 < u_2$ soll entweder immer $U(u_1) < U(u_2)$ oder immer $>$ folgen). Hat man somit vier Kurvenscharen $u, v, w, t =$ konst., die zu dreien Sechseckgewebe bilden, so müssen die vier Beziehungen bestehen

$$U(u) + V(v) = W(w),$$

die wir durch geeignete Wahl von u, v auf die Form

$$\text{(t)} \qquad u + v = w$$

bringen können, ferner

$$\text{(w)} \qquad \overline{U}(u) + \overline{V}(v) = t,$$

$$\text{(u)} \qquad V(v) + W(w) = T(t),$$

$$\text{(v)} \qquad U(u) + \overline{W}(w) = \overline{T}(t).$$

Setzt man aus (t), (w) die Werte für w, t in (u), (v) ein, so erhält man schließlich die Funktionalgleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} V(v) + W(u+v) &= T(\overline{U}(u) + \overline{V}(v)),\\ U(u) + \overline{W}(u+v) &= \overline{T}(\overline{U}(u) + \overline{V}(v)). \end{aligned}}$$

Die darin auftretenden Funktionen $U, V; \overline{U}, \overline{V}; W, \overline{W}; T, \overline{T}$ sind dabei stetig und streng monoton. Satz 7 benötigt also die Lösung dieser beiden ***Funktional-***

Satz 8: *Ist aus den Kurven eines Geflechts die Figur 8 mit drei Freiheitsgeraden herstellbar, dann läßt sich das Geflecht überführen in eines, das aus vier Scharen paralleler Geraden besteht, die miteinander Winkel bilden, die ganzzahlige Vielfache von* $\pi : 4$ *sind.*[1])

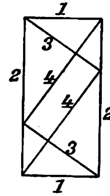
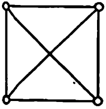


Fig. 9.


Fig 8.

Nicht geklärt scheint folgende Frage zu sein: In welchen Geflechten besteht nebenstehende Figur 9 (Pappos) mit drei Freiheitsgraden, die wir mit P_{12} bezeichnen können, da die Scharen 1 und 2 ausgezeichnet sind? Neben P_{12} könnte man natürlich auch P_{21}, P_{13} ... fordern, deren Abhängigkeit untereinander und von D_1, D_2, D_3, D_4 untersuchen.[10])

§ 5. Zweiparametrige Kurvensysteme in der Ebene.

Wenn wir wieder Differenzierbarkeitseinschränkungen machen, so können wir jetzt Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$y'' = f(x, y, y') \tag{14}$$

betrachten und darin als einfachste „topologisch" invariante Unterklasse die folgenden[11]):

$$y'' = A + By' + Cy'^2 + Dy'^3; \quad A = A(x, y), \quad B = B(x, y) \ldots \tag{15}$$

Sie haben die topologisch kennzeichnende Eigenschaft, daß sich alle Integralkurven in der Nähe eines Punktes in gewisser Annäherung (bis auf zweite Ableitungen) verhalten wie gerade Linien. Eine nicht topologische Kennzeichnung ist die folgende (Douglas): Alle Systemkurven durch einen Punkt lassen sich durch eine Abbildung, die in diesem Punkt analytisch ist, in ein Geradenbüschel überführen.

Ein Beispiel eines solchen Systems bilden die geodätischen Linien einer Fläche. Es scheint aber recht verwickelte Bedingungen für die

---

gleichungen, die der freundlichen Beachtung empfohlen seien. Die Lösung ist leicht, wenn man Vorhandensein und Stetigkeit der ersten Ableitungen voraussetzt. Ohne Einschränkungen ist sie mir aber nicht gelungen, ohne auf Reidemeister T 5 zurückzugreifen. Selbst mit dem Satz von Lebesgue, daß eine monotone Funktion fast überall ableitbar ist, scheint nicht viel heraus zu kommen.

10) Über den Zusammenhang der hier angedeuteten Sätze über Kurvengewebe und Kurvengeflechte mit der axiomatischen Grundlegung der Geometrie vergleiche man die unter 7) genannte Arbeit T 5 von K. Reidemeister, ferner G. Thomsen: T 12, Schnittpunktsätze in ebenen Geweben, und insbesondere ein demnächst von Reidemeister erscheinendes Buch: Vorlesungen über Grundlagen der Geometrie, Braunschweig 1930.

11) Vgl. R. Liouville, Sur les Invariants de certaines équations différentielles ..., Journal de l'École Polytechnique, Cahier 59 (1889), S. 7—76; A. Tresse, Acta mathematica 18 (1894), insbesondere S. 76—88.

A, B, C, D zu geben, damit das System einem geodätischen gleichwertig ist.

Vor kurzem hat Herr Thomsen[12]) eine rechnerische Invariantentheorie für die Gleichungen (15) aufgestellt, die bisher leider den geometrischen Anwendungen Schwierigkeiten bereitet. Thomsen hat gezeigt, daß sich zu (15) eine relativ-invariante lineare Differentialform φ finden läßt, die von zweiten Ableitungen der A, B, C, D abhängt und eine ψ, die von dritten Ableitungen abhängt. $\varphi = 0$ ist im geodätischen Falle die Gleichung der *Fallinien des Gaussischen Krümmungsmaßes*, die also topologisch invariant sind. Das identische Verschwinden von φ kennzeichnet die Systeme, die gradlinigen ($y'' = 0$) gleichwertig sind (R. Liouville). Die geometrische Bedeutung von ψ scheint hingegen noch nicht bekannt zu sein.

Das Ganze hängt mit Arbeiten zusammen, die in den neunziger Jahren A. Tresse[13]), ein Schüler Lies, geschrieben hat und mit Untersuchungen, die in den letzten Jahren von Weyl und amerikanischen Geometern, wie Veblen, unter dem Namen „geometry of paths" angestellt wurden.[14])

Ich möchte hier mit Thomsen[12]) auf zwei Aufgaben hinweisen, die sich naturgemäß ergeben.

Betrachten wir Systeme (15), die ein Sechseckgewebe (etwa $y' = 0, \infty, 1$) enthalten, so können wir sie auf die Gestalt $A = D = 0$, $B + C = 0$ bringen. Eine invariante Formulierung dieser Bedingung scheint schwierig zu sein. Anziehender ist aber die Frage: *Welche Systeme* (15) *enthalten mehrere Sechseckgewebe?*

Besondere Systeme (14), man könnte von „Doppelverhältnissystemen" sprechen, sind solche, deren Kurven die eines Gewebes unter festem Doppelverhältnis schneiden. Man kann die Koordinaten so wählen, daß für ein solches System $y'' = F_x y' + F_y y'^2$, $F = F(x, y)$ wird. Auch hier entsteht die Frage: *Welche Systeme* (14) *sind auf mehrere, wesentlich verschiedene Arten Doppelverhältnissysteme?* G. Thomsen ist es soeben gelungen zu zeigen, daß dies nur der Fall ist, wenn (14) zu $y'' = 0$ gleichwertig ist.

Über die Topologie der Differentialgleichungen (14) und den Zusammenhang mit der Variationsrechnung ist mehrfach gearbeitet worden. Doch scheinen mehr Formeln als Ideen zu Tage gefördert zu sein.

Zum Schluß einiges über räumliche Geometrie!

---

12) G. Thomsen: T 16, Über die topologischen Invarianten der Differentialgleichung $y'' = f y'^3 + g y'^2 + h y' + k$. Hamburger Abhandlungen 7 (1929).

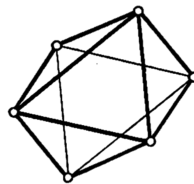
13) A. Tresse, Vgl. Anmerkung 11) und Jablonowski-Preisschrift, Leipzig 1896.

14) Vgl. etwa L. P. Eisenhart, Non-Riemannian Geometry, New York 1927.

§ 6. Flächengewebe.

Das topologische Abbild einer Schar paralleler Ebenen heiße eine *Flächenschar*, das dreier verschiedener Scharen paralleler Ebenen ein *Flächennetz*. Vier Flächenscharen, die zu je dreien ein Netz bilden, sollen ein *Gewebe* genannt werden. Es wird sich dabei wieder um die Kennzeichnung der Flächengewebe handeln, die in vier Scharen paralleler Ebenen topologisch überführbar sind. Diese Kennzeichnung läßt sich auf mannigfache Art fassen, vielleicht am einfachsten nach Sperner[15]) so:

Satz 9: *Ein Flächengewebe ist dann und nur dann ein „Achtflachgewebe", d. h einem aus vier verschiedenen Scharen paralleler Ebenen gleichwertig, wenn sich aus Gewebeflächen geschlossene Achtflache mit vier Freiheitsgraden aufbauen lassen* (Fig. 10).


Fig. 10.

Unter einer „*Kurvenschar*" im Raum sei das Abbild einer Schar paralleler Geraden des Raumes verstanden. Numerieren wir die vier Flächenscharen eines Gewebes mit 0, 1, 2, 3, so haben wir sechs solche (zweiparametrige) Kurvenscharen von Schnittkurven, nämlich 01, 23; 02, 31; 03, 12. Wenn die Kurvenscharen 01, 23 „*dieselbe Flächenschar aufspannen*", wenn sich also die Vierecke schließen, deren Seiten abwechselnd den Kurvenscharen 01, 23 angehören, so sprechen wir vom Vorhandensein einer *Schar von Diagonalflächen*. Es gilt dann der Satz von Dubourdieu und mir:

Satz 10: *Hat ein Flächengewebe zwei Scharen von Diagonalflächen, so auch eine dritte, und das Gewebe ist ein Achtflachgewebe.*

Ich will auf die rechnerische Behandlung der Flächengewebe, die von Dubourdieu[5]) und Schubarth[16]) stammt, nicht eingehen und nur einen hübschen Satz erwähnen, der von beiden Herren rechnerisch unter einschränkenden Differenzierbarkeitsannahmen begründet wurde, für den aber ein allgemeiner geometrischer Beweis noch aussteht:

Satz 11: *Wenn die Kurvengewebe, die von den Flächen dreier Scharen auf den Flächen der vierten Schar ausgeschnitten werden, bei drei Flächenscharen Sechseckgewebe sind, so auch auf der vierten.*

Dabei braucht ein solches Flächengewebe durchaus kein Achtflachgewebe zu sein, wie man an dem Beispiel eines Gewebes erkennt,

15) E. Sperner: T 15, Flächengewebe. Hamburger Abhandlungen 7 (1929).

16) E. Schubarth: T 14, Invarianten von Flächengeweben. Hamburger Abhandlungen 7 (1929).

das aus vier Ebenenbüscheln gebildet wird, deren Achsen kein (ebenes oder windschiefes) Vierseit bilden.

Hier würde sich ohne Mühe eine Fülle von Fragen ergeben, die zum großen Teil ihrer Lösung harren.

§ 7. Kurvenscharen im Raum.

Die einfachste invariante Beziehung zwischen zwei Kurvenscharen haben wir schon im vorigen Abschnitt betrachtet, nämlich eine Flächenschar aufzuspannen. Es gilt dann folgender Satz, der für $n > 4$ nur unter einschränkenden Differenzierbarkeitsannahmen bewiesen wurde:

Satz 12: *n Kurvenscharen, die zu je zweien Flächenscharen aufspannen (Flächenscharen, die zu je dreien ein Flächennetz bilden), lassen sich topologisch auf n Bündel gerader Linien abbilden.*[17])

Nehmen wir jetzt ein Paar von Kurvenscharen an, die keine Flächenschar aufspannen. Ich will zeigen:

Satz 13: *Das topologische Studium solcher allgemeiner Paare von Kurvenscharen fällt im wesentlichen mit der Untersuchung der Differentialgleichungen* (14) *zusammen.*

Es seien u, v, w krummlinige Koordinaten im Raum. Dann können wir der ersten Kurvenschar ein Paar von Differentialgleichungen von der Form

$$\frac{du}{a(u, v, w)} = \frac{dv}{b(u, v, w)} = \frac{dw}{c(u, v, w)} \tag{16}$$

oder einen linearen Differentiator

$$f(u, v, w)_1 = \left(a\frac{\partial}{\partial u} + b\frac{\partial}{\partial v} + c\frac{\partial}{\partial w}\right)f \tag{17}$$

zuordnen. Lassen wir die Kurven dieser Schar mit den Kurven $u, v =$ konst. zusammenfallen, so können wir

$$f_1 = \frac{\partial}{\partial w} f \tag{18}$$

setzen. Ebenso entspricht der zweiten Kurvenschar ein Differentiator

$$f_2 = \left(a\frac{\partial}{\partial u} + b\frac{\partial}{\partial v} + c\frac{\partial}{\partial w}\right)f, \tag{19}$$

und da f_2 nur bis auf einen Faktor bestimmt ist, können wir $a = 1$ setzen. Aus (18), (19) finden wir dann für den „Klammerausdruck“

$$f_3 = f_{21} - f_{12} = \left(b_1\frac{\partial}{\partial v} + c_1\frac{\partial}{\partial w}\right)f.$$

---

17) W. Blaschke: T 10, T 11, Kurvenscharen im Raume. Hamburger Abhandlungen 7 (1929), S. 37—45 und S. 67—69. Für $n = 4$ folgt Satz 12 aus Satz 9 (Sperner).

Da die beiden Kurvenscharen 1, 2 keine Flächenschar aufspannen sollen, ist f_3 linear unabhängig von f_1, f_2, d. h. die Determinante

$$(20) \qquad D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & b & c \\ 0 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = b_1 = \frac{\partial b}{\partial w}$$

verschwindet nicht identisch. Somit können wir w so wählen, daß $b = w$ wird. Dann haben wir

$$(21) \qquad \begin{aligned} f_1 &= * \qquad * \qquad f_w, \\ f_2 &= f_u + w f_v + \chi f_w, \qquad D = 1 \\ f_3 &= * \qquad f_v + \chi_w f_w; \end{aligned}$$

mit $\chi = \chi(u, v, w)$. „Projizieren" wir jetzt die Kurvenschar 2 „in Richtung von 1" auf die u, v-Ebene, so bekommen wir aus

$$(22) \qquad \frac{du}{1} = \frac{dv}{w} = \frac{dw}{\chi}$$

als „Projektion" ein zweiparametriges Kurvensystem in der Ebene mit der Differentialgleichung

$$(23) \qquad \frac{d^2 v}{du^2} = \chi\left(u, v \frac{dv}{du}\right).$$

Darin ist unsere Behauptung (Satz 13) enthalten. Ich hoffe, daß sich auf Grund dieses Zusammenhangs etwas mehr geometrisches Licht in die Topologie der Differentialgleichungen (14) und (15) wird bringen lassen.

Ich will noch eine andere Fassung unserer Aufgabe angeben. Neben der Kurvenschar 1, nämlich $u, v =$ konst., können wir die Kurvenschar 2 auf die Gestalt $p(u, v, w) =$ konst., $q(u, v, w) =$ konst. bringen. Dann hat die Bedingung, daß eine 1-Kurve eine 2-Kurve trifft, die Form $\Omega(u, v; p, q) = 0$. Unsere Aufgabe kommt darauf hinaus, diese Gleichungen zu studieren gegenüber topologischen Abbildungen in 2×2 Veränderlichen

$$(24) \qquad \begin{aligned} u^* &= u^*(u, v), \quad p^* = p^*(p, q), \\ v^* &= v^*(u, v), \quad q^* = q^*(p, q). \end{aligned}$$

In Worten: Es handelt sich um die *Klassifizierung der „Berührungstransformationen"* $\Omega(u, v; p, q) = 0$ *der Ebene gegenüber beliebigen Punkttransformationen* (24).

Nimmt man u und p und ebenso v und q konjugiert komplex, so sieht man endlich, daß unsere Aufgabe damit zusammenhängt, im vierdimensionalen Raum der vier reellen Veränderlichen

$$(25) \qquad \frac{u+p}{2}, \quad \frac{u-p}{2i}; \quad \frac{v+q}{2}, \quad \frac{v-q}{2i}$$

die Differentialinvarianten der dreidimensionalen Gebilde $\Omega(u, v; p, q) = 0$ gegenüber analytischen Transformationen

$$(26) \qquad \begin{aligned} u^* &= u^*(u, v), \\ v^* &= v^*(u, v) \end{aligned}$$

(u^*, v^* analytische Funktionen in zwei komplexen Veränderlichen) zu untersuchen.[18])

Als Aufgabe möchte ich hier stellen: *Welche Differentialgleichungen* (23) *entsprechen zwei gradlinigen Kurvenscharen des Raumes?*

Damit möchte ich diese Beispielsammlung schließen. Ich hoffe, Ihnen gezeigt zu haben, daß es hier allerlei ungezwungene und naheliegende Aufgaben gibt, mit denen die Beschäftigung lohnend sein könnte, da vielleicht neues Licht auf die einfachen geometrischen Figuren fällt, mit denen sich Mathematiker seit zwei Jahrtausenden beschäftigen.

(Eingegangen am 19. 8. 1929.)

Wladimir Stekloff zum Gedächtnis.

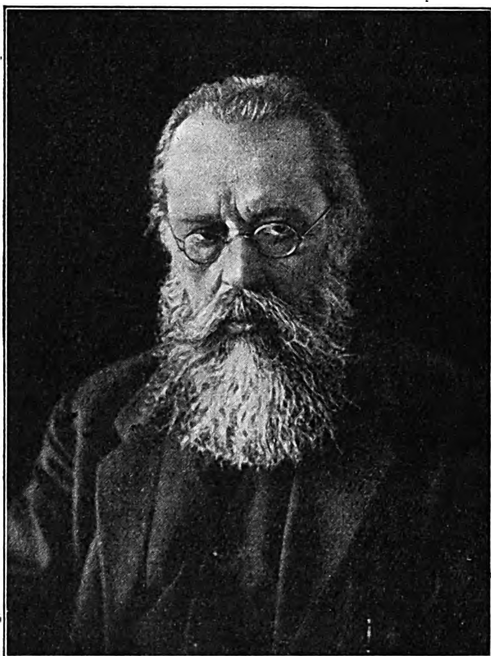
Von ADOLF KNESER in Breslau.

Mit Bildnis.

Wladimir Andrejewitsch Stekloff wurde am 28. Dezember alten Stils 1863, also am 9. Januar 1864 in Nishnij-Nowgorod geboren. Sein Vater Andrei, selbst aus den Kreisen der Landgeistlichkeit stammend, war Rektor der geistlichen Akademie in genannter Stadt. Wladimir erhielt seine Schulbildung auf dem adligen Alexanderinstitut, einer Anstalt, deren Lehrplan der des Gymnasiums war, und bezog im Herbst 1882 die Universität Moskau, verließ dieselbe aber nach einem Jahr infolge eines Mißerfolges im Examen der physiko-mathematischen Fakultät, der ihn eine Zeitlang zu der Absicht brachte, in Charkow Medizin zu studieren. Ein Zufall, die Überfüllung der medizinischen Fakultät, veranlaßte ihn aber, das Studium

18) Vgl. hierüber etwa H. Poincaré, Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme. Rendiconti del Circolo mat. di Palermo 23 (1907), S. 185—220. Dort scheint der hier festgestellte einfache Zusammenhang nicht bemerkt zu sein.

der Mathematik wieder aufzunehmen, und er fand in Charkow den hervorragenden Lehrer, den er brauchte, Alexander Michailowitsch Ljapunoff, mit dem ihn, solange Ljapunoff lebte, die innigsten Beziehungen verbanden, und dem er einen schönen Nachruf gewidmet hat.


Wladimir Stekloff.

In diesem Nachruf findet sich ein hübsches Zeit- und Stimmungsbild aus Stekloffs Studienzeit, die Schilderung des Eintritts Ljapunoffs in sein Amt. Die Studentenschaft ist stark politisch erregt durch die kürzlich erfolgte Abschaffung des freiheitlichen Universitätsstatuts und erwartet in dem neuen Professor eine Kreatur des angeblich reaktionären Unterrichtsministers Grafen Deljanoff. Beim Eröffnungsgottesdienst bemerkt man zwischen den Professoren einen Unbekannten mit nichtssagender Beamtenphysiognomie, in unangenehm korrektem blauem Uniformfrack. Man hält ihn für den neuen Mathematiker und eilt in den Hörsaal mit der Absicht, ihm den übelsten Empfang zu bereiten. Aber zu allgemeiner Überraschung geleitet der Dekan einen hübschen jungen Mann, nicht viel älter als manche der Studierenden, auf das Katheder; Ljapunoff beginnt mit zitternder Stimme und zwingt durch die Gewalt seines Talents die Jugend sofort in seinen Bann, freilich mit der Nebenwirkung, daß vor Ehrfurcht niemand ihm mit einer Frage oder Bitte um Aufklärung nahen will, um sich nicht vor dem Gelehrten zu kompromittieren. Es wird eine Organisation gegründet, indem Stekloff alle vielleicht etwas törichten Fragen der studierenden Jugend sammelt, um sie allein dem Professor vorzutragen; er übernimmt für sich allein die Verpflichtung, vor Scham zu erröten im Falle eines offenkundigen Fehlgriffs in der Fragestellung. Ljapunoff fragt mit naivem Staunen, weshalb denn so wenig Studenten mit Fragen und Bitten um Aufklärung an ihn herantreten.

Ljapunoff hat offenbar den Wert seines Schülers bald erkannt. Im Jahre 1887 beendete Stekloff den Universitätskurs und erhielt alsbald ein Stipendium zur Vorbereitung auf eine Professur der angewandten Mathematik unter der Leitung seines Lehrers Ljapunoff. Im Jahre 1891 wurde Stekloff an der Universität in Charkow als Privatdozent zugelassen, womit damals in Rußland schon gesicherte Einkünfte verbunden waren. Er verheiratete sich im Jahre 1890 mit Olga Nikolajewna Drakin, der Tochter einer wohlhabenden Familie, mit der er ein glückliches Familienleben führte. Der Verlust einer achtjährigen Tochter im Jahre 1899 traf Stekloff so schmerzlich, daß er längere Zeit arbeitsunfähig war und eine Zeitlang an der Fortsetzung seiner wissenschaftlichen Laufbahn verzweifeln wollte.

Die akademischen Würden und Ehrenstellungen gewann Stekloff in der Folge und auf die Weise, wie es damals in Rußland üblich war. Im Jahre 1893 gewann er den Grad eines Magisters, 1902 den eines Doktors der angewandten Mathematik, lehrte von 1893 an theoretische Mechanik am technologischen Institut in Charkow, wurde 1896 zum außerordentlichen, 1901 zum ordentlichen Professor der Mechanik an der Charkowschen Universität befördert. Als im Jahre 1905 ein freiheitliches Universitätsstatut erlassen war, wurde er zum Dekan seiner Fakultät erwählt. In Charkow herrschte damals offenbar ein reges mathematisches Leben; von 1902 bis 1906 war Stekloff Vorsitzender der Charkowschen mathematischen Gesellschaft, deren Mitteilungen bekanntlich den Rang einer angesehenen mathematischen Zeitschrift gewonnen haben. Im Jahre 1906 wurde Stekloff als ordentlicher Professor der reinen Mathematik an die Universität in Petersburg berufen, wo er auch eine zeitlang an dem Institut der höheren Frauenkurse Vorlesungen über Mathematik hielt. Die Petersburger Akademie, jetzt Akademie der Wissenschaften der USSR, erwählte ihn im Jahre 1903 zum Korrespondenten, im Jahre 1910 zum Adjunkten und 1912 zum ordentlichen Mitgliede; in den letzten Jahren seines Lebens war er Vizepräsident der Akademie.

Im Rahmen dieser Ämter und Ehrenstellen entfaltete Stekloff eine erstaunliche wissenschaftliche und Verwaltungstätigkeit, die selbst durch die Kriegs- und Umsturzjahre nicht unterbrochen wurde. Die Hungersnot der Jahre 1919 und 1920 traf ihn schwer durch den Verlust seiner Frau. Man vermutet, daß sie, wie manche heroische Frauen aus der russischen Intelligenz, von ihrer kargen Ration den Ihrigen heimlich einen Teil zuschob und sich selbst opferte. Sie starb am Skorbut im Jahre 1920. Seitdem lebte Stekloff wohlbetreut von seiner Schwester und in geordneten äußeren Verhältnissen in einem

Hause der Akademie, vor dessen Fenstern sich eins der schönsten Stadtbilder der Welt entfaltet: der prachtvolle Strom, von schönen Brücken überspannt, und jenseits die goldschimmernden Türme und Kuppeln und die Paläste der einstigen kaiserlichen Hauptstadt.

Stekloffs Persönlichkeit machte auf jeden, der ihm nahte, einen zugleich sympathischen und imponierenden Eindruck: Man sah in ihm den vollgebildeten europäischen Kulturmenschen vereint mit einer urwüchsigen Natur nach der Art seines Volkes. Nicht nur für Bildung und Wissenschaft, auch für die edlen Freuden des Lebens, besonders die Musik, war Stekloff empfänglich; er verstand zu genießen und mitzugenießen. Auf den Reisen, die ihn in den letzten Jahren durch Europa und Amerika führten, verstand er als Vertreter der Wissenschaft seines Landes auf das würdigste zu repräsentieren. Was ihm aber neben seiner hohen wissenschaftlichen Bedeutung in seinem Kreise besonderes Ansehen und besondere Verehrung verschaffte, waren die Energie und Geschicklichkeit in allen Dingen, die mit der Organisation des wissenschaftlichen Betriebes zusammenhängen. Er gewann das Vertrauen der neuen Regierung seines Landes; wieder und wieder eilte er nach Moskau, um zwischen der wissenschaftlichen Welt und den Trägern der neuen Staatsgewalt zu vermitteln. Hierdurch hat er der russischen Wissenschaft außerordentliche Dienste geleistet und den Wiederaufbau der wissenschaftlichen Arbeit nach den Jahren des Umsturzes und Bürgerkrieges wesentlich gefördert, besonders in den mit der Akademie der Wissenschaften verbundenen Instituten. Seine besondere Sorge galt neben der Unterrichtsorganisation seines eigenen Faches dem schönen geophysikalischen Institut des verstorbenen Fürsten Boris Galitzin und dem gesamten Betrieb der meteorologischen Anstalten des Landes, die zeitweilig unter der Leitung seines inzwischen verstorbenen Schülers Friedmann standen und für die die Regierung in reichem Maße Geldmittel zur Verfügung stellte. Endlich ist auf die Leningrader physiko-mathematische Gesellschaft hinzuweisen, die auf ihrem Journal Stekloff als ihren Gründer bezeichnet.

So war es ein an Arbeit und Erfolgen verschiedenster Art reiches Leben, das am 30. Mai 1926 zu Ende ging; Stekloff erlag einer Krankheit, die wohl nur einem überarbeiteten Organismus gefährlich werden konnte, und wurde mit hohen Ehren zur letzten Ruhe gebettet.

Wenn wir zunächst einmal vorläufig und in großen Zügen das wissenschaftliche Werk Stekloffs zu kennzeichnen unternehmen, so ist

damit zu beginnen, daß er eine Reihe von wichtigen Einzelaufgaben der analytischen Mechanik nach den klassischen Methoden von Dirichlet und Kirchhoff mit Erfolg bearbeitet hat. Wir steigen eine Stufe höher, wenn wir berichten, daß Stekloff in der Theorie des Potentials, der Schwingungen, der Wärmeleitung, der statischen Elektrizitätsverteilung im Sinne der Dirichletschen und Neumannschen Aufgabe und ihrer Analoga Existenzbeweise geliefert hat, die teils einen gegen früher wesentlich erweiterten Geltungsbereich und allgemeinere Voraussetzungen haben, teils überhaupt neu sind; sie bauten sich einerseits auf den Schwarz-Poincaréschen, andererseits den Neumann-Robinschen Methoden auf. Stekloff hat ferner, was wir besonders hoch einschätzen möchten, die in den genannten Gebieten der mathematischen Physik auftretenden Fragen betreffs der Darstellung willkürlicher Funktionen durch Reihen gegebener Eigenfunktionen wesentlich gefördert; insbesondere hat er zum ersten Male das klassische Sturm-Liouvillesche Darstellungsproblem für eine allgemeine Klasse durch Stetigkeitseigenschaften und Grenzbedingungen gekennzeichneter, übrigens willkürlicher Funktionen gelöst. Er hat sodann mit dem von ihm eingeführten allgemeinen Begriff der Abgeschlossenheit orthogonaler Funktionensysteme und mittels der Abgeschlossenheitsrelation, die vorher nur von Hurwitz für die Eigenfunktionen der Fourierschen Reihe aufgestellt war, eine Fülle wichtiger Eigenschaften der in Betracht kommenden orthogonalen Funktionensysteme abgeleitet. Stekloff hat endlich in einer Reihe von inhaltreichen Arbeiten zur Theorie der reellen Reihen, der bestimmten Integrale und der mechanischen Quadratur neue analytische Zusammenhänge aufgedeckt und schöne Einzelergebnisse erzielt.

In allen Arbeiten unseres Autors findet man eine überaus leichte und meist elegante Darstellungsweise, man möchte sagen, ein leichtes angenehmes Plätschern der analytischen Welle, das nur manchmal den großen Strom der Gesamtentwicklung etwas aus den Augen verlieren läßt, bis man sich plötzlich an einem immer wohldefinierten Ziele findet. Eine offenbar große Leichtigkeit der Produktion veranlaßt ihn, die Ergebnisse zusammen zu fassen, ehe er sie zur höchsten Vollkommenheit gebracht hat; eine spätere Redaktion macht bisweilen die frühere überflüssig, aus der dann doch manches herübergenommen wird. Für das Verständnis und die Aufnahme mancher Arbeiten wäre weniger mehr gewesen. Dem ausdauernden Leser aber erschließt sich stets ein Gedankengebäude von vollendeter Bestimmtheit und Klarheit.

Die hohe Bedeutung Stekloffs und das lebendige Gegenwartsinteresse mancher Arbeiten erfordert es, daß wir es nicht bei der vor-

liegenden Skizze bewenden lassen, sondern ihre Aufstellungen durch Analyse der wichtigsten Arbeiten erläutern und rechtfertigen. Wir zitieren dabei nach den Nummern des am Schluß gegebenen Verzeichnisses der Veröffentlichungen Stekloffs. Ein solches ist erwünscht, da das Verzeichnis in Poggendorffs biographisch-literarischem Wörterbuch unvollständig ist und z. B. die wichtige Abhandlung Refroidissement d'une barre ausläßt. Ein wertvolles, bis 1914 reichendes Verzeichnis fand sich in dem leider schwer zugänglichen Bande „Materialien für ein biographisches Wörterbuch der wirklichen Mitglieder der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften", Teil 2, Petrograd 1917 (russisch); der Band ist Teil einer Festschrift zum Jubiläum des Großfürsten Konstantin Konstantinowitsch als Präsident der Akademie. Wir erwähnen noch den Nekrolog von Herrn Uspenskij im Bulletin der Akademie der Wissenschaften der USSR für 1926, sowie die von der Akademie herausgegebene Schrift „Zum Gedächtnis W. A. Stekloffs" (russisch), Leningrad, im Juni 1928, die ebenfalls ein Verzeichnis der Abhandlungen enthält.

I. Arbeiten aus der analytischen Mechanik.

Unter den mechanischen Arbeiten fesselt zunächst eine Notiz (14) über einen integrabelen Fall der Bewegung des schweren starren Körpers um einen festen Punkt. Der Schwerpunkt liegt auf der einen Hauptträgheitsachse des festen Punktes; ein Hauptträgheitsmoment ist das Doppelte des andern. Es gibt eine spezielle Lösung mittels einer elliptischen Quadratur erster Gattung. Diese Art von Spezialisierungen des schwierigen Problems gehen in ähnlicher Richtung wie Staudes wichtige Sätze über die freien Rotationsachsen des schweren starren Körpers.

Von großer Bedeutung sind die Arbeiten Stekloffs zur Hydromechanik. Eine Arbeit (52), die an Dirichlet, Clebsch, Kirchhoff, Thomson-Tait anschließt und von der Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit handelt, wendet sich in erster Linie dem Falle zu, daß der eingetauchte Körper mehrfach zusammenhängend ist, ein Fall, für den die Methode von Kirchhoff Schwierigkeiten darbietet; der Körper enthalte noch beliebige, von Flüssigkeiten erfüllte Höhlungen, die auch ihrerseits mehrfach zusammenhängend sein können. Stekloff bildet für die lebendige Kraft der einzelnen Flüssigkeitsteile und des Körpers Ausdrücke, die im allgemeinen mit der lebendigen Kraft eines idealen festen Körpers identifiziert werden können, wie Ähnliches auch bei Kirchhoff geschieht. Die Integration wird im allgemeinen nicht durchgeführt, aber doch nach ihrer Möglichkeit er-

örtert mittels einer Methode, die auch von Kobb beim Nachweis der Existenz periodischer Lösungen in der Bewegung fester Körper benutzt ist und von Stekloff als Methode der aufeinanderfolgenden Annäherungen bezeichnet wird. Die Integration führt bei der ersten Annäherung auf elliptische Funktionen; schließlich kommt heraus, daß eine dreifach unendliche Mannigfaltigkeit von periodischen Lösungen existiert.

In der Arbeit (70) wird die Bestimmung der Geschwindigkeiten einer Flüssigkeit, die sich in einem auf gegebene Weise bewegten Gefäß befindet, bei örtlich und zeitlich gegebenen Wirbelkomponenten auf ein Neumannsches Problem der Hydrodynamik zurückgeführt. Die Wirbelkomponenten müssen ihrerseits nicht willkürlich, sondern in solcher Weise, wie es die hydrodynamischen Gleichungen erfordern, angesetzt sein. Die Theorie wird angewandt auf den Fall eines Zylinders, in dessen Innerem die Wirbellinien Kreise sind, deren Mittelpunkte auf der Achse liegen und deren Ebene zur Achse senkrecht steht. Es zeigt sich, daß eine Bewegung nur möglich ist, wenn der Zylinder eine gewisse Schraubenbewegung vollführt; wird diese vorausgesetzt, so ergeben sich die Geschwindigkeiten der Flüssigkeit, ausgedrückt durch elegante mit Besselschen Funktionen gebildete Reihen. Stekloff wendet seine Methode auch an auf die von Helmholtz behandelte Aufgabe der unbegrenzten Flüssigkeit, in der alle Wirbellinien Kreise sind, deren Mittelpunkte auf einer festen Achse liegen und deren Ebenen auf dieser Achse senkrecht stehen. Hier ergeben sich bedeutende Vereinfachungen.

Die Arbeit wendet sich sodann zu Bewegungen mit geraden Wirbellinien, von denen ein beliebig gestaltetes und bewegtes Gefäß erfüllt wird. Im besonderen wird das Innere eines Ellipsoides betrachtet und die Voraussetzung hinzugefügt, daß die Flüssigkeitsteile gegeneinander nach dem Newtonschen Gesetz gravitieren.

Die Aufgabe wird weiter dahin abgeändert, daß die Flüssigkeit nicht in ein Gefäß eingeschlossen ist, sondern unter konstantem Druck eine freie ellipsoidale Oberfläche von fester Gestalt hat. Die Verbindung zu Dirichlets und Riemanns entsprechenden Ergebnissen wird hergestellt. Als möglich ergibt sich eine Bewegung des Ellipsoids, bei der gleichförmige Rotation um eine Hauptachse kombiniert wird mit einer Bewegung des Mittelpunktes auf einem Kreise, dessen Ebene auf jener Achse senkrecht steht. Endlich wird die von Beltrami behandelte Aufgabe der Flüssigkeitsbewegung mit zusammenfallenden Strom- und Wirbellinien auf eine Neumannsche Aufgabe im Sinne der Potentialtheorie zurückgeführt.

In einer weiteren großen Arbeit (81) wird speziell der Fall betrachtet, daß sich in einem festen Körper eine mit Flüssigkeit erfüllte ellipsoidale Höhlung befindet, ein Fall, dessen Anwendbarkeit auf das Erdellipsoid ein bedeutendes Interesse verbürgt. Die tatsächlichen Wanderungen des Pols entsprechen bekanntlich nicht genau der Eulerschen Theorie der Bewegung starrer Körper; man vergleicht sie mit den Polverschiebungen, die eine vom Erdkörper umschlossene Flüssigkeitsmasse hervorrufen würde. Bei Berücksichtigung der Reibung ergibt sich unter gewissen Voraussetzungen, daß die Flüssigkeit wie ein starrer Körper zusammen mit dem umschließenden Körper rotiert. Stekloff zeigt, daß die Ergebnisse seiner Theorie wenigstens qualitativ gewisse Analogien aufweisen mit den Ergebnissen der Beobachtung über Änderung der geographischen Breite.

Eine Abhandlung (71) über das gravitierende Flüssigkeitsellipsoid schließt sich abermals an Dirichlet und Riemann an. Über die Ergebnisse dieser Autoren hinaus werden alle Fälle gefunden, in denen das gravitierende Ellipsoid dauernd ein Rotationsellipsoid bleibt. Es finden sich neue Fälle nichtstationärer Bewegung bei fester Gestalt der ellipsoidalen Oberfläche, abweichend von Riemann, der ohne Beweis mit der Beständigkeit der Gestalt notwendig die Beständigkeit des Bewegungszustandes verbunden glaubt. Für den Fall des dreiachsigen Ellipsoids werden alle Fälle bestimmt, in denen die Flüssigkeitsbewegung sich reduziert auf eine Drehung des ganzen Ellipsoids nach Art eines starren Körpers; ebenso alle Fälle, in denen die Achsen des Ellipsoids feste Richtungen behalten.

Der Elastizitätstheorie gehört eine Arbeit (28) an, die im Anschluß an Clebsch und Saint-Venant die allgemeine Frage stellt nach der Gesamtheit der Gleichgewichtszustände elastischer isotroper Zylinder bei fehlenden äußeren Druckkräften unter der Voraussetzung, daß die Deformationen parabolisch vom dritten Grade sind; das bedeutet, daß jede Parallele zur Zylinderachse bei der Deformation übergeht in eine Kurve, längs deren x und y Polynome dritten Grades in z sind, wenn die z-Achse in die Zylinderachse gelegt wird. Weiter wird vorausgesetzt, daß die Spannungen linear abhängen von den Abständen von der Zylinderachse. Die so gestellte Aufgabe verlangt die Aufsuchung einer auf dem Querschnitt des Zylinders harmonischen Funktion, die am Rande gegebene Werte hat. Die Lösungen von Clebsch und Saint-Venant ergeben sich als Sonderfälle.

II. Darstellung willkürlicher Funktionen in der Sturm-Liouvilleschen Theorie.

Wir wenden uns zur Gruppe der Arbeiten, die sich auf das Sturm-Liouvillesche Problem beziehen:

$$\frac{d^2 V}{d x^2} + (p\lambda - q) V = 0,$$

$$\frac{dV}{dx} - hV/^a = 0, \qquad \frac{dV}{dx} + HV/^b = 0;$$

h, H sind gegebene positive, λ eine unbekannte Konstante, p, q Funktionen von x, die auf der Strecke $a \ldots b$ nur durch gewisse Stetigkeitseigenschaften charakterisiert sind; p ist nicht negativ. Es ergibt sich bekanntlich als notwendig, daß λ einer gewissen Reihe von Größen angehöre, einer der Eigenwerte sei; die zugehörigen Eigenfunktionen V sind orthogonal und normiert nach den Gleichungen

$$\int_a^b p V_m V_n \, dx = 0, \qquad \int_a^b p V_n^2 \, dx = 1.$$

Eine wichtige von Liouville mit großem Nachdruck bearbeitete Frage ist: ob man eine auf der Grundstrecke $a \ldots b$ willkürlich gegebene Funktion $f(x)$ nach den Eigenfunktionen entwickeln kann, und zwar in der Form

$$f(x) = A_1 V_1 + A_2 V_2 + \cdots, \qquad A_n = \int_a^b p \cdot f(x) V_n \, dx.$$

Für die Behandlung dieser Frage über Liouville hinaus war zunächst anregend die Arbeit von Poincaré vom Jahre 1893[1]) über die Methoden der mathematischen Physik. Diese Arbeit ist durchaus skizzenhaft; keiner der behandelten Sätze ist vollständig bewiesen. Das Wertvollste sind die darin enthaltenen Anregungen zur Verwertung der von Schwarz in seiner klassischen Arbeit „Über eine Problem der Variationsrechnung" eingeführten Konstanten, und der mit ihnen geführte Nachweis der Existenz einer meromorphen Funktion des komplexen Arguments λ, die eine Differentialgleichung erfüllt, die aus einer Gleichung der Potential- oder Wärmeleitungstheorie entsteht, indem man als Summanden eine willkürliche Funktion des Ortes und als Faktor an einer Stelle λ hinzufügt. Die Schwarzschen Konstanten sind das für die fernere analytische Arbeit eigentlich fördernde Material; nur die Art, wie sie mit der vorliegenden Frage in Verbindung ge-

1) Rendiconti di Palermo VIII, 1894. Sur les équations de la physique mathématique.

bracht werden, rührt von Poincaré her, so daß, wenn man von den Schwarz-Poincaréschen Methoden spricht, der stärkere Ton auf dem ersten Namen liegen muß.

Diese Methoden erlauben Stekloff in der besonders bedeutsamen Abhandlung Refroidissement d'une barre hétérogène (44) zunächst für eine beliebige auf der Strecke $a \ldots b$ stetige Funktion die Relation

$$\int_a^b p[f(x)]^2 dx = A_1^2 + A_2^2 + \cdots$$

zu beweisen, durch die das System der Funktionen V_n als abgeschlossen charakterisiert wird. Die Gleichung heißt die Abgeschlossenheitsrelation. Der einfachste Fall dieser Gleichung wird bei den Fourierschen Reihen als die Parsevalsche Gleichung bezeichnet, besser wohl als das Theorem von Hurwitz, der den ersten strengen Beweis geliefert hat. Aus dieser Gleichung folgt natürlich, daß eine stetige Funktion $f(x)$ identisch verschwindet, wenn alle Gleichungen: $A_1 = 0, A_2 = 0, \ldots$ vorausgesetzt werden, ein Satz, den Liouville nicht völlig streng zu beweisen vermochte.

Nachdem die Abgeschlossenheitsrelation erhalten war, ermöglichten es Stekloff die Schwarz-Poincaréschen Methoden nach mehreren vorausgehenden Versuchen, die zu engeren Resultaten führten, in der Abhandlung (44) die Darstellbarkeit willkürlicher Funktionen für eine gewisse Klasse von solchen streng zu beweisen, für diejenigen nämlich, die man neuerdings als quellenmäßig darstellbar bezeichnet; es sind die Funktionen, die auf der Strecke $a \ldots b$ mit einigen Ableitungen stetig sind und außerdem, was eine wesentliche Einschränkung bedeutet, an den Enden der Strecke $a \ldots b$ dieselben Bedingungen erfüllen, wie die Eigenfunktionen selbst. Zu diesem Resultat gelangt Stekloff in der Weise, daß für den Fall gleichmäßiger Konvergenz der Reihe

$$A_1 V_1 + A_2 V_2 + \cdots$$

der Darstellungssatz zunächst erhalten wird. Daraus ergibt sich die angegebene Beschränkung mit einer gewissen Notwendigkeit; die Reihe ist ja in der Tat bei unstetigen Funktionen $f(x)$ nicht gleichmäßig konvergent und unter Umständen schon dann nicht, wenn die Grenzbedingungen durch die Funktion $f(x)$ verletzt werden. Dieses schöne Resultat war aber vom Standpunkte der physikalischen Anwendungen unvollständig, weil hier gerade auch unstetige Funktionen und Funktionen, die die Randbedingungen verletzen, nach den Eigenfunktionen zu entwickeln sind. Der Nachweis dieser allgemeineren Darstellbarkeit

gelang erst[1]) durch erneuten Rückgang auf die älteren Untersuchungen von Liouville, die ihr Ziel nicht ganz erreicht hatten. Insbesondere spielen hier die asymptotischen Darstellungen der Eigenfunktionen nach Liouville eine Rolle.

Stekloff beweist die Abgeschlossenheitsrelation, worauf er später Gewicht legt, unabhängig von der Darstellung willkürlicher Funktionen. In der neueren Darstellung der Theorie[2]) erhält man die Relation, nachdem die Darstellbarkeit quellenmäßiger Funktionen nachgewiesen ist. Dies gelingt erst rein im Reellen ohne funktionentheoretische Hilfsmittel durch die Theorie der Integralgleichungen. Man kann dann durch angenäherte Darstellung einer beliebigen stetigen Funktion mittels quellenmäßiger Funktionen die allgemeine Gültigkeit der Abgeschlossenheitsrelation für beliebige stetige Funktionen $f(x)$ aus ihrer leicht ersichtlichen Gültigkeit für quellenmäßige erschließen. Hier sei erwähnt, daß die Theorie neuerdings durch Herrn Prüfer[3]) wesentlich vervollkommnet ist. Ihm ist es zuerst gelungen, auf reellem Wege durch Betrachtungen, die wieder den Liouvilleschen verwandt sind, zu beweisen, daß aus den Gleichungen

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0 \quad \text{usw.}$$

das identische Verschwinden der Funktion $f(x)$, die nur als stetig vorausgesetzt wird, erschlossen werden kann. Daraus ergibt sich dann weiter auch der allgemeine Darstellungssatz für nichtquellenmäßige Funktionen von beschränkter Schwankung und die Abgeschlossenheitsrelation.

In einer späteren Arbeit (90) nimmt Stekloff die Sturm-Liouvillesche Theorie nochmals in großzügiger Weise auf, indem die Grenzbedingungen möglichst allgemein gefaßt werden können, so daß z. B. die oben eingeführten Größen h und H nicht mehr positiv zu sein brauchen. Die Grenzbedingungen werden nach ihrem Einfluß auf das Darstellungsproblem charakterisiert und eingeteilt. Dabei werden die Schwarz-Poincaréschen funktionentheoretischen Methoden wiederum in gegen früher erweiterter Form angewandt. Einige Resultate, die auch in der Abhandlung (80) berührt werden, beziehen sich sogar auf den im allgemeinen neuartigen Fall, daß die Funktion $p(x)$ ihr Zeichen wechselt; die zugehörigen Integralgleichungen gehören dann dem Typus an, den Herr Hilbert als den polaren bezeichnet. In unserer Abhandlung (90) wird zuerst die Frage nach der Existenz der Eigen-

1) Kneser, Math. Annalen Bd. 58, 60, 63.
2) Kneser, Integralgleichungen 2. Aufl. §§ 6, 30.
3) Math. Annalen Bd. 95.

funktionen unter neuen Bedingungen behandelt; sodann geht es zur Darstellbarkeit willkürlicher Funktionen. Stekloff gelangt hier wiederum zu dem Resultat, daß die Reihe $A_1V_1 + A_2V_2 + \cdots$, wenn sie gleichmäßig konvergiert, die Funktion $f(x)$ darstellt. Daraus ergibt sich die Darstellbarkeit von Funktionen, welche die den Eigenfunktionen auferlegten Randbedingungen erfüllen; bei gewissen Grenzbedingungen fällt diese Beschränkung weg. Die Darstellung unstetiger Funktionen scheint sich den Methoden dieser Abhandlung zu entziehen; wesentlich werden die schon erwähnten älteren Darstellungen Stekloffs vervollkommnet und abgeglättet; auf die inzwischen eingetretene Fortentwicklung der Theorie durch andere Autoren wird keine Rücksicht genommen.

Erwähnen wir noch die Abhandlung (84), in der die bisher besprochenen Entwicklungen auf Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen 4. Ordnung übertragen werden.

Für die Probleme der räumlichen Wärmeleitung in beliebig gestalteten Körpern wird ebenfalls die quellenmäßige Funktion als entwickelbar nachgewiesen in der großen Abhandlung Sur les problèmes fondamentaux ... (53) und der vorhergehenden (43). Auch hier wird die Schwarz-Poincarésche Methode zum Beweis der Abgeschlossenheitsrelation benutzt und dann zu dem bezeichneten engeren Darstellungssatz übergegangen.

III. Darstellung auch unstetiger willkürlicher Funktionen.

Anknüpfend an die oben erwähnten Abhandlungen aus den Mathematischen Annalen[1]) hat Stekloff sich auch der Darstellung unstetiger Funktionen zugewandt in einer überaus inhaltreichen und an konkreten analytischen Resultaten reichen Abhandlung Sur les expressions asymptotiques ... (68). Hier wird insbesondere die Verbindung hergestellt zwischen den oben erwähnten Entwicklungssätzen und einer bekannten wichtigen Arbeit von Darboux[2]) über die Darstellung willkürlicher Funktionen. Für eine große Klasse interessanter Reihen werden asymptotische Formeln und Darstellungssätze unter hinreichend allgemeinen Voraussetzungen betreffs der dargestellten Funktion abgeleitet; Besselsche Funktionen, Hermitesche und Laguerresche Polynome, Tschebyscheffsche und Jacobische Polynome kommen zur Erörterung. Eine gemeinsame Eigenschaft der mit diesen Polynomen gebildeten Reihen besteht darin, daß es möglich ist, für die Summe einer endlichen Anzahl von Gliedern der zur

1) S. Seite 216, Anm. 1.
2) Journal Liouville (3), Bd. 4.

Darstellung der willkürlichen Funktion dienenden Reihe einen geschlossenen Ausdruck aufzustellen, der vermittelst der asymptotischen Darstellung der Eigenfunktionen diskutiert werden kann. Es liegt also hier etwas Ähnliches vor, wie beim Dirichletschen Beweis der Fourierschen Reihe.

Die Grundlage für die Behandlung unstetiger Funktionen bietet die schon in einer früheren Abhandlung (56) begegnende Formel

$$\lim_{\eta=0} \frac{1}{4\eta^2} \cdot \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} dx \int_{x-\eta}^{x+\eta} f(\xi)\, d\xi = \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}, \tag{1}$$

in der $f(x)$ nur beschränkt und integrierbar zu sein braucht. Diese Formel wird gebraucht, um von der Abgeschlossenheitsrelation zur Darstellung unstetiger Funktionen überzugehen; die Abgeschlossenheitsrelation kann auch für Funktionen $f(x)$ der eben bezeichneten Art bewiesen werden. Sei $f^0(x)$ eine zweite Funktion wie $f(x)$, A_n^0 die ebenso wie A_n gebildete zu $f^0(x)$ gehörige Größe, dann findet man leicht in den früher gebrauchten Bezeichnungen die Gleichung

$$\int_a^b p\, f(x)\, f^0(x)\, dx = \sum_n^{0,\infty} A_n A_n^0.$$

Speziell nimmt man für f^0 eine nur auf einer Teilstrecke zwischen $a \ldots b$ definierte, außerhalb dieser Teilstrecke verschwindende Funktion $\frac{\psi(x)}{p}$ und findet so

$$\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} f(x)\, \psi(x)\, dx = \sum_n^{0,\infty} A_n \cdot \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} \psi(x)\, V_n\, dx. \tag{2}$$

Jetzt wird angenommen, was auf Grund der asymptotischen Darstellung der Eigenfunktionen in den wichtigsten Fällen möglich ist, man könne setzen

$$A_n V_n = W_n + \alpha_n w_n,$$

wobei α_n Konstante sind und $\sum |\alpha_n|$ konvergiert; w_n und dw_n/dx seien beschränkt. Dann findet man zunächst

$$\lim_{\eta=0} \frac{1}{4\eta^2} \sum_n^{0,\infty} \alpha_n \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} dx \int_{x-\eta}^{x+\eta} \psi(\xi)\, w_n(\xi)\, d\xi = \sum_n^{0,\infty} \alpha_n w_n(x_0)\, \psi(x_0).$$

Ferner sei es möglich, für die Größen W_n die Gleichung

$$\lim_{\eta=0} \frac{1}{4\eta^2} \sum_n^{0,\infty} \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} dx \int_{x-\eta}^{x+\eta} \psi(\xi)\, W_n(\xi)\, d\xi = \sum_n^{0,\infty} W_n(x_0)\, \psi(x_0) \tag{3}$$

nachzuweisen; dann ergibt die Gleichung (2), x für x_0 geschrieben und von $x_0 - \eta$ bis $x_0 + \eta$ integriert

$$\lim_{\eta=0} \frac{1}{4\eta^2} \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} dx \int_{x-\eta}^{x+\eta} \psi(\xi) f(\xi)\, d\xi = \psi(x_0) \sum_n^{0,\infty} (W_n(x_0) + a_n w(x_0))$$

$$= \psi(x_0) \sum_n^{0,\infty} A_n V_n(x_0),$$

die linke Seite dieser Gleichung ist aber nach dem Lemma (1)

$$\psi(x_0) \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2};$$

womit dann die gewünschte Gleichung

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} = \sum A_n V_n$$

erzielt ist. Daß aber die Größen W sich gemäß der Forderung (3) bestimmen lassen, folgt aus den Liouvilleschen asymptotischen Ausdrücken der Eigenfunktionen; nach Einführung einer passend gewählten Variablen t für x kann man etwa setzen

$$A_n V_n = \varphi(t) \left(B_n \cos(\lambda_n t + \tau) + a_n w_n\right)$$

und hat dann die Reihen

$$\sum B_n \cos(\lambda_n t + \tau), \qquad \sum B_n \frac{\sin \lambda_n \eta}{\lambda_n \eta} \cos(\lambda_n t + \tau)$$

zu untersuchen. Allerdings ist die Darstellung in dieser äußerst inhaltreichen Abhandlung nicht frei von kleinen Flüchtigkeiten; gerade der soeben skizzierte Beweis verdiente eine ausführliche und zweifelsfreie Darstellung.

IV. Allgemeine Untersuchungen über die Abgeschlossenheit orthogonaler Funktionensysteme.

Die Abgeschlossenheitsrelation kann wohl als Stekloffs Lieblingsformel bezeichnet werden; man könnte sie die Stekloffsche Formel nennen, da er sie zuerst über Hurwitz hinaus für andere Fälle streng bewiesen hat. Er macht diese Formel in einer Reihe großer Abhandlungen (61), (85), (86), (92) zum Gegenstande einer allgemeinen Theorie, wobei auch Mannigfaltigkeiten von beliebig vielen Dimensionen in den Kreis der Untersuchung treten. $V_1, V_2, \ldots$ sind orthogonale Funktionen in einem beliebigen Grundgebiet, dessen Integrationselement $d\tau$

sei; p sei eine in ihm nichtnegative Funktion des Ortes. Integriert man über das Grundgebiet, so sei

$$\int p V_n V_m \, d\tau = 0, \quad \int p V_n^2 \, d\tau = 1,$$

und die Abgeschlossenheitsrelation ist wieder

$$\int p f^2 \, d\tau = A_1^2 + A_2^2 + \cdots, \quad A_n = \int p f V_n \, d\tau,$$

wobei f eine Funktion des Ortes im Grundgebiet bedeutet. In der allgemeinen Theorie besteht dann die Arbeit Stekloffs hauptsächlich darin, die Abgeschlossenheitsrelation, wenn sie zunächst für eine besondere Art von Funktionen f gilt, auf immer weitere Klassen von Funktionen f auszudehnen.

In der ersten hierher gehörigen Abhandlung (61) zählt Stekloff die konkreten Fälle der Gültigkeit auf: im Gebiet von einer Dimension sind es die bekannten Sturm-Liouvilleschen Orthogonalfunktionen mit Einschluß der trigonometrischen und der Besselschen Funktionen, ferner die Polynome von Legendre, Jacobi, Tschebyscheff; in zwei Dimensionen die Laméschen Produkte und Kugelfunktionen, die Eigenfunktionen bei zwei- und dreidimensionalen Wärmeleitungsaufgaben, die Eigenfunktionen von Le Roy, die Universalfunktionen von Herrn Korn. In den meisten dieser Fälle kann die Darstellbarkeit willkürlicher Funktionen unter beschränkenden Voraussetzungen nachgewiesen und daraus die Abgeschlossenheitsrelation erschlossen werden. Stekloff legt aber Gewicht auf die Unabhängigkeit der letzteren von den Darstellungssätzen. Wenn z. B. die Orthogonalfunktionen Polynome sind, ist die Gültigkeit der Abgeschlossenheitsrelation sofort gegeben, wenn f ein Polynom ist. Sodann erlaubt es die allgemeine Theorie von Polynomen f zu allgemeineren Funktionen, ähnlich von differenzierbaren Funktionen zu nur stetigen oder auch nur integrierbaren Funktionen f überzugehen.

Ist die Abhandlung (61) durch die Bezugnahme auf die speziellen Funktionen interessant, so strebt die weitere (86) zu großer Allgemeinheit in der angedeuteten Richtung. Wir führen einige Sätze an: „Gilt die Abgeschlossenheitsbeziehung für alle im Grundgebiet gegebenen Funktionen mit einer endlichen Anzahl stetiger Ableitungen, so gilt sie auch für jede stetige Funktion“. „Gilt die Relation für jedes Polynom, so gilt sie auch für jede stetige Funktion.“ Der Beweis des letzteren Satzes wird geführt unabhängig von der Weierstraßschen Approximation stetiger Funktionen durch Polynome, und für diese ergibt sich später ein neuer Beweis bei den Polynomen von Tschebyscheff.

Besonders interessant sind die Anwendungen dieser Sätze auf normierte orthogonale Polynome von mehreren Variabeln. Stekloff beginnt mit der Übertragung der Orthogonalisierungsmethode von Gram und Schmidt auf beliebig viele Variable. Es ergibt sich für jedes Grundgebiet und jede in ihm positive Funktion p die Existenz einer orthogonalen Polynomreihe, für die Abgeschlossenheitsrelation gilt. Besonders interessante Beispiele entnimmt Stekloff einer Petersburger Dissertation von Orloff.[1]) In zwei Variabeln wird die Ellipse als Grundgebiet genommen, und man erhält die Polynome

$$\frac{1}{(y^2-1)^{\alpha+m+\frac{1}{2}}} \frac{d^n}{dy^n}\left[(y^2-1)^{m+n+\alpha+\frac{1}{2}}\right] \cdot \frac{1}{(x^2+y^2-1)^\alpha} \frac{d^m}{dx^m}\left[(x^2+y^2-1)^{m+\alpha}\right];$$

m, n sind ganze Zahlen, α eine Konstante. Diese Polynome stehen offenbar in enger Beziehung zu den zweidimensionalen Hermiteschen Polynomen[2]) und denen, die neuerdings von Herrn Koschmieder[3]) behandelt sind.

Wenn zur ganzen Reihe dieser höchst wertvollen Untersuchungen eine kritische Bemerkung erlaubt ist, so darf man wohl sagen, daß das Verhältnis der Abgeschlossenheit zur Darstellbarkeit willkürlicher Funktionen nicht immer ganz klar ist. Stekloff hebt an einer Stelle, wie gesagt, die Unabhängigkeit der ersteren von der letzteren hervor; in vielen Spezialfällen geht aber offenbar der natürliche Weg zur Abgeschlossenheitsrelation über die Darstellung engerer Funktionsklassen durch die Orthogonalfunktionen.[4]) Wird dieser Weg nicht eingeschlagen, so läßt sich über den Beweis der Abgeschlossenheit nichts Allgemeines aussagen.

Übrigens führt die Abgeschlossenheitsgleichung Stekloff zu verschiedenen sehr konkreten analytischen Entwicklungen hinüber. Er beweist (91) mit Hilfe der für die Sturm-Liouvillesche Theorie gewonnenen Ergebnisse die Formel

$$f(x+0)-f(x+h-0) = -\frac{1}{2}\sum_n^{0,\infty}\int_x^{x+h} f(\alpha)\cos\frac{(2n+1)\pi(x-\alpha)}{h}\,d\alpha$$

und benutzt dieselbe zur Ableitung einer großen Zahl von Formeln; bei den trigonometrischen Reihen erscheinen die Summenformeln von

1) Über einige Polynome mit einer und mehreren Veränderlichen, Petersburg 1881. O nekotorych polinomach s odnoju i mnogimi peremĕnnymi.

2) Hermite, Œuvres 2, S. 309 ff.

3) Math. Annalen Bd. 91.

4) Kneser, Integralgleichungen (2. Aufl.) § 6.

Poisson und Dirichlet, in denen Funktionswerte auftreten, die zu äquidistanten Argumentwerten gehören; die Fouriersche Reihe erscheint in neuer Form, bei der nur über ungerade Zahlen summiert wird. Es ergeben sich ferner die Hauptformeln für Bernoullische Zahlen und Polynome sowie viele bekannte und neue Auswertungen bestimmter Integrale, darunter die Fouriersche Integralformel. Diese Abhandlung ist freilich nur etwas für Leser, bei denen die Freude an der konkreten Formel noch nicht durch die Gewöhnung an Begriffsanalyse und Kritik unterdrückt ist.

Sei endlich noch hervorgehoben, daß die Abhandlung (92) interessante Beziehungen der Abgeschlossenheit zum Momentenproblem im Sinne von Stieltjes anbahnt, und für die Approximation durch Polynome zur Abschätzung des Restes führt.

V. Beziehungen zu den Integralgleichungen.

Wir verweilen bei der wichtigen Abhandlung (64), die die hauptsächlichsten Anwendungen enthält, die Stekloff von der damals noch neuen Theorie der Integralgleichungen gemacht hat. Die Abhandlung behandelt hauptsächlich die Lösungen der Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

mit den bekannten Randbedingungen, die den Wärmeleitungsaufgaben entsprechen; die Greensche Funktion wird je nach der Form der Randbedingungen verschieden definiert und als symmetrischer Kern einer Integralgleichung eingeführt. Auch werden schon ausdrücklich die beiden Arten Greenscher Funktionen unterschieden, die man später als den gewöhnlichen und den ausgearteten Fall bezeichnet hat.

Es wird nun zunächst mittels der Schwarz-Poincaréschen Methoden nachgewiesen, daß die nicht homogene Integralgleichung

$$V(1) = \lambda \int p(0)\, G(0, 1)\, V(0)\, d\tau_0 + f(1),$$

in der 0 und 1 Stellen des betrachteten Grundgebiets, $d\tau_0$ das Integrationselement an der Stelle 0, G die Greensche Funktion und $p(0)$ eine positive Funktion bedeutet, eine Lösung besitzt, die als Funktion von λ den Charakter einer meromorphen Funktion trägt, ein Resultat, das auch aus der allgemeinen Theorie der Integralgleichungen folgt, aber nur dann in voller Strenge, wenn auf die Singularitäten des Kerns genügend Rücksicht genommen wird, was allerdings auch in neueren Darstellungen nicht immer geschieht. Die Theorie der Integralgleichungen, soweit sie damals vorlag, die grundlegenden Abhandlungen von

Fredholm und die erste Mitteilung von Herrn Hilbert haben offenbar auf Stekloff anregend gewirkt, er hat sie aber nicht direkt benutzt.

Die Residuen der oben definierten Funktion V führen in bekannter Weise auf die Eigenfunktionen, die Pole λ_n sind die Eigenwerte, die Orthogonalitätsbeziehung hat die Form

$$\int p(0)\, V_n(0)\, V_m(0)\, d\tau_0 = 0.$$

Indem nun immer wieder die bekannten Schwarzschen Konstanten benutzt werden, findet Stekloff für die von ihm betrachteten Kerne, daß für die Funktion

$$f(1) = \int p(0)\, G(0, 1)\, \varphi(0)\, d\tau_0,$$

wenn φ eine beliebige stetige Funktion, $f(1)$ also quellenmäßig dargestellt ist, die Abgeschlossenheitsbeziehung gilt

$$\int p(0)\, f(0)^2\, d\tau_0 = A_1^2 + A_2^2 + \cdots, \quad A_n = \int p(0)\, f(0)\, V_n(0)\, d\tau_0.$$

Es wird weiter die Entwickelbarkeit der quellenmäßigen Funktion in der Form

$$f(0) = A_1 V_1(0) + A_2 V_2(0) + \cdots$$

abgeleitet. Durch Rückgang auf die Hölderschen Sätze der Potentialtheorie ergibt sich auch die quellenmäßige Darstellbarkeit einer Funktion des Ortes, die die Grenzbedingungen erfüllt und mit einigen Ableitungen stetig ist. Auch bei dieser Betrachtung ist die genaue Berücksichtigung der Singularitäten des Kerns ein besonderer Vorzug der Darstellung von Stekloff.

Unter den speziellen Anwendungen, die sich anschließen, verdient die Betrachtung der von Herrn Korn eingeführten universellen Funktionen besondere Beachtung.

VI. Das Werk von 1922; Existenzbeweise.

Im Jahre 1922, sehr bald nach der in Rußland politisch unruhigsten Zeit, gab Stekloff ein systematisches Werk unter dem Titel „Die Grundaufgaben der mathematischen Physik“ (116) heraus. Der erste Teil des Werkes beginnt mit einer eigentümlichen Behandlung der Fourierschen Reihe; sie wird mit den Tschebyscheffschen Polynomen in Verbindung gebracht durch die Bemerkung, daß $\cos nx$ als Funktion von $\cos x$ ein solches Polynom ist. Im Vordergrunde steht der Begriff der Abgeschlossenheit, die zuerst bei gleichmäßiger Konvergenz der Fourierschen Reihe erhalten und dann, wie es oben

unter IV. geschildert wurde, auf immer allgemeinere Fälle übertragen wird. Es folgt eine ausführliche Darstellung der Sturm-Liouvilleschen Theorie, etwa nach der Abhandlung (90) unter Beibehaltung der alten Methoden und Einschränkungen, besonders beim Darstellungsproblem.

Besonders bedeutsam ist der zweite Teil des Werks, weil er ausgedehnte ältere Abhandlungen Stekloffs, ja man kann sagen einen erheblichen Teil seines wissenschaftlichen Lebenswerks, zusammenfaßt; es behandelt die Existenzfragen der mathematischen Physik, die Aufgaben von Dirichlet und Neumann, die Aufgaben der statischen Elektrizitätsverteilung und der stationären Wärmezustände. Die Lösbarkeit dieser Aufgaben war schon der Gegenstand der Doktordissertation (45) und der großen Abhandlungen (42) und (53), die ihrerseits mit den auf die Existenzfragen der Eigenfunktionen bezüglichen Abhandlungen (43) und (64) in Zusammenhang stehen. Es ist Stekloff, allgemein zu reden, gelungen, die Existenz der Lösungen der bezeichneten Aufgaben teils überhaupt zuerst, teils unter wesentlich allgemeineren Bedingungen abzuleiten, als seinen Vorgängern gelungen war. Haupthilfsmittel sind die Methoden von C. Neumann und Robin in Verbindung mit gewissen Sätzen und Methoden von Poincaré.[1]) Angeregt war Stekloff offenbar durch seinen Lehrer Ljapunoff, der die schwierige Frage nach der Existenz normaler Ableitungen des Potentials einer Doppelschicht an dieser selbst, bei sehr allgemeinen Voraussetzungen hinsichtlich der Belegungsdichte, wesentlich gefördert hatte. Es gelingt Stekloff in weitem Umfange, die Existenzsätze, die jene Aufgaben im Prinzip und in etwas leerer Allgemeinheit lösen, auf den Fall auszudehnen, daß die begrenzende oder belegte Oberfläche eine, wie er es nennt, Ljapunoffsche Fläche ist: sind zwei ihrer Normalen unter dem Winkel ϑ gegeneinander geneigt und ist v der Abstand ihrer Fußpunkte, a eine Konstante der Fläche, so ist $\vartheta < av$; um jeden Punkt der Fläche kann ferner eine solche Kugel beschrieben werden, daß das innerhalb derselben liegende Stück der Fläche von Parallelen zur Normalen jenes Punktes nur einmal geschnitten wird. Diese Flächen erscheinen da, wo bei älteren Autoren häufig konvexe Flächen gefordert werden. Das Resultat kommt bei Stekloff selbst allmählich heraus auf dem Wege über Flächen, die eine gewisse von Poincaré angegebene Transformation gestatten.

Die Existenzfragen werden im allgemeinen zurückgeführt auf eine Differentialbeziehung von der Form der in der Potentialtheorie auf-

1) Rendiconti di Palermo 1894, Acta math. 20.

tretenden Oberflächengleichungen, die aber nach Hinzufügung eines willkürlichen Gliedes nicht mehr homogen bleiben, und in die man einen Parameter λ einführt, nach dessen Potenzen die unbekannte Funktion entwickelt wird. Die mittels der Rekursionsformeln von Robin und Neumann erhaltene Potenzreihe erweist sich, wenn man λ komplex nimmt, nach einer immer wieder angewandten Methode von Poincaré als Funktionselement einer meromorphen Funktion. In der Abhandlung (64) erscheint diese als Lösung einer nicht homogenen Integralgleichung, ohne daß die eigenen Hilfsmittel der Theorie der Integralgleichungen benutzt werden, die den geistreichen, aber schwierigen Beweis von Poincaré hätten ersetzen können. Die meromorphe Funktion stellt den Übergang dar zur Frage nach der Existenz der Eigenfunktionen, die im wesentlichen als Residuen der Pole jener Funktion erscheinen. Hier sind die Abhandlungen (42) und (64) maßgebend; das Werk von 1922 wollte diese Fragen einem dritten Teil vorbehalten, der nicht erschienen ist.

Die Arbeitsleistung, die in diesen auf die Existenzfragen bezüglichen Untersuchungen steckt, wird man sehr hoch anschlagen müssen; doch ist wohl nicht zu leugnen, daß das Interesse für diese Fragen bei den Mathematikern, nachdem eine gewisse allgemeine Gewissensberuhigung über die Existenz der fraglichen Gebilde eingetreten ist, merklich abgeflaut ist. Das hängt wohl damit zusammen, daß auch da, wo etwa nach C. Neumann bestimmte Algorithmen gegeben werden, die die gesuchten Größen darstellen, die erhaltenen Ausdrücke doch nicht zum Studium der Lösung spezieller Aufgaben geeignet sind. Dazu kommt, daß viele der hierher gehörigen älteren Untersuchungen durch die Theorie der Integralgleichungen überholt sind. Man wird daher den hierher gehörigen Arbeiten Stekloffs bei allem Respekt, den sie verlangen, und aller Anerkennung, die sie gefunden haben, nicht dieselbe Bedeutung zuerkennen wie denjenigen, über die wir in den Abschnitten II bis V berichtet haben. Die Darstellung willkürlicher Funktionen, die Abgeschlossenheit und was damit zusammenhängt, das ist es, womit Stekloff der mathematischen Wissenschaft unauslöschliche Spuren seiner Arbeit und seiner persönlichen Eigenart aufgeprägt hat.

Verzeichnis der Veröffentlichungen von W. Stekloff.

Die deutschen Überschriften sind mit einer Ausnahme (10) Übersetzungen aus dem Russischen. Folgende Abkürzungen werden gebraucht. 1. Charkow. Math. Ges. für Communications de la société mathématique de Kharkow, 2ème série; soobščenija Charjkowskago matematičeskago obščestva, wtoraja seria. 2. Mosk. Natf. für Arbeiten der physikalischen Abteilung der Moskauer Naturforschergesellschaft, obščestvo

ljubitelej jestestvoznanija. 3. Charkow Univ. für Zapiski Charjkovskago universiteta. 4. C. R. für Comptes rendus (Paris). 5. Mém. für Mémoires de l'académie impériale des sciences de St. Pétersbourg, Classe physico-mathématique. 6. Bull. (6) für Bulletin de l'académie des sciences de l'URSS sér. 6; Izvestija akademii nauk SSSR; ebenso für Bulletin de l'académie impériale des sciences de St. Pétersbourg.

1. Über die Interpolation einiger Produkte. — Charkow. Math. Ges. 1889, 10 S. 1889.
2. Über die oberen und unteren Schranken der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen und ihre Trennung. — Charkow. Math. Ges. 1890, 23 S. 1890.
3. Über die Bewegung eines schweren, starren Körpers in einer Flüssigkeit. (1. Abhandlung.) — Charkow. Math. Ges. 1891, 27 S. 1891.
4. Über die Bewegung eines schweren, starren Körpers in einer Flüssigkeit. (2. Abhandlung.) — Charkow. Math. Ges. 1891, 9 S.
5. Eine Aufgabe aus der Theorie der Elastizität. — Charkow. Math. Ges. 1891, 34 S.
6. Über das Gleichgewicht elastischer, zylindrischer Körper. — Charkow. Math. Ges. 1891, 52 S.
7. Über das Gleichgewicht elastischer Rotations-Körper. — Charkow. Math. Ges. 1892, 79 S. 1892.
8. Über die Bewegung eines starren Körpers in einer Flüssigkeit. (Dissertation für den Grad eines Magisters der angewandten Mathematik.) — Charkow. Univ. 1893, 234 u. 16 S. 1893.
9. Über die Bewegung eines schweren Körpers in einer Flüssigkeit. — Charkow. Math. Ges. 1893, 2 S.
10. Über die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit. — Math. Ann. Bd. 42, 1893, 2 S.
11. Ergänzende Bemerkung zu der Arbeit über die Bewegung eines starren Körpers in einer Flüssigkeit. — Charkow. Univ. 1894, 4 S. 1894.
12. Über einige mögliche Bewegungen eines starren Körpers in einer Flüssigkeit. — Mosk. Natf. 1895, 49 S. 1895.
13. Über die Differentialgleichungen der mathematischen Physik. — Matematičeskij Sbornik 1896, 117 S. 1896.
14. Ein Fall von Bewegung eines schweren Körpers mit einem festen Punkte. — Mosk. Natf. 1896, 9 S.
15. Über die Entwicklung einer gegebenen Funktion in eine Reihe nach harmonischen Funktionen. — Charkow. Math. Ges. 1896, 16 S.
16. Aufgaben über die Abkühlung eines heterogenen, starren Stabes. — Charkow. Math. Ges. 1896, 46 S.
17. Ein Fall von Bewegung einer zähen, unzusammendrückbaren Flüssigkeit. — Charkow. Math. Ges. 1896, 26 S.
18. La méthode de Neumann et le problème de la distribution de l'électricité. — CR. und Eclairage électrique, Paris. 1897, 3 S. 1897.
19. Sur le problème de la distribution de l'électricité. — Charkow. Math. Ges. 1897, 6 S.
20. Zu einem Theorem von Kirchhoff. — Charkow. Univ. 1897, 12 S.
21. Zur Frage nach der Existenz einer in einem gegebenen Gebiet endlichen und stetigen Funktion der Koordinaten, die der Laplaceschen Gleichung genügt bei gegebenen Werten der normalen Ableitung an der das Gebiet begrenzenden Oberfläche. — Charkow. Math. Ges. 1897, 32 S.
22. Über die Entwicklung einer gegebenen Funktion in eine Reihe nach harmonischen Funktionen. — Charkow. Math. Ges. 1897, 68 S.

23. Über eine Transformation der Differentialgleichungen der Bewegung eines freien materiellen Punktes in der Ebene und ihre Anwendungen. — Mosk. Natf. 1897, 36 S.
24. Arbeit und Brotpreise. (Aus Anlaß der Abhandlung von N. F. Annensky: „Die Preise der landwirtschaftlichen Arbeit im Zusammenhang mit den Ernteergebnissen und die Brotpreise.") — Nowoje Obozrenie. 1897, St. Petersburg, 17 S.
25. Zu einer Streitfrage über den Einfluß der Brotpreise auf einige Seiten der russischen Volkswirtschaft. — Nowoje Obozrenie. 1897. St. Petersburg, 12 S.
26. Sur le problème de refroidissement d'une barre hétérogène. — CR., Paris. 1898, 4 S. 1898.
27. Sur un problème de la théorie analytique de la chaleur. — CR., Paris. 1898, 3 S.
28. Zur Aufgabe über das Gleichgewicht elastischer, isotroper Zylinder. — Charkow. Math. Ges. 1898, 34 S.
29. Sur le développement d'une fonction donnée suivant les fonctions harmoniques. — CR., Paris. 1899, 3 S. 1899.
30. Sur les problèmes fondamentaux de la Physique mathématique. — CR., Paris. 1899, 3 S.
31. Sur l'existence des fonctions fondamentales. — CR., Paris. 1899, 3 S.
32. Sur la théorie des fonctions fondamentales. — CR., Paris. 1899, 3 S.
33. Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. (Note I.) — CR., Paris. 1899, 3 S.
34. Sur les problèmes de Neumann et de Gauss. — CR., Paris. 1899, 3 S.
35. Neue partikuläre Lösung der Differentialgleichungen der Bewegung eines schweren, starren Körpers mit einem festen Punkt. — Mosk. Natf. 1899, 9 S.
36. Remarque relative à une Note de M. A. Korn: Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. — CR., Paris. 1900, 2 S. 1900.
37. Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. (Note II.) — CR., Paris. 1900, 4 S.
38. Le problème des températures stationnaires. — CR., Paris. 1900, 4 S.
39. Sur les fonctions fondamentales et le problème de Dirichlet. — CR., Paris. 1900, 4 S.
40. Sur la méthode de la moyenne arithmétique de Neumann. (Note I.) — CR., Paris 1900, 4 S.
41. Sur la méthode de la moyenne arithmétique de Neumann. (Note II.) — CR., Paris. 1900, 4 S.
42. Les méthodes générales pour résoudre les problèmes fondamentaux de la Physique mathématique. — Ann. de la Faculté des sciences de Toulouse, 2 sér., t. II, 1900, 65 S.
43. Mémoire sur les fonctions harmoniques de M. H. Poincaré. — Ann. de la Fac. Sc. de Toulouse, 2 sér., t. II, 1900, 30 S.
44. Problème de refroidissement d'une barre hétérogène. — Ann. de la Fac. Sc. de Toulouse, 2 sér., t. III, 1901, 33 S. 1901.
45. Allgemeine Methoden zur Lösung der Grundaufgaben der mathematischen Physik. (Dissertation für den Grad eines Doktors der angewandten Mathematik). — Charkow. 1901, 291 S.; herausgegeben von der Chark. Math. Ges.
46. Sur certaines égalités remarquables. — CR., Paris. 1902, 3 S. 1902.
47. Remarque sur un problème de Clebsch sur le mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini et sur le problème de M. Bruns. — CR., Paris. 1902, 3 S.
48. Sur la représentation approchée des fonctions. — CR., Paris. 1902, 4 S.

49. Remarques relatives à ma note: „Sur la représentation approchée des fonctions." — CR., Paris. 1902, 3 S.
50. Sur quelques conséquences de certains développements en séries analogues aux développements trigonométriques. — CR., Paris. 1902. 4 S.
51. Sur le développement d'une fonction donnée en séries procédant suivant les polynomes de Tchébicheff et, en particulier, suivant les polynomes de Jacobi. — J. f. reine u. angew. Mathem., Bd. CXXV, Heft 3, Berlin. 1902, 30 S.
52. Mémoire sur le mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini. — Ann. de la Fac. Sc. de Toulouse, 2 sér., t. IV, 1902, 43 S.
53. Sur les problèmes fondamentaux de la Physique mathématique. — Ann. de l'Ecole normale, 3 sér., t. XIX, Paris. 1902, 68 + 75 S.
54. Sur une propriété remarquable de plusieurs développements souvent employés dans l'Analyse. — CR., Paris. 1903, 4 S. 1903.
55. Sur le développement d'une function donnée en série procédant suivant les polynomes de Jacobi. — CR., Paris. 1903, 3 S.
56. Sur la théorie des séries trigonométriques. — Bull. de l'Acad. de Cracovie, 1903, 27 S.
57. Addition au mémoire: „Sur la théorie des séries trigonométriques." — Bull. de l'Acad. de Cracovie, 1903, 4 S.
58. Sur la théorie générale des fonctions fondamentales. — CR., Paris. 1904, 3 S. 1904.
59. Sur une égalité générale commune à toutes les fonctions fondamentales. — CR., Paris. 1904, 3 S.
60. Remarques relatives aux formules sommatoires d'Euler et de Boole. — Charkow. Math. Ges. 1904, 60 S.
61. Sur certaines égalités générales communes à plusieurs séries de fonctions souvent employées dans l'Analyse. — Mém. VIII sér., Ph.-M., t. XV, Nr. 7, 1904, 32 S.
62. Sur le problème du mouvement d'un ellipsoïde fluide homogène dont toutes les parties s'attirent suivant la loi de Newton. — CR., Paris. 1905, 2 S. 1905.
63. Sur le mouvement non stationnaire d'un ellipsoïde fluide de révolution qui ne change pas sa figure pendant le mouvement. (Note I.) — CR., Paris, 1905, 3 S.
64. Théorie générale des fonctions fondamentales. — Ann. de la Fac. Sc. de Toulouse, 2 sér., t. VI, 1905, 125 S.
65. Sur le mouvement non stationnaire d'un ellipsoïde etc. (Note II.). — CR., Paris. 1906, 3 S. 1906.
66. Sur un problème d'Analyse intimement lié avec le problème de refroidissement d'une barre hétérogène. — CR., Paris. 1907. 4 S. 1907.
67. Sur une méthode nouvelle pour résoudre plusieurs problèmes sur le développement d'une fonction arbitraire en séries infinies. — CR., Paris. 1907. 4 S.
68. Sur les expressions asymptotiques de certaines fonctions, définies par les équations différentielles du second ordre et leurs applications au problème du développement d'une fonction arbitraire en séries procédant suivant les dites fonctions. — Charkow. Math. Ges. 1907, 104 S.
69. Remarque complémentaire au mémoire: „Les expressions asymptotiques etc." — Charkow. Math. Ges. 1908, 2 S. 1908.
70. Sur la théorie des tourbillons. — Ann. de la Fac. Sc. de Toulouse, 2 sér., t. X, 1908, 64 S.
71. Problème du mouvement d'une masse fluide incompressible de la forme ellipsoïdale dont les parties s'attirent suivant la loi de Newton. (2 parties.) — Ann. de l'Ecole normale, 3 sér., t. XXV, XXVI, Paris. 1908—1909, 60 + 62 S.

72. Sur une généralisation d'un théorème de Jacobi. — CR., Paris. 1909, 3 S. 1909.
73. Application d'un théorème généralisé de Jacobi au problème de Lie-Mayer. — CR., Paris. 1909, 3 S.
74. Application du théorème généralisé de Jacobi au problème de Jacobi-Lie. — CR., Paris. 1909, 3 S.
75. Sur le théorème de l'existence des fonctions implicites. — CR., Paris. 1909, 3 S.
76. Sur un théorème général d'existence des fonctions fondamentales correspondant à une équation différentielle linéaire du second ordre. — CR., Paris, 1910. 3 S. 1910.
77. Sur le développement d'une fonction arbitraire en séries procédant suivant certaines fonctions fondamentales. — CR., Paris. 1910, 3 S.
78. Une application nouvelle de ma méthode de développement des fonctions fondamentales. — CR., Paris. 1910, 3 S.
79. Sur la condition de fermeture des systèmes de fonctions orthogonales. — CR., Paris. 1910, 3 S.
80. Sur l'existence des fonctions fondamentales correspondant à une équation différentielle linéaire du second ordre. — Mem. Accad. Lincei, Roma. 1910, 18 S.
81. Sur le mouvement d'un corps solide ayant une cavité de forme ellipsoïdale remplie par un liquide incompressible et sur les variations des latitudes. — Ann. de la Fac. Sc. de Toulouse, 3 sér., t. I, 1910, 112 S.
82. Solution générale du problème de développement d'une fonction arbitraire en série suivant les fonctions fondamentales de Sturm-Liouville. — Rendiconti Accad. Lincei, Roma. 1910, 6 S.
83. Remarque relative à ma note: „Solution générale du problème de développement etc." — Rendiconti Accad. Lincei, Roma. 1911, 3 S. 1911.
84. Problème des vibrations transversales d'une verge élastique homogène. (Zusammen mit J. D. Tamarkin.) — Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXXI, 1° sem. 1911, 22 S.
85. Zur Theorie der Abgeschlossenheit der Systeme orthogonaler Funktionen, die von beliebig vielen Veränderlichen abhängen. — Bull. (6). 1911, Nr. 10.
86. Sur la théorie de fermeture des systèmes de fonctions orthogonales dépendant d'un nombre quelconque des variables. — Mém., VIII sér., Ph.-M., t. XXX, Nr. 4, 1911, 86 S.
87. Über einige Aufgaben der Analysis, die mit vielen Aufgaben der mathematischen Physik zusammenhängen. — Bull. (6). 1912, Nr. 16, 4 S. 1912.
88. Henri Poincaré. (Nekrolog.) — Journal des Ministeriums der Volksaufklärung. 1913, Nr. 1. 1913.
89. Über eine Anwendung der Theorie der Abgeschlossenheit auf die Aufgabe von der Entwicklung willkürlicher Funktionen in Reihen nach den Tschebyscheffschen Polynomen. — Bull. (6). 1913, Nr. 3, 6 S.
90. Sur certaines questions d'Analyse qui se rattachent à plusieurs problèmes de Physique mathématique. — Mém., VIII sér., Ph.-M., t. XXXI, Nr. 7, 1913, 85 S.
91. Sur une formule générale de l'Analyse et ses diverses applications. — Ann. Matem. pura et applicata, Ser. 3, Bd. 21. Milano. 1913, 30 S.
92. Die Dreihundertjahrfeier der Entdeckung der Logarithmen in Edinburgh. — Bull. (6). t. VIII (1914) S. 1133.
93. Sur une application de la théorie de fermeture au problème du développement des fonctions arbitraires en séries procédant suivant les polynomes de Tchébicheff. — Mém., VIII sér., Ph.-M., 1914, 59 S. 1914.

94. Quelques applications nouvelles de la théorie de fermeture au problème de représentation approchée des fonctions et au problème des moments. — Mém., VIII sér., Ph.-M., 1914, 70 S.
95. Zu einer Aufgabe von Laplace. — Bull. (6), t. IX (1915), S. 1515.
96. Application de la théorie de la fermeture à la solution de certaines questions qui se rattachent au problème des moments. — Mém. t. XXIII, Nr. 9, 1915. 1915.
97. Sur la théorie de la fermeture. — Bull. (6), t. X, (1916), S. 219. 1916.
97a. Sur quelques applications d'une identité élémentaire. — Mém. t. XXIV, Nr. 2, 1916.
98. Quelques remarques complémentaires relatives à la théorie de fermeture. — Bull. (6), t. X, (1916), S. 257.
99. Sur le calcul approché des intégrales définies à l'aide des quadratures dites mécaniques. — Bull. (6), t. X, (1916), S. 169.
100. Théorème de fermeture pour les polynomes de Laplace-Hermite-Tchébycheff. — Bull. (6), t. X, (1916), S. 403.
101. Théorème de fermeture pour les polynomes de Tchébycheff-Laguerre. — Bull. (6), t. X, (1916), S. 633.
102. Sur le développement des fonctions arbitraires en séries de polynomes de Tchébycheff-Laguerre. — Bull. (6) t. X (1916), S. 719.
103. Sur le calcul etc. (Fortsetzung von Nr. 99.) — Bull. (6), t. XI, (1917), S. 169. 1917.
104. Sur l'approximation des fonctions à l'aide des polynomes de Tchébycheff et sur les quadratures. — Bull. (6), t. XI, (1917), I: S. 194, II: S. 535, III: S. 687.
105. Remarques sur les quadratures. — Bull. (6), t. XII (1918), S. 99. 1918.
106. Ergänzende Bemerkungen über die Quadraturen. — Bull. (6), t. XII (1918), S. 587.
107. Sur les quadratures I. — Bull. (6), t. XII, (1918), S. 1859.
108. Sur les quadratures II. — Bull. (6), t. XIII, (1919), S. 65. 1919.
109. Alexander Michailowitsch Ljapunoff. — Bull. (6), t. XIII, (1919), S. 367.
110. Sur le développement des fonctions continues en séries de polynomes de Tchébycheff. — Bull. (6), t. XV, (1921), S. 240. 1921.
111. Une contribution nouvelle au problème du développement des fonctions arbitraires en séries de polynomes de Tchébycheff. — Bull. (6), t. XV (1921), S. 267.
112. Une méthode de la solution du problème de développement des fonctions en séries de polynomes de Tchébycheff indépendante de la théorie de fermeture. — Bull. (6), t. XV, (1921), I: S. 281, II: S. 303.
113. Theorie und Praxis in den Untersuchungen von Tschebyscheff. — St. Petersburg 1921. Rede zur hundertjährigen Gedenkfeier des Geburtstages von Tschebyscheff.
114. Andrej Andrejewitsch Markow. — Bull. (6), t. XVI, (1922), S. 169. 1922.
115. Michail Wassiljewitsch Lomonossoff; Berlin, Leningrad, Moskau, bei Grshebin, Staatlicher Verlag Gossizdat. 1922. 202 S.
116. Die Grundaufgaben der mathematischen Physik. Teil I, Petersburg 1922: Grundaufgaben der mathematischen Physik für lineare Körper. 285 S. — Teil II, Petersburg 1923: Grundaufgaben der mathematischen Physik für Körper von drei Dimensionen. 285 S. — V. A. Steklov, Osnovnyje zadači matematičeskoj fiziki. Petersburg 1922, 1923.
117. Sopra la teoria delle quadrature dette meccaniche. — Rendiconti dell' Acc. dei Lincei. 1923.
118. W. Thomson, (Lord Kelvin), Der Mathematiker, Physiker, Philosoph. Festrede. — Journal Električestvo. 1924.

119. Théorie de fermeture et le problème de représentation approchée des fonctions continues à l'aide des polynomes de Tchébychef. — Acta math. Bd. 49. 1926.
120. Sur le problème d'approximation des fonctions arbitraires à l'aide des polynomes de Tchébychef. — Bull. (6) t. XX, (1926), S. 859. 1926.
120a. Grundlagen der Theorie der Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen. — Staatlicher Verlag Gossisdat. 1927.
Abhandlungen zur Universitäts-Frage in den Arbeiten der Konferenz zur Ausarbeitung eines Universitäts-Statuts bei dem Ministerium der Volksaufklärung, 1906:
121. Über die Universitäts-Laboranten, Assistenten, die Gehilfen des Prosektors und die Privatdozenten. — 18 S.
122. Gelehrte Grade, Personalbestand, Wahlordnung und Dienstzeiten der Professoren und Studenten. — 5 S.
123. Über die Notwendigkeit, die Lehrstühle der Mathematik und Mechanik zu vereinigen unter dem Namen des Lehrstuhls der Mathematik. — 2 S.
124. Zur Frage über die Dienstzeit der Professoren und Privatdozenten. — 5 S.
125. Über zwei gelehrte Grade. (Separatvotum.) — 9 S.

(Eingegangen am 21. 6. 1928.)

Über ein trigonometrisches Analogon eines Kakeyaschen Satzes.

Von Leopold Fejér in Budapest.

Einleitung.

1. Multipliziert man die ganze rationale Funktion der komplexen Veränderlichen z

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n \tag{1}$$

mit beliebigen komplexen Koeffizienten mit dem Faktor $1 - z$, so entsteht

$$(1-z)f(z) = c_0 - (c_0 - c_1)z - (c_1 - c_2)z^2 - \cdots - (c_{n-1} - c_n)z^n - c_n z^{n+1}. \tag{2}$$

Ist nun

$$\begin{cases} c_n > 0 \\ c_{n-1} - c_n \geqq 0 \\ c_{n-2} - c_{n-1} \geqq 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_0 - c_1 \geqq 0, \end{cases} \tag{3}$$

d. h. besteht die Koeffizientenfolge

$$c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n \tag{4}$$

des Polynoms (1) aus positiven Zahlen, die eine nichtwachsende Folge bilden, so ergibt sich aus (2) mit Leichtigkeit, daß die Gleichung

$$f(z) = 0 \tag{5}$$

für $|z| < 1$ keine Wurzel hat.

Ist in (3) überall das Zeichen der Ungleichheit gültig, so hat die Gleichung (5) sogar für $|z| \leqq 1$ keine Wurzel.

Dies ist der bekannte Kákeyasche Satz mit seinem bekannten Beweise.[1])

2. Ist nun

$$(6)\qquad \varphi(\theta) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\theta + a_2 \cos 2\theta + \cdots + a_n \cos n\theta$$

ein beliebiges Kosinuspolynom, und multipliziert man es mit $1 - \cos\theta$, so erhält man, mit Rücksicht auf

$$\cos\theta \cos k\theta = \tfrac{1}{2}\{\cos(k-1)\theta + \cos(k+1)\theta\},$$

die Identität

$$(7)\quad (1-\cos\theta)\,\varphi(\theta) = \frac{a_0}{2} - \frac{a_1}{2} - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2} - a_k\right)\cos k\theta$$
$$- \left(\frac{a_{n-1}}{2} - a_n\right)\cos n\theta - \frac{a_n}{2}\cos(n+1)\theta,$$

die gewissermaßen das trigonometrische Analogon der Identität (2) darstellt.

In diesen Zeilen möchte ich nun einige Konsequenzen dieser Identität ableiten.

§ 1. Das Koeffizientenpolygon eines Kosinuspolynoms. Der Fall des konvexen Polygons.

3. Es sei

$$(8)\qquad \varphi(\theta) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\theta + a_2 \cos 2\theta + \cdots + a_n \cos n\theta$$

ein beliebiges Kosinuspolynom mit reellen Koeffizienten. In einer Ebene mit einem Descartesschen Koordinatensystem markiere ich die Punkte

$$(9)\qquad P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n, P_{n+1}, P_{n+2}$$

mit den Koordinaten

$$(10)\quad (0, a_0),\ (1, a_1),\ (2, a_2), \ldots, (n, a_n),\ (n+1, 0),\ (n+2, 0)$$

1) S. Kakeya, On the limits of the roots of an algebraic equation with positive coefficients. The Tôhoku Mathematical Journal, Bd. 2, S. 140—142, 1912. E. Landau, Abschätzung der Koeffizientensumme einer Potenzreihe. (Zweite Abhandlung.) Archiv der Mathematik und Physik, III. Reihe, Bd. XXI, S. 250—255; insbes. Nr. 3, Nr. 4. E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, Berlin 1916, S. 20. Vgl. weiter G. Eneström, Härledning af en allmän formel etc. Öfversigt af Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Förhandelingar, Bd. 50, S. 405—415 (1893), und G. Eneström, Remarque sur un théorème relatif aux racines de l'équation etc. The Tôhoku Math. Journal, Bd. 18, S. 34—36 (1920).

und verbinde, durch geradlinige Strecken, P_0 mit P_1, P_1 mit $P_2, \ldots,$ P_{n-1} mit P_n, P_n mit P_{n+1}, P_{n+1} mit P_{n+2}. Den so entstehenden, aus geradlinigen Strecken zusammengesetzten Linienzug P nenne ich „das Koeffizientenpolygon von $\varphi(\theta)$", oder auch kürzer „das Polygon von $\varphi(\theta)$". P_0 heiße der Anfangspunkt, P_{n+2} der Endpunkt des Polygons, und $P_1, P_2, \ldots, P_n, P_{n+1}$ sollen die Eckpunkte des Polygons heißen. P_k $(k = 1, 2, \ldots, n, n+1)$ soll eigentlicher Eckpunkt heißen, wenn die Strecke $P_k P_{k+1}$ nicht die Verlängerung von $P_{k-1}P_k$ ist, und uneigentlicher Eckpunkt im entgegengesetzten Falle.

Multipliziert man $\varphi(\theta)$ mit $1 - \cos\theta$, so entsteht, laut (7),

$$(11)\quad (1 - \cos\theta)\,\varphi(\theta) = \lambda_0 - \lambda_1 \cos\theta - \lambda_2 \cos 2\theta - \cdots - \lambda_n \cos n\theta - \lambda_{n+1} \cos(n+1)\theta,$$

wo

$$\begin{cases} (12)\quad \lambda_0 = \frac{a_0}{2} - \frac{a_1}{2}, \\ (13)\quad \lambda_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} - a_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1 \\ (14)\quad \lambda_n = \frac{a_{n-1} + 0}{2} - a_n = \frac{a_{n-1}}{2} - a_n, \\ (15)\quad \lambda_{n+1} = \frac{a_n + 0}{2} - 0 = \frac{a_n}{2}. \end{cases}$$

Auf Grund von Nr. 1 der Einleitung kann ich vermuten, daß ich eine besonders merkwürdige spezielle Klasse von trigonometrischen Kosinuspolynomen erhalte, wenn ich die $n+1$ Forderungen

$$(16)\quad \lambda_1 \geqq 0,\ \lambda_2 \geqq 0, \ldots, \lambda_{n-1} \geqq 0,\ \lambda_n \geqq 0,\ \lambda_{n+1} \geqq 0 \qquad \text{stelle.}$$

Da ich $a_n = 0$ von vornherein ausschließen möchte, so ersetze ich diese Forderung gleich durch die stärkere

$$(17)\quad \lambda_1 \geqq 0,\ \lambda_2 \geqq 0, \ldots, \lambda_{n-1} \geqq 0,\ \lambda_n \geqq 0,\ \lambda_{n+1} = \frac{a_n}{2} > 0.$$

(16) besagt, mit Rücksicht auf (13), (14), (15), daß das Polygon P von (8), von unten gesehen, *konvex* (nichtkonkav) ist. Da $P_{n+1}P_{n+2}$ die Strecke der Abszissenachse zwischen $n+1$ und $n+2$ darstellt, so sind eben deshalb $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ nicht negativ und monoton fallend (wobei aber $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$ nicht ausgeschlossen ist).

Aus (17) folgt zunächst wieder die Konvexität des Polygons P, außerdem aber, daß die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ voneinander verschiedene positive, monoton fallende Zahlen sind, d. h.

$$(18)\quad a_0 > a_1 > \cdots > a_n > 0.$$

Es sei speziell hervorgehoben, daß aus $a_0 > a_1$

(19) $$\lambda_0 = \frac{a_0}{2} - \frac{a_1}{2} > 0 \quad \text{folgt.}$$

Da, wegen der Konvexität von P, das Polygon $P_0 P_1 \ldots P_{n-1}$ keinen Punkt unterhalb der nach rückwärts verlängerten Strecke $P_n P_{n+1}$ haben kann, so gilt für die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ die folgende Limitation nach unten

(20) $$\begin{cases} a_n = a_n > 0 \\ a_{n-1} \geqq 2a_n \\ a_{n-2} \geqq 3a_n \\ \vdots \\ a_1 \geqq n a_n \\ a_0 \geqq (n+1) a_n. \end{cases}$$

Andererseits gilt die Limitation nach oben

$$a_k \leqq \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) a_0, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Ein Kosinuspolynom (8), dessen Koeffizienten den Bedingungen (17) genügen, nenne ich „ein Polynom mit konvexem Koeffizientenpolygone".

Ist $a_n > 0$ gegeben, so lautet dasjenige Polynom $\varphi(\theta)$ mit konvexem Polygone[1]), für welches alle Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ (gleichzeitig) möglichst klein sind,

(21) $$\psi(\theta) = a_n \{(n+1) \cdot \tfrac{1}{2} + n \cos\theta + \cdots + \cos n\theta\}.$$

§ 2. Nichtnegativität eines Kosinuspolynoms mit konvexem Polygone.

4. Satz I. *Ein Kosinuspolynom mit konvexem Koeffizientenpolygone ist für jeden reellen Wert der unabhängigen Veränderlichen nichtnegativ.*[2])

1) Für $\psi(\theta)$ besteht $P_0 P_1 P_2 \ldots P_{n+1}$, falls etwa $a_n = 1$ ist, aus einer geradlinigen Strecke, die die Punkte $(0, n+1)$, $(n+1, 0)$ verbindet. Das erste Kosinuspolynom mit konvexem Koeffizientenpolygone, auf welches ich (im Jahre 1900) gestoßen bin, ist eben das Polynom $\psi(\theta)$ unter (21).

2) L. Fejér, Über die Positivität von Summen, die nach trigonometrischen oder Legendreschen Funktionen fortschreiten. (Erste Mitteilung). Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae, 1925, Bd. 3, S. 75—86; insbesondere Theorem II, S. 78. Hier wird die Nichtnegativität des speziellen Polynoms mit konvexem Polygone

$$\psi(\theta) = (n+1) \cdot \tfrac{1}{2} + n \cos\theta + \cdots + \cos n\theta$$

Beweis. Für $\theta = 0$ ist der Satz klar, da doch, mit Rücksicht auf (8) und (20)

$$\varphi(0) = \frac{a_0}{2} + a_1 + \cdots + a_n \geqq a_n\left(\frac{n+1}{2} + n + \cdots + 1\right) > 0. \tag{22}$$

Für $0 < \theta < 2\pi$ liefert die Identität (11), mit Rücksicht auf (17) und (19),

$$(1 - \cos\theta)\,\varphi(\theta) \geqq \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 - \cdots - \lambda_{n+1}. \tag{23}$$

Für $\theta = 0$ ergibt aber (11)

$$0 = \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 - \cdots - \lambda_{n+1}, \tag{24}$$

also ist

$$(1 - \cos\theta)\,\varphi(\theta) \geqq 0, \tag{25}$$

d. h., da

$$0 < \theta < 2\pi,$$

$$\varphi(\theta) \geqq 0, \quad \text{w. z. b. w.} \tag{26}$$

Aus dem Satze I ist zu ersehen, daß die hier betrachtete Klasse der Kosinuspolynome mit konvexem Koeffizientenpolygone eine zwar sehr spezielle, aber, wie ich glaube, interessante *Unterklasse* in der Gesamtheit der nichtnegativen Kosinuspolynome bildet. Ich erinnere daran, daß die Gesamtheit der nichtnegativen Kosinuspolynome durch das Formelsystem

$$\begin{cases} \frac{a_0}{2} = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \\ \frac{a_1}{2} = x_0x_1 + x_1x_2 \quad + \cdots + x_{n-1}x_n \\ \frac{a_2}{2} = x_0x_2 + x_1x_3 \quad + \cdots + x_{n-2}x_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{a_n}{2} = x_0x_n \end{cases} \tag{27}$$

dargestellt wird, wo $x_0, x_1, \ldots, x_n$, voneinander unabhängig, sämtliche reellen Werte durchlaufen.[1])

auf Grund der *Ausrechnung*

$$\varphi(\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2$$

als bekannt vorausgesetzt, und daraus, durch Abelsche Umformung, der Satz I — das trigonometrische Analogon des Kakeyaschen Satzes — abgeleitet. Im Beweise des Textes ist das einzige *rechnerische* Element in der Identität (7) gelegen.

1) L. Fejér, Über trigonometrische Polynome, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 146, S. 53—82; insbesondere S. 64, Nr. 7.

§ 3. Über das Verschwinden eines Kosinuspolynoms mit konvexem Polygone.

5. Satz II. *Ein beliebiges Kosinuspolynom mit konvexem Koeffizientenpolygone kann im Intervalle* $0 < \theta < 2\pi$ *nur für*

$$\left\{\begin{array}{l}\theta_k = k\dfrac{2\pi}{n+1},\\ k = 1, 2, \ldots, n \qquad \textit{verschwinden.}\end{array}\right. \tag{28}$$

Beweis. In der Ungleichung (26) kann für einen Wert von θ, der $0 < \theta < 2\pi$ befriedigt, nur dann das Zeichen der Gleichheit gelten, wenn $\cos(n+1)\theta = 1$ ist. Da nämlich, nach Voraussetzung, $\lambda_{n+1} = \frac{a_n}{2}$ positiv ist, so ist, falls $\cos(n+1)\theta < 1$, die rechte Seite der Ungleichung (23) tatsächlich kleiner als die linke Seite, d. h.

$$(1 - \cos\theta)\,\varphi(\theta) > 0, \qquad \text{d. h.} \tag{29}$$

$$\varphi(\theta) > 0. \tag{30}$$

Hiermit ist aber der Satz II schon bewiesen.

6. Es gibt ein Kosinuspolynom mit konvexem Polygone, welches an allen Stellen (28) verschwindet. In der Tat hat

$$\psi(\theta) = c\left(\frac{n+1}{2} + n\cos\theta + \cdots + \cos n\theta\right) \tag{31}$$

ein konvexes Polygon und verschwindet an den Stellen (28), was aus der Identität (7) unmittelbar folgt. Hier bezeichnet c eine willkürliche positive Konstante.

Es gibt aber kein anderes Kosinuspolynom mit konvexem Koeffizientenpolygone als (31), welches an *allen* Stellen (28) verschwinden würde. Denn verschwindet ein solches Polynom für $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$, so muß es an diesen Stellen mindestens *doppelt* verschwinden, da es doch, nach Satz I, niemals negativ werden kann. Dadurch ergibt sich aber für dieses Kosinuspolynom die Form (31).

7. Satz III. *Verschwindet ein Kosinuspolynom* $\varphi(\theta)$ *mit konvexem Polygone für einen Wert von* θ, *dann sind diejenigen unter den Polygoneckpunkten*

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, \tag{32}$$

deren Index zu $n+1$ *relativ prim ist, uneigentlich; d. h. in der Folge unter* (13), (14)

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$$

verschwinden alle diejenigen λ, *deren Index zu* $n+1$ *relativ prim ist.*

Beweis. Nach Satz II kann unser $\varphi(\theta)$ nur für

(33) $$\theta_k = k\frac{2\pi}{n+1}$$

verschwinden, wo k eine der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ bezeichnet. Dann ist aber

(34) $$\cos \nu\theta_k = \cos \nu k \frac{2\pi}{n+1} < 1,$$

falls $(\nu, n + 1) = 1$. Wäre also $\lambda_\nu > 0$, so wäre in (23) das Zeichen $>$ gültig, also $\varphi(\theta_k) > 0$. Also muß $\lambda_\nu = 0$ sein, w. z. b. w.

8. Da 1 und n relativ prim sind zu $n + 1$, so muß, falls $\varphi(\theta)$ verschwindet, jedenfalls

(35) $$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_n = 0$$

sein, d. h. P_1 und P_n müssen uneigentliche Eckpunkte sein.

Beispiel:

(36) $$\varphi(\theta) = \tfrac{6}{2} + 4\cos\theta + 2\cos 2\theta + \cos 3\theta.$$

Hier ist
$$\lambda_1 = \frac{6+2}{2} - 4 = 0$$
$$\lambda_2 = \frac{4+1}{2} - 2 = \frac{1}{2}$$
$$\lambda_3 = \frac{2+0}{2} - 1 = 0$$
$$\lambda_4 = \frac{1+0}{2} - 0 = \frac{1}{2},$$

also hat (36) ein konvexes Polygon. Da 1 und 3 zu $n + 1 = 4$ relativ prim sind und $\lambda_1 = 0$, $\lambda_3 = 0$ ist, so ist die Möglichkeit des Verschwindens von (36) vorhanden. Tatsächlich ist, nach (11), da hier

$$\lambda_0 = \frac{a_0}{2} - \frac{a_1}{2} = \frac{6}{2} - \frac{4}{2} = 1$$ ist,

(37) $$(1 - \cos\theta)\,\varphi(\theta) = \lambda_0 - \lambda_1\cos\theta - \lambda_2\cos 2\theta - \lambda_3\cos 3\theta - \lambda_4\cos 4\theta = 1 - \tfrac{1}{2}\cos 2\theta - \tfrac{1}{2}\cos 4\theta,$$

woraus man sieht, daß

(38) $$\varphi(\pi) = 0$$

ist, während $\varphi(\theta)$ an den Stellen $\theta = \frac{\pi}{2}$ und $3\,\frac{\pi}{2}$, an welchen es, nach Satz II, noch verschwinden könnte, größer als Null ist.

9. Die Bemerkung von Nr. 8 lautet, etwas anders formuliert: Ist

einer[1]) der zwei Eckpunkte P_1, P_n eigentlich, so ist $\varphi(\theta)$ für jedes θ *positiv*. Also speziell:

Satz IV. *Ist das Polygon P von $\varphi(\theta)$ eigentlich konvex, so ist $\varphi(\theta)$ für jedes θ positiv.*

Das Polygon P nenne ich eigentlich konvex, wenn *sämtliche* Eckpunkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ eigentlich sind. (P_{n+1} ist es von selbst.)

10. Schließlich erwähne ich noch den folgenden Spezialfall[2]) des Satzes III.

Satz V. *Ist $n+1$ eine Primzahl, und das Koeffizientenpolygon des Kosinuspolynoms $\varphi(\theta)$ konvex, so ist $\varphi(\theta)$ entweder für jedes θ positiv, oder*

(39) $$\varphi(\theta) = c\{(n+1)\tfrac{1}{2} + n\cos\theta + \cdots + \cos n\theta\}, \qquad c > 0.$$

Da nämlich jetzt $1, 2, 3, \ldots, n$ zu $n+1$ relativ prim sind, so muß, nach Satz III, falls $\varphi(\theta)$ überhaupt verschwindet,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

sein, d. h. $P_0 P_1 \ldots P_n P_{n+1}$ besteht aus der Strecke, die die Punkte $(0, n+1)$, $(n+1, 0)$ verbindet. Hieraus folgt aber für das verschwindende $\varphi(\theta)$ die Form (39).

(Eingegangen am 28. 6. 1928.)

Ein Existenzbeweis für Systeme von Differentialgleichungen mit Hilfe der Methode von unendlichvielen Veränderlichen.

Von A. Hammerstein in Berlin.

Bekanntlich gilt für ein kanonisches System von Differentialgleichungen 1. Ordnung folgender Existenzsatz[3]):

Sind für $a < x < b$ die Funktionen $f_\varkappa(x, y_1, \ldots, y_n)$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, n$) bei festem $y_1, \ldots, y_n$ in x meßbar und in jedem $y_\varkappa$ stetig ($-\infty < y_\varkappa < \infty$), und gibt es eine über $a < x < b$ summierbare Funktion $M(x)$, so daß

$$|f_\varkappa(x, y_1, \ldots, y_n)| \leqq M(x) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$$

1) Z. B. hat

$$\varphi(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{1}{2^2}\cos 2\theta + \cdots + \frac{1}{2^n}\cos n\theta$$

offenbar ein konvexes Koeffizientenpolygon. Da aber $\lambda_1 = \frac{1+\frac{1}{4}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{8} > 0$, so ist $\varphi(\theta) > 0$ für jedes reelle θ.

2) Ich verdanke ihn einer mündlichen Mitteilung von Herrn J. v. Neumann.

3) Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen (1918), S. 666.

gilt, so existieren bei beliebigen reellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *in* $a < x < b$ *stetige Funktionen* $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, *welche die Gleichungen*

$$y_\varkappa(x) = \alpha_\varkappa + \int_a^x f_\varkappa(\xi, y_1(\xi), \ldots, y_n(\xi))\, d\xi \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$$

erfüllen.

Daraus folgt, daß bis auf eine Menge vom Maße 0

$$\frac{d y_\varkappa(x)}{d x} = f_\varkappa(x, y_1(x), \ldots, y_\varkappa(x)) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$$

ist.

Sind die Funktionen $f_\varkappa(x, y_1, \ldots, y_n)$ nur in einem endlichen Bereich $a < x < b$; $|y_\nu| \leqq h_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ erklärt, so können sie durch

$$f_\varkappa(x, y_1, \ldots, y_\lambda, \ldots, y_n) = f_\varkappa(x, y_1, \ldots, \pm h_\lambda, \ldots, y_n) \quad \text{für} \quad y_\lambda \gtrless h_\lambda$$

stetig für alle y_λ fortgesetzt werden.

Im folgenden wird ein Beweis dieses Satzes, unter Hinzunahme der Voraussetzung, daß die Funktion $M(x)$ nebst ihrem Quadrate summierbar ist, durch Zurückführung auf ein Gleichungssystem mit unendlichvielen Unbekannten erbracht.

Dieses Verfahren ist für spezielle Differentialgleichungen, besonders zur Lösung von Randwertaufgaben, häufig angewandt worden. Seine Brauchbarkeit für die Behandlung der Anfangswertaufgabe eines beliebigen kanonischen Systems von Differentialgleichungen 1. Ordnung soll hier gezeigt werden.

Der kürzeren Schreibweise halber wird die Untersuchung nur für *eine* Gleichung durchgeführt. Man sieht, daß sie für ein System wörtlich ebenso verläuft.

Im Intervall $0 < x < \pi$, was keine Beschränkung bedeutet, sei $f(x, y)$ meßbar in x und stetig in y.[1]) Ferner gelte

$$(1) \qquad |f(x, y)| \leqq M(x) \quad \text{mit} \quad \int_0^\pi M(x)^2\, dx = K.$$

---

1) Es darf vielleicht darauf hingewiesen werden, daß unter der Annahme, daß $f(x, y)$ für $a \leqq x \leqq b$, $|y| \leqq h$ in beiden Veränderlichen x und y stetig ist, die Existenz einer Lösung sofort mit Hilfe der Lipschitz-Bedingung bewiesen werden kann. Man braucht nur $f(x, y)$ in $a \leqq x \leqq b$, $|y| \leqq h$ gleichmäßig durch eine Folge von einer Lipschitz-Bedingung genügenden Funktionen $f_n(x, y)$ zu approximieren (z. B. Polynome). Die Lösungen $y_n(x)$ der Gleichungen

$$y_n = \int_a^x f_n(\xi, y_n(\xi))\, d\xi$$

bilden dann in einem von n unabhängigen Intervall $a \leqq x \leqq a_1$ eine gleichmäßig

Um den Zusammenhang mit dem Gleichungssystem mit unendlichvielen Unbekannten herzustellen, werde zunächst angenommen, $y(x)$ sei eine Lösung von[1])

$$(2)\qquad y(x) = \int_0^x f(\xi, y(\xi))\, d\xi.$$

Bildet man die Fourier-Koeffizienten von $y(x)$ in bezug auf das im Intervall $0 \leqq x \leqq \pi$ vollständige Orthogonalsystem $\cos \nu x$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$, so ergibt sich

$$a_\varkappa = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi y(x) \cos \varkappa x\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \int_0^x f(\xi, y(\xi)) \cos \varkappa x\, d\xi\, dx$$

$$(\varkappa = 0, 1, 2, \ldots),$$

oder durch partielle Integration

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x, y(x))\, (\pi - x)\, dx$$

$$(3)\qquad a_\varkappa = \frac{-2}{\pi}\int_0^\pi f(x, y(x))\, \frac{\sin \varkappa x}{\varkappa}\, dx \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots).$$

Aus der Besselschen Ungleichung und der Voraussetzung (1) schließt man jetzt

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} (\varkappa a_\varkappa)^2 \leqq \frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi f(x, y(x))^2\, dx \leqq \frac{4}{\pi^2} K.$$

Somit konvergiert die Reihe

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\varkappa=1}^{\infty} a_\varkappa \cos \varkappa x$$

---

beschränkte gleichartig stetige Funktionenfolge, aus der eine konvergente Teilfolge ausgewählt werden kann, für deren Grenzfunktion $Y(x)$, wie leicht ersichtlich,

$$Y(x) = \int_a^x f(\xi, Y(\xi))\, d\xi \qquad \text{gilt.}$$

1) Die Annahme $y(0) = 0$ ist keine Beschränkung, da jeder Lösung $\eta(x)$ von $\eta(x) = \int_0^x f(\xi, \eta(\xi) + a)\, d\xi$ eine Lösung $y(x) = \eta(x) + a$ von $y(x) = a + \int_0^x f(\xi, y(\xi))\, d\xi$ mit $y(0) = a$ entspricht.

gleichmäßig, und in Rücksicht auf (3) folgt: *Die Fourier-Koeffizienten jeder Lösung von* (2) *erfüllen das unendliche Gleichungssystem*

$$(4)\quad \begin{cases} a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f\left(x,\ \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x\right)(\pi - x)\,dx \\ a_\varkappa = \frac{-2}{\pi\varkappa}\int\limits_0^\pi f\left(x,\ \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x\right)\sin \varkappa x\,dx \\ \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots) \end{cases}$$

bei der Nebenbedingung

$$(5)\quad \sum_{\nu=1}^{\infty} (\varkappa a_\varkappa)^2 \leqq \frac{4}{\pi^2} K.$$

Umgekehrt führt aber jedes Lösungssystem $a_\varkappa$ *von* (4) *und* (5) *zu einer Lösung*

$$y = \frac{a_0}{2} + \sum_{\varkappa=1}^{\infty} a_\varkappa \cos \varkappa x$$

von (2), da die beiden stetigen Funktionen $y(x)$ und $\int\limits_0^x f(\xi, y(\xi))\,d\xi$ dieselben Fourier-Koeffizienten in bezug auf das System $\cos \varkappa x$ haben, wie man rückwärts aus (4) erschließt.

Es genügt somit, ein Lösungssystem von (4) und (5) aufzuweisen.

Hierzu gehe man von den Näherungsgleichungen

$$(6)\quad \begin{cases} F_0(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \alpha_0 - \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f\left(x,\ \frac{\alpha_0}{2} + \sum\limits_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \cos \nu x\right)(\pi - x)\,dx = 0 \\ F_\varkappa(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \alpha_\varkappa + \frac{2}{\pi\varkappa}\int\limits_0^\pi f\left(x,\ \frac{\alpha_0}{2} + \sum\limits_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \cos \nu x\right)\sin \varkappa x\,dx = 0 \\ \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

für $n = 1, 2, 3, \ldots$ aus. Die Funktionen $F_\varkappa$ sind offenbar stetig in den Argumenten $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$, da dies bei festem x für f gilt, und zufolge der Summierbarkeit

$$\lim_{\alpha_\nu^{(\sigma)} \to \alpha_\nu} \int\limits_0^\pi f\left(x,\ \frac{\alpha_0^{(\sigma)}}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^{(\sigma)} \cos \nu x\right)\begin{Bmatrix}(\pi - x) \\ \sin \varkappa x\end{Bmatrix} dx$$

$$= \int\limits_0^\pi \lim_{\alpha_\nu^{(\sigma)} \to \alpha_\nu} f\left(x,\ \frac{\alpha_0^{(\sigma)}}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^{(\sigma)} \cos \nu x\right)\begin{Bmatrix}(\pi - x) \\ \sin \varkappa x\end{Bmatrix} dx$$

ist. Ferner folgt aus der Schwarzschen Ungleichung und (1) für alle Werte der $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f\left(x, \frac{\alpha_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu \cos\nu x\right)\begin{Bmatrix}(\pi-x)\\ \sin\varkappa x\end{Bmatrix} d x\right| \leqq 2\sqrt{K\pi}.$$

Somit besitzt jedes $F_\varkappa$ die Eigenschaft, daß für $\alpha_\varkappa > 4\sqrt{K\pi}$, bei beliebiger Wahl der übrigen α_λ, stets $F_\varkappa(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) > 2\sqrt{K\pi}$, und für $\alpha_\varkappa < -4\sqrt{K\pi}$ bei beliebiger Wahl der übrigen α_λ stets $F_\varkappa(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) < -2\sqrt{K\pi}$, ausfällt.

Diese Eigenschaften der Funktionen $F_\varkappa$ reichen hin, um ein Lösungssystem der Gleichungen sicherzustellen. Dies kann auf verschiedene Weisen geschlossen werden, am unmittelbarsten etwa aus dem Brouwerschen Verschiebungssatz.[1]) Derselbe ist anwendbar, da bei der stetigen, durch (6) vermittelten Abbildung des Raumes der $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ auf den der $F_0, \ldots, F_n$ die $n$dimensionalen Begrenzungswürfel von $|\alpha_\lambda| \leqq 4\sqrt{K\pi}$ in bezug auf jeden der Koordinatenräume $\alpha_\nu = 0$ im selben $n$dimensionalen Halbraum verbleiben.

Bezeichnet man jetzt ein Lösungssystem $\alpha_0 = a_0^{(n)}, \ldots, \alpha_n = a_n^{(n)}$ von (6) mit S_n (wenn mehrere vorhanden sind, so ist eines fest zu wählen), dann ist wie auf S. 240

$$(7) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{n}(\varkappa a_\varkappa^{(n)})^2 \leqq \frac{4}{\pi^2}K \text{ und } |a_\varkappa^{(n)}| \leqq 2\sqrt{K\pi} \quad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Daraus ergibt sich ein Lösungssystem von (4) und (5) nach dem Diagonalverfahren:

Zunächst nehme man eine Teilfolge $S_n^{(0)}$ von S_n derart, daß die ihr angehörigen $a_0^{(n)}$ gegen einen Häufungspunkt a_0 konvergieren. Sind mehrere vorhanden, so ist einer auszuzeichnen. Rekursiv erhält man $a_\varkappa$ als einen Häufungspunkt der in der Folge $S_n^{(\varkappa-1)}$ vorkommenden $a_\varkappa^{(n)}$. Die Folge $S_n^{(\varkappa)}$ ist jetzt dadurch charakterisiert, daß für ihre Elemente mit $\lambda \leqq \varkappa$ jeweils $a_\lambda^{(n)} \rightarrow a_\lambda$ gilt. Von den so erklärten Werten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ist nun nachzuweisen, daß sie (4) und (5) befriedigen.

Hierzu betrachte man die Diagonalfolge $S_n^{(n)}$ und verstehe fortan unter n den Stellenzeiger derselben. Für jedes $\varkappa$ gilt offenbar $a_\varkappa^{(n)} \rightarrow a_\varkappa$. Daher wird bei festem m

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\varkappa=1}^{m}(\varkappa a_\varkappa^{(n)})^2 = \sum_{\varkappa=1}^{m}(\varkappa a_\varkappa)^2,$$

---

1) Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl. (Math. Annalen 70, S. 161—165.)

also nach (7)
$$\sum_{\varkappa=1}^{m} \varkappa^2 a_\varkappa^2 \leqq \frac{4}{\pi^2} K,$$
woraus, da dies für beliebiges m richtig ist, (5) folgt.

Zur Abkürzung setze man, wenn $a_\nu^{(n)}$ für $\nu > n$ den Wert 0 bedeutet,
$$y_n(x) = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^{(n)} \cos \nu x \quad \text{und} \quad y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x.$$
Für jedes ganze n und m wird nun
$$|y(x) - y_n(x)| \leqq \left| \frac{a_0}{2} - \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{\nu=1}^{m} (a_\nu - a_\nu^{(n)}) \cos \nu x \right|$$
$$+ \left| \sum_{\nu=m+1}^{\infty} \nu a_\nu \cdot \frac{\cos \nu x}{\nu} \right| + \left| \sum_{\nu=m+1}^{\infty} \nu a_\nu^{(n)} \cdot \frac{\cos \nu x}{\nu} \right|.$$
Ist jetzt ε gegeben, so kann unter Verwendung der Schwarzschen Ungleichung, zufolge von (5) und (7), ein $m = m(\varepsilon)$ so gewählt werden, daß jeder der beiden letzten Summanden auf der rechten Seite für alle n unter $\frac{\varepsilon}{3}$ verbleibt. Nun werde ein $n(\varepsilon)$ so bestimmt, daß für $n \geqq n(\varepsilon)$ auch der erste Posten unter $\frac{\varepsilon}{3}$ gelegen ist. Also gilt gleichmäßig $y_n(x) \rightarrow y(x)$. Hieraus und aus
$$a_0^{(n)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x, y_n(x))\,(\pi - x)\,dx$$
$$a_\varkappa^{(n)} = \frac{-2}{\pi \varkappa} \int_0^{\pi} f(x, y_n(x)) \sin \varkappa x\, dx \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots;\ n > \varkappa)$$
erhält man nach der bereits auf S. 241 verwandten Schlußweise, wenn bei festem $\varkappa$ der Index n der Diagonalfolge gegen unendlich geht, die Gleichungen (4).

Hiermit ist der Satz bewiesen.

(Eingegangen am 26. 7. 1928.)

Bemerkung zur Theorie der schlichten Funktionen.

Von N. Tschebotaröw in Kasan.

1. In seiner grundlegenden Arbeit[1]) hat Herr L. Bieberbach ein Kriterium dafür aufgestellt, daß ein Polynom

(1) $$f(z) = z + a_1 z^2 + \cdots + a_n z^{n+1}$$

den Einheitskreis schlicht abbildet (wir werden sagen: schlicht in $|z| < 1$ ist), das im folgenden besteht:

Damit das Polynom (1) schlicht in $|z| < 1$ sei, ist notwendig und hinreichend, daß die Resultante von

(2) $$K(u) = g(z) + g_1(z) \cdot u + \cdots + g_n(z) \cdot u^n,$$

(3) $$\overline{K}(u) = \overline{g_n(z)} + \overline{g_{n-1}(z)} \cdot u + \cdots + \overline{g(z)} \cdot u^n$$

positiv für $|z| < 1$ ist, wobei

(4) $$g_k(z) = a_k z^k + \cdots + a_n z^n \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Durch Übergang $n \to \infty$ erhält er ein Kriterium auch für unendliche Potenzreihen.

In dieser Note will ich das Kriterium von Herrn Bieberbach dadurch ergänzen, daß ich den Begriff der Resultante unmittelbar auf unendliche Potenzreihen übertrage. Dies habe ich auch in einer anderen Note[2]) dargetan. Hier setze ich die Kenntnis dieser Note nicht voraus.

2. Wir erinnern zunächst an folgende zwei wohlbekannte Hilfssätze.

Hilfssatz 1. Damit eine Funktion

(5) $$f(z) = z + a_1 z^2 + a_2 z^3 + \cdots$$

schlicht in $|z| < 1$ sei, ist notwendig und hinreichend, daß der Ausdruck

(6) $$K(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

nicht verschwindet, sobald x und y unabhängig voneinander alle Werte $|x| < 1$, $|y| < 1$ durchlaufen.

1) L. Bieberbach, Über Koeffizienten derjenigen Potenzreihen usw. Sitzber. Preuß. Akad. d. Wiss. 1916, S. 940.

2) N. Tschebotaröw, Über eine Methode der Elimination usw. (russisch) Bull. Kasan, T. 24 (1924).

Setzen wir $x = z$, $y = zu$, so kann man $K(x, y)$ in folgenden zwei Formen darstellen:

(7) $$K(z, zu) = 1 + a_1 z(1 + u) + a_2 z^2(1 + u + u^2) + \cdots,$$

(8) $$K(z, zu) = g(z) + g_1(z) \cdot u + g_2(z) \cdot u^2 + \cdots,$$

wobei ist

(9) $$g(z) = \frac{f(z)}{z} = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots, \quad g_k(z) = a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \cdots$$
$$(k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Hilfssatz 2. Ist $f(z)$ nicht in $|z| \leqq \varrho < 1$ schlicht, so verschwindet $K(z, zu)$ für gewisse den Bedingungen

(10) $$|z| \leqq \varrho, \quad |u| = 1$$

genügende Werte von z und u.

3. Die Reihe (8) ist im Gebiete $|u| < \frac{1}{|z|}$ gleichmäßig konvergent. Sie stellt für jeden Wert von $z(|z| < 1)$ eine analytische Funktion $K(u)$ von u dar, die vielleicht auch außerhalb dieses Gebietes fortgesetzt werden kann. Ihre logarithmische Ableitung

(11) $$\frac{K'(u)}{K(u)} = -s_1 - s_2 u - s_3 u^2 - \cdots,$$

wobei die Koeffizienten $s_1, s_2, s_3, \ldots$ mittels der Newtonschen Formeln

(12) $$s_1 \cdot g + g_1 = 0, \quad s_2 \cdot g + s_1 g_1 + 2 g_2 = 0, \ldots$$

bestimmt sind (wir nehmen $g(z) \neq 0$ an), ist ebenfalls eine analytische Funktion, die wir uns so weit als möglich fortgesetzt denken (ist sie mehrdeutig, so betrachten wir ihren im geradlinigen Stern fortgesetzten Zweig). Die Nullstellen von $K(u)$ sind Pole von $\frac{K'(u)}{K(u)}$ mit positiven Residuen. Singularitäten anderer Art besitzt $\frac{K'(u)}{K(u)}$ im Gebiete $|u| < \frac{1}{|z|}$ nicht.

Nun betrachten wir die zu $\frac{K'(u)}{K(u)}$ konjugierte Funktion

(13) $$\frac{\bar{K}'(u)}{\bar{K}(u)} = -\bar{s}_1 - \bar{s}_2 \cdot u - \bar{s}_3 \cdot u^2 - \cdots,$$

die dieselben Eigenschaften wie $\frac{K'(u)}{K(u)}$ besitzt. Das „Hadamardsche Produkt“[1])

(14) $$\varphi(u) = -s_1\bar{s}_1 - s_2\bar{s}_2 \cdot z - s_3\bar{s}_3 \cdot z^2 - \cdots$$

1) J. Hadamard, Theorème sur les séries entières. Acta Math., T. 22 (1899), p. 55—64.

von $\frac{K'(u)}{K(u)}$ und $\frac{\overline{K}'(u)}{\overline{K}(u)}$ kann nur Singularitäten vom Typus $\alpha \cdot \beta$ besitzen, wo α Singularitäten von $\frac{K'(u)}{K(u)}$, β Singularitäten von $\frac{\overline{K}'(u)}{\overline{K}(u)}$ sind.

Die Funktion

$$(15) \qquad \Phi(u) = e^{\int \varphi(u)\, du} = 1 + A_1 u + A_2 u^2 + \cdots,$$

wo $A_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$ durch die Newtonschen Formeln bestimmt werden:

$$(16) \qquad s_1 \bar{s}_1 + A_1 = 0, \quad s_2 \bar{s}_2 + A_1 \cdot s_1 \bar{s}_1 + 2 A_2 = 0, \ldots,$$

bleibt in $|z| < |\alpha\beta|$ regulär und von Null verschieden, wenn α (bzw. β) die absolut kleinste Nullstelle von $K(u)$ (bzw. von $\overline{K}(u)$) ist.

Der Ausdruck

$$(17) \quad \Phi(1) = 1 - \left| \frac{g_1(z)}{g(z)} \right| + \frac{1}{2} \left\{ \left| \frac{g_1'(z)}{g(z)} \right|^4 - \left| \left(\frac{g_1(z)}{g(z)} \right)^2 - 2 \frac{g_2(z)}{g(z)} \right|^2 \right\} - \cdots$$

hat die Eigenschaften der Resultante von $K(u)$ und $\overline{K}\left(\frac{1}{u}\right)$ und verwandelt sich in die echte Resultante, wenn $f(z)$ (und also $K(u)$, $\overline{K}\left(\frac{1}{u}\right)$) ein Polynom wird. Er liefert ein ähnliches Kriterium wie die Resultante nach dem Satz von Herrn Bieberbach:

Satz. Damit eine in $|z| < 1$ reguläre Funktion $f(z)$ schlicht in $|z| < 1$ sei, ist notwendig und hinreichend, daß der ihr entsprechende Ausdruck $\Phi(1)$ für jeden Wert von z ($|z| < 1$) einen Sinn hat und positiv ist.

Beweis. 1. Hat der Ausdruck für irgendeinen Wert z_0 von z keinen Sinn, dann ist offenbar $K'(u)$ nicht in $|u| \leqq 1$ regulär. Die dort vorkommenden Singularitäten können nur Pole mit positiven Residuen sein, da $K(u)$ regulär ist. Diese Stelle ist darum eine Nullstelle von $K(u)$, woraus folgt, daß $f(z)$ nicht in $|z| \leqq |z_0|$ schlicht ist.

2. Nimmt $\Phi(1)$ in $|z| < 1$ nicht-positive Werte an, so nimmt es dort auch Nullwerte an, da es eine stetige Funktion von z ist. Es sei z_0 ($|z_0| < 1$) ein solcher Wert. Dann ist 1 in der Form $\alpha \cdot \beta$ darstellbar. Eine der Größen $|\alpha|$, $|\beta|$ muß $\leqq 1$ sein. Es sei $|\alpha| \leqq 1$. Dann ist α eine Nullstelle entweder von $K(u)$ oder von $\overline{K}(u)$. In beiden Fällen besitzt $K(u)$ eine Nullstelle, die absolut $\leqq 1$ ist. Daraus folgt wegen des Hilfssatzes 1., daß $f(z)$ nicht in $|z| \leqq |z_0|$ schlicht ist.

3. Ist umgekehrt $f(z)$ nicht in $|z| < 1$ schlicht, so finden wir den größten Kreis $\varrho < 1$, innerhalb dessen $f(z)$ schlicht ist. Dann gibt es

auf seinem Rande mindestens zwei Werte (gleiche oder verschiedene), für welche $f(z)$ denselben Wert hat. Für diese Werte von z hat $K(u)$ Nullstellen vom absoluten Betrage 1, aber keine Nullstelle, die absolut < 1 ist. Die Funktion $\varphi(u)$ hat dann $u = 1$ zum Pol. Denn nach der Borelschen Ergänzung[1]) des Hadamardschen Satzes kann $\varphi(u)$ nur dann regulär in $u = 1$ sein, wenn es mehrere Kombinationen $\alpha\beta = 1$ gibt und die Summe der entsprechenden Residuen gleich Null ist. Dies ist aber unmöglich, da nach dem oben Gesagten die Kombination $\alpha \cdot \beta = 1$ nur im Falle $|\alpha| = |\beta| = 1$ eintreten kann, woraus die Positivität von allen betrachteten Residuen folgt. Somit ist $u = 1$ wirklich ein Pol von $\varphi(u)$, d. h. eine Nullstelle von $\Phi(u)$:

$$\Phi(1) = 0.$$

4. Der Ausdruck $\Phi(1)$ kann als trigonometrisches Polynom von θ dargestellt werden, wenn man $z = \varrho \cdot e^{i\theta}$ setzt. Die aus dem Carathéodory-Toeplitzschen Kriterium[2])[3]) entspringenden Koeffizientenungleichungen stellen sämtliche Bedingungen dar, die die Koeffizienten schlichter Funktionen vollständig charakterisieren. Die Unbequemlichkeit dieser Bedingungen besteht darin, daß jede von ihnen unendlich viele Koeffizienten enthält. Dieses Kriterium kann man auf einfachste Funktionen anwenden, wie z. B. rational-gebrochene Funktionen, Wurzelfunktionen, Exponentialfunktionen usw.

Legen wir die Funktion $K(z, zu)$ in der Form (7) zugrunde, d. h. betrachten wir sie als Funktion von z, so erhalten wir das Kriterium in einer anderen Form.

---

1) S. Vivanti-Gutzmer, Theorie der eindeutigen Funktionen. Leipzig 1906.

2) Carathéodory, Über den Variabilitätsbereich usw. Math. Ann. 64.

3) Toeplitz, Über die Fouriersche Entwicklung usw. Rend. Pal. 32 (1911), S. 191.

(Eingegangen am 6. 4. 1928.)

Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten.[1])

Von HELLMUTH KNESER in Greifswald.

Vorbemerkung. Die Buchstaben E^k, M^k, S^k bezeichnen k-dimensionale Elementarräume, Mannigfaltigkeiten (geschlossen, nicht notwendig zusammenhängend) und Sphären. Verschiedene Exemplare werden durch Fußmarken unterschieden; z. B. bedeute „es gibt E_1^2" nichts anderes als „es gibt einen E^2, er heiße E_1^2". $'E^k$ und $'S^k$ bezeichne das, was manchmal E^k bzw. S^k mit Singularitäten genannt wird, d. h. das stetige Bild von E^k bzw. S^k. Alle Begriffe und Operationen sind im Sinne der kombinatorischen Topologie gemeint; nur der Kürze und Verständlichkeit zuliebe werden sie anschaulich beschrieben statt genau ausgeführt. Demgemäß bestimmt sich der Gültigkeitsbereich der Sätze; sie gelten z. B., wenn man sich durchaus auf ebenflächige Gebilde im Zahlenraum genügend hoher Dimension beschränkt.

1. Untersucht man die möglichen Lagen einer M^2 in einer M^3, so kommt man zwangläufig zu dem folgenden

Hilfssatz. *Liegt M^2 in M^3 und auf M^2 eine $'S^1$, die in M^3, aber nicht in M^2 homotop Null (auf einen Punkt zusammenziehbar) ist, so gibt es in M^3 einen $'E^2$, der mit M^2 genau seinen Rand $'S^1$ gemeinsam hat, der bis auf endlich viele Randpunkte singularitätenfrei ist und dessen Rand $'S^1$ auf M^2 nicht homotop Null ist.*

Betreffs der möglichen Singularitäten ergibt sich, daß sie einfache Selbstschnitte von $'S^1$ auf M^2 sind und die beiden an die beiden sich schneidenden Züge von $'S^1$ angrenzenden Teile von $'E^2$ auf entgegengesetzten Seiten von M^2 liegen. Insbesondere kommen solche Singularitäten überhaupt nicht vor, wenn M^3 durch M^2 in zwei Teile zerlegt wird.

2. Beweis des Hilfssatzes. Die in der Voraussetzung genannte $'S^1$ ist homotop Null, d. h. Rand eines $'E^2$. Dieser hat bereits die letzte der in der Behauptung geforderten Eigenschaften; er soll schrittweise durch andere mit derselben Eigenschaft ersetzt werden, die gegen die übrigen Forderungen der Behauptung immer weniger verstoßen. Zunächst erreicht man durch kleine Verlagerungen von $'E^2$, daß die Selbst-

1) Vortrag, gehalten am 18. September 1928 bei der 90. Versammlung der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte in Hamburg.

schnitte und Schnitte mit M^2 möglichst einfache Gestalten haben. Es sind dies

1. einfache Schnittkurven von $'E^2$ mit sich selbst oder mit M^2, ($x = 0$ und $y = 0$),

2. Endpunkte solcher Kurven auf dem Rande $'S^1$ von $'E^2$($M^2 : z = 0$; $'E^2 : z = xy,\ x \geqq 0$),

3. dreifache Punkte, Schnitt zweier Teile von $'E^2$ mit M^2 ($M^2 : z = 0$; $'E^2 : x = 0$ und $y = 0$),

4. Endpunkt eines Selbstschnittes auf dem Rande von $'E^2$($M^2 : z = 0$; $'E^2 : x = 0,\ z \geqq 0$ und $y = 0,\ z \geqq 0$),

5. erlaubte Singularität, einfacher Selbstschnitt von $'S^1$($M^2 : z = 0$; $'E^2 : x = 0,\ z \geqq 0$ und $y = 0,\ z \leqq 0$),

6. dreifache Punkte von $'E^2$($x = 0,\ y = 0$ und $z = 0$),

7. Windungspunkte von $'E^2$, d. h. Punkte, in denen sich $'E^2$ so verhält wie das räumliche Modell des einfachen Windungspunktes einer Riemannschen Fläche oder wie eine analytische Fläche in einem Zwickpunkt (pinch-point) ($z = \Re\sqrt{x + iy},\ 4z^2 - 4z^2x + y^2 = 0$ oder $x^2 = zy^2$).

Jetzt sollen die Schnittkurven von $'E^2$ mit M^2 beseitigt werden. Sie zeichnen sich auf dem Urbild E^2, dessen stetiges Bild $'E^2$ ist, ab als einfach geschlossene Kurven im Inneren und einfache Bögen von einem Randpunkt zu einem anderen; keine zwei von diesen Kurven schneiden einander. Sie zerlegen E^2 in Teile, von denen mindestens einer ein E^2_1 ist und höchstens einen zusammenhängenden Teil mit dem Rande von E^2 gemeinsam hat. Ist das Bild des Randes von E^2_1 auf M^2 nicht homotop Null, so ist das Bild von E^2_1 ein $'E^2_1$ mit denselben Eigenschaften wie $'E^2$, aber ohne Schnitte mit M^2. Ist es aber homotop Null auf M^2, d. h. Rand eines auf M^2 gelegenen $'E^2_2$, so werde das Bild von E^2_1 als Bestandteil von $'E^2$ durch $'E^2_2$ ersetzt und dieser nach derjenigen Seite[1]) von M^2 abgehoben, auf der die an den Rand von $'E^2_2$ grenzenden weiteren Teile von $'E^2$ liegen. So entsteht ein $'E^2$ mit denselben Eigenschaften wie der vorige, der aber mit M^2 eine Schnittkurve weniger hat. Wiederholung des Verfahrens liefert

---

1) Daß dieses „derjenigen" eindeutig bestimmt ist, folgt aus dem Monodromiesatz: „Ist auf einem E^2 eine Ortsfunktion im kleinen eindeutig und unbeschränkt fortsetzbar, so führt diese Fortsetzung zu einer eindeutigen Funktion." Als E^2 tritt hier das Urbild E^2_2 von $'E^2_2$ auf; der Wert der Funktion ist eine der beiden Seiten von M^2 in dem auf $'E^2_2$ und daher auf M^2 gelegenen Bildpunkt. Der Ausgangswert wird in einem auf dem Rande von E^2_2 aber im Inneren von E^2 (Urbild von $'E^2$) gelegenen Punkte bestimmt.

einen $'E^2$ mit denselben Eigenschaften, aber ohne Schnittkurven mit M^2, bei dem daher auch die Singularitäten (2) und (3), von denen Schnittkurven ausgehen, nicht mehr auftreten.

Jetzt sollen die Singularitäten (4) beseitigt werden. Von jedem solchen Punkt geht eine Selbstschnittkurve von $'E^2$ aus. Verfolgt man sie, indem man durch jeden dreifachen Punkt (6) „geradlinig" hindurchgeht, so endigt sie entweder in einem anderen Punkt (4) oder in einem Windungspunkt (7). Wie hier zu verfahren ist, werde zunächst unter der vereinfachenden Annahme angegeben, daß außer den angegebenen keine weiteren Singularitäten vorliegen.

Verbindet die Selbstschnittkurve zwei Punkte (4), P und Q, deren Urbilder auf dem Urbild E^2 von $'E^2$ die Punkte P und P' bzw. Q und Q' seien, so sind die beiden Urbilder der Kurve zwei einfache, einander nicht schneidende Bögen PQ und $P'Q'$. Auf dem Rande von E^2 liegen daher die vier Punkte mit zwei weiteren, R und R', in einer der beiden Reihenfolgen $PRQQ'R'P'$ oder $PRQP'R'Q'$. Die Bögen PQ und $P'Q'$ trennen von E^2 zwei Teil-E^2, I und I′ ab; der Rest heiße II. Ist die aus den Bildern der Bögen PRQ und $P'R'Q'$ (deren Endpunkte paarweise zusammenfallen) zusammengesetzte geschlossene Kurve auf M^2 nicht homotop Null, so hat der aus den Bildern von I und I′ bestehende E^2 dieselben Eigenschaften wie der ursprüngliche, aber mindestens zwei Singularitäten (4) weniger. Ist sie aber homotop Null, so ist die aus den Bildern der Bögen PRQ, $Q'Q$, $Q'R'P'$, PP' bzw. PRQ, $Q'P$, $P'R'Q'$, QP' in dieser Reihenfolge zusammengesetzte Kurve auf M^2 homotop der ursprünglichen Rand-$'S^1$ von $'E^2$, dem Bilde von $PRQQ'$, $PRQQ'R'P'$ bzw. $PRQP'R'Q'$, da sie aus ihr durch Vertauschung der homotopen Verbindungen PRQ und $P'R'Q'$ hervorgeht. Setzt man daher das Bild von I bzw. I′ an die Seite $P'Q'$ von II an statt an PQ bzw. an PQ statt an $P'Q'$, so entsteht wieder ein $'E^2$ mit denselben Eigenschaften. Bei diesem läßt aber eine kleine Verlagerung die beiden Singularitäten verschwinden.

Verbindet die Selbstschnittkurve den Punkt P von der Art (4), dessen Urbilder P' und P'' seien, mit einem Windungspunkt W, dessen Urbild W' ist, so ist ihr Urbild in E^2 ein einfacher Bogen $P'W'P''$ zwischen den Randpunkten P' und P''. Die Bilder der beiden Randbögen $P'P''$ sind geschlossene Kurven auf M^2; von denen mindestens eine, C, nicht homotop Null ist. Das Bild des an diesen Bogen grenzenden, durch $P'W'P''$ von E^2 abgetrennten Teils ist ein $'E^2$ mit C als Rand, da die Bilder der Bögen $P'W'$ und $P''W'$ zusammenfallen. Dieser $'E^2$ hat dieselben Eigenschaften wie der vorige, aber mindestens eine Singularität (4) weniger.

Ist die vereinfachende Annahme nicht erfüllt, so bewirkt eine nicht schwierige, wenn auch nicht ganz selbstverständliche Hilfskonstruktion, daß das Verfahren mit demselben Erfolg angewandt werden kann: man muß nur den $'E^2$ ersetzen durch einen anderen, der ihn im Inneren mehrfach, am Rande aber einfach überlagert und daher dieselben Singularitäten (4) hat. Die hier neu auftretende Möglichkeit, daß die Punktepaare PQ und $P'Q'$ (in früherer Bezeichnung) auf dem Rande von E^2 sich trennen, bringt keine neuen Schwierigkeiten heran. So können auch die Singularitäten (4) Schritt für Schritt beseitigt werden.

Schneidet man nun die einzigen noch auf dem Rande befindlichen Singularitäten, die von der Art (5), durch Abtrennen kleiner Umgebungen aus, so hat $'E$ auf dem Rande überhaupt keine Singularität mehr. Nach dem „Lemma" von Dehn[1]) gibt es einen E^2 (ohne jede Singularität), der am Rande mit $'E^2$ übereinstimmt und sonst beliebig nahe bei $'E^2$ verläuft. Setzt man daher die vorher abgetrennten Umgebungen wieder hinzu, so entstehen keine neuen Singularitäten außer den vorher vorhandenen der Art (5). Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

3. M^2 in S^3. Nach J. W. Alexander[2]) wird S^3 durch jede S^2 in zwei E^3 zerlegt. Je zwei S^2 in S^3 sind isotop. Zwei, je aus mehreren getrennten S^2 bestehende M^2 sind isotop, wenn sie aus gleichvielen S^2 bestehen und diese sich beide Male in gleicher Weise trennen.

Ist einer der zusammenhängenden Bestandteile einer M^2 keine S^2, so gibt es auf ihm eine Kurve, die auf M^2 nicht homotop Null ist. Sie ist homotop Null in S^3 [3]); nach dem Hilfssatz gibt es einen E_1^2, der

1) Math. Ann. 69 (1910), S. 147. Der Kenner wird bemerken, daß Dehn mit dem Beweise seines „Lemmas" die wesentliche Schwierigkeit des Hilfssatzes im voraus erledigt hat. Die hier benutzten Mittel sind den einfacheren bei Dehn nahe verwandt. Dort kommen (S. 150f.) ganz neue, viel feinere Überlegungen hinzu.

2) Nat. Ac. of Sc. 10 (1024), S. 6—8. Alexanders Satz und Beweis sind elementargeometrisch formuliert, mit einer, ohne Zweifel der Kürze halber, nicht mangels elementarerer Beweismittel gemachten, Anleihe bei der Potentialtheorie. Man kann sich, bei drei Dimensionen ziemlich leicht, davon überzeugen, daß elementargeometrische und kombinatorische Methoden gleich weit tragen. Einen rein kombinatorischen Beweis des hier genannten Satzes habe ich am 11. 5. 28 im Greifswalder mathematischen Kolloquium vorgetragen. Ich erwähne dies, weil ich trotz bisheriger Mißerfolge die Hoffnung nicht aufgebe, daß sich so der entsprechende Satz in vier, vielleicht auch mehr Dimensionen wird beweisen lassen.

3) Man sieht, daß dieser Beweis für jede einfach zusammenhängende M^3 gilt, ja sogar für jede M^3, deren Wegegruppe (s. u.) keine Untergruppe außer der Identität hat, die der Wegegruppe einer M^1 isomorph ist, z. B. für alle Torus-M^3 (k, l) mit ungeradem $k \geqq 3$, da deren Wegegruppe zyklisch von k-ter Ordnung ist.

mit M^2 genau seinen Rand gemeinsam hat und dessen Rand auf M^2 nicht homotop Null ist. Singularitäten (5) treten nicht auf, weil S^3 von jeder M^2 zerlegt wird.[1]) Dicht neben E_1^2 werde ebenso E_2^2 in eine neben dem Rande S_1^1 von E_1^2 verlaufende Kurve S_2^1 eingehängt. Der Streifen zwischen S_1^1 und S_2^1 wird von M^2 weggenommen und durch E_1^2 und E_2^2 ersetzt. Die Eulersche Charakteristik des betroffenen zusammenhängenden Teils von M^2 sei k; die des daraus entstehenden zusammenhängenden Teils bzw. der beiden entstehenden Teile (je nachdem, ob M^2 durch S_1^1 nicht zerlegt wird oder zerlegt wird) sei k' bzw. k' und k''. Im ersten Falle ist $k' = k + 2$, also $k' > k$. Im zweiten Falle ist $k' + k'' = k + 2$. Nun kann aber keiner der beiden Teile eine S^2 sein, da dann S_1^1 auf M^2 homotop Null sein müßte. Also ist $k' < 2$, $k'' = k + 2 - k' > k$ und ebenso $k' > k$. Das beschriebene Verfahren ersetzt einen zusammenhängenden Teil von M^2 durch einen oder zwei mit größerer Charakteristik. Da die Charakteristiken der Teile den Wert 2 nicht übersteigen, so folgt, daß das Verfahren nach endlich vielen Schritten zu einer M^2 führt, die nur aus einer Anzahl S^2 besteht. Das entgegengesetzte Verfahren führt von dieser zur ursprünglichen M^2 zurück. Dabei ist aber der einzelne Schritt gerade das, was man anschaulich als Anhängen eines Henkels beschreibt.

Jede M^2 in S^3 entsteht aus einer Anzahl fremder S^2 durch Anhängen von Henkeln.

Ist M^2 zusammenhängend, so zeigt eine kleine zusätzliche Überlegung, daß man immer von *einer* S^2 ausgehen kann.

Jede zusammenhängende M^2 in S^3 entsteht aus einer S^2 durch Anhängen von Henkeln.

Die Anzahl der Henkel ist natürlich $p = 1 - \frac{1}{2} k$, das Geschlecht von M^2. Der Satz enthält als Spezialfall $p = 1$ den von Tietze vermuteten, von Alexander bewiesenen Satz:

Eine Ringfläche in S^3 ist ein verknoteter oder unverknoteter Schlauch.

4. S^2 in M^3. Ein Endlichkeitssatz. Schneidet man eine M^3 längs einer in ihr liegenden S^2 auf und setzt man an jede der beiden entstehenden Rand-S^2 einen E^3 mit seinem Rande an, so entsteht eine M_1^3. Diese Verwandlung von M^3 in M_1^3 heiße Reduktion. Wird M^3 durch S^2 in einen E^3 und einen Rest zerlegt, so liefert die Reduktion wieder M^3 und eine S^3 dazu; dies heiße eine triviale Reduktion. Eine M^3, die nur triviale Reduktion zuläßt, d. h. eine M^3, in der jede S^2 Rand eines E^3 ist, heißt irreduzibel. Nach Alexander ist z. B. S^3 irreduzibel.

1) Proc. Kon. Ak. van Wet. Amsterdam 27 (1924), S. 601—616.

Die Bezeichnung „Reduktion" ist erst gerechtfertigt, wenn es feststeht, daß das Ergebnis M_1^3 in irgendeinem Sinne einfacher ist als M^3. Für die Einfachheit oder Verwicklung einer M^3 hat man aber bisher kein Maß; man kennt keine vernünftige[1]) topologische Invariante, die etwa bei S^3 und nur bei S^3 ihren kleinsten Wert annimmt. Eine gewisse Rechtfertigung leistet immerhin der Satz:

Zu jeder M^3 gehört eine Zahl k mit der folgenden Eigenschaft: nimmt man mit M^3 nacheinander $k + 1$ Reduktionen vor, so ist mindestens eine davon trivial. Durch k (oder weniger) nicht triviale Reduktionen wird M^3 in eine irreduzible M^3 verwandelt.

Zum Beweise überzeugt man sich zunächst davon, daß die Reduktionen mit derselben Wirkung auch gleichzeitig ausgeführt werden können. Sind nämlich die ersten r Reduktionen gleichzeitig ausgeführt worden, so sind bei ihnen $2r$ getrennte E^3 angesetzt worden. Die S^2 der $(r + 1)$-ten Reduktion kann so verlagert werden, daß sie keinen von diesen trifft. In dieser Lage ist sie das Bild einer S^2 in der ursprünglichen M^3; daher lassen sich auch die ersten $r + 1$ Reduktionen zugleich ausführen.

Hiernach ist das Ergebnis einer Folge von Reduktionen durch eine Anzahl getrennter S^2, etwa $S_1^2, \ldots, S_k^2$, bestimmt. Trivial wird eine der Reduktionen dann und nur dann, wenn einer der Teile, in die M^3 beim Aufschneiden längs $S_1^2, \ldots, S_k^2$ zerfällt, ein Teil einer S^3 ist. Ein von einer Anzahl S^2 berandeter Teil von S^3, der also aus S^3 entsteht durch Abtrennen einer Anzahl getrennter E^3, heiße L^3 (gelochte S^3). Es braucht also nur bewiesen zu werden:

Liegt in einer gegebenen M^3 eine Anzahl k getrennter S^2, so ist bei genügend großem k mindestens einer der durch sie bestimmten Teile von M^3 ein L^3.

M^3 sei in einer Darstellung durch tetraedrische Zellen gegeben. Diese werden im folgenden schlechtweg Zellen genannt, ihre Wände, Kanten und Ecken schlechtweg Wände, Kanten und Ecken. $S_1^2, \ldots, S_k^2$ werden im allgemeinen erst durch die Zellen einer Unterteilung darzustellen sein, doch bleiben die Benennungen wie soeben verabredet. Durch

1) Was hiermit gemeint ist, erläutere das folgende Gegenbeispiel. Man nehme unter allen Zellendarstellungen von M^3 diejenige oder eine derjenigen, bei denen die Gesamtzahl der Zellen aller Dimensionen möglichst klein ist. Diese Gesamtzahl hat bei S^3 den Wert 8, bei jeder anderen M^3 einen größeren. Aber erstens läßt sie sich nicht bei einer gegebenen M^3 mit endlich vielen Schritten berechnen; zweitens, und das ist wichtiger, dürfte sie wohl kaum mit anderen, mehr geometrischen Invarianten in fruchtbare Verbindung zu setzen sein. Ähnlich unvernünftig wäre es, als Maß der Verwicklung einer endlichen Gruppe einzuführen die kleinste Zahl n der Art, daß sich die Gruppe als Permutationsgruppe n-ten Grades darstellen läßt.

kleine Verlagerungen von $S_1^2, \ldots, S_k^2$ wird erreicht, daß diese keine Ecke enthalten, keine Kante und keine Wand berühren. Ihre Schnitte mit einer Wand sind dann einfach geschlossene Kurven oder einfache Bögen zwischen je zwei Kantenpunkten. Verbindet ein solcher Bogen zwei Punkte derselben Kante, so werde von den etwa noch zwischen ihm und der Kante gelegenen Bögen derselben Art ein innerster gewählt und die ihn enthaltende S_ν^2 über das Stück der Wand zwischen Bogen und Kante hinweggezogen. Dadurch wird die Zahl der Schnittpunkte der Kanten mit den S_ν^2 um zwei vermindert. Also kommt man nach endlich vielen Schritten zu einer Lage der S_ν^2 ohne Bögen der genannten Art.

Beim weiteren Beweis wird mehrfach die folgende Bemerkung benutzt. Wird S_m^2 durch S^1 in E_1^2 und E_2^2 zerlegt und ist S^1 Rand eines E_3^2, der, abgesehen vom Rande, keine S_ν^2 trifft, ist ferner keiner der durch die S_n^2 bestimmten Teile von M^3 ein L^3, so kann S_m^2 entweder durch $E_1^2 + E_3^2$ oder durch $E_2^2 + E_3^2$ ersetzt werden, ohne daß dadurch die letzte Eigenschaft zerstört wird. Zum Beweise unterscheidet man wiederum Fälle. Diejenige Seite von S_m^2, auf der E_3^2 liegt, heiße die Innen-, die andere die Außenseite. Man schneide M^3 längs $S_1^2, \ldots, S_k^2$ und längs E_3^2 auf. Es ist zu unterscheiden, welche von den drei Teilen, die (1) an die Außenseite von S_m^2, (2) und (3) an die Innenseite von E_1^2 bzw. E_2^2 anstoßen, miteinander zusammenhängen. In jedem der vier wesentlich verschiedenen Fälle [(1), (2) und (3) hängen zusammen; (1) hängt mit (2), aber nicht mit (3) zusammen; (2) hängt mit (3), aber nicht mit (1) zusammen; keine zwei von den drei Teilen hängen zusammen] folgt die Behauptung ohne Mühe aus einer der beiden folgenden einfachen Tatsachen: 1. Ein nur von einigen S^2 berandeter Teil eines L^3 ist selbst ein L^3. 2. Identifiziert man Teile zweier verschiedener Randflächen eines L^3, so entsteht ein Nicht-L^3.

Mit Hilfe dieser Bemerkung wird das System $S_1^2, \ldots, S_k^2$ durch ein anderes, $\overline{S}_1^2, \ldots, \overline{S}_k^2$ ersetzt mit den folgenden Eigenschaften. 1. Wenn $S_1^2, \ldots, S_k^2$ in M^3 keinen L^3 bestimmen, so tun es auch $\overline{S}_1^2, \ldots, \overline{S}_k^2$ nicht. 2. $\overline{S}_1^2, \ldots, \overline{S}_k^2$ schneiden die Wände nicht in geschlossenen Kurven und 3. durchziehen jede Zelle nur in einer Anzahl E^2. Die Eigenschaft (1) ist anfangs erfüllt und bleibt auf Grund der Bemerkung erhalten. Ist (2) nicht erfüllt, so wählt man von den geschlossenen Schnittkurven in einer Wand eine innerste. Der von ihr berandete, in der Wand gelegene E^2 spielt die Rolle von E_3^2. Nachdem die in der Bemerkung beschriebene Ersetzung erfolgt ist, kann E_3^2 von der Wand abgehoben werden, und die Zahl der geschlossenen Schnittkurven ist um mindestens eins vermindert. Ist (2) erfüllt,

(3) aber nicht, durchziehen also $S_1^2, \ldots, S_k^2$ die Zellen zum Teil in mehrfach zusammenhängenden Teilen, so werde auf dem Rande einer Zelle unter den Randkurven dieser Teile eine innerste gewählt. Kann man nun in S_m^2 einen E^2 einspannen, der in der Zelle verläuft und außer mit seinem Rande $S_1^2, \ldots, S_k^2$ nicht trifft, so ersetzt man wieder, wie in der Bemerkung vorgeschrieben, und erreicht, daß ein der Eigenschaft (3) widersprechender mehrfach zusammenhängender Flächenteil ganz wegfällt oder daß seine Zusammenhangszahl um eins vermindert wird. Das erwähnte Einspannen ist immer möglich. Die die Zelle etwa durchziehenden E^2-förmigen Teile der S_ν^2 zerlegen nämlich die Zelle in eine Anzahl E^3; man führe den gesuchten E^2 nahe an dem Rande desjenigen von ihnen entlang, dem das betrachtete Flächenstück angehört.

Die k so erhaltenen S^2 zerlegen M^3 in mindestens $k - r$ Teile, wobei r durch M^3 bestimmt ist.[1]) Jede Wand wird durch die in ihr verlaufenden Schnittkurven in Teile zerlegt, die alle bis auf höchstens vier (drei an den Ecken und einer, der Mittelteil, der an alle drei Seiten anstößt) Vierecke sind, deren Seiten abwechselnd Kanten und Schnittkurven sind. Ein Zellenteil, dessen Rand keinen der erstgenannten Wandteile enthält, wird notwendig begrenzt von zwei zu den S_ν^2 gehörigen E^2 und einer zwischen beiden gelegenen Kette von Vierecken. Er ist also ein E^3 und heiße ein Prisma. Von den Teilen, in die M^3 durch die S_ν^2 zerlegt wird, muß jeder, der nicht nur aus Prismen besteht, mindestens eine Ecke oder einen Wandmittelteil enthalten; es gibt ihrer also höchstens $\alpha_0 + \alpha_2$. Ist daher $k > r + \alpha_0 + \alpha_2$, so gibt es mindestens einen nur aus Prismen bestehenden, von einigen S_ν^2 berandeten Teil von M^3. Dieser ist eine zweifach gelochte S^3 oder der einfach gelochte projektive Raum. So oft der zweite Fall eintritt, läßt man die Prismen der Höhe nach zusammenschrumpfen und verwandelt dadurch die betroffene S^2 in eine M^2 vom Typus der projektiven Ebene, die (relativ) einseitig ist. Wendet man auf das so abgeänderte Flächensystem die vorige Überlegung an, so zeigt sich, daß, wenn nur $k > r + \alpha_0 + \alpha_2$ ist, mindestens einer der von $S_1^2, \ldots, S_k^2$ bestimmten Teile von M^3 eine zweifach gelochte S^3 sein muß. Dies gilt zunächst von einem System S^2 mit den Eigenschaften (1), (2) und (3) Aus jedem System getrennter S^2, das M^3 in Teile zerlegt, von denen keiner ein L^3 ist, ließ sich aber ein ebensolches mit den Eigenschaften (1), (2) und (3) gewinnen; folglich kann die Anzahl der S^2 den Wert $r + \alpha_0 + \alpha_2$ nicht übersteigen, was zu beweisen war.

1) r ist die erste Bettische Zahl mod 2.

Geht man etwas genauer ein auf die etwa vorhandenen verschiedenen Möglichkeiten, eine gegebene M^3 durch Reduktion auf irreduzible M^3 bringen, so ist das Ergebnis der folgende Satz, der die topologischen Eigenschaften aller M^3 zurückführt auf die der irreduziblen.

Jede M^3 entsteht auf die folgende Weise: Aus k^3 orientierbaren unsymmetrischen[1][2], *l orientierbaren symmetrischen und m nicht orientierbaren M^3 $(k, l, m \geqq 0)$, die sämtlich irreduzibel*[3] *sind, werde je ein E^3 ausgeschnitten, aus einer S^3 ebenso $k + l + m + 2r + 2s$ getrennte E^3 $(r \geqq 0$; $s = 0$, wenn $m > 0$; sonst $s = 0$ oder $1)$; die Reste der M^3 werden mit ihren Rand-S^2 an $k + l + m$ von den Rand-S^2 der gelochten S^3 angesetzt; die übrigen Rand-S^2 werden paarweise miteinander identifiziert, und zwar r Paare so, daß eine Orientierung von der gelochten S^3 wieder mit sich zur Übereinstimmung kommt, das letzte — wenn $s = 1$ ist — so, daß eine nicht orientierbare M^3 entsteht. Zwei auf diese Weise erzeugte M^3 sind dann und nur dann homöomorph, wenn die Zahlen k, l, m, r, s beide Male dieselben sind, die benutzten M^3 paarweise homöomorph sind und im Falle einer orientierbaren M^3 $(m = s = 0)$ die invariant ausgezeichneten Orientierungen der m unsymmetrischen M^3 beide Male auf dieselbe Weise in Zusammenhang gebracht sind.*

5. Die Wegegruppe[4] und die Zerlegung einer M^3 durch eine S^2. Wird eine zusammenhängende M^3 durch eine S^2 in zwei Teile mit den Wegegruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zerlegt, so ist die Wegegruppe von M^3

---

1) Symmetrisch heiße eine M^3, wenn sie sich mit Umkehrung der Orientierung topologisch auf sich abbilden läßt. Das einfachste Beispiel einer unsymmetrischen M ist die Torus-M^3 (3, 1), allgemeiner die Torus-M^3 (k, l), wenn -1 quadratischer Nichtrest mod k ist.

2) Der Buchstabe k hat hier nicht die frühere Bedeutung.

3) Irreduzibel ist z. B. das Produkt $S^1 \cdot S^1 \cdot S^1$, ferner jede M^3 mit endlicher Wegegruppe (s. u.), deren Hauptüberlagerungs-M^3 die S^3 ist. Dazu gehört auch die von Dehn aus der Kleeblattschlinge gewonnene M^3, deren Wegegruppe der binären Ikosaedergruppe isomorph ist. Sie läßt sich nämlich darstellen als Modul-M^3 der aus der binären Gruppe in bekannter Weise erwachsenden fixpunktfreien Drehungsgruppe der (metrischen) S^3, die die Zellen des regelmäßigen 120-Zells transitiv vertauscht. Ob diese M^3 symmetrisch ist, scheint nicht ganz leicht zu entscheiden, weil das sonst so nützliche Hilfsmittel der Homologiebetrachtungen versagt.

4) Wenn man im allgemeinen von einer eingeführten Benennung nicht ohne besonderen Grund abgehen soll, so glaube ich Grund genug zu haben, für die seit Poincaré so genannte Fundamentalgruppe diese Bezeichnung vorzuschlagen. Sie ist kürzer, sagt mehr und läßt sich leicht in andere Sprachen übertragen. Mehr oder weniger fundamental sind auch die Homologiegruppen; unter „Wegegruppe" kann man kaum etwas anderes verstehen, als das Wort bedeuten soll.

das freie Produkt von 𝔄 und 𝔅.[1]) Von diesem Satz gilt überraschenderweise die folgende Umkehrung.

Ist die Wegegruppe einer zusammenhängenden M^3 das freie Produkt zweier Gruppen 𝔄 und 𝔅, so wird M^3 durch eine S^2 in zwei Teile zerlegt, deren Wegegruppen den Gruppen 𝔄 und 𝔅 isomorph sind.

Dadurch ist eine hinreichende (und, wenn die bekannte Vermutung, S^3 sei die einzige einfach zusammenhängende M^3, richtig sein sollte, auch notwendige) Bedingung der Reduzibilität gegeben.

Zum Beweise ist es nötig, die Wegegruppe in eine möglichst enge geometrische Beziehung zum zellenmäßigen Aufbau der M^3 zu bringen. Dies geschieht durch die Konstruktion, die der von Poincaré und Tietze angegebenen Aufstellung der Wegegruppe dual gegenübersteht. Das Resultat ist das folgende. Jeder Flächenzelle einer bestimmten Zellendarstellung von M^3 wird im Hinblick auf eine bestimmte Überschreitungsrichtung ein Element der Wegegruppe, im Hinblick auf die entgegengesetzte Überschreitung das reziproke Gruppenelement zugeordnet; jeder Weg wird dargestellt als eine Kette von Übergängen: von einer festgelegten Ausgangsraumzelle über eine Flächenzelle zur angrenzenden Raumzelle, von dieser ebenso zu einer weiteren Raumzelle usf. bis zur Ausgangszelle zurück. Das Gruppenelement, das einem solchen Wege (von der festgelegten Ausgangszelle zu dieser zurück) zukommt, bestimmt sich einfach als das Produkt der den überschrittenen Flächenzellen im Sinne der Überschreitung zugeordneten Elemente, gebildet in der Reihenfolge der Überschreitungen. Die Umkreisung einer Kante des Zellengebäudes liefert einen Ausdruck, der der Einheit gleich ist, d. h. eine Relation zwischen den Gruppenelementen. Die den Flächenzellen zugeordneten Elemente erzeugen die ganze Wegegruppe, die Relationen definieren ihre Struktur. Die Gesamtheit derjenigen Flächenzellen, denen von der Einheit verschiedene Elemente zugeordnet sind, heißt der *Gruppenkomplex*.

Der Gruppenkomplex zusammen mit der Angabe der zugeordneten Elemente liefert ein vollständiges Bild der Wegegruppe, auch wenn eine andere Ausgangszelle gewählt wird: die Wegegruppe erfährt höchstens einen inneren Isomorphismus.

Der Gruppenkomplex kann noch mannigfach abgeändert werden. Man wählt eine Raumzelle Z und ein Gruppenelement T und ordnet

1) Der Kenner wird diesen Satz leicht beweisen können. Er gilt auch in der weiteren Fassung: Bilden zwei zusammenhängende Komplexe A und B mit einfach zusammenhängendem Durchschnitt zusammen den Komplex C, so ist die Wegegruppe von C das freie Produkt der Wegegruppen von A und B.

jeder Randzelle von Z beim Austritt aus Z statt des ihr vorher zugeordneten Elements S das Element TS, beim Eintritt in Z statt S^{-1} das Element $S^{-1}T^{-1}$ zu. Dies Verfahren, wiederholt und im Wechsel mit Umteilungen des Zellengerüstes angewandt, liefert alle möglichen Gruppenkomplexe.

Ist nun die Wegegruppe das freie Produkt zweier Untergruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, so ist jedes Element eindeutig darstellbar als Produkt von Faktoren, die von der Einheit verschieden sind und abwechselnd aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ stammen. Jede Zelle des Gruppenkomplexes werde durch ebensoviele nebeneinander verlaufende Zellen mit demselben Rand ersetzt, wie ihr Element Faktoren hat, und diese Faktoren in der richtigen Reihenfolge den Ersatzzellen zugeordnet. So ergibt sich ein Gruppenkomplex, bei dem zu jeder Zelle ein Element aus $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ gehört. Die Zellen, deren Elemente zu $\mathfrak{A}$ gehören, bilden den Teil A des Gruppenkomplexes, die übrigen den Teil B. Stoßen in einer Kante Zellen von A mit Zellen von B zusammen, so muß ihr Produkt 1 sein. Wegen der freien Produktbildung muß in der zyklischen Folge der Faktoren mindestens eine vollständige, d. h. beiderseits von Faktoren aus $\mathfrak{B}$ (bzw. $\mathfrak{A}$) flankierte Folge von Faktoren aus $\mathfrak{A}$ (bzw. $\mathfrak{B}$) schon das Produkt 1 ergeben. Durch die oben geschilderten Abänderungen des Gruppenkomplexes läßt sich dann erreichen, daß die diesen Faktoren entsprechenden Zellen des Gruppenkomplexes nicht mehr in der betrachteten Kante zusammenstoßen, sondern in einer daneben verlaufenden mit denselben Endpunkten. Durch Wiederholung dieses Verfahrens erreicht man, daß A und B nur noch in Ecken miteinander zusammenhängen, und auch dieser Zusammenhang läßt sich aufheben, so daß schließlich der Gruppenkomplex in zwei getrennte Teile A und B zerfällt.

Jetzt trennt man A und B durch eine M^2, indem man z. B. um A eine Art Parallelfläche beschreibt. Besteht diese nicht aus lauter S^2, so liefert der Hilfssatz einen E^2, der mit M^2 genau seinen Rand gemeinsam hat und dessen Rand auf M^2 nicht homotop Null ist. Da nämlich M^2 den Gruppenkomplex nicht trifft, ist jede in M^2 liegende Kurve homotop Null in M^3. Wegen des einfachen Zusammenhanges von E^2 kann man den Gruppenkomplex in der Nähe von E^2 so abändern, daß er E^2 nicht mehr schneidet und seine früheren Eigenschaften behält. Dann wird M^2 mit Hilfe von E^2 so reduziert, wie es in Abschnitt 3 geschah. Dies Verfahren bewirkt nach endlich vielen Schritten, daß A und B durch eine Anzahl S^2 getrennt werden.

Können nun in einem der Teile, in die M^3 durch diese S^2 zerlegt wird, zwei verschiedene Rand-S^2 durch einen Weg verbunden werden, der

nach Maßgabe des Gruppenkomplexes das Einheitselement liefert[1]), so kann der Gruppenkomplex so abgeändert werden, daß er den Weg nicht trifft und die bisher festgestellten Eigenschaften behält, und man verbindet die beiden S^2 durch einen Schlauch längs dieses Weges zu einer einzigen. Ist dies getan, so oft es möglich ist, so seien $U_1, \ldots, U_m$ bzw. $V_1, \ldots, V_n$ diejenigen durch die S^2 bestimmten Teile von M^3, in denen Teile von A bzw. B enthalten sind. Jedes U_ν grenzt mit einigen S^2 an einige V_ν, jedes V_ν an einige U_μ. Legt man die Ausgangszelle nach U_1, so kann jedes Gruppenelement aus $\mathfrak{A}$ durch einen Weg in U_1 verwirklicht werden. Man zerlege nämlich einen Weg mit dem Gruppenelement a aus $\mathfrak{A}$ in die Teile, die in den verschiedenen U_μ und V_ν verlaufen. Liefert einer dieser Teile außer dem ersten und letzten mit Hilfe des Gruppenkomplexes den Faktor 1 zum Gruppenelement, so beginnt und endigt er auf Grund der letzten Reduktion auf derselben S^2. Schließt man ihn durch eine Verbindung seiner Anfangs- und Endzelle längs dieser S^2, so entsteht ein zusammenziehbarer geschlossener Weg. Der Teilweg kann daher durch die Verbindung längs der S^2 ersetzt werden, und diese verlegt man dann durch die S^2 hindurch in den Teil U_μ oder V_ν, in dem der vorhergehende und der nachfolgende Teilweg liegen. Das vermindert die Anzahl der Teilwege um zwei. Ist das nicht mehr möglich und ist noch mehr als ein Teilweg vorhanden, so ist in dem Ausdruck $a_1 b_1 a_2, \ldots, b_{r-1} a_r$ mindestens ein Faktor b von 1 verschieden. Dies tritt aber nicht ein, da ja das Gruppenelement zu $\mathfrak{A}$ gehören sollte. Also ist in U_1 und ebenso in jedem Teil U_μ ein geschlossener Weg vorhanden, der zur Klasse eines beliebig gegebenen Elementes a aus $\mathfrak{A}$ gehört. Dasselbe gilt bezüglich V und $\mathfrak{B}$. Kann aber ein Weg, der in einem von einigen S^2 begrenzten Teil einer M^3 liegt, stetig aus diesem Teil ganz herausgezogen werden, so ist er homotop Null. Abgesehen von dem trivialen Fall, daß $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ nur aus dem Einheitselement besteht (und dann übrigens erst recht), ist nach den vorgenommenen Reduktionen $m = n = 1$, und U_1 bzw. V_1 hat die Wegegruppe $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$. Wäre nun die Anzahl der S^2, die U_1 und V_1 trennen, größer als 1, so würde schon die berandete Mannigfaltigkeit, die beim Ansetzen von U_1 an V_1 längs *einer* der S^2 entsteht, eine Wegegruppe haben, die dem freien Produkt von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ isomorph ist, und die Wegegruppe von M^3 würde aus dieser durch freie Multiplikation mit einer Anzahl unendlicher zyklischer Gruppen entstehen. Dadurch würde aber der Rang der Gruppe — d. h. die größte Anzahl unabhängiger Elemente in der Faktorgruppe

1) Auch ungeschlossene Wege geben ein Gruppenelement; nur ändert sich dieses beliebig bei Abänderungen des Gruppenkomplexes.

der Kommutatorgruppe — vergrößert werden und einen größeren Wert erhalten, als er bei dem freien Produkt von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ hat. Also werden U_1 und V_1 durch eine einzige S_2 getrennt; der Satz ist bewiesen.

Den Satz durch Beispiele zu erläutern ist nicht nötig; die bekannten M^3, deren Wegegruppen freie Produkte sind, entstehen gerade am einfachsten so, wie es der Satz behauptet.

(Eingegangen am 7. 11. 28.)

Zusatz bei der Korrektur. Während der Drucklegung bemerkte ich, daß der Beweis des Dehnschen Lemmas eine Lücke enthält. Die Überlegung des Absatzes 2 auf S. 150—151 (Math. Ann. 69) ist nicht stichhaltig und läßt sich, wie Gegenbeispiele zeigen, auch nicht in Ordnung bringen. Bis zur Ausfüllung dieser Lücke sind auch meine Ergebnisse nicht sichergestellt, werfen aber immerhin von neuem Licht auf die Bedeutung des Lemmas für diesen Fragenkreis. H. Kneser.

Beitrag zur geometrischen Variationsrechnung.

Von Walther Mayer in Wien.

Mit 2 Figuren im Text.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit behandelt das Problem der Variationsrechnung unter Verwendung des Tensorkalküls, wodurch der geometrische Inhalt der auftretenden Invarianten stark hervorgehoben wird.

Interessieren dürfte die Einführung der Normalkoordinaten, die eine Verallgemeinerung der Riemannschen Normalkoordinaten des n-dimensionalen Riemannschen Raumes sind, und ihre Verwendung zu einer ganz einfachen Herleitung der Weierstraßschen E-Funktion.

Außerdem wird im § 7 eine ganz kurze und durchsichtige Methode zur Konstruktion dieser E-Funktion für allgemeine Extremalenfelder gegeben, die den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz zum Ausgangspunkt hat.

§ 1. Problemstellung.

Bevor wir das eigentliche Thema, das Problem der Variationsrechnung, behandeln, seien einige Worte gesagt, den n-dimensionalen Raum R_n der Variationsrechnung betreffend. Er ist eine Verallgemeinerung des Riemannschen R_n, wie dieser ist er ein auf n Koordinaten x_1, $x_2, \ldots, x_n$ bezogener Punktraum, dem eine „positiv-homogene" Vektorfunktion (genauer: Funktion eines kontravarianten Vektors)

$$F(x_1, \ldots, x_n, \lambda^1, \ldots, \lambda^n), \tag{1}$$

kurz $F(x, \lambda)$ geschrieben, aufgeprägt ist. Im Riemannschen R_n ist $F(x, \lambda)$ die Maßform $\sqrt{g_{ik}\lambda^i\lambda^k}$.

Positiv homogen (genauer von erster Ordnung positiv homogen) bedeutet das Bestehen der Relation

$$F(x_1, \ldots, x_n, c\lambda^1, c\lambda^2, \ldots, c\lambda^n) = c \cdot F(x_1, \ldots, x_n, \lambda^1, \ldots, \lambda^n) \tag{2}$$

für positives c.

Im Zahlraum $x_1, \ldots, x_n$ entsteht durch die eineindeutige Zuordnung der Punkte des R_n zu den Zahl n-tupeln ein Bild des R_n, von dem vorausgesetzt sei, daß es geschränkt und abgeschlossen ist. Weiter sei $F(x, \lambda)$ eine stetige Funktion ihrer $2n$ Argumente. Ist dann

$$x_1, \ldots, x_n, \lambda^1, \ldots, \lambda^n, \tag{3}$$

ein kontravarianter Vektor des R_n, so sei mit

$$\operatorname{Max} \lambda^i \tag{4}$$

der größte der n Beträge $|\lambda^1|, |\lambda^2|, \ldots, |\lambda^n|$ bezeichnet.

Ist das Variationsproblem positiv definit, d. h. gilt

$$F(x, \lambda) \geqq 0 \tag{5}$$

und nur gleich Null für Nullvektoren $\lambda^i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, so gelingt es, im R_n einen Abstand $\overline{P_0 P_1}$ irgendwelcher Punkte P_0 und P_1 des R_n einzuführen, der den sogenannten Abstandsaxiomen genügt.[1]) Der Abstand $\overline{P_0 P_1}$ wird dabei als untere Grenze der Integralwerte

$$\int_{P_0}^{P_1} F(x, x')\,dt \tag{6}$$

aller P_0 mit P_1 verbindenden Kurvenbögen $\overset{P_1}{\underset{P_0}{C}}$ definiert.

Außerdem ist $\overline{P_0 P_1}$ bei Fixierung des Punktes P_0 eine *stetige Funktion* der Koordinaten des Punktes P_1.

Ist $\mathfrak{M}$ eine Punktmenge des R_n und P einer seiner Punkte, so definieren wir als Abstand $\overline{\mathfrak{M}P}$ in üblicher Weise die untere Grenze der

1) Die erwähnten Eigenschaften der Abstandsfunktion $\overline{P_0 P}$ resultieren aus der wegen (5) geltenden Relation

$$A \cdot \operatorname{Max} \lambda^i \geqq F(x, \lambda) \geqq B \cdot \operatorname{Max} \lambda^i > 0.$$

$A > B > 0$ sind feste Schranken, die stets endlich und nur vom Koordinatensystem abhängig sind. Dabei muß aber die Definition der positiv homogenen Vektorfunktion enger gefaßt werden, statt (2) gelte für *reelles* c: $F(x, c\lambda) = |c|\, F(x, \lambda)$.

Abstände $\overline{MP}$ für alle Punkte M von $\mathfrak{M} \cdot \overline{\mathfrak{M}P}$ ist bei Fixierung der Punktmenge $\mathfrak{M}$ eine stetige Funktion der Koordinaten des Punktes P. Ist jetzt $\mathfrak{M}$ abgeschlossen, z. B. ein Kurvenbogen $\underset{P_0}{\overset{P_1}{C}}$, wie ihn die Variationsrechnung betrachtet, so verstehen wir unter einer Umgebung $\mathfrak{U}(\mathfrak{M})$ von $\mathfrak{M}$ irgendeine im Zahlraum $x_1, \ldots, x_n$ offene, $\mathfrak{M}$ enthaltende Menge. Die Menge aller Punkte P, für die $\overline{\mathfrak{M}P} < \varrho$ gilt, ist dann eine Umgebung spezieller Natur, eine ϱ-Umgebung, $\mathfrak{U}_\varrho(\mathfrak{M})$ bezeichnet. Es gilt dann die wichtige Tatsache, daß in jeder Umgebung $\mathfrak{U}(\mathfrak{M})$ eine und damit unendlich viele ϱ-Umgebungen liegen und umgekehrt.

Die Variationsrechnung untersucht, unter welchen Voraussetzungen es einen zwei Punkte P_0 und P_1 verbindenden Bogen $\underset{P_0}{\overset{P_1}{C}}$ gibt, dessen Länge

$$\int_{P_0}^{P_1} F(x, x')\, dt, \tag{7}$$

über $\underset{P_0}{\overset{P_1}{C}}$ integriert, dem Abstand $\overline{P_0P_1}$ gleich ist. Sie sucht demnach einen P_0 mit P_1 verbindenden Bogen, der keinen größeren Wert für das Integral (7) liefert als jeder andere P_0 mit P verbindende Bogen.

Das Problem hängt dabei von der Gesamtheit der zur Konkurrenz zugelassenen Bogen ab (ob in jedem Punkt eine stetige Ableitung gefordert wird, usw.). Auch die eben definierte Abstandsfunktion hängt von dieser Gesamtheit ab. Ein Kurvenbogen $\underset{P_0}{\overset{P}{C}}$ kann ein Minimum liefern, wenn man nur Bögen einer gewissen Umgebung $\mathfrak{U}(\underset{P_0}{\overset{P}{C}})$ dieses Bogens zuläßt, ohne aber ein solches für alle Bögen des R_n zu liefern. Dann spricht man in der Variationsrechnung von einem relativen Minimum, und dieses Problem soll uns im folgenden beschäftigen.

§ 2. Der Eulersche Vektor.

Zur erfolgreichen Durchführung des in der Einleitung gestellten Problems müssen wir die Vektorfunktion $F(x, \lambda)$ als viermal stetig differenzierbar voraussetzen. Dagegen wollen wir die Homogenitätseigenschaft (2) noch nicht benützen. Es sei jetzt

$$x_i = x_i(t) \qquad i = 1, 2, \ldots, n; \tag{1}$$

$x_i(t)$ zweimal stetig differenzierbar, eine auf den hier wesentlichen

Parameter t bezogene Kurve C des R_n (Parameterkurve)[1]), es existiert also in jedem ihrer Punkte t der stetige Richtungsvektor

$$x_1, \ldots, x_n, \quad \frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt};$$

demnach die in t stetige Funktion $F\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$. Markieren wir dann durch zwei Fixpunkte $P_0(t = t_0)$, $P_1(t = t_1)$ den Bogen $\overset{P_1}{\underset{P_0}{C}}$ auf C, so hat das Integral

(2) $$J(\overset{P_1}{\underset{P_0}{C}}) = \int_{t_0}^{t} F(x, x')\, dt$$

einen nur von diesem Bogen (Bogen plus Parameter!) abhängigen Wert.

Sollen nur notwendige Bedingungen dafür aufgestellt werden, daß $\overset{P_1}{\underset{P_0}{C}}$ unter allen P_0 mit P_1 verbindenden Bogen ein Minimum liefert, so kann man sich auf geeignet gewählte Klassen von solchen Bögen beschränken. Dabei gelingt es, das Problem in gewissem Sinne auf ein Problem der gewöhnlichen Maxima und Minima zu reduzieren. Es sei in einem Bereiche

(3) $$t_0 \leqq t \leqq t_1; \quad -\eta \leqq \varepsilon \leqq \eta$$

eine zweimal stetig differenzierbare Mannigfaltigkeit F_2

(4) $$\bar{x}_i = x_i(t, \varepsilon)$$

der Eigenschaft definiert, daß jede ε-Linie (ε konstant) die Punkte P_0 mit P_1 verbindet, wobei P_0 dem Parameter t_0 und P_1 dem Parameter t_1 entspreche. Die Kurve $\varepsilon = 0$ sei die Kurve C (1), deren Extremaleigenschaft untersucht wird. Analytisch bedeuten diese Aussagen:

(5) $$\begin{cases} x_i(t, 0) = x_i(t), \\ x_i(t_0, \varepsilon) = x_i(t_0), \quad \text{also} \quad \frac{\partial x_i(t_0, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} = 0, \quad \lim\limits_{t = t_0} \frac{\partial x_i(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} = 0, \\ x_i(t_1, \varepsilon) = x_i(t_1), \quad ,, \quad \frac{\partial x_i(t_1, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} = 0, \quad \lim\limits_{t = t_1} \frac{\partial x_i(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} = 0. \end{cases}$$

Gewöhnlich werden Vergleichs-F_2 einfachster Art betrachtet,

(6) $$\bar{x}_i = x_i(t) + \varepsilon \cdot y_i(t), \quad y_i(t_0) = y_i(t_1) = 0,$$

---

1) Die zur Konkurrenz zugelassenen Kurven sind also zweimal stetig differenzierbar. Inwieweit diese Voraussetzung eingeschränkt werden kann, siehe Bolza „Variationsrechnung".

deren besondere Form aber, Linearität in ε, bei Koordinatentransformation zu bestehen aufhört. Für uns soll (6) ein Beweis für die Existenz von F_2 des genannten Charakters sein. Setzen wir in das Integral (2) $x_i(t, \varepsilon)$, ε konstant, statt $x_i(t)$, so wird es eine Funktion $J(\varepsilon)$ von ε, und soll unser Bogen $\varepsilon = 0$ ein Minimum liefern, so ist $J'(0)$ notwendig gleich Null. Für $J'(0)$ erhalten wir in bekannter Weise

$$(7) \qquad J'(0) = \int_{t_0}^{t} \left[\frac{\partial F(x, x')}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F(x, x')}{\partial x_i'}\right)\right] \frac{\partial x_i(t, 0)}{\partial \varepsilon}\, dt.$$

Soll nun $J'(0)$ für irgendeine Vergleichsmannigfaltigkeit (4) verschwinden, so ist dazu das Verschwinden des kovarianten Vektors

$$(8) \qquad \varrho_i = \frac{\partial F(x, x')}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F(x, x')}{\partial x_i'}\right)$$

des „Eulerschen Vektors" notwendig und hinreichend. Kurven (Parameterkurven), für die der Eulersche Vektor ϱ_i in jedem Punkte verschwindet, heißen die *Extremalen des Variationsproblems*

$$\int F(x, x')\, dt.$$

Der Bogen $\overset{P_1}{\underset{P_0}{C}}$, der (2) zu einem Minimum macht, muß also notwendig ein Extremalbogen sein.

Das Verschwinden des Eulerschen Vektors ϱ_i führt auf die Eulerschen Differentialgleichungen des Variationsproblems, die ausführlich geschrieben

$$(9) \qquad \frac{\partial F(x, x')}{\partial x_i} - \frac{\partial^2 F(x, x')}{\partial x_i' \partial x_k} x_k' - \frac{\partial^2 F(x, x')}{\partial x_i' \partial x_k'} x_k'' = 0 \qquad \text{lauten.}$$

Bemerkungen:

1. *Verschwindet der Eulersche Vektor für jede Kurve*, d. h. gilt (9) identisch in x_i, x_i', x_i'', so hängt der Integralwert (2) nur ab von den Endpunkten P_0 und P_1 des Bogens $\overset{P_1}{\underset{P_0}{C}}$.[1]) In diesem Fall muß $\frac{\partial^2 F(x x')}{\partial x_i' \partial x_k'} \equiv 0$, also

$$(10) \qquad F(x, \lambda) = A_i(x) \lambda^i$$

sein. Dies in (9) eingeführt, ergibt $\varrho_j = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i}\right) x_i'$, woraus infolge des identischen Verschwindens von ϱ_j

$$(11) \qquad \frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i} = 0$$

in allen Punkten des R_n folgt.

1) Der R_n wird dabei von der Beschaffenheit vorausgesetzt, daß jede seiner geschlossenen Kurven ein Flächenstück (F_2) des R_n umrandet.

2. *Ist $F(x, \lambda)$ von erster Ordnung positiv homogen,* so ist das Verschwinden des Eulerschen Vektors für eine Kurve von dieser als Raumkurve allein und nicht vom Parameter abhängig. Ist $\bar{t} = \bar{t}(t)$ eine Parametertransformation und ϱ_i bzw. $\bar{\varrho}_i$ der Eulersche Vektor der Kurve $x_i(t)$ bzw. $x_i(t(\bar{t}))$, so gilt $\varrho_i = \bar{\varrho}_i \bar{t}'(t)$.

3. *Setzen wir* $G = \frac{\partial F(x x')}{\partial x_i'} x_i'$, so gilt für jede Kurve $x_i = x_i(t)$

(12) $$\frac{d}{dt}[F(x, x') - G(x, x')] = \varrho_i x_i'.$$

Aus (12) folgt, daß für alle Kurven, für die $\varrho_i x_i' = 0$ ist, d. h. für die ϱ_i normal zur Richtung x_i' steht, $F(x, x') - G(x, x')$ konstant ist. Dies trifft insbesondere für Extremalen $\varrho_i = 0$ zu. $F(x x') - G(x x')$ ist demnach ein Integral des Systems (9) der Eulerschen Differentialgleichungen.

4. *Ist $F(x, \lambda)$ von k-ter Ordnung positiv homogen, $k \geqq 1$,* d. h. gilt

(13) $$F(x_1, \ldots, x_n, c\lambda^1, c\lambda^2, \ldots, c\lambda^n) = c^k F(x_1, \ldots, x_n, \lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n), \quad c \geqq 0,$$

so ist $G(x x') = k F(x x')$, und statt (12) gilt

(14) $$(1 - k)\frac{d}{dt} F(x, x') = \varrho_i x_i'.$$

Aus (14) folgt:

Ist $k = 1$, so ist $\varrho_i x_i'$ für jede Kurve Null, d. h. ϱ_i Normalvektor der Kurve.

Ist $k \neq 1$, so ist $F(x x')$ ein Integral der Eulerschen Differentialgleichungen, d. h. konstant für jede Extremale. Sobald längs einer Kurve $F(x x')$ nicht Null wird, können wir auf ihr durch die Fixierung $|F(x x')| = 1$ einen Parameter, die „*Bogenlänge*" der Kurve einführen. Sie ist durch

(15) $$s = \int \sqrt[k]{|F(x, x')|} \cdot dt + \text{konst.} \qquad \text{bestimmt.}$$

Durch $as + b$, a, b konstant, ist dann die Gesamtheit der Parameter gegeben, für die $F(x x')$ konstant ist. Für die auf die Bogenlängen s (bzw. $as + b$) bezogene Kurve ist nach (14) $\varrho_i x_i' = 0$, d. h. ϱ_i ein Normalvektor der Kurve. Ist umgekehrt $\varrho_i x_i' = 0$, so ist die Kurve auf die Bogenlänge s bzw. $as + b$ bezogen. Insbesondere gilt dies für die Extremalen $\varrho_i = 0$. [Im Riemannschen R_n ist ϱ_i die mit der ersten Krümmung multiplizierte erste (Haupt-)Normale der Kurve.]

5. *Ist $F(x, \lambda)$ von erster Ordnung positiv homogen,* so sind die Extremalen des Variationsproblems $\int \{F(x, x')\}^k dt$, $k > 1$, mit den Extre-

malen des Variationsproblems $\int F(xx')\,dt$ identisch, sobald man diese auf Parameter t bezieht, für die $F(xx')$ konstant ist. Eine Ausnahme bilden die Nullkurven: $F(xx') = 0$. Die Behauptung entnehmen wir der Identität

$$(16)\qquad \underbrace{\frac{\partial (F)^k}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (F)^k}{\partial x_i'}\right)}_{\text{I}} = kF^{k-1}\underbrace{\left[\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i'}\right)\right]}_{\text{II}} - k(k-1)F^{k-2}\frac{\partial F}{\partial x_i'}\underbrace{\frac{dF}{dt}}_{\text{III}}.$$

Für die Extremalen von $\int (F(xx'))^k dt$ ist I. und III. Null, also, sobald $F \neq 0$, auch II. gleich Null. Bezieht man aber eine Extremale von $\int F(xx')\,dt$ auf Parameter t, für die $F(xx')$ konstant ist [das gelingt, weil $F(xx') \neq 0$ vorausgesetzt ist], so ist II. und III. Null, also auch I. q. e. d.

6. *Man zeigt durch rechnerische Kontrolle,* daß

$$(17)\qquad \frac{\partial F(x, \lambda)}{\partial \lambda_i} = \sigma_i$$

ein kovarianter Vektor und

$$(18)\qquad \frac{\partial^2 F(x, \lambda)}{\partial \lambda^i \partial \lambda^\varkappa} = \sigma_{i\varkappa} = \sigma_{\varkappa i}$$

ein kovarianter Tensor 2. Stufe ist. σ_i und $\sigma_{i\varkappa}$ hängen vom kontravarianten Vektor $x_1, \ldots, x_n, \lambda^1, \ldots, \lambda^n$ ab.

§ 3. Die Normalform des Systems der Eulerschen Differentialgleichungen.

Wir setzen voraus, daß für alle Vektoren des R_n; x, λ die Determinante des Tensors σ_{ik} § 2, (18), von Null verschieden ist,

$$(1)\qquad |\sigma_{ik}| \neq 0.$$

Diese Voraussetzung ist vom Koordinatensystem unabhängig, da ja der Rang der Matrix eines Tensors σ_{ik} invariant ist. Für eine Kurve $C: x_i = x_i(t)$ erhalten wir dann durch innere Multiplikation von

$$(2)\qquad \varrho_i = \frac{\partial F(x, x')}{\partial x_i} - \frac{\partial^2 F(x, x')}{\partial x_i' \partial x_\varkappa} x_\varkappa' - \frac{\partial^2 F(x, x')}{\partial x_i' \partial x_\varkappa'} x_\varkappa''$$

mit σ^{ij}, dem $\sigma_{i\varkappa}$ adjungierten kontravarianten Tensor II. Stufe $\left(\sigma_{i\varkappa}\sigma^{ij} = \vartheta_\varkappa^j \begin{cases} = 0 & \varkappa \neq j \\ = 1 & \varkappa = j \end{cases}\right)$

$$(3)\qquad x_j'' = \sigma^{ij}\left[\frac{\partial F(x, x')}{\partial x_i} - \frac{\partial^2 F(x, x')}{\partial x_i' \partial x_\varkappa} x_\varkappa'\right] - \sigma^{ij}\varrho_i.$$

Für Extremalen $\varrho_i = 0$ stellt (3) das System der Eulerschen Differentialgleichungen in der Normalform dar:

$$x_i'' = H_i(x_1 \ldots x_n,\ x_1' \ldots x_n') \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

Da $F(x, \lambda)$ nach Voraussetzung viermal stetig differenzierbar ist, so sind die in (4) auftretenden Funktionen $H_i(x x')$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen ihrer Argumente. [Die tensorielle Form von (3) ist $x_i'' - H_i = \sigma^{ii}\varrho_i$; somit definiert $x_i'' - H_i(x, x')$ einen kontravarianten Vektor auf jeder Kurve, dessen Verschwinden die Extremalen charakterisiert.]

In dem gerade für die Variationsrechnung wichtigsten Fall, daß $F(x\lambda)$ von erster Ordnung positiv homogen ist, ist wegen

$$\frac{\partial^2 F(x, x')}{\partial x_i' \partial x_\varkappa'} x_\varkappa' = 0 \tag{5}$$

die Determinante (1) gleich Null. Die eben angeführte Umformung der Eulerschen Differentialgleichungen in die Normalform (4) ist hier nicht ohne weiteres durchführbar. Wenn wir aber Nullextremalen beiseitelassen ($F(x x') = 0$), so sind die Extremalen des Variationsproblems $\int F^k(x x')\,dt$, k natürliche Zahl > 1, identisch mit den Extremalen unseres Variationsproblems (§ 2, Bemerkung 5). Diese erscheinen dabei auf Parameter bezogen, für die $F(x x')$ konstant ist. Setzen wir jetzt für irgendeine solche Zahl k

$$\left|\frac{\partial^2 (F(x\lambda))^k}{\partial \lambda^i \partial \lambda^j}\right| \neq 0 \tag{6}$$

für alle Vektoren des R_n voraus, so gelangen wir auch in diesem Falle zur Reduktion des Systems der Eulerschen Differentialgleichungen auf ihre Normalform.

Ist $F(x, \lambda)$ von k-ter Ordnung positiv homogen, $k = 1, 2, \ldots$, so ist in der Normalform (4) *$H_i(x, \lambda)$ von zweiter Ordnung positiv homogen.* In Formeln: Gilt

$$F(x, c\lambda) = c^k F(x, \lambda) \quad \text{für} \quad c > 0, \qquad \text{so gilt} \tag{7}$$

$$H_i(x, c\lambda) = c^2 H_i(x, \lambda) \quad \text{für} \quad c > 0. \tag{8}$$

Wir erlassen uns den ganz elementaren Nachweis und gehen daran, aus der in (8) auftretenden Homogenität der $H_i(x\lambda)$ Folgerungen zu ziehen. Das Existentialtheorem für Systeme (4) in Normalform besagt, daß es zu vorgegebenen Anfangswerten (Richtungsvektor)

$$x_1^0, \ldots, x_n^0, \quad \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^0, \ldots, \left(\frac{dx_n}{dt}\right)^0 \tag{9}$$

eine bestimmte Lösungskurve $x_i = x_i(t)$ von (4) gibt, die für $t = t_0$ den Richtungsvektor (9) besitzt. Nun sei (8) erfüllt und

$$x_i = x_i(t) \tag{10}$$

die Extremale (Lösungskurve von (4)), die für $t = t_0$ den Richtungsvektor (9) besitzt. Diese Extremale beziehen wir durch die Transformation

$$t = c(\tau - \tau_0) + t_0, \tag{11}$$

c konstant > 0, auf den Parameter τ.

Die neue Parameterkurve, die im allgemeinen Fall ihren Extremalencharakter verliert, bleibt in diesem besonderen Falle eine Extremale, und zwar nimmt sie für $\tau = \tau_0$ (d. i. im Punkt $P_0(t = t_0)$) die Anfangswerte

$$x_1^0, \ldots, x_n^0, \quad c\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^0, \ldots, c\left(\frac{dx_n}{dt}\right)^0 \quad \text{an.} \tag{12}$$

Im Falle des „homogenen" Problems ($F(x\lambda)$ positiv homogen) sind also bereits durch Punkt und Richtung die Extremalen bestimmt.

§ 4. Die Normalkoordinaten in bezug auf ein Zentrum P_0.

Es seien die Voraussetzungen erfüllt, die die Reduktion der Eulerschen Differentialgleichungen auf Normalform gestatten, des weiteren sei $F(x, \lambda)$ positiv homogen. Dann sind die Funktionen $H_i(xx')$ (in der Normalform) zweimal stetig differenzierbare Funktionen ihrer Argumente und von zweiter Ordnung positiv homogen. Eine Extremale wird dann durch einen Richtungsvektor

$$x_1^0, \ldots, x_n^0, \quad \left(\frac{dx_1}{ds}\right)^0, \ldots, \left(\frac{dx_n}{ds}\right)^0 \tag{1}$$

eindeutig fixiert. Ihre Gleichung enthält daher außer dem Parameter s die $2n$ Größen (1) (ihre Anfangswerte für $s = s_0$), sie wird demnach durch ein System

$$x_i = \varphi_i\left(s;\ s_0,\ x^0,\ \left(\frac{dx}{ds}\right)^0\right) \tag{2}$$

dargestellt. Weiter sind auch die φ_i zweimal stetig differenzierbare Funktionen ihrer Argumente (in einer Umgebung der Stelle (1) und s_0), und sie haben (als Folge der Homogenität der Funktionen $H_i(xx')$) eine charakteristische Form, die wir jetzt herleiten wollen. Die Parametertransformation $s = a\bar{s} + b$, $a > 0$, a, b konstant, führt die Extremale (2) in die Extremale

$$x_i = \varphi_i\left(a\bar{s} + b,\ a\bar{s}_0 + b,\ x^0,\ \frac{1}{a}\left(\frac{dx}{d\bar{s}}\right)^0\right) \tag{3}$$

über, die für $\bar{s} = \bar{s}_0$ den Richtungsvektor

(4) $$x_1^0, \ldots, x_n^0, \left(\frac{d x_1}{d \bar{s}}\right)^0, \ldots, \left(\frac{d x_n}{d \bar{s}}\right)^0$$

hat, also mit der Extremalen

(5) $$x_i = \varphi_i\left(\bar{s};\, \bar{s}_0,\, x^0,\, \left(\frac{d x}{d \bar{s}}\right)^0\right)$$

identisch ist. ($s_0 = a\bar{s}_0 + b$).

Es bestehen somit die Identitäten

(6) $$\varphi_i\left(s;\, s_0,\, x^0,\, \left(\frac{d x}{d s}\right)^0\right) \equiv \varphi_i\left((as + b);\ (as_0 + b),\ x^0,\ \frac{1}{a}\left(\frac{d x}{d s}\right)^0\right)$$
$$i = 1, 2, \ldots, n$$

in der Umgebung der Stelle (1) und s_0 für willkürliche a, b, $a > 0$.

Bestimmen wir $b = -as_0$, so wird (6)

(7) $$\varphi_i\left(s,\, s_0,\, x^0,\, \left(\frac{d x}{d s}\right)^0\right) \equiv \varphi_i\left(a\,(s - s_0),\, 0,\, x^0,\, \frac{1}{a}\left(\frac{d x}{d s}\right)^0\right),$$

was wir nach Einführung der $(n + 1)$ Größen

(8) $$\sigma = a\,(s - s_0), \quad \beta^i = \frac{1}{a}\left(\frac{d x_i}{d s}\right)^0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n;$$

(9) $$\varphi_i\left(s,\, s_0,\, x^0,\, \left(\frac{d x}{d s}\right)^0\right) \equiv \varphi_i\,(\sigma,\, 0,\, x^0,\, \beta) \quad \text{schreiben.}$$

Die erlaubte Differentiation von (9) nach a ergibt

(10) $$0 \equiv \frac{\partial \varphi_i\,(\sigma,\, 0,\, x^0,\, \beta)}{\partial \sigma}\,(s - s_0) - \frac{\partial \varphi_i\,(\sigma,\, 0,\, x^0,\, \beta)}{\partial \beta^i}\left(\frac{d x_i}{d s}\right)^0 \frac{1}{a^2} \qquad \text{oder}$$

(11) $$0 \equiv \frac{\partial \varphi_i}{\partial \sigma}\,\sigma - \frac{\partial \varphi_i}{\partial \beta^i}\,\beta^i \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Die n Funktionen φ_i, als Funktionen der $(n + 1)$ Argumente (8) aufgefaßt, sind nach (11) Lösungen der homogenen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

(12) $$\frac{\partial \Phi(\sigma, \beta)}{\partial \sigma}\,\sigma - \frac{\partial \Phi(\sigma, \beta)}{\partial \beta^i}\,\beta^i = 0 \qquad \beta = 1, \ldots, n.$$

Nun ist

(13) $$\alpha_r = \sigma \beta^r = (s - s_0)\left(\frac{d x_r}{d s}\right)^0 \qquad r = 1, \ldots, n$$

ein System von n unabhängigen Lösungen von (12), somit jede weitere, also auch φ_i, eine Funktion dieser n, und wir erhalten

(14) $$x_i = \varphi_i\left(x_1^0, \ldots, x_n^0, \left(\frac{d x_1}{d s}\right)^0 \cdot (s - s_0), \ldots, \left(\frac{d x_n}{d s}\right)^0 \cdot (s - s_0)\right)$$

als die charakteristische Form, in der die Extremalen des homogenen Variationsproblems auftreten. Im Systeme

(15) $$x_i = \varphi_i\,(x_1^0, \ldots, x_n^0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

sind die Funktionen φ_i zweimal stetig differenzierbar mit eventueller Ausnahme der Stellen $x_1^0, \ldots, x_n^0$, $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$.

In der Tat sind die φ_i als Funktionen von s und der $2n$ Größen (1) aufgefaßt — ebenso wie die $H_i(x, x')$ — zweimal stetig differenzierbar. Da in ihnen α_r nur in $\left(\frac{dx_r}{ds}\right)^0 = \frac{\alpha_r}{s - s_0}$ auftritt, gilt

$$(16) \quad \frac{\partial \varphi_i(x^0, \alpha)}{\partial \alpha_t} = \frac{\partial \varphi_i(x_0, \alpha)}{\partial \left(\frac{dx_t}{ds}\right)^0} \cdot \frac{1}{s - s_0}, \quad \frac{\partial^2 \varphi_i(x^0, \alpha)}{\partial \alpha_t \partial \alpha_r} = \frac{\partial^2 \varphi_i(x_0, \alpha)}{\partial \left(\frac{dx_t}{ds}\right)^0 \partial \left(\frac{dx_r}{ds}\right)^0} \cdot \frac{1}{(s - s_0)^2}.$$

Für $s \neq s_0$ sind die Funktionen rechts (in (16)) stetig in bezug auf ihre Argumente x_i^0, $(s - s_0)$, $\left(\frac{dx_\omega}{ds}\right)^0$, die sie in der Form x_i^0, $\alpha_\omega = \left(\frac{dx_\omega}{ds}\right)(s - s_0)$ allein enthalten. Sie sind demnach mit etwaiger Ausnahme von $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$ stetige Funktionen der x_i^0 und α_i, q. e. d.[1])

Wir treffen nun die Vereinbarung, *daß auch für die Stellen* $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$ *die ersten Ableitungen* $\frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha_t}$ *bestehen und stetig seien.* Wir können dann die Werte dieser Ableitungen an den Stellen $x_1^0, \ldots, x_n^0$, $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$ berechnen.[2])

Aus (15) erhalten wir durch Differentiation nach dem Parameter (also längs einer Extremalen)

$$(17) \qquad \frac{dx_i}{ds} = \frac{\partial \varphi_i(x_0, \alpha)}{\partial \alpha_t} \left(\frac{dx_t}{ds}\right)^0,$$

somit für $\lim s = s_0$

$$(18) \qquad \left(\frac{dx_i}{ds}\right)^0 = \frac{\partial \varphi_i(x^0, 0)}{\partial \alpha_t} \left(\frac{dx_t}{ds}\right)^0.$$

Da (18) für jede Extremale durch $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ gilt, so folgt aus (18)

$$(19) \qquad \frac{\partial \varphi_i(x^0, 0)}{\partial \alpha_t} = \delta_{it}.$$

1) Es gilt die fast triviale Tatsache: Ist Φ eine stetige Funktion der $2m$ Argumente $u_1, \ldots, u_m$, $v_1, \ldots, v_m$, die sie aber nur in der Zusammensetzung $w_1 = u_1 v_1, \ldots, w_m = u_m v_m$ enthält, so ist sie als Funktion dieser m Größen w_i $(i = 1, \ldots, m)$ stetig, wenn der Bereich der u_i oder der der v_i ungeschränkt ist. Oben ist

$$u_1 = \cdots = u_n = (s - s_0), \quad v_i = \left(\frac{dx_i}{ds}\right)^0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

der Bereich der v_i ist ungeschränkt.

2) Diese Berechnung gelingt auch ohne diese Voraussetzung, auch kann man zeigen, daß *auf jeder Extremalen* durch P_0 $\frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha_t}$ (für $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$) stetig ist, woraus aber noch nicht die Stetigkeit für die Stelle $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$ der Raumfunktion $\frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha_t}$ folgt.

Das System

$$(20) \qquad x_i^0 = x_i^0, \quad x_i = \varphi_i(x_1^0, \ldots, x_n^0, \;\; \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \quad i = 1, \ldots, n,$$

dessen Determinante an der Stelle x_i^0, $\alpha_i = 0$ den Wert Eins hat, ordnet jedem Wertesystem $\bar{x}_i^0$, α_i einer Umgebung dieser Stelle ein Wertsystem $\bar{x}_i^0$, x_i der Umgebung der (durch (20)) zugeordneten Stelle x_i^0, x_i^0 eineindeutig zu. Ist

$$(21) \qquad x_i^0 = x_i^0; \quad \alpha_i = \psi_i(x_1^0, \ldots, x_n^0, \;\; x_1, \ldots, x_n) \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

das (für eine Umgebung x_i^0, x_i^0) dem Systeme (20) inverse System, so sind die ψ_i ebenfalls einmal stetig differenzierbare Funktionen ihrer Argumente.[1]) Es seien $\bar{x}_i^0$ bzw. $\bar{x}_i$ zwei Punkte einer genügend eng begrenzten Umgebung von $P_0(x_i^0)$. Dem $2n$-tupel $\bar{x}_i^0, \ldots, \bar{x}_n^0$, $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ entspricht dann nach (21) ein bestimmtes $2n$-tupel $\bar{x}_1^0, \ldots, \bar{x}_n^0$, $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n$ der Umgebung der Stelle $x_0, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0$. Dieses, in (20) eingeführt, hat dann

$$(22) \qquad x_i = \varphi_i(\bar{x}_1^0, \ldots, \bar{x}_n^0, \;\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n)$$

zur Folge. Das heißt aber, daß man um P_0 eine Umgebung derart fixieren kann, *daß es durch je zwei Punkte derselben eine bestimmte Extremale* $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n$ (*der Umgebung von* $0, \ldots, 0$) *gibt*. Wir erklären nun

die Normalkoordinaten des Zentrums P_0.

Wir können bei Fixierung von P_0 das Teilsystem von (20), (21)

$$(23) \qquad \begin{cases} x_i = \varphi_i(x_1^0, \ldots, x_n^0, \;\; \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \\ \alpha_i = \psi_i(x_1^0, \ldots, x_n^0, \;\; x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

als Koordinatentransformation für die Punkte einer gewissen Umgebung von P_0 auffassen. Das neue Koordinatensystem, *das Riemannsche Normalkoordinatensystem mit dem Zentrum* $P_0(\alpha_i = 0)$, hat die es charakterisierende Eigenschaft, daß in ihm die Gleichungen der Extremalen durch P_0 linear sind:

$$(24) \qquad \alpha_i = \xi^i \cdot s, \quad \xi^i = \frac{d\alpha_i}{ds} = \text{konst.}$$

In der Tat führt (24), in das erste System (23) eingesetzt, zu den Extremalen durch P_0. Mit $\mathfrak{U}(P_0)$ sei eine Umgebung (offene Punktmenge) von P_0 bezeichnet, in der wir die Riemannschen Koordinaten einführen können. Weiter sei für den Augenblick das Variationsproblem *positiv definit* vorausgesetzt, nämlich $F(x\lambda) \geqq 0$ und gleich Null

1) Mit Ausnahme der Stellen $x_1^0, \ldots, x_n^0, x_1^0, \ldots, x_n^0$ sogar zweimal stetig differenzierbar.

nur für Nullvektoren. Auf jeder Kurve können wir dann einen positiven Parameter $\int \sqrt[k]{F(x, x')}\,dt$ einführen, der auch durch $F(xx') = 1$ (für diesen Parameter, x_i' „Einheitsvektor") charakterisiert ist. Der in $\mathfrak{U}(P_0)$ von P_0 nach einem Punkt P auf der Extremalen P_0P gemessene Bogen $\int_{P_0}^{P} F(x, x')\,dt$ heiße der „Abstand bzw. Bogenlänge", $\overline{P_0 P}$, der aber mit dem in der Einleitung definierten Abstand nur dann zusammenfällt, wenn die Extremale P_0P ein Minimum für das Integral $\int_{P_0}^{P} F(xx')\,dt$ liefert.[1])

Auf jeder Extremalen (24) durch P_0 gibt es dann einen Punkt kleinsten Abstandes $\varrho = \varrho(\xi)$, der nicht zu $\mathfrak{U}(P_0)$ gehört. Ist ϱ_0 die untere Grenze aller $\varrho(\xi)$, so ist $\varrho_0 > 0$. Wäre $\varrho_0 = 0$, so gäbe es in der Komplementärmenge $C(\mathfrak{U}(P_0))$ von $\mathfrak{U}(P_0)$ eine Punktfolge $P_1, P_2, \ldots, P_n \ldots$, deren „Abstände" von P_0: $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n, \ldots$ nach Null konvergierten. Die Koordinaten von P_h sind im System $x_1, \ldots, x_n$

$$(25) \qquad \underset{h}{x_i} = \varphi_i(x_1^0, \ldots, x_n^0, \; \underset{h}{\overset{1}{\xi}} \cdot \varrho_h, \ldots, \underset{h}{\overset{n}{\xi}} \cdot \varrho_h).$$

Nun gilt (erste Anmerkung § 1) $\frac{1}{B} \geqq \operatorname{Max} \lambda^i$ für Einheitsvektoren: $F(x, \lambda) = 1$. Da nach Einführung der Bogenlänge der Richtungsvektor ein Einheitsvektor ist, so ist $M \geqq \operatorname{Max} \underset{h}{\overset{i}{\xi}}$, also $\lim_{h=\infty} \underset{h}{\overset{i}{\xi}} \cdot \varrho_h = 0$ [2]), da $\lim_{h=\infty} \varrho_h = 0$ ist. Aus (25) erhält man für den Grenzpunkt der Folge P_h

$$(25') \qquad \lim \underset{h}{x_i} = \varphi_i(x_1^0, \ldots, x_n^0, \; 0, \ldots, 0) = x_i^0,$$

d. h. den Punkt P_0.

Dieser Grenzpunkt muß aber der abgeschlossenen Menge $C(\mathfrak{U}(P_0))$ angehören, kann also kein Punkt von $\mathfrak{U}(P_0)$, also auch nicht P_0 sein. Also ist $\varrho_0 > 0$, q. e. d.

Die Gesamtheit der in $\mathfrak{U}(P_0)$ gelegenen Punkte, deren (auf den Extremalen gemessener) Abstand von P_0 kleiner als ϱ_0 ist, bezeichnen wir als $\mathfrak{U}_{\varrho_0}(P_0)$-Umgebung (auch sie ist mit der ebenso bezeichneten Umgebung der Einleitung nicht immer identisch). Wir wollen eine so definierte ϱ_0-Umgebung als „offene" ϱ_0-Kugel um P_0 als Zentrum ansprechen. In der $\mathfrak{U}_\varrho(P_0)$-Umgebung gilt, daß jeder ihrer Punkte mit P_0 auf einem Extremalbogen liegt, der ganz dieser Umgebung an-

1) $F(x\lambda)$ ist dabei von erster Ordnung positiv homogen vorausgesetzt.

2) Über h nicht summiert.

gehört. Da es aber stets eine Umgebung $\mathfrak{U}(P_0)$ gibt, in der die Riemannschen Normalkoordinaten gelten, so gibt es auch stets eine solche Umgebung $\mathfrak{U}_{\varrho_0}(P_0)$ von P_0. Im nächsten Paragraphen untersuchen wir die Form der Vektorfunktion $F(x, \lambda)$ in einem Riemannschen Normalkoordinatensysteme. Wegen der zweimal stetigen Differenzierbarkeit der in den Transformationsgleichungen (23) auftretenden Funktionen in einer Umgebung $\mathfrak{U}(P_0)$ von P_0 (mit etwaiger Ausnahme von P_0), können wir für jede zweimal stetig differenzierbare Kurve $x_i = x_i(t)$ in jedem Punkte (Ausnahme P_0!) dieser Kurve und Umgebung $\mathfrak{U}(P_0)$ die Komponenten des Eulerschen Vektors ϱ_i im Normalkoordinatensysteme $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ bilden. Für Extremalen müssen diese Komponenten verschwinden.

§ 5. Die Normalkoordinaten des Zentrums P_0 (Fortsetzung).

Längs der Extremalen ist $F(x, x')$ konstant; längs der Extremalen durch P_0

(1) $$x_i = \xi^i \cdot s$$ gilt also jedenfalls

(2) $$F(x, \xi) = F(0, \xi).$$

Bemerkung: Da wir nun ausschließlich die Normalkoordinaten benützen, behalten wir für sie die Koordinatenbezeichnungen $x_1, \ldots, x_n$ statt $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ bei. Ferner ist $F(x, x')$, die Vektorfunktion im Normalkoordinatensystem, in der alten Bezeichnung gleich

$$F\left(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_j} \alpha_j', \ldots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial \alpha_j} \alpha_j'\right).$$

Daher existiert und ist stetig: $F(x, \xi)$, $\frac{\partial F(x, \xi)}{\partial \xi^i}$, $\frac{\partial^2 F(x, \xi)}{\partial \xi^i \partial \xi^k}$, wogegen mit etwaiger Ausnahme des Punktes P_0: $\frac{\partial F(x, \xi)}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 F(x, \xi)}{\partial x_i \partial \xi^k}$ stetig sind.

Nun berücksichtigen wir den Extremalcharakter der Kurven (1), für sie verschwindet der Eulersche Vektor, also gilt

(3) $$0 = \frac{\partial F(x, \xi)}{\partial x_i} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F(x, \xi)}{\partial \xi^i}\right)$$

mit etwaiger Ausnahme in P_0.

Wir bezeichnen

(4) $$\xi_i = \frac{\partial F(x, \xi)}{\partial \xi^i}; \quad \xi_{i0} = \frac{\partial F(0, \xi)}{\partial \xi^i},$$

dabei ist ξ_{i0} der Grenzvektor, dem der kovariante Vektor ξ_i, von $P(\xi^i \cdot s)$ nach P_0 längs der Extremalen (1) geführt, zustrebt. Dann lautet (3)

(5) $$0 = \frac{\partial F(x, \xi)}{\partial x_i} - \frac{d}{ds}\xi_i \quad \text{oder} \quad (5') \quad \frac{\partial F(x, \xi)}{\partial x_i} = \frac{d(\xi_i - \xi_{i0})}{ds};$$

ferner folgt aus (2), sobald wir $\xi^i = \frac{x_i}{s}$ eintragen, wegen der Homogenitätseigenschaft der Vektorfunktion $F(x, \xi)$:

$$F(x, x) = F(0, x), \tag{6}$$

woraus die Differentiation nach x_i

$$\frac{\partial F(x, x)}{\partial x_i} + \frac{\partial F(x, x)}{\partial \xi^i} = \frac{\partial F(0, x)}{\partial \xi^i} \tag{7}$$

ergibt. Ist $F(x, \lambda)$ von $k$ter Ordnung positiv homogen, so ist $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ von $k$ter, $\frac{\partial F}{\partial \xi^i}$ aber von $(k-1)$ter Ordnung positiv homogen. Die Multiplikation von (7) mit s^{-k} hat demnach

$$s\frac{\partial F(x, \xi)}{\partial x_i} + \xi_i - \xi_{i0} = 0 \tag{8}$$

zur Folge. Aus (5′) und (8) erhalten wir

$$\frac{d(\xi_i - \xi_{i0})}{ds} + \frac{1}{s}(\xi_i - \xi_{i0}) = 0 \quad \text{oder integriert} \quad \xi_i - \xi_{i0} = \frac{c_i}{s}, \tag{9}$$

c_i konstant.

Da aber $\lim\limits_{s=0} \xi_i = \xi_{i0}$ ist, muß $c_i = 0$ sein, d. h. $\xi_i = \xi_{i0}$.

Wir erhalten also als notwendige Bedingung für das Normalkoordinatensystem des Zentrums P_0

$$\frac{\partial F(x, \xi)}{\partial \xi^i} = \frac{\partial F(0, \xi)}{\partial \xi^i} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial F(x, x)}{\partial \xi^i} = \frac{\partial F(0, x)}{\partial \xi^i} \tag{10}$$

und weisen nun nach, daß diese Relationen zugleich hinreichend sind, sobald man als Charakteristikum des Normalkoordinatensystems des Zentrums $P_0(0, \ldots, 0)$ die lineare Gestalt (1) der Extremalen durch P_0 ansieht. Es gelte also das System (10)! Infolge der Homogenität der Funktion $F(x\xi)$ erhalten wir durch „innere" Multiplikation der Relation (10) mit ξ^i

$$F(x, \xi) = F(0, \xi) \quad \text{bzw.} \quad F(xx) = F(0x). \tag{11}$$

Differentiation nach x_i ergibt

$$\frac{\partial F(x, x)}{\partial x_i} + \frac{\partial F(x, x)}{\partial \xi^i} = \frac{\partial F(0, x)}{\partial \xi^i}, \qquad \text{also nach (10)} \tag{12}$$

$$\frac{\partial F(x, x)}{\partial x_i} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial F(x, \xi)}{\partial x_i} = 0. \tag{13}$$

Wir bilden jetzt den Eulerschen Vektor der Kurven $x_i = \xi^i \cdot s$, ξ^i konstant; aus (10) folgt

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F(x, \xi)}{\partial \xi_i}\right) = 0, \tag{14}$$

da ja $\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F(0,\xi)}{\partial \xi^i}\right)$ wegen $\xi^i =$ konstant Null ist. Also gilt (13) und (14):

$$\varrho_i = \frac{\partial F(x,\xi)}{\partial x_i} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F(x,\xi)}{\partial \xi^i}\right) = 0, \tag{15}$$

d. h. *die Kurven* $x_i = \xi^i \cdot s$ *sind Extremalen.*

§ 6. Die Weierstraßsche *E*-Funktion.

Ist $F(x, \lambda)$ von $k$ter Ordnung positiv homogen, so ist

$$\Phi(x,\lambda) = \sqrt[k]{|F(x,\lambda)|} \tag{1}$$

von erster Ordnung positiv homogen. Um jetzt Fallunterscheidungen zu vermeiden, setzen wir $\Phi(x,\lambda)$ positiv definit voraus, d. h.

$$\Phi(x,\lambda) \geqq 0 \tag{1'}$$

und nur für Nullvektoren ($\lambda^i = 0$) gleich Null. Durch die Festsetzung $\Phi(x x') = 1$ fixieren wir dann auf jeder Kurve den Parameter, die Bogenlänge. Im Normalkoordinatensystem haben die Extremalen durch P_0 die Gleichungsform

$$x_i = \xi^i \cdot s, \quad \frac{dx_i}{ds} = \xi^i = \text{konstant}, \tag{2}$$

wobei infolge unseres Übereinkommens betreffs des Parameters

$$\Phi(x,\xi) = 1 \tag{2'}$$

ist. Die Relationen (10) des § 5 gelten ebenso für die Vektorfunktion $\Phi(x,\lambda)$. Aus § 5 (11) folgt nämlich $\Phi(xx) = \Phi(0, x)$, woraus dann (§ 5 (10))

$$\frac{\partial \Phi(x,\xi)}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \Phi(0,\xi)}{\partial \xi^i} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial \Phi(x,x)}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \Phi(0,x)}{\partial \xi^i} \tag{3}$$

geschlossen wird. Weiter notieren wir

$$\Phi(x,x) = \Phi(0,x). \tag{3'}$$

Durch (2) ist in jedem Punkte (einer Umgebung von P_0, in welcher das Normalkoordinatensystem einführbar ist) die Funktion s definiert, für die nach (2')

$$\Phi(x,x) = s, \quad \text{also nach (3')} \quad \Phi(0,x) = s \tag{4}$$

gilt. Aus (4) gewinnen wir die partielle Ableitung

$$\frac{\partial s}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi(0,x)}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \Phi(x,x)}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \Phi\left(x,\frac{x}{s}\right)}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \Phi(x,\xi)}{\partial \xi^i} \quad \text{oder} \tag{5}$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_i} = \xi_i, \tag{6}$$

wo $\xi_i = \frac{\partial \Phi(x\xi)}{\partial \xi^i}$ bedeutet. In der Relation (5) wurde vorausgesetzt, daß $s \neq 0$, d. h. daß der betrachtete Punkt nicht der Ursprung P_0 ist. Nun seien auf der Extremalen (2), die wir mit E bezeichnen, durch $s = s_1$ und $s = s_2$ die zwei Punkte P_1 und P_2 markiert (Fig. 1). Weiter sei C ein P_1 und P_2 verbindender Bogen, der P_0 nicht enthalte. Wir bilden dann

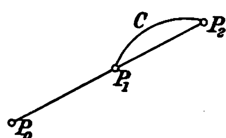


Fig. 1.

$$(7)\quad \Delta J = \int_C \Phi(x, x')\,dt - \int_E \Phi(x, \xi)\,ds = \int_C \Phi(x x')\,dt - [s(P_2) - s(P_1)].$$

Dabei ist t ein willkürlicher Parameter auf C; $\int_E \Phi ds$ bedeutet das über den Bogen $P_1 P_2$ der Extremalen E erstreckte Integral. Infolge (5) können wir (7) weiter schreiben:

$$(8)\qquad \Delta J = \int_C \Phi(x, x')\,dt - \int_C ds = \int_C \left[\frac{\partial \Phi(x, x')}{\partial x_i'} - \frac{\partial \Phi(x\xi)}{\partial x_i'}\right] x_i'\,dt.$$

Der Integrand

$$(9)\qquad \left[\frac{\partial \Phi(x, x')}{\partial x_i'} - \frac{\partial \Phi(x, \xi)}{\partial x_i'}\right] x_i' = E\,(x x' \xi),$$

der in x_i' von erster Ordnung positiv homogen ist, heißt die Weierstraßsche E-Funktion des Variationsproblems. $E(x x' \xi)$ ist augenscheinlich eine Invariante, also ist der Ausdruck der Integraldifferenz

$$(10)\qquad \Delta J = \int_C E\,(x x' \xi)\,dt$$

vom Koordinatensystem nicht abhängig.

Wir erlassen uns die wohlbekannten Folgerungen aus (10) (Herleitung notwendiger und hinreichender Bedingungen) und geben im folgenden Paragraph einen neuen und sehr durchsichtigen Gedanken zur Herleitung der Weierstraßschen E-Funktion an.

§ 7. Eine allgemeinere Methode der Herleitung der E-Funktion.

Es ist der R_n als Bereich vorausgesetzt, in dem jede geschlossene Kurve Rand eines zweidimensionalen Flächenstückes, also in der Sprache der Topologie homolog Null ist. Man bestimme dann in den Punkten des R_n einen kontravarianten Vektor $(x_i \xi^i)$, so daß bei Fixierung der unteren Grenze das Integral

$$(1)\qquad \int_{P_0}^{P} \frac{\partial \Phi(x, \xi)}{\partial x_i'}\,d x_i$$

nur von dem Endpunkt P des Integrationsweges (und nicht vom Integrationswege) abhängt. Dabei ist $\Phi(x\xi)$ die im vorhergehenden betrachtete, von der ersten Ordnung positiv homogene Vektorfunktion. Setzt man $\frac{\partial \Phi(x\xi)}{\partial x_i'} = A_i(x)$, so ist für die Unabhängigkeit des Integrals (1) vom Wege $\frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_i} = 0$ (im R_n) notwendig und hinreichend. Für den gesuchten Vektor x, ξ ergibt dies ein System partieller Differentialgleichungen:

$$\pi_{ik} = \frac{\partial^2 \Phi(x,\xi)}{\partial \xi^i \partial x_k} + \frac{\partial^2 \Phi(x,\xi)}{\partial \xi^i \partial \xi^j} \frac{\partial \xi^j}{\partial x_k} - \frac{\partial^2 \Phi(x,\xi)}{\partial \xi^k \partial x_i} - \frac{\partial^2 \Phi(x,\xi)}{\partial \xi^k \partial \xi^j} \frac{\partial \xi^j}{\partial x_i} = 0 \tag{2}$$

$$i, j, k = 1, \ldots, n.$$

Es sei jetzt ξ^i ein diesem Systeme genügendes Vektorfeld (Raumvektor), dann kann man die Richtungen $x_1, \ldots, x_n$, $\xi^1, \ldots, \xi^n$ zu Kurven verbinden, die wir die *Gefällskurven* des Vektorfeldes nennen wollen. Ist $x_i = x_i(t)$ eine Gefällskurve, so gilt $\frac{d x_i}{dt} = \xi^i$ nach ihrer Konstruktion. Die innere Multiplikation von (2) mit ξ^k hat wegen

$$\frac{\partial^2 \Phi(x,\xi)}{\partial \xi^k \partial x_i} \xi^k = \frac{\partial \Phi(x,\xi)}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 \Phi(x,\xi)}{\partial \xi^k \partial \xi^j} \cdot \xi^k = 0 \tag{3}$$

$$\pi_{ik}\xi^k = \frac{\partial^2 \Phi(x,\xi)}{\partial \xi^i \partial x_k} \xi^k + \frac{\partial^2 \Phi(x,\xi)}{\partial \xi^i \partial \xi^j} \cdot \frac{\partial \xi^j}{\partial x_k} \xi^k - \frac{\partial \Phi(x,\xi)}{\partial x_i} = 0 \tag{4}$$

zur Folge.

Für eine Gefällskurve gilt $\frac{d x_i}{dt} = \xi^i$, $\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x_k} \xi^k$, somit weiter nach (4)

$$\frac{\partial \Phi(x,x')}{\partial x_i} - \frac{\partial^2 \Phi(x,x')}{\partial x_i' \partial x_k} x_k' - \frac{\partial^2 \Phi(x,x')}{\partial x_i' \partial x_k'} x_k'' = 0, \tag{5}$$

die Gefällskurven sind Extremalen. Aber nicht jedes Extremalenfeld führt zu einem Vektorfeld ξ^i, das dem Systeme (2) genügt, daher das Integral (1) zu einer Raumfunktion macht. *Im R_2 allein gilt dies, hier führt jedes Extremalenfeld zu einem solchen Vektorfeld,* was den Inhalt des sog. Hilbertschen Unabhängigkeitssatzes wiedergibt. In der Tat folgt aus (4) im R_2: $\pi_{12}\xi^2 = 0$, $\pi_{21}\xi^1 = 0$; da $\pi_{12} = -\pi_{21}$ ist, und nicht beide Vektorkomponenten ξ^1 und ξ^2 zugleich verschwinden (wir setzen in jedem Punkte einer jeden Extremalen des Feldes eine Tangente voraus), so ergibt dies $\pi_{12} = 0$, q. e. d.

Im R_n kann nicht jedes Extremalenfeld ein Gefällskurvenfeld sein, wie die folgende Überlegung ergibt. Wenn ein Raumvektor ξ^i dem Systeme (2) genügt, so ist

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \int_{P_0} \xi_i \, d x_i; \quad \xi_i = \frac{\partial \Phi(x,\xi)}{\partial \xi^i} \tag{6}$$

eine eindeutige Raumfunktion. Die einparametrige Flächenschar $\varphi(x_1, \ldots, x_n) =$ konst. schneidet wegen $\xi_i dx_i = 0$ die Gefälls-„parameter" ξ_i normal. Im allgemeinen wird aber (im R_n) ein durch $\xi_i dx_i = 0$ in jedem Punkt des R_n fixierter $(n-1)$-dimensionaler Vektorraum (dx_i) nicht integrabel sein, also eine solche Normalenschar $\varphi =$ konst., nicht existieren.

Ist C ein zwei Punkte P und Q verbindender Gefällskurvenbogen (er ist dann auch Extremalbogen) und $\bar{C}$ ein beliebiger P mit Q verbindender Bogen, so gilt für die Integraldifferenz

$$(7)\quad \Delta J = \int\limits_{\bar{C}} \Phi(x, x')\,dt - \int\limits_{C} \Phi(x, x')\,dt = \int\limits_{\bar{C}} \Phi(x, x')\,dt - \int\limits_{C} \frac{\partial \Phi(x, x')}{\partial x_i'} x_i'\,dt$$

$$= \int\limits_{\bar{C}} \frac{\partial \Phi(x, x')}{\partial x_i'} x_i'\,dt - \int\limits_{\bar{C}} \frac{\partial \Phi(x, \xi)}{\partial x_i'} x_i'\,dt = \int\limits_{\bar{C}} E(x x' \xi)\,dt.$$

Ist also ein Extremalbogen in ein Gefällskurvenfeld einbettbar, so gelingt die Darstellung der für die Untersuchung auf Minimaleigenschaft fundamentalen Integraldifferenz mittels der Weierstraßschen E-Funktion in einfachster Weise. Es ist daher von Wichtigkeit, dieses Einbettungsproblem für den R_n, $n > 2$, zu lösen. Im folgenden sei eine solche Lösung skizziert.

Wir denken uns ein Extremalenfeld gegeben, so daß durch jeden Punkt des betrachteten Bereiches des R_n eine bestimmte Extremale des Feldes gehe und weiter eine Hyperfläche F_{n-1}, $\varphi^0(x_1, \ldots, x_n) = 0$, die jede Extremale des Feldes in genau einem Punkte treffe. Ist $x_i = x_i^0(y_1, \ldots, y_{n-1})$ eine Parameterdarstellung dieser F_{n-1}, so ist jede Extremale des Feldes[1])

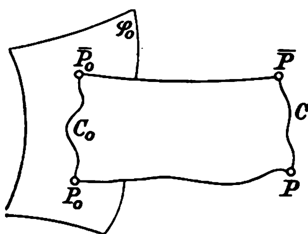


Fig. 2.

$$(8)\quad x_i = \varphi_i(x_1^0(y), \ldots, x_n^0(y), \xi_0^1(y)t, \ldots, \xi_0^n(y)\cdot t)$$

durch den Richtungsvektor $x_i(y)$, $\xi^i(y)$ im Schnittpunkt dieser F_{n-1} fixiert. (Für $t = 0$ erhalten wir demnach unsere F_{n-1}, deren Punkte wir $P_0, \bar{P}_0$ usw. schreiben.) Wir bilden längs der Extremalbogen $P_0 P$ und $\bar{P}_0 \bar{P}$ (Fig. 2) die Integrale $\int \Phi(x x')\,dt$ und hierauf die Differenz

$$(9)\qquad \Delta J = \int\limits_{\bar{P}_0}^{\bar{P}} \Phi(x, x')\,dt - \int\limits_{P_0}^{P} \Phi(x, x')\,dt.$$

1) Es wird die Transformation der Eulerschen Gleichungen in die Normalform vorausgesetzt.

In der $F_{n-1}(\varphi^0 = 0)$ verbinde der Bogen C_0, $y_i = y_i(\varepsilon)$, die Punkte $P_0(\varepsilon = 0)$ und $\overline{P}_0(\varepsilon = 1)$. Die Funktionen $y_i(\varepsilon)$ sind dabei zweimal stetig differenzierbar vorausgesetzt. Die Gesamtheit der Extremalen des Feldes, die von den Punkten der C_0 ausgehen, bilden eine F_2, deren Gleichung man durch Substitution von $y_i = y_i(\varepsilon)$ in (8) in der Form $x_i = x_i(t\varepsilon)$ gewinnt. War die Vektorfunktion $\Phi(x\lambda)$ viermal stetig differenzierbar vorausgesetzt, so sind die Funktionen φ_i zweimal stetig differenzierbar und ebenso $x_i(t\varepsilon)$ als Funktionen der Argumente t und ε. Der Parameter t der Extremalen wieder sei so gewählt, daß $\varepsilon = 0$, $t = 1$ den Punkt P und $\varepsilon = 1$, $t = 1$ den Punkt $\overline{P}$ ergebe.[1]) Wir bilden dann für den Extremalbogen $x_i = x_i(t\varepsilon)$, ε konst.;

$J(\varepsilon) = \int_0^1 \Phi(x, x')\,dt$; $J(1) - J(0)$ ist dann gleich ΔJ (9). Nun gilt

$$(10)\quad J'(\varepsilon) = \int_0^1 \left[\frac{\partial \Phi(x,x')}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \Phi(x,x')}{\partial x_i'}\frac{\partial x_i'}{\partial \varepsilon}\right]dt = \int_0^1 P_i \frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon}dt + \left[\xi_i \frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon}\right]_0^1,$$

wo ϱ_i der (für die Extremale verschwindende) Eulersche Vektor und $\xi_i = \frac{\partial \Phi(x x')}{\partial x_i'}$ ist. Da $\varrho_i = 0$, gilt also

$$(11)\qquad J'(\varepsilon) = \xi_i \frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon}\bigg|_{t=1} - \xi_i \frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon}\bigg|_{t=0},$$

und da
$$\Delta J = J(1) - J(0) = \int_0^1 J'(\varepsilon)\,dr$$
ist,

$$(12)\qquad \Delta J = \int_P^{\overline{P}} (C)\,\xi_i\,dx_i - \int_{P_0}^{\overline{P}_0} (C_0)\,\xi_i\,dx_i;$$

der neben dem Integral auftretende Buchstabe C, C_0 deutet den Bogen an, über den integriert wird. Für geschlossene Kurven C_0 ist $\Delta J = 0$, es gilt also dann statt (12)

$$(13)\qquad \int_{C_0} \xi_i\,dx_i = \int_C \xi_i\,dx_i.$$

Hat unser Extremalfeld eine es eineindeutig und normalschneidende Hyper-F_{n-1}, als die wir dann $\varphi^0(x_1, \ldots, x_n) = 0$ wählen können, so ist $\int_{C_0} \xi_i\,dx_i = 0$ in (13) und also $\int_C \xi_i\,dx_i = 0$ längs jeder geschlossenen Kurve. *Das Extremalenfeld ist also dann ein Gefällskurvenfeld.*

1) Der $t = 1$ entsprechende Kurvenbogen, der P mit $\overline{P}$ verbindet, kann — was bei entsprechender Wahl des Parameters t erreicht wird — ein beliebiger, P mit $\overline{P}$ verbindender Bogen der $F_2 : x_i = x_i(t, \varepsilon)$ sein. [Z. B. $a(\varepsilon)t$ statt t gesetzt.]

Konstruktion eines Gefällskurvenfeldes, das einen gegebenen Extremalbogen E enthält.

Im Punkte P_0 von E können wir (auf unendlich viele Arten) eine den Bogen E normalschneidende Hyper-F_{n-1} konstruieren. Dazu ist in P_0 nur

(14) $$\frac{\partial \Phi(x,\xi)}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial y_p} = 0 \qquad p = 1, 2, \ldots, n-1,$$

Matrix $\left\| \frac{\partial x_i}{\partial y_p} \right\|$ vom Range $n-1$, zu erfüllen. Eine solche F_{n-1}: $x_i = x_i(y_1, \ldots, y_{n-1})$ sei jetzt fixiert.

Für die natürliche Zahl $k > 1$, $\Phi^k = F$ gesetzt, wird $\left| \frac{\partial^2 F(x\xi)}{\partial \xi^i \partial \xi^k} \right| \neq 0$ vorausgesetzt. Dann können wir statt (14)

(14') $$\frac{\partial F(x,\xi)}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial y_p} = 0$$

schreiben; denn sobald E keine Nullextremale ist, $\Phi(x x') \neq 0$, sind (14) und (14') äquivalente Relationen.

An der Stelle $y_1^0, \ldots, y_{n-1}^0, \xi_0^1, \ldots, \xi_0^n$ (Richtung in P_0) ist (14') erfüllt. Der Rang der Matrix der Elemente

(15) $$\tau_{kp} = \frac{\partial^2 F(x,\xi)}{\partial \xi^i \partial \xi^k} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial y_p} \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \; p = 1, 2, \ldots, n-1$$

ist in P_0 jedenfalls gleich $n-1$. Denn sonst gäbe es eine Relation $\tau_{kp} \cdot l^p = 0$ mit nichtverschwindenden l^p, $p = 1, \ldots, n-1$. Wegen $\left| \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^i \partial \xi^k} \right| \neq 0$ hätte dies $\frac{\partial x_i}{\partial y_p} \cdot l^p = 0$ zur Folge. Also müßte in P_0 der Rang der Matrix

$$\left\| \frac{\partial x_i}{\partial y_p} \right\| \qquad i = 1, \ldots, n, \; p = 1, \ldots, n-1$$

kleiner als $n-1$ sein (gegen die Voraussetzung). Demnach kann man (14') z. B. nach den $\xi^1, \ldots, \xi^{n-1}$ als Funktionen der $y_1, \ldots, y_{n-1}, \xi^n$ in der Form

(16) $$\xi^i = \xi^i(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \xi^n)$$

auflösen. Die entsprechenden Extremalen bilden, da sie von der F_{n-1} normal geschnitten werden, ein den Extremalbogen E enthaltendes Feld von Gefällskurven, wenn der Bereich des R_n noch weiter so eingeschränkt wird, daß durch keinen Punkt zwei Extremalen hindurchgehen.

Die Variation mehrfacher Integrale bietet in formaler Hinsicht keine größeren Schwierigkeiten. Man kann auch dort wie hier bis zur

Konstruktion der Weierstraßschen E-Funktion fortschreiten. Die formale Durchführung verläuft ganz analog wie im linearen Falle. Die großen Schwierigkeiten bestehen beim Einbettungsproblem einer Extremalenfläche in ein Feld bzw. bei der Konstruktion der Extremalenfläche, die vorgegebenen Rangbedingungen zu genügen hat.

(Eingegangen am 30. 6. 1928.)

Das System der Schraubenachsen bei beliebigen Bewegungen.

Von KARL KOMMERELL in Tübingen.

Mit 2 Figuren im Text.

Die allgemeinste Bewegung eines starren Systems erhält man bekanntlich, wenn man das System um eine durch den festen Punkt O gehende Achse $\mathfrak{a}$ um den Winkel φ dreht und dann dem System eine Translation $\mathfrak{s}$ erteilt. Nach dem Satz von Chasles kann man dieselbe Bewegung durch eine Schraubenbewegung um eine Achse $\mathfrak{S}$ herstellen. Ändert man die „Koordinaten der Bewegung" $\mathfrak{a}$, φ, $\mathfrak{s}$, so ändert auch $\mathfrak{S}$ die Lage. *Alle Lagen von $\mathfrak{S}$ bilden Scharen isotroper Umdrehungskongruenzen.* Dies zu zeigen, ist der Zweck der folgenden Zeilen.

Um die Lage der Schraubenachse $\mathfrak{S}$ zu finden, zerlegen wir die Translation $\mathfrak{s}$ in eine Komponente $\mathfrak{a}(\mathfrak{a}\mathfrak{s})$ nach der Achse $\mathfrak{a}$ (Einheitsvektor) und in eine Komponente $\mathfrak{q}$ senkrecht zu ihr. Die Drehung um $\mathfrak{a}$ und die darauffolgende Translation $\mathfrak{q}$ führt die Ebene E, die in O senkrecht auf $\mathfrak{a}$ steht, in sich über. Ist C der Drehpol für diese Bewegung, so ist C ein Punkt der Schraubenachse $\mathfrak{S}$, die natürlich mit $\mathfrak{a}$ parallel geht. Die Drehung um $\mathfrak{S}$ um φ zusammen mit der Translation $\mathfrak{a}(\mathfrak{a}\mathfrak{s})$ geben die Schraubenbewegung. Um nun den Drehpol C zu finden, sei $\overrightarrow{OA} = \mathfrak{q}_0$ ein Vektor, der bei der Drehung um $\mathfrak{a}$ in den Vektor $\mathfrak{q} = \overrightarrow{OO'}$ übergeht; die Translation $\mathfrak{q}$ führt dann OO' in $O'A'$ über. OA geht also durch die Rotation um $\mathfrak{a}$ und die Translation $\mathfrak{q}$ in $O'A'$ über. Der Drehpol C

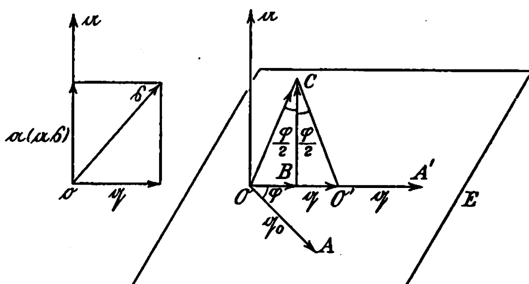


Fig. 1.

ist also der Schnittpunkt der Mittellote von OO' und AA'; der Winkel OCO' ist $= \varphi$. Ist B die Mitte von OO', so ist Vektor

(1) $$\overrightarrow{OB} = \frac{\mathfrak{q}}{2}, \quad \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\mathfrak{a} \times \mathfrak{q}) \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2},$$

wo $\mathfrak{a} \times \mathfrak{q}$ das Vektorprodukt bedeutet. Die zweite Gleichung (1) ist richtig, weil $\overrightarrow{BC}$ senkrecht auf $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{q}$ in der vorgeschriebenen Richtung steht, und weil der Betrag von $|\overrightarrow{BC}| = \left|\frac{\mathfrak{q}}{2}\right| \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$ ist. Es ist also

(2) $$\overrightarrow{OC} = \frac{\mathfrak{q}}{2} + \frac{1}{2}(\mathfrak{a} \times \mathfrak{q}) \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}.$$

Nun ist

(3) $$\mathfrak{q} = \mathfrak{s} - \mathfrak{a}(\mathfrak{a}\mathfrak{s})$$

und darum nach (2)

(4) $$\overrightarrow{OC} = \frac{\mathfrak{s}}{2} - \frac{\mathfrak{a}}{2}(\mathfrak{a}\mathfrak{s}) + \frac{1}{2}(\mathfrak{a} \times \mathfrak{s}) \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}.$$

Die Schraubenachse hat somit die Gleichung

(5) $$\mathfrak{r} = \frac{\mathfrak{s}}{2} - \frac{\mathfrak{a}}{2}(\mathfrak{a}\mathfrak{s}) + \frac{1}{2}(\mathfrak{a} \times \mathfrak{s}) \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} + \lambda \mathfrak{a},$$

wo λ ein Parameter ist. Wählt man $\lambda = \frac{1}{2}(\mathfrak{a}\mathfrak{s})$, so erhält man *in dem Endpunkt des von O ausgehenden Vektors* $\mathfrak{e}$

(I) $$\mathfrak{e} = \frac{\mathfrak{s}}{2} + \frac{1}{2}(\mathfrak{a} \times \mathfrak{s}) \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$$

einen Punkt der Schraubenachse $\mathfrak{S}$, den wir sogleich als Fußpunkt des kürzesten Abstands von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{S}$ erkennen werden. Durch die Bewegung $\mathfrak{a}$, φ, $\mathfrak{s}$ wird der aus O auslaufende Vektor $\mathfrak{e}$ in den ebenfalls von O ausgehenden Vektor $\mathfrak{e}'$ übergeführt, wobei

(6) $$\mathfrak{e}' = \mathfrak{e} \cos \varphi + (\mathfrak{a} \times \mathfrak{e}) \sin \varphi + \mathfrak{a}(\mathfrak{a}\mathfrak{e})(1 - \cos \varphi) + \mathfrak{s}$$

ist, eine Formel, die sich durch geometrische Betrachtungen einfachster Art fast unmittelbar hinschreiben läßt. Setzt man den Wert von $\mathfrak{e}$ aus (I) in (6) ein, so liefert eine kleine Rechnung

$$\mathfrak{e}' = \mathfrak{e} + \mathfrak{a}(\mathfrak{a}\mathfrak{s}),$$

woraus folgt, daß der Endpunkt von $\mathfrak{e}$ bei der Bewegung nur die Translation $\mathfrak{a}(\mathfrak{a}\mathfrak{s})$ erhält, also ein Punkt der Schraubenachse ist.

Führt man den von der Mitte M des Translationsvektors $\mathfrak{s}$ ausgehenden Vektor

(7) $$\mathfrak{E} = \mathfrak{e} - \frac{\mathfrak{s}}{2}$$

ein, so hat man nach (I)

$$\text{(II)} \qquad \mathfrak{E} = \left(\mathfrak{a} \times \frac{\mathfrak{s}}{2}\right) \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2},$$

woraus *eine sehr einfache Konstruktion der Schraubenachse* sich ergibt: Legt man den Vektor $\mathfrak{a}$ von O nach M, so hat man auf der Ebene $\frac{\mathfrak{s}}{2}$, $\mathfrak{a}$ in M das Lot $\mathfrak{E}$ zu errichten in der Richtung, daß $\mathfrak{a}$, $\frac{\mathfrak{s}}{2}$, $\mathfrak{E}$ ein Rechtssystem bilden und

$$\text{(8)} \qquad |\mathfrak{E}| = E = \frac{s}{2} \sin\omega \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$$

wird, wo $s = |\mathfrak{s}|$ und ω der Winkel zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{s}$ ist. Durch den Endpunkt P von $\mathfrak{E}$ hat man die Parallele $\mathfrak{S}$ zu $\mathfrak{a}$ zu legen, dann ist $\mathfrak{S}$ die Schraubenachse, MP ist der kürzeste Abstand zwischen $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{S}$. Man halte nun $\mathfrak{s}$ und φ fest und nehme alle Achsen $\mathfrak{a}$ durch O, die mit $\mathfrak{s}$ den konstanten Winkel ω bilden, dann hat man die Figur um $\mathfrak{s}$ als Achse zu drehen, wobei $\mathfrak{S}$ ein Rotationshyperboloid und P seinen Kehlkreis beschreibt. Variiert man nun auch ω, so erhält man ∞^1 solcher Hyperboloide, deren Kehlkreisradien E nach (8) in dem Intervall $0, \frac{s}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$ liegen. Die zugehörigen Schraubenachsen $\mathfrak{S}$ bilden also eine *Umdrehungskongruenz*, welche sogar *isotrop* ist. Hierzu vergleiche man die Formel (8) mit der Formel (109) in § 28 von Zindlers *Liniengeometrie*, Tl. II, S. 114 (Sammlung Schubert LI, 1906). Die Buchstaben a und k bei Zindler sind hier mit E und $\frac{s}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$ zu identifizieren. Während die Enveloppe der Mittellotebenen eines isotropen Strahlensystems stets eine Minimalfläche ist, so ist hier die Fläche in den Punkt M entartet; denn P ist der Mittelpunkt von $\mathfrak{S}$, und die Ebene durch P senkrecht $\mathfrak{S}$ geht durch M.

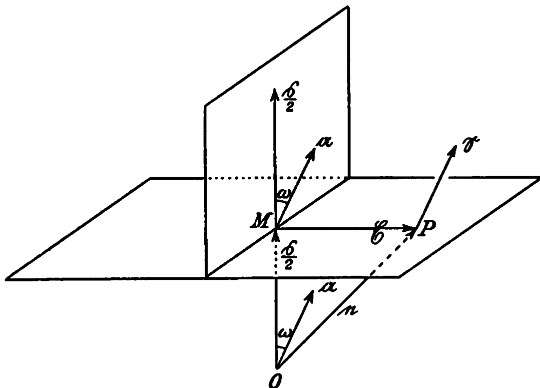


Fig. 2.

Wählt man einen anderen, aber wiederum festen Drehwinkel φ, so bedeutet dies eben eine Ähnlichkeitstransformation mit M als Zentrum. Aus (8) geht hervor, daß, je kleiner der Drehwinkel φ unter sonst gleichbleibenden Umständen ist, um so größer E wird. Ändert man den

Betrag s des Translationsvektors, aber nicht seine Richtung, so bedeutet das wieder eine Ähnlichkeitstransformation mit O als Zentrum. Gibt man endlich dem Vektor $\mathfrak{s}$ eine andere Richtung, so bedeutet dies eine Drehung der Konfiguration um O. Damit ist die Lagerung der Schraubenachsen $\mathfrak{S}$ vollständig klargelegt.

(Eingegangen am 25. 6. 1928.)

Zum Weierstraßschen Beweise des Fundamentalsatzes der projektiven Geometrie.

Von FRIEDRICH SCHUR in Breslau.

Mit 2 Figuren im Text.

Im 3. Bande der Werke von Weierstraß (Berlin 1903) ist nach mündlichen Mitteilungen an ehemalige Zuhörer ein rein geometrischer Beweis des Hauptsatzes der projektiven Geometrie von E. Kötter und H. A. Schwarz veröffentlicht worden. Als ich vor einiger Zeit darüber vortragen wollte, bemerkte ich, daß sich am Schlusse eine Lücke befindet, die sich aber ganz im Sinne von Weierstraß nicht schwer ausfüllen läßt. Obgleich vor dieser Veröffentlichung andere Beweise des obigen Satzes erschienen waren, die denselben Zweck mit einfacheren und allgemeineren Mitteln erreichen[1]), übrigens aber ohne Kenntnis der Weierstraßschen Entwicklungen entstanden waren, so glaube ich es doch dem Andenken an Weierstraß schuldig zu sein, wenn ich die Ausfüllung dieser Lücke bekannt gebe. Zu diesem Zwecke wird es nötig sein, den Beweis von Weierstraß kurz zu skizzieren.

Weierstraß geht von derjenigen Definition der Projektivität aus, welche wohl zuerst Cremona und Thomae (vgl. S. 46 meines Lehrbuches) im Jahre 1873 aufgestellt haben. Wir können diese Definition folgendermaßen fassen:

1. Definition: *Sind von* $n+1$ *Punktreihen, deren Träger die Geraden* $g, g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}, g'$ *sind, jede auf die folgende perspektiv bezogen, so heißen die Punktreihen* g *und* g' *projektiv aufeinander bezogen.*

Ein besonderer Fall hiervon, auf den Weierstraß die Frage zurückführt, ist die folgende Definition:

2. Definition: *Sind von* $n+1$ *Punktreihen* $g, g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}, g'$ *jede auf die folgende durch Parallelprojektion bezogen, so heißen die Punktreihen* g *und* g' *projektiv ähnlich aufeinander bezogen.*

1) Vgl. die bezüglichen Stellen in meinem Lehrbuche „Die Grundlagen der Geometrie", Leipzig, 1909; hierher gehören auch die Ableitungen der Proportionslehre ohne das Archimedische Postulat.

Nunmehr beweist Weierstraß die folgenden Sätze, die ich nur so weit anführe, als zum Verständnisse des Hauptbeweises erforderlich ist.

1. Hilfssatz. *Eine projektive Ähnlichkeit ist durch zwei Paare entsprechender Punkte eindeutig bestimmt.*

2. Hilfssatz. *Liegen zwei Strahlenbüschel* $S(\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \ldots)$ und $S'(\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \ldots)$ *zu derselben geraden Punktreihe perspektiv, so gibt es zu jeder zum ersten perspektiven Punktreihe* $\alpha\beta\gamma \ldots$ *eine zum zweiten perspektive Punktreihe* $\alpha'\beta'\gamma' \ldots$, *die zu* $\alpha\beta\gamma \ldots$ *projektiv ähnlich ist.*

3. Hilfssatz. *Liegen zwei projektiv ähnliche Punktreihen auf parallelen Geraden, so sind sie perspektiv, und es sind umgekehrt zwei perspektive Punktreihen auf parallelen Trägern projektiv ähnlich.*

Hierbei braucht man zum Beweise der beiden ersten Sätze nur den Satz des Desargues von den perspektiven Dreiecken, während zum Beweise des dritten Satzes auch der Satz des Pascal für zwei Geraden oder derjenige Satz erforderlich ist, den Weierstraß an seiner Stelle verwendet, nämlich der Satz:

Wenn von fünf Punkten $\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ *einer Geraden* α, β, β' *projektivisch ähnlich* α, γ, γ' *ist, so ist auch* α, β, γ *projektivisch ähnlich zu* α, β', γ'.

Weierstraß beweist diesen Satz, der mit der Vertauschung der inneren Glieder einer Proportion gleichbedeutend ist, durch den Satz vom Peripheriewinkel des Kreises, den unabhängig von Weierstraß schon Kupffer zum Beweise dieses Gesetzes benutzt hatte (s. d. Verf. Grundlagen, S. 136). Aus diesem Satze läßt sich aber auch umgekehrt der Pascalsche Satz, der bekanntlich aussagt, daß, *wenn von den Seiten eines Sechsecks, dessen Ecken abwechselnd auf zwei Geraden liegen, zweimal zwei gegenüberliegende einander parallel sind, dasselbe auch von dem dritten Paare gilt* (vgl. Fig. 3 auf S. 168 bei Weierstraß), leicht beweisen.

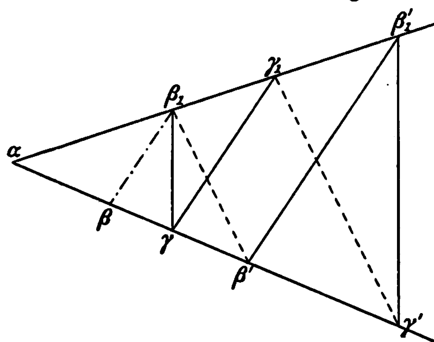


Fig. 1.

Sei nämlich $\gamma\beta_1\beta'\beta_1'\gamma'\gamma_1$ (Fig. 1) das Sechseck und α der Schnittpunkt der beiden Geraden $\gamma\beta'\gamma'$ und $\beta_1\beta_1'\gamma_1$, werde angenommen, daß $\gamma\gamma_1 \parallel \beta'\beta_1'$ und $\gamma\beta_1 \parallel \gamma'\beta_1'$ sei, und schneidet die Parallele durch β_1 zu $\gamma\gamma_1$ und $\beta'\beta_1'$ die andre Gerade in β, so folgt aus unsern Voraussetzungen

$$\alpha\beta\beta' \sim \alpha\beta_1\beta_1' \sim \alpha\gamma\gamma',$$

also nach Weierstraß auch

$$\alpha\beta'\gamma' \sim \alpha\beta\gamma \sim \alpha\beta_1\gamma_1,$$

so daß in der Tat auch $\beta'\beta_1 \parallel \gamma'\gamma_1$ sein muß.

Mit Hilfe dieses Pascalschen Satzes ist nun noch leicht der folgende Satz zu beweisen, auf den alles ankommt:

4. Hilfssatz. *Schneiden sich die Verbindungslinien von dreimal zwei entsprechenden Punkten zweier projektiv ähnlicher Punktreihen in demselben Punkte, so sind deren Träger parallel, und die beiden Punktreihen liegen perspektiv.*

Sind $A_1B_1C_1$ und $A_3B_3C_3$ (Fig. 2) die zweimal drei entsprechenden Punkte der beiden projektiv ähnlichen Punktreihen, deren Verbindungslinien durch denselben Punkt S laufen, so können wir uns die projektive Ähnlichkeit dadurch hergestellt denken, daß wir $A_1B_1C_1$ parallel zu A_1A_3 nach $A_3B_1C_2$ und diese Punkte parallel zu B_1B_3 nach $A_3B_3C_3$ projizieren. Die so hergestellte projektive Ähnlichkeit muß nach dem 1. Hilfssatze die gegebene sein. Nun sind in dem Sechsecke $SA_3C_3C_2C_1B_1$, dessen Ecken abwechselnd auf zwei Geraden liegen, nach der Konstruktion $SA_3 \parallel C_1C_2$ und $SB_1 \parallel C_3C_2$, also muß nach dem Pascalschen Satze auch $A_3C_3 \parallel C_1B_1$ sein. Daß dann die Verbindungslinien je zweier entsprechender Punkte der beiden projektiv ähnlichen Punktreihen auf parallelen Trägern durch S laufen, folgt aus dem 3. Hilfssatze.

Fig. 2.

Nunmehr wird der Beweis des Fundamentalsatzes nach Weierstraß a. a. O. S. 174 folgendermaßen dargestellt:

„Zu der Punktreihe $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$ sei perspektiv das Strahlenbüschel $abcd\ldots$, zu diesem die Punktreihe $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1\ldots$; zu der Punktreihe $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1\ldots$ sei perspektivisch das Strahlenbüschel $a_1b_1c_1d_1\ldots$, zu diesem die Punktreihe $\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2\ldots$ usw. Zu dem Strahlenbüschel $a_nb_nc_nd_n$ endlich sei perspektivisch die Punktreihe $\alpha'\beta'\gamma'\delta'\ldots$ Auf je zwei benachbarte Strahlenbüschel der Reihe $abcd\ldots$, $a_1b_1c_1d_1\ldots$, $a_2b_2c_2d_2\ldots$, $\ldots$, $a_nb_nc_nd_n\ldots$ findet nun der zweite Hilfssatz Anwendung. Das Strahlenbüschel $a_1b_1c_1d_1\ldots$ ist perspektivisch zu einer Punktreihe $\alpha_1'\beta_1'\gamma_1'\delta_1'\ldots$, welche der Punktreihe $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$ projektivisch ähnlich ist. Das Strahlenbüschel $a_2b_2c_2d_2\ldots$ ist per-

spektivisch zu einer Punktreihe $\alpha_2'\beta_2'\gamma_2'\delta_2'\ldots$, welche der Punktreihe $\alpha_1'\beta_1'\gamma_1'\delta_1'\ldots$, mithin auch der Punktreihe $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$ projektivisch ähnlich ist. Durch Fortsetzung dieser Schlußweise ergibt sich: Das Strahlenbüschel $a_n b_n c_n d_n\ldots$, welche zu der zur Punktreihe $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$ projektivischen Punktreihe perspektivisch ist, ist auch perspektivisch zu einer Punktreihe $\alpha_n'\beta_n'\gamma_n'\delta_n'\ldots$, welche der Punktreihe $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$ projektivisch ähnlich ist. Da die Strahlengruppe $a_n b_n c_n$ nur die Geraden *einer* bestimmten Richtung in Punktgruppen $\alpha_n'\beta_n'\gamma_n'$ schneidet, welche der Punktgruppe $\alpha\beta\gamma$ projektivisch ähnlich ist, so ist die Punktgruppe durch *einen* ihrer Punkte, etwa α_n' *eindeutig* bestimmt. Aus dem 1. Hilfssatze ergibt sich sodann, daß durch jeden vierten Punkt δ der Punktreihe $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$ der entsprechende Punkt δ_n' der projektiv ähnlichen Punktreihe $\alpha_n'\beta_n'\gamma_n'\delta_n'\ldots$ *eindeutig* bestimmt ist. Es ist daher auch der entsprechende Strahl d_n und der Punkt δ' *eindeutig* durch den Punkt δ bestimmt. Der Hauptsatz der projektivischen Geometrie ist hierdurch rein geometrisch bewiesen."

Daß dieser Beweis unzureichend ist, geht schon daraus hervor, daß er sich mit alleiniger Hilfe des Desarguesschen Satzes durchführen läßt, aber den Pascalschen Satz oder einen ihm äquivallenten nicht benutzt. Denn daß die Richtung der Punktreihe $\alpha_n'\beta_n'\gamma_n'\ldots$ eindeutig gegeben sei, folgt ja schon daraus, daß zwei projektiv ähnliche Punktreihen mit Trägern verschiedener Richtung niemals perspektiv sein können, weil der Definition zufolge die unendlich fernen Punkte der beiden Träger einander entsprechen müssen. Auch kommt es hierauf gar nicht an, da durch obigen Beweis im Grunde genommen nur die gegebene Entstehung der Projektivität durch Projektionen in besonderer Weise durch eine solche ersetzt ist, bei welcher neben *einer* Zentralprojektion lauter Parallelprojektionen auftreten, was sich überdies auf verschiedenen andern Wegen erreichen ließe. Worauf es aber ankommt, ist dieses, zu beweisen, daß auch bei *irgendeiner anderen* Entstehung der Projektivität, die mit der gegebenen nur durch das gleichzeitige Entsprechen der Punkte $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha'\beta'\gamma'$ verbunden ist, jedem vierten Punkte δ derselbe Punkt δ' entspricht. Aber auch dieses ist auf dem Wege, den Weierstraß im Auge gehabt hat, und auf Grund des 4. Hilfssatzes leicht zu erreichen.

Wählen wir z. B. die folgende Entstehung, die zugleich zeigt, was bei Weierstraß fehlt, daß es nämlich immer eine Projektivität gibt, die $\alpha\beta\gamma$ in $\alpha'\beta'\gamma'$ überführt. Wir schalten die Punktreihe $\alpha\beta'$ ein, projizieren $\alpha\beta\gamma$ von dem Punkte $(\beta\beta', \gamma\gamma')$ durch die Strahlen $a'b'c'$ nach $\alpha\beta'$ und diese Punkte von $(\alpha\alpha', \gamma\gamma')$ durch die Strahlen $a''b''c''$ nach

$\alpha'\beta'\gamma'$. Nunmehr schneiden wir nach Weierstraß das Strahlenbüschel $a''b''c''$ durch eine Punktreihe $A''B''C''\ldots$, welche zur Punktreihe $\alpha\beta\gamma\ldots$ projektiv ähnlich ist, weiter das Strahlenbüschel $a_n b_n c_n \ldots$ durch eine Punktreihe $\alpha_n'\beta_n'\gamma_n'\ldots$, welche zu $A''B''C''\ldots$, also auch zu $\alpha\beta\gamma\ldots$ projektiv ähnlich ist usf. So wird schließlich das Strahlenbüschel $abc\ldots$ durch eine Punktreihe $ABC\ldots$ geschnitten, welche zur Punktreihe $\alpha_1'\beta_1'\gamma_1'\ldots$, also auch zu $\alpha\beta\gamma\ldots$ projektiv ähnlich ist. Da nun $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ durch denselben Punkt laufen, so sind nach dem 4. Hilfssatz die Träger der beiden Punktreihen $ABC\ldots$ und $\alpha\beta\gamma$ parallel und sie selbst perspektiv, womit der Hauptsatz wirklich bewiesen ist. Denn konstruieren wir nach der zweiten Entstehung vermittelst der Zwischenpunktreihe $\alpha\beta'$ zu irgendeinem Punkte δ von $\alpha\beta\gamma$ den entsprechenden Punkt δ' von $\alpha'\beta'\gamma'$, so erhalten wir nach unserer Konstruktion als δ' entsprechend einen Punkt D von ABC auf dem Strahle d, so daß dem Punkte d' der ersten Entstehung zufolge wieder der Punkt δ entspricht.

(Eingegangen am 11. 10. 28.)

Angelegenheiten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Personalnachrichten.

Ernennungen, Auszeichnungen usw.

Der mit dem Titel eines a.o. Prof. bekleidete Privatdozent a. d. U. Wien, Dr. K. Menger wurde zum a.o. Prof. daselbst ernannt.

Die Preußische Akademie der Wissenschaften hat die Herren L. E. J. Brouwer in Amsterdam, G. H. Hardy in Oxford, T. Levi-Civita in Rom zu korrespondierenden Mitgliedern ihrer physik.-mathem. Klasse gewählt.

Aufgaben und Lösungen.

Aufgaben.

69. **Laguerre-invariante Kennzeichnung von Raumkurven.** Einer streckbaren Raumkurve $C(x_1, x_2, x_3)$ von der Bogenlänge s ist durch

$$\mathfrak{x} = \{x_0 = s + c,\ x_1,\ x_2,\ x_3\} \tag{1}$$

eine isotrope Kurve des E_4 zugeordnet. Da sich zwei Darstellungen (1) mit $x_0 = s + c_1$ oder $-s + c_2$ durch eine Laguerre-Transformation ineinander überführen lassen, ist (1) bis auf eine solche eindeutig bestimmt. Die Kurve (1) hat die Differentialinvarianten

$$\varphi = (\ddot{\mathfrak{x}}\ddot{\mathfrak{x}})^{-\frac{3}{2}}(\dddot{\mathfrak{x}}\dddot{\mathfrak{x}}) - \frac{3}{4}(\ddot{\mathfrak{x}}\ddot{\mathfrak{x}})^{-\frac{5}{2}}(\ddot{\mathfrak{x}}\dddot{\mathfrak{x}})^2 + \frac{d}{dt}\left\{(\ddot{\mathfrak{x}}\ddot{\mathfrak{x}})^{-\frac{3}{2}}(\ddot{\mathfrak{x}}\dddot{\mathfrak{x}})\right\};$$

$$\psi = (\dot{\mathfrak{x}}\ddot{\mathfrak{x}}\dddot{\mathfrak{x}}\ddddot{\mathfrak{x}}) : (\ddot{\mathfrak{x}}\ddot{\mathfrak{x}})^{\frac{5}{2}},$$

wenn Punkte die Ableitung nach dem beliebigen Parameter t bezeichnen. Für $t = s$ findet man nach den Frenet-Formeln

$$\varphi = \varrho^{-1} + \varrho\tau^{-2} + 4\varrho'^2\varrho^{-1} - \varrho''; \quad \psi = \frac{d}{ds}\left(\frac{\varrho}{\tau}\right).$$

(ϱ^{-1} Krümmung, τ^{-1} Windung von C.)

Aus $\psi =$ konst. oder $\frac{\varrho}{\tau} = as + b$ folgt:

Die zu geodätischen Linien auf Kegelflächen gehörenden „isotropen Kanalflächen" (1) gehen bei Laguerre-Transformationen in ebensolche über. Vgl. W. Blaschke, Über die Geometrie von Laguerre, Hamburger Abhandlungen 1924. K. König.

(Eingegangen am 19. 11. 1928.)

70. Ein Eisenbahnzug legt in vorgeschriebener Fahrtdauer T eine gegebene geradlinige Strecke S zurück. Seine Anfangsgeschwindigkeit ist gleich Null, und für seine Beschleunigung ist eine obere Grenze M'' vorgeschrieben (sie existiert aus technischen Gründen). Unter diesen Bedingungen gibt es für alle möglichen Höchstgeschwindigkeiten M' eine untere Grenze, die größer als die mittlere Geschwindigkeit $\frac{S}{T}$ ist, und die zu berechnen ist. E. Hopf.

(Eingegangen am 26. 8. 1928.)

71. In der Funktionalgleichung

$$f(x-y) = F(x, f(y))$$

sollen die reellen Funktionen f und F für alle reellen Werte der Variablen definiert sein. $F(u, v)$ soll regulär für reelle v sein. Hat der Wertevorrat der Funktion $f(x)$ wenigstens einen Häufungspunkt im Endlichen, dann ist die Gleichung identisch mit

$$f(x-y) = f(x) - f(y) + f(0),$$

die für $\tilde{f} = f(x) - f(0)$ auf die bekannte Gleichung

$$\tilde{f}(x-y) = \tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)$$

führt. Der Satz bleibt mit geringer Abänderung erhalten, wenn die Werte der Variablen und Funktionen einem abstrakten Integritätsbereich angehören und F ein Polynom in v ist. G. Hohbisel.

(Eingegangen am 1. 9. 1928.)

72. Aufgabe zur Integralrechnung.

Voraussetzung:

$$j = 1, 2; \quad 0 < x < 2; \quad 0 < y < 2; \quad v, n = 3, 4, \ldots;$$

dann existiert $$\lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{n}{}'_{p,q} \frac{e^{\pi i(xp+yq)}}{(p+iq)^j} = t_j(x, y),$$

wenn $$\sum_{pq}^{p+iq \neq 0} = \sum_{pq}{}'$$

gesetzt wird, sowie $$\sum_{-\infty}^{\infty}{}'_{p,q} \frac{e^{\pi i(xp+yq)}}{(p+iq)^v} = t_v(x, y).$$

Behauptung: $$t_1(x, y) = \frac{t_3(x, y) + t_3(2x, 2y)}{t_2(x, y) - t_2(2x, 2y)},$$

also insbesondere $$t_1(1, 1) \cdot t_2(1, 1) = t_3(1, 1).$$

Weiter gilt unter anderem

$$2t_5(x, y) + t_3(x, y)\, t_2(x, y)$$
$$= t_5(2x, 2y) + t_2(x, y)\, t_3(2x, 2y) - t_3(x, y)\, t_2(2x, 2y).$$

W. Maier.

(Eingegangen am 3. 9. 1928.)

73. Aufgabe zur Integralrechnung.

Seien u, v komplex und $\varphi(u)$ meromorph für $|u| < \infty$. Man bestimme eine einparametrige Schar von Lösungen der Funktionalgleichung

$$\varphi(u)\,\varphi(v) + \varphi(u-v)\,\varphi(-v) + \varphi(v-u)\,\varphi(-u) = 0.$$

W. Maier.

(Eingegangen am 6. 6. 1929.)

74. Der Sekantensatz für Kreise ($s_1 s_2 = \text{konst.}$) läßt sich umkehren, wie folgt: „Für einen Kegelschnitt c_2 und einen partikulären Punkt P_0 einer Ebene, der nicht auf c_2 selbst liege, gelte der Sekantensatz. Dann gilt er auch für jeden Punkt P der Ebene, und c_2 ist ein Kreis." Will man sich auf reelle Gebilde beschränken, so bedarf der Satz einer leichten Modifikation. Entsprechendes gilt für die Kugel und die analogen Gebilde im S_n.

Diese charakteristische Eigenschaft für Kreise und Kugeln läßt sich auf gewisse höhere Gebilde ausdehnen.

Der interessanteste Fall ist der der Zykliden, d. h. der Flächen 4. Ordnung, die den Kugelkreis doppelt enthalten. Für jeden Raumpunkt P gilt zunächst, wie leicht zu sehen, der direkte „Sekantensatz": „Die vier, von P aus gerechneten Sekantenabschnitte, die durch den Schnitt irgendeiner Geraden g durch P mit der Zyklide gebildet werden, besitzen ein konstantes Produkt."

Dann gilt wieder die Umkehrung: „Für eine Fläche 4. Ordnung F existiere ein partikulärer (nicht auf F selbst gelegener) Punkt P_0, für den der Sekantensatz gelte. Dann gilt er auch für jeden Raumpunkt P, und die Fläche F ist eine Zyklide."

Damit ist die Definition einer Zyklide wesentlich vereinfacht.

Sollen nur reelle Gebilde in Betracht kommen, so hat man sich auf solche Flächen F zu beschränken, für die *eine* und damit eine ∞^4 Schar von Geraden g' mit vier reellen Schnittpunkten existiert, und auf solche Punkte P_0 resp. P, durch die ∞^2 Gerade g' gehen.

Artet die Fläche F in eine doppeltzählende Fläche 2. Ordnung aus, so kommt man auf den Kugelsatz zurück.

Vorstehendes ist zu beweisen, am besten analytisch-geometrisch.

Königsberg i. Pr. W. Fr. Meyer.

(Eingegangen am 5. 10. 1928.)

75. Folgende neue Eigenschaften der Parabel sollen — synthetisch oder analytisch-geometrisch — bewiesen werden.

Eine beliebig aber fest gewählte Tangente t_0 der Parabel berühre sie im Punkte B_0, und treffe die Direktrix d im Punkte O. Auf t_0 markiere man zwei symmetrisch zu O gelegene Punkte F_1, F_2, in der beliebig aber fest gewählten Entfernung e von O. Sei B_0' der zu B_0 bezüglich (F_1, F_2) vierte harmonische Punkt auf t_0.

Andererseits treffe t_0 eine variierende Tangente t' im Punkte G', und G sei der bezüglich (F_1, F_2) vierte harmonische Punkt auf t_0.

Dann lautet der erste Hauptsatz:

I. „Die von G auf t' gefällte Lotgerade g geht stets durch einen festen Punkt P_0, den Schnittpunkt von d mit der in B_0' auf t_0 senkrecht stehenden Geraden. Je zwei so einander zugeordnete Gerade t', g sind konjugiert in bezug auf alle Individuen der Schar Σ konfokaler Mittelpunktskegelschnitte γ, mit den beiden (reellen) Brennpunkten F_1, F_2; oder, was auf dasselbe hinauskommt, t' und g entsprechen sich in der durch die Schar Σ bestimmten quadratischen „fokalen" Geradenverwandtschaft T_2. Zugleich sind t' und g die Tangenten an die beiden, durch deren Schnittpunkt gehenden Individuen (Ellipse und Hyperbel) der Schar Σ."

Betrachtet man andererseits das Büschel B der Ordnungskegelschnitte c durch die beiden reellen Brennpunkte F_1, F_2, und die beiden zugehörigen imaginären Brennpunkte F_1', F_2' von Σ, so ist durch die Büschel B die „fokale“ quadratische Punktverwandtschaft T_2 bestimmt. Diese ist keine andere als die wohlbekannte „Spiegelinversion“, d. i. die mit der Spiegelung an t_0 zusammengesetzte Inversion, mit Zentrum O und Radius e (in komplexen Variablen $zz' = e^2$).

Dann lautet der zweite Hauptsatz:

II. „Der Brennpunkt F der Parabel und der feste Punkt P_0 entsprechen sich in der Spiegelinversion T_2.“ Überdies beachte man noch den Satz: „Errichtet man auf der Geraden $f_1 = (P_0, F_1)$ in F_1 die Senkrechte f_1' und entsprechend auf der Geraden $f_2 = (P_0, F_2)$ in F_2 die Senkrechte f_2', so sind auch f_1' und f_2' Tangenten der Parabel, und ihre Berührungspunkte werden durch die obige Gerade (P_0, B_0') ausgeschnitten.“

Läßt man im besonderen die partikuläre Tangente t_0 in die Scheiteltangente rücken, so gelangt man auch zum Grenzfall einer Schar Σ konfokaler Parabeln.

Die mannigfaltigen bekannten Eigenschaften des Brennpunktes F erscheinen so, zugleich in gewissen Verallgemeinerungen, als Ausstrahlungen der beiden Hauptsätze.

Königsberg i. Pr. W. Fr. Meyer.

(Eingegangen am 4. 12. 1928.)

76. Die ebenen Kurven n-ter Ordnung (C_n) lassen sich (Holst 1882, Liebmann 1927, Kubota-Fujiwara 1928) in folgender Weise charakterisieren.

Sind $S_1, S_2, \ldots, S_n$ die n Schnittpunkte einer beliebigen Geraden g mit C_n, ferner $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ die n Winkel von g mit C_n und $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ die n Krümmungsradien von C_n in $S_1, S_2, \ldots, S_n$, so gilt

$$\sum_1^n \frac{1}{\varrho_\nu \sin^n \tau_\nu} = 0.$$

Für Klassenkurven K_n lautet die entsprechende Beziehung

$$\sum_1^n \frac{\varrho_\nu}{(PP_\nu)^3} = 0,$$

dabei sind (PP_ν) die Abschnitte der von P an K_n gelegten Tangenten bis zu den Berührungspunkten, $\varrho_1 \ldots \varrho_n$ wieder die Krümmungsradien von K_n in $P_1 \ldots P_n$.

Die Aufgabe besteht darin, für die Kegel n-ter Ordnung und für Kegel n-ter Klasse entsprechende Beziehungen zwischen metrisch (nicht projektiv) definierten Größen (Kegelkrümmung, Winkel) festzustellen.

Liebmann.

(Eingegangen am 5. 12. 1928.)

Lösungen.

Lösung der Aufgabe 57. (Dieser Jahresbericht Bd. 37, Heft 1/4, S. *28.*)

Die Aufgabe lautete:

Unter der Anwendung der Operation O auf die Bruchfolge $F\left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots\right)$ sei die Einschiebung der Medianten zwischen je zwei aufeinanderfolgende Brüche verstanden, also der Übergang zu der Bruchfolge

$$OF\left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_1+p_2}{q_1+q_2}, \frac{p_2}{q_2}, \dots\right).$$

Ausgehend von der Folge $F_0\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{0}\right)$ seien nun die Folgen $OF_0 = F_1$, $OF_1 = F_2, \dots$ gebildet. Es ist zu zeigen:

1. Die in F_n ($n \geqq 1$) neu hinzukommenden Brüche sind alle und nur die positiven reduzierten Brüche, deren Kettenbruchentwicklung

$$a_1 + \frac{1|}{|a_2} + \dots + \frac{1|}{|a_\nu} \qquad (a_1 \geqq 0;\ a_2, \dots, a_\nu \geqq 1)$$

die Quersumme $a_1 + a_2 + \dots + a_\nu = n$ hat, nach steigender Größe geordnet. (Anwendung auf die Anzahl der Zerlegungen von n in positive Summanden mit Berücksichtigung der Reihenfolge!)

2. Die vorderen (hinteren) Nachbarn dieser Brüche in F_n sind ihre vorletzten Näherungswerte bei gerader (ungerader) Teilnennerzahl ν der Kettenbruchentwicklung. H. Hasse.

Lösung: Wir fügen noch hinzu:

3. Sind $\frac{p}{q}$ und $\frac{p'}{q'}$ in dieser Reihenfolge Nachbarn in F_n, so ist $pq' - qp' = -1$.

Für F_1 sind alle Behauptungen richtig; sie seien bewiesen für F_k ($k = 1, 2, \dots, n-1$). Sind dann $\frac{p}{q}$ und $\frac{p'}{q'}$ Nachbarn in F_{n-1}, also $\frac{p}{q}$, $\frac{p+p'}{q+q'}$, $\frac{p'}{q'}$ Nachbarn in F_n, so ist

$$p(q+q') - q(p+p') = pq' - qp' = -1$$

und ebenso $$(p+p')q' - (q+q')p' = pq' - qp' = -1,$$

also (3) auch für $k = n$ bewiesen. Hieraus folgt sofort, daß die Brüche in F_n sämtlich reduziert und nach steigender Größe geordnet sind.

Nun ist offenbar zu dem positiven reduzierten Bruch $\frac{p}{q}$ je ein Bruch $\frac{p'}{q'}$ durch die beiden Forderungen

a) $pq' - qp' = +1$ (bzw. -1) und b) $0 \leqq q' < q$ oder $0 \leqq p' < p$

eindeutig bestimmt, und zwar hat der vorletzte Näherungsbruch von $\frac{p}{q}$ bei gerader (ungerader) Teilnennerzahl diese Eigenschaften. Ist $\frac{p}{q}$ ein in F_n neu auftretender Bruch, so hat auch sein vorderer (hinterer) Nachbar in F_n diese beiden Eigenschaften, die erste wegen (3), die zweite, weil q durch

Addition der beiden Nachbarnenner entsteht, deren einer q' ist. Also gilt (2) für $k = n$. (In dem Falle, daß der andere Nachbarnenner 0 ist, schließt man analog für die Zähler.)

Ist nun wieder $\frac{p}{q}$ ein in F_n neu auftretender Bruch und s seine Quersumme, so dürfen wir annehmen, daß der letzte Teilnenner gleich 1 ist. (Andernfalls wäre der letzte Teilnenner t durch $(t-1)+\frac{1}{1}$ zu ersetzen, was die Quersumme nicht ändert.) Der vorletzte Näherungsbruch von $\frac{p}{q}$ hat dann die Quersumme $s' = s - 1$; er ist nach (2) Nachbar von $\frac{p}{q}$ in F_n, also in F_{n-1} gelegen. Deswegen ist $s' \leqq n - 1$, also $s \leqq n$. Andererseits ist $s \geqq n$, weil sonst $\frac{p}{q}$ schon in F_{n-1} gelegen wäre. Also ist $s = n$.

Umgekehrt sei $\frac{p}{q}$ ein Bruch mit der Quersumme n. Der letzte Teilnenner sei gleich 1; $\frac{p'}{q'}$ und $\frac{p''}{q''}$ seien der vorletzte bzw. drittletzte Näherungsbruch. Dann hat $\frac{p'}{q'}$ die Quersumme $n-1$, tritt also in F_{n-1} neu auf. Nun ist $\frac{p''}{q''}$ gleichzeitig vorletzter Näherungswert von $\frac{p'}{q'}$, ist also nach (2) Nachbar von $\frac{p'}{q'}$ in F_{n-1}. Nach der bekannten Rekursionsformel für Kettenbrüche ist dann $\frac{p}{q} = \frac{1 \cdot p' + p''}{1 \cdot q' + q''}$, weil der letzte Teilnenner von $\frac{p}{q}$ gleich 1 ist. $\frac{p}{q}$ ist also Mediante zweier benachbarter Brüche aus F_{n-1}, tritt also in F_n neu auf. Damit ist (1) für $k = n$ bewiesen.

Die Anzahl der geordneten Zerlegungen von n in positive Summanden ist 2^{n-1}. Dies stimmt für $n = 1$; für $n > 1$ kommen in F_n 2^{n-1} neue Brüche hinzu, die in Paare reziproker Brüche zerfallen. Jedes solche Paar liefert zwei Zerlegungen; bei der einen ist der letzte Summand (der dem letzten Teilnenner entspricht) $= 1$, bei der anderen > 1, so daß genau 2^{n-1} Zerlegungen herauskommen.

Halle a. d. S. WALDEMAR SCHÖBE.

(Eingegangen am 4. 7. 1928.)

Eine weitere Lösung legte H. Spaeth † vor.

Lösung der Aufgabe 59. (Dieser Jahresbericht Bd. 37, Heft 6/10, S. 81.)

Die Aufgabe lautete (unter Richtigstellung eines Druckfehlers):

Die aus der Elementargeometrie wohlbekannte Figur eines Dreiecks mit seinem Umkreise U und irgendeinem seiner drei Ankreise A besitzt eine bemerkenswerte, umkehrbare Eigenschaft, die noch nicht beachtet worden zu sein scheint.

Die beiden Kreise U und A treffen sich in zwei reellen Punkten und haben zwei reelle Tangenten gemein.

Sei t eine dieser beiden Tangenten und B ihr Berührungspunkt auf U, so lege man von B aus die zweite Tangente an A, dann fällt deren Berührungs-

punkt mit einem der beiden Kreisschnittpunkte S (und zwar dem, der den größeren Abstand von t besitzt) zusammen, und vice versa.

Umgekehrt mögen ein Ordnungskreis U und ein Klassenkreis A mit zwei reellen Schnittpunkten S_1, S_2 und damit auch zwei reellen gemeinsamen Tangenten t_1, t_2 vorliegen, so, daß die obige Eigenschaft für eines der beiden Paare (S, t) — und damit von selbst auch für das andere — erfüllt ist. Dann existiert auch ein eigentliches Dreieck und mit ihm zugleich ∞^1 solche, so daß U der Umkreis und A einer der Ankreise wird. Bedeuten ϱ, r die Radien von U, A, und φ den (inneren) Schnittwinkel beider Kreise, so gilt die einfache Relation: $\frac{r}{\varrho} = \left(2 \sin \frac{\varphi}{2}\right)^2$.

Dies ist zu beweisen, entweder elementar oder auch analytisch-geometrisch, oder auch (am besten) invariantentheoretisch.

Königsberg i. Pr. W. Fr. Meyer.

1. Lösung.

Beweis. Bezeichnet d den Zentralabstand und t die Länge der gemeinsamen Tangente zwischen ihren Berührungspunkten, so gelten für zwei solche Kreise U, A folgende Relationen:

(1) $$\frac{r}{\varrho} = \left(2 \sin \frac{\varphi}{2}\right)^2;$$

(2) $$d^2 = \varrho^2 + 2\varrho r;$$

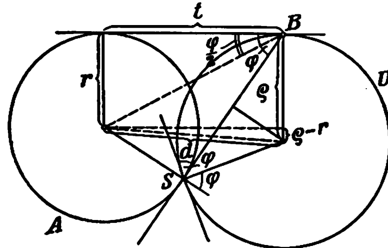
(3) $$t^2 = 4\varrho r - r^2.$$

Denn es ist $t = r \cot \frac{\varphi}{2}$, daher

(4) $$d^2 = (\varrho - r)^2 + r^2 \cot^2 \frac{\varphi}{2} = \varrho^2 - 2\varrho r + \frac{r^2}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

Es ist aber auch

(5) $$d^2 = \varrho^2 + r^2 + 2\varrho r \cos \varphi.$$



Durch Gleichsetzung von (4) und (5) folgt

$$\frac{r}{\varrho} = 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

und wenn man in (4) $\sin^2 \frac{\varphi}{2}$ durch $\frac{r}{4\varrho}$ ersetzt, erhält man

$$d^2 = \varrho^2 + 2\varrho r \quad \text{und} \quad t^2 = d^2 - (\varrho - r)^2 = 4\varrho r - r^2,$$

also $$\varrho = \frac{t^2 + r^2}{4r}.$$

Aus der letzten Gleichung ersieht man, daß — bei gegebenem r und t — ϱ eindeutig bestimmt ist.

Die Kreisschnittpunkte und gemeinsamen Tangenten sind dann und nur dann reell, wenn $r < 4\varrho$. Ist dies der Fall, so folgt wegen der erwähnten eindeutigen Bestimmtheit von ϱ, daß — umgekehrt — zwei Kreise U, A, für für welche Gleichung (2) und damit auch (3) erfüllt ist, die in der Aufgabe genannte Eigenschaft haben.

Für den Umkreis U und einen Ankreis A eines Dreiecks besteht aber die Relation (2), wie aus folgendem hervorgeht.

Bezeichnet c die Dreiecksseite, welche der Ankreis A berührt, so ist

$$(6)\qquad \begin{cases} \varrho = \dfrac{c}{2\sin\gamma} \\[2ex] r = \dfrac{c\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}. \end{cases}$$

$$(7)\qquad d^2 = \varrho^2 + \frac{r^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{2\varrho r}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\cos\left(\gamma+\frac{\alpha}{2}\right)\quad\text{[Cosinus-Satz!]}.$$

Setzt man in (7) für ϱ und r ihre Werte aus (6), so wird

$$d^2 = \varrho^2 + c^2\cdot\left[\frac{\cos^2\frac{\beta}{2}}{\cos^2\frac{\gamma}{2}} + \frac{\cos\frac{\beta}{2}\cos\left(\gamma+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\gamma\cos\frac{\gamma}{2}}\right]$$

$$= \varrho^2 + \frac{c^2\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\gamma\cos\frac{\gamma}{2}}\cdot\left[2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \cos\left(\gamma+\frac{\alpha}{2}\right)\right].$$

Da
$$2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2} = \cos\frac{\alpha}{2} - \cos\left(\gamma+\frac{\alpha}{2}\right),$$

ist weiter
$$d^2 = \varrho^2 + \frac{c^2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\gamma\cos\frac{\gamma}{2}} = \varrho^2 + 2\varrho r.$$

Für irgendeinen Kreis, der dem von der Seite c und der verlängerten Seite b gebildeten Außenwinkel des Dreiecks mit dem Umkreis vom Radius ϱ eingeschrieben ist, gilt, wenn r seinen Radius und d den Abstand seines Mittelpunkts vom Mittelpunkt des Umkreises bedeutet, die Relation (7). Ist für einen solchen Kreis außerdem die Relation (2) erfüllt, so muß er der die Seite c berührende Ankreis sein. Denn durch die Gleichung

$$\varrho^2 + \frac{r^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{2\varrho r}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\cos\left(\gamma+\frac{\alpha}{2}\right) = \varrho^2 + 2\varrho r$$

bestimmt sich *eindeutig* r; nämlich

$$r = 2\varrho\cos\frac{\alpha}{2}\left[\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\left(\gamma+\frac{\alpha}{2}\right)\right] = 4\varrho\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

in Übereinstimmung mit (6).

Sind nun zwei Kreise U, A von der angegebenen Eigenschaft gegeben, für die dann die Relation (2) gelten muß, so denke man sich eine solche Sehne in U gezogen, die den Kreis A in einem ihrer Punkte berührt. Diese Sehne heiße c; nun lege man von einem ihrer Endpunkte aus die andere

Tangente an A; die auf dieser Tangente gelegene Sehne b von U bestimmt zusammen mit der Sehne c und dem von beiden eingeschlossenen Winkel α ein Dreieck, für welches aus dem oben entwickelten Grunde A ein Ankreis sein muß. Jede der ∞^1 Sehnen von U, welche A in einem seiner innerhalb U gelegenen Punkte berührt, bestimmt so genau ein Dreieck, von dem U der Umkreis und A ein Ankreis ist. Damit ist der zweite Teil der Behauptung bewiesen.
F. Gruber.

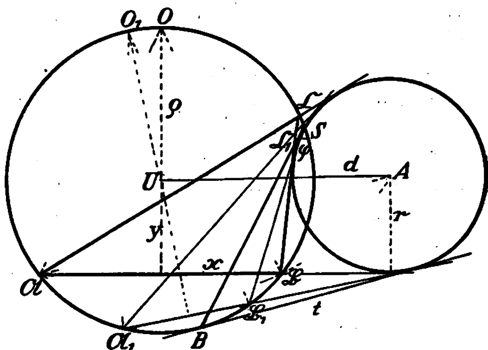
(Eingegangen am 29. 8. 1928.)

2. Lösung.

Beweis. $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ sei das Dreieck mit dem Umkreis U und dem Ankreis A, welch letzterer die Seite $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ in ihrem endlichen Teile berührt; U und A seien die Mittelpunkte dieser Kreise; d sei der Abstand dieser Mittelpunkte; O sei der Halbierungspunkt des Bogens $\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{B}$ des Kreises U; x der Abstand des Mittelpunktes A von der Geraden OU, endlich y der Abstand des Mittelpunktes U von der Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$.

Da
$\sphericalangle\, \mathfrak{A}O\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$ und $\sphericalangle\, \mathfrak{A}A\mathfrak{B} = \mathfrak{C}/2$
ist, so folgt

(1) $\qquad O\mathfrak{B} = OA \qquad$ und



(2) $\overline{O\mathfrak{B}}^2 = 2\varrho(\varrho + y), \quad \overline{OA}^2 = x^2 + (r - \varrho - y)^2, \quad d^2 = x^2 + (r - y)^2,$

aus welchen vier Gleichungen sich eine von den Seiten des Dreieckes unabhängige Gleichung

(3) $$\varrho^2 + 2\varrho r = d^2 \quad \text{ergibt.}$$

Es sei ferner $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$ ein beliebiges dem Ankreis A umschriebenes Dreieck, dessen zwei Eckpunkte $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ auf dem Umkreis U liegen, und O_1 sei der Halbierungspunkt desjenigen Bogens $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ dieses Kreises U, der vom Punkt $\mathfrak{C}_1$ durch die Gerade $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ nicht getrennt ist; ferner sei x_1 der Abstand des Mittelpunktes A von der Geraden O_1U, und y_1 der Abstand des Mittelpunktes U von der Geraden $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$.

Wir erhalten dann so wie oben drei Gleichungen, die sich von den unter (2) befindlichen dadurch unterscheiden, daß in ihnen die Buchstaben $\mathfrak{B}, O, x, y$ mit $\mathfrak{B}_1, O_1, x_1, y_1$ vertauscht sind, und welche daher mit Hilfe der Gleichung (3) die Beziehung

$$O_1\mathfrak{B}_1 = O_1A \quad \text{ergeben.}$$

Daraus folgt, daß $\sphericalangle\, \mathfrak{A}_1O_1\mathfrak{B}_1 = 2\mathfrak{A}_1A\mathfrak{B}_1$, und da infolge der Konstruktion des Dreieckes $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$, $\sphericalangle\, \mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}_1 = 2\mathfrak{A}_1A\mathfrak{B}_1$ ist, so wird U auch der Umkreis des Dreieckes $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$ sein.

Die zwei Kreise U, A haben daher die Eigenschaft, daß man dem ersten unendlich viele (∞^1) Dreiecke $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$ einschreiben kann, welche dem zweiten umschrieben sind.

In dem auf dem Umkreis U liegenden Berührungspunkt B einer gemeinsamen Tangente t der zwei Kreise U, A vereinigen sich zwei Eckpunkte $\mathfrak{A}_i\mathfrak{B}_i$ eines dem Ankreis A umschriebenen Dreieckes $\mathfrak{A}_i\mathfrak{B}_i\mathfrak{C}_i$, und wenn S der von t entferntere Treffpunkt der Kreise U und A ist, so vereinigen sich in BS zwei Seiten $\mathfrak{A}_i\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{B}_i\mathfrak{C}_i$ des Dreieckes $\mathfrak{A}_i\mathfrak{B}_i\mathfrak{C}_i$ — also fällt der Eckpunkt $\mathfrak{C}_i$ dieses verkümmerten Dreieckes in den Treffpunkt S der Kreise U, A.

Aus der Gleichung (3)

$$\varrho^2 + 2\varrho r = d^2 = \varrho^2 + r^2 + 2r\varrho \cos\varphi$$

ergibt sich aber leicht $$\frac{r}{\varrho} = \left(2 \sin\frac{\varphi}{2}\right)^2.$$

Wenn umgekehrt die Tangente des einen Kreises in einem Treffpunkt zweier Kreise durch den Berührungspunkt einer gemeinsamen Tangente des zweiten dieser Kreise geht, so gibt es ein (wenn auch verkümmertes) Dreieck, welches dem ersten Kreis umschrieben und dem zweiten Kreis einbeschrieben ist — es gibt daher unendlich viele solche Dreiecke. Diese sind alle Polardreiecke eines Kegelschnitts, wie ich dies in einem Aufsatze „*Über konjugierte Kegelschnitttripel*“ (Acta litterarum ac scientiarum regiae universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae Tom. II, p. 170 (1925)) bewiesen habe. L. Klug.

(Eingegangen am 1. 9. 1928.)

3. Lösung.

Für einen einteiligen Ordnungskegelschnitt F und einen einteiligen Klassenkegelschnitt Φ in einer Ebene ist das Verschwinden der Schließungsinvariante S [1]) die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß wenigstens *ein* und damit ∞^1 eigentliche „Schließungsdreiecke“ Δ existieren, die zugleich F ein- und Φ umbeschrieben sind.

Es mögen F und Φ wenigstens einen isolierten reellen Schnittpunkt P besitzen, so lasse man, wenn die Bedingung $S = 0$ erfüllt ist, das Dreieck Δ stetig variieren, bis sich irgendeine Seite von Δ der Tangente t in P an Φ beliebig nähert.

Dann ergibt der Grenzübergang, daß t den Ordnungskegelschnitt F in einem solchen Restpunkte R trifft, daß die Tangente in R an F trifft, daß die Tangente in R an F zugleich Φ berührt. Umgekehrt erweist sich durch einfache Rechnung diese Berührungseigenschaft als gleichwertig mit der Schließungseigenschaft. Nimmt man im besonderen F als Umkreis U eines Dreiecks Δ, und Φ als einen seiner Ankreise A, so ist damit der erste Teil der Aufgabe erledigt.

Die Schließungsinvariante S für F und Φ drückt sich bequem durch zwei einfachere Invarianten aus. Bedeutet, bei geeigneter Normierung numerischer Faktoren, H die bilineare Invariante der Formen F und Φ, H diejenige der beiden reziproken Formen, so gilt

$$S = H^2 - \mathsf{H}.$$

---

1) S. z. B. W. Franz Meyer, „Über das Schließungsproblem der Kegelschnitte und seine Beziehung zu den elliptischen Funktionen“, Math. Zeitschr. 1929.

Sei wieder im besonderen F ein Ordnungskreis mit dem Radius r, und Φ ein Klassenkreis mit dem Radius ϱ, beide Kreise zunächst beliebig mit d als Länge der Zentrale, so zerfällt S in zwei Faktoren, wie folgt:

$$S = (d^2 - r^2 - 2r\varrho)(d^2 - r^2 + 2r\varrho).$$

Wie man nach Einführung des Schnittwinkels φ beider Kreise erkennt, verschwindet der erstere Faktor dann und nur dann, wenn F der Umkreis U eines Δ ist, und Φ einer der Ankreise A. Dagegen verschwindet der letztere Faktor dann und nur dann, wenn F der Umkreis eines Δ ist und Φ der Inkreis J; die letztere Beziehung: $d^2 = r^2 - 2r\varrho$ scheint als *direkte* Eigenschaft von U und J bereits bekannt zu sein.

Der Grenzfall der Berührung beider Kreise werde als trivial ausgeschlossen.

Im ersteren Falle nimmt die Schließungseigenschaft $S = 0$ für U und A die doppelte Gestalt an:

$$S \equiv d^2 - r^2 - 2r\varrho \equiv \varrho\left(\varrho - 4r\sin^2\frac{\varphi}{2}\right) = 0.$$

Da ein Verschwinden von ϱ nicht in Frage kommt, so ergibt sich die im zweiten Teil der Aufgabe angegebene charakteristische Beziehung: $\frac{\varrho}{r} = \left(2\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2$. Aus dieser liest man noch ab, daß das Verhältnis $\frac{\varrho}{r}$ als obere Grenze den Wert Vier und als untere Grenze den Wert Null besitzt (diese beiden Grenzfälle entsprechen der äußeren bzw. inneren Berührung beider Kreise); ferner wird $\varrho = r$ für $\varphi = 60^0$, $\varrho = 2r$ für $\varphi = 90^0$, $\varrho = 3r$ für $\varphi = 120^0$.

Es ist nützlich, an einer Skizze den Verlauf beider Kreise zu verfolgen, wenn man etwa zwei Seiten von Δ festhält und die dritte parallel mit sich verschiebt. W. Fr. Meyer.

(Eingegangen am 1. 9. 1928.)

4. Lösung.

I. (Fig. 1.)

Die Tangente t berühre den Kreis A in C. Man verbinde B mit dem Kreisschnittpunkt S_1, der den größeren Abstand von t besitzt, und *beweise, daß BS_1 Tangente am Kreise A ist.*

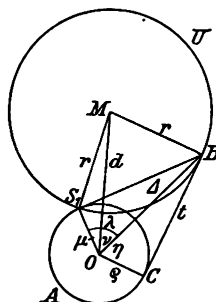


Fig. 1.

1. Beweis: Es sei M der Mittelpunkt und r der Radius des Umkreises U. Der Ankreis A habe den Mittelpunkt O und den Radius ϱ. Die Potenz von O in bezug auf den Kreis U ist bekanntlich $= 2r\varrho$. Daher ist (1) $MO = d = \sqrt{r(r + 2\varrho)}$.

Aus dem Trapez $MBCO$ folgt $t = \sqrt{d^2 - (r - \varrho)^2}$, d. i. zufolge des Wertes von d (2) $t = \sqrt{\varrho(4r - \varrho)}$. Ferner ist (3) $BO = \Delta = 2\sqrt{r\varrho}$.

Nun setzen wir

(4) $\sphericalangle BOC = \eta$, $\sphericalangle S_1OB = \lambda$, $\sphericalangle S_1OM = \mu$, $\sphericalangle MOB = \nu$.

Es ist dann (5) $\operatorname{tg}\eta = \frac{t}{\varrho}$.

Vermittels der allgemeinen Formel (6) $\operatorname{tg}\gamma = \frac{4F}{a^2+b^2-c^2}$, worin a, b, c die Seiten, F der Flächeninhalt und γ der der Seite c gegenüberliegende Winkel eines Dreiecks sind, berechnen wir jetzt μ und ν.

Zunächst ist (7) $F(MOS_1) = \frac{\varrho t}{4}$ und (8) $F(MOB) = \frac{rt}{2}$. Folglich ist (9) $\operatorname{tg}\mu = \frac{t}{2r+\varrho}$ und (10) $\operatorname{tg}\nu = \frac{t}{3\varrho}$. Hieraus folgt (11) $\operatorname{tg}(\mu+\nu) = \frac{t}{\varrho}$. Zufolge der Gleichung (5) ist daher (12) $\lambda = \eta$.

Aus der Kongruenz der Dreiecke BOC und BOS_1 folgt (13) $\sphericalangle BS_1O = 90^0$. BS_1 ist daher Tangente am Kreise A.

II. (Fig. 2.)

2. Beweis. Die Kreise U und A mögen die Mittelpunkte M und O, die Radien r und ϱ und die Schnittpunkte S und S_1 haben. Ihre gemeinsamen Tangenten seien BC und B_1C_1. Man verbinde B mit dem Punkte S_1, der von B aus jenseits MO liegt, und B_1 mit S. *Nun wird bewiesen, daß BS_1 und B_1S Tangenten an A sind.*

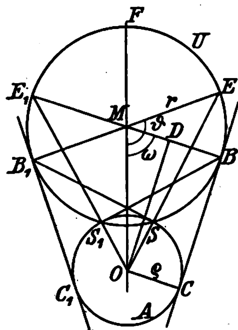


Fig. 2.

Die Verlängerungen von OS und OS_1 mögen den Kreis U in E und E_1 treffen. Die Verlängerung von OM treffe den Kreis U in F. Man verbinde M mit B, B_1, E, E_1. Da der Punkt O in bezug auf den Kreis U die Potenz $2r\varrho$ hat, ist (1) $OM = d = \sqrt{r(r+2\varrho)}$ und (2) $OE = OE_1 = 2r$.

Setzt man $\sphericalangle OME = \vartheta$, so folgt aus dem Dreieck OME (3) $\cos\vartheta = -\frac{r-\varrho}{d}$. Man ziehe $OD \parallel CB$ und setze $\sphericalangle OMD = \omega$. Aus dem Dreieck ODM folgt (4) $\cos\omega = \frac{r-\varrho}{d}$.

Aus (3) und (4) folgt (5) $\vartheta = 180^0 - \omega$. Daher ist (6) $\sphericalangle FME = \omega$. Da auch (7) $\sphericalangle B_1MO = \omega$ und (8) $\sphericalangle E_1MF = \omega$ ist, so folgt, daß die Radien B_1M und ME in einer Geraden liegen, und daß auch die Radien BM und ME_1 eine Gerade ergeben.

Nun ist (9) $E_1B = E_1O = 2r$, (10) $E_1S_1 = E_1D = 2r - \varrho$. Folglich sind die Dreiecke E_1DO und E_1S_1B kongruent. Da $OD \perp BE_1$ ist, so ist auch $BS_1 \perp E_1O$. Demnach ist BS_1 Tangente am Kreise A. Ebenso ist B_1S Tangente an A.

III. (Fig. 3.)

Umkehrung: Man lege von einem beliebigen Punkte B aus an den Kreis A, dessen Mittelpunkt O und dessen Radius ϱ sei, die Tangenten $BC = BS_1 = t_1$. Die Senkrechte auf BC in B treffe die Verlängerung von OS_1 in E_1. Um den Mittelpunkt M von BE_1 schlage man mit dem Radius $MB = r$ den Kreis U. Die beiden Kreise U und A schneiden sich in S_1 und in einem zweiten Punkte S_2. Sie haben BC zur gemeinsamen Tangente, und es ist auch BS_1 Tangente an A. Somit entsprechen U und A den Voraussetzungen für den umgekehrten Fall.

Setzt man $\sphericalangle E_1 = \varepsilon$, so ist im rechtwinkligen Dreieck E_1BS_1 (1) $\sphericalangle E_1BS_1 = 90^0 - \varepsilon$; folglich ist (2) $\sphericalangle S_1BC = \varepsilon$, (3) $\sphericalangle S_1BO = \frac{\varepsilon}{2}$,

(4) $\sphericalangle E_1BO = 90^0 - \frac{\varepsilon}{2}$. Im rechtwinkligen Dreieck S_1BO ist auch (5) $\sphericalangle S_1OB = 90^0 - \frac{\varepsilon}{2}$. Zufolge den Eigenschaften (4) und (5) ist Dreieck BE_1O gleichschenklig, d. h. es ist (6) $E_1O = E_1B = 2r$. Hieraus folgt (7) $E_1S_1 = 2r - \varrho$.

Aus dem rechtwinkligen Dreieck E_1S_1B ergibt sich nun

$$(8) \quad BS_1 = t_1 = \sqrt{\varrho(4r - \varrho)} \quad \text{und} \quad (9) \quad \cos\varepsilon = \frac{2r - \varrho}{2r}.$$

Aus (9) folgt (10) $\frac{\varrho}{r} = \left(2 \sin \frac{\varepsilon}{2}\right)^2$.

Der innere Schnittwinkel der Kreise U und A im Punkte S_1 ist $BS_1T = \varphi$, wo S_1B Tangente an A und ST Tangente an U ist. Dieser Winkel ist Sehnentangentenwinkel am Kreise U und als solcher gleich dem Peripheriewinkel $E_1 = \varepsilon$ in demselben Kreise. Da also (11) $\varepsilon = \varphi$ ist, so ist nach (10)

$$(12) \qquad \frac{\varrho}{r} = \left(2 \sin \frac{\varphi}{2}\right)^2.$$

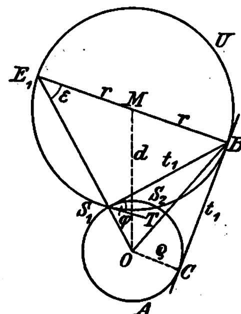


Fig. 3.

Um zu zeigen, daß ein eigentliches Dreieck existiert, das U zum Umkreis und A zum Ankreis hat, berechne man zunächst die Zentrallinie $MO = d$ aus r und ϱ. Im Trapez $MOCB$ ist $d = \sqrt{(r-\varrho)^2 + t_1^2}$. Unter Benutzung von (8) erhält man (13) $d = \sqrt{r(r + 2\varrho)}$. Die Realität der Tangente t_1 erfordert nach (8), daß (14) $\varrho < 4r$ ist. Auch ohne diese Beschränkung ist nach (13) d reell. Der Wert von d in (13) ist der bekannte Abstand des Umkreismittelpunktes vom Ankreismittelpunkte eines Dreiecks, wenn r der Umkreisradius und ϱ der Ankreisradius ist. Zufolge der Eigenschaften (13) und (14) gibt es ein eigentliches Dreieck und, da das dritte Stück des Dreiecks beliebig gewählt werden kann, auch ∞^1 solche Dreiecke, die U zum Umkreis und A zum Ankreis haben.

So sind alle Behauptungen elementar-geometrisch bewiesen.

Anmerkung. Sind zwei Kreise $U(r)$ und $A(\varrho)$ gegeben und genügt ihr innerer Schnittwinkel φ der Bedingung $\frac{\varrho}{r} = \left(2 \sin \frac{\varphi}{2}\right)^2$, so ist U Umkreis und A Ankreis einer einfachen Serie von Dreiecken. Soll gleichzeitig in derselben Figur A Umkreis und U Ankreis einer zweiten Dreiecksserie sein, so ist dies — was leicht einzusehen — nur dann möglich, wenn $r = \varrho$ ist. Es ist dann $\varphi = 60^0$.

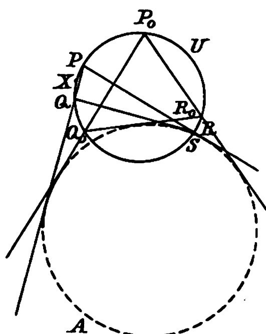
H. Michnik.

(Eingegangen am 27. 8. 1928.)

5. Lösung.

It is a known consequence of the familiar Poncelet-porismatic proposition, that if two circles (U and A) are related so that *one* triangle ($P_0Q_0R_0$) can be inscribed to U and circumscribed to A, then an *infinity* of such triangles can be found. In other words, if we start from any (arbitrarily chosen) point P on U, and draw from P the two tangents PQ, PR to A, (which cut U again in Q, R) then the chord QR must also touch A.

Take now the limit of this diagram, when P tends to X, the point of contact with U of the common tangent t (chosen arbitrarily) of U and A; then PQ tends to coincide with t so that Q tends also towards X. Thus the other two tangents QR, RP drawn to A tend to coincide: and their two points of contact accordingly tend towards S, (that point of intersection of U and A which is the farthest from the selected common tangent t). Thus finally, we see that XS is the second tangent (other than t) from X to the circle A; and this is the theorem stated.



The relation between the radii of the two circles is expressed usually by the formula[1])

$$z^2 = \varrho^2 + 2\varrho r$$

where z is the distance between the centres, ϱ is the radius of U, and r of A; in the notation given, φ is the (smaller) angle of intersection of the circles, so that

$$z^2 = \varrho^2 + r^2 + 2\varrho r \cos\varphi.$$

Thus
$$r^2 = 2\varrho r(1 - \cos\varphi)$$

or
$$\frac{r}{\varrho} = \left(2 \sin\frac{\varphi}{2}\right)^2.$$

[The statement is that ϱ/r is equal to the given function of φ; but the present result is easy to verify when $P_0Q_0R_0$ is an equilateral triangle.]

T. J. Bromwich.

(Eingegangen am 25. 8. 1928.)

Weitere Lösungen der Aufgabe 59 legten die Herren Ehrlich, Nowakowski und H. Neumann (München) vor.

Mitteilungen und Nachrichten.

Geeignete Mitteilungen nimmt der Herausgeber stets mit größtem Danke entgegen.

Akademien. Gesellschaften. Vereinigungen. Versammlungen.

Mathematische Gesellschaft in Göttingen. *30. April 1929.* Ferienbericht. — *7. Mai 1929.* Courant, Zur Multiplikationsmethode von Lagrange. — *14. Mai 1929.* Cohn-Vossen, Modelle. Douglas, Das Plateausche Problem. Suetuna, Über die Nullstellen der Dedekindschen Zetafunktionen. — *4. Juni 1929.* Noether, Reisebericht. v. d. Waerden, Über den Hilbertschen Nullstellensatz. — *11. Juni 1929.* Prandtl und Tollmien, Über die Entstehung der Turbulenz. — *18. Juni 1929.* v. d. Waerden, Über den Hilbertschen Nullstellensatz. Weber, Quadratische Formen und Ideale. — *25. Juni 1929.* Fenchel, Verallgemeinerung eines Jocobischen Satzes aus der Kurventheorie. Rumer, Zur Geometrie der Relativitätstheorie. — *2. Juli 1929.* Noether, Differentialsätze. Cohn-Vossen, Fadenkonstruktionen von Flächen zweiten Grades. — *9. Juli 1929.* v. d. Waerden,

1) See, for example, the Chapter on Invariants in G. Salmon's *Conic Sections.*

Topologische Behandlung algebraisch-geometrischer Fragen. Blichfeldt, Ausgewählte Probleme über diophantische Approximationen. — *16. Juli 1929.* Köthe, Darstellungstheorie kontinuierlicher Gruppen und abstrakte Ringtheorie. — *23. Juli 1929.* Bernays, Zum Begriff der ganzen algebraischen Zahlen. v. d. Waerden, Eine Verallgemeinerung des Noetherschen Fundamentalsatzes.

Mathematisches Kolloquium in Greifswald. Wintersemester 1928/29. *16. November.* H. Kneser, Körper und Oberkörper algebraischer Funktionen. — *30. November.* W. Süß, Über Minkowskis Theorie von Volumen und Oberfläche. — *14. Dezember.* Th. Vahlen, Bahnbestimmung von Doppelsternen. — *25. Januar und 1. Februar.* R. Brauer, Königsberg, Gruppen linearer Substitution und Systeme hyperkomplexer Zahlen. — *22. Februar.* K. Reinhardt, Über das Schwarzsche Lemma bei Funktionen von zwei Veränderlichen. W. Süß, Eine Verallgemeinerung der affinen Flächentheorie.

Sommersemester 1929. *10. Mai.* H. Kneser, Das Dehnsche Lemma. — *14. Juni.* K. Reinhardt, Ein Satz von Tietze über konvexe Figuren. — *28. Juni.* W. Süß, Eine elementare Kennzeichnung der Kugel. — *12. Juli.* A. Brauer, Berlin, Über die Verteilung der quadratischen Reste. — *15. Juli.* E. Zermelo, Freiburg, Über die logischen Grundlagen der Mathematik. — *20. Juli.* L. Bieberbach, Berlin, Über offene Euklidische Raumformen. — *27. Juli.* H. Kneser, Die kanonische Parametergruppe. R. Brauer, Königsberg, Die Darstellungen der komplexen Drehungsgruppe.

Mathematisches Kolloquium in München. *8. November 1927.* Carathéodory, Über beschränkte analytische Funktionen. — *6. Dezember 1927.* Lense, Über ametrische Mannigfaltigkeiten. — *10. Januar 1928.* Böhm, Lebensbedingungen einer biologischen Gemeinschaft. — *7. Februar 1928.* v. Dyck, Graphische Methoden in der Algebra. Bemerkungen über eine geplante Neuausgabe der Keplerschen Werke, insbesondere des Briefwechsels. — *6. März 1928.* Tietze, Über nicht konvexe Figuren. — *8. Mai 1928.* Pringsheim, Über einen bekannten Satz aus der Theorie der Potenzreihen. — *5. Juni 1928.* Bochner, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. — *10. Juli 1928.* Vietoris, Die kombinatorische Topologie im Dienste der mengentheoretischen. — *6. November 1928.* Perron, Bericht über den Kongreß in Bologna. — *4. Dezember 1928.* Pringsheim, Über den sog. Vivanti-Dienesschen Satz der Funktionentheorie. — *8. Januar 1929.* Bochner, Bericht über Mengers Dimensionslehre. — *5. Februar 1929.* Wieleitner, Wie das x zum Zeichen für die Unbekannte wurde. — *5. März 1929.* Knopp, Zur Theorie der Limitierungsverfahren. — *7. Mai 1929.* Lense, Bericht über Einsteins neue Feldtheorie. — *4. Juni 1929.* Carathéodory. Über Kurven und Flächen von beschränkter Krümmung. — *2. Juli 1929.* Radó, Geometrisches zur Funktionentheorie. — *23. Juli 1929.* Tietze, Aus der Geschichte der Analysis situs.

Literarisches.

Besprechungen.

W. Zabel und K. Thierig, Neue Einheitsausgabe von Bardeys Arithmetischer Aufgabensammlung. 2 Bde. Mit insg. 173 Fig. Leipzig 1927, B. G. Teubner. 1. Bd. Unterstufe 3. Aufl. *RM* 4.80; 2. Bd. Oberstufe *RM* 4.—.

Ein Lehrbuch, das sehr erfreulich durch seine Korrektheit wirkt; es bietet außerdem viel mehr, als der anspruchslose Titel vermuten läßt. Denn der klein gedruckte Vermerk: „mit Einführungen in den Lehrstoff" verdiente besonders hervorgehoben zu werden. Diese Einführungen sind nämlich trotz aller Knappheit lückenlos; und man muß dem Mut der Verfasser die gebührende Achtung aussprechen, daß sie zu einer Zeit, da Methodik, selbst auf Kosten der Richtigkeit, Trumpf ist, sich nicht gescheut haben, ein Buch vorzulegen, das die Richtigkeit und damit auch — die Verständlichkeit für den Schüler! — wieder in ihre Rechte einsetzt, ohne dabei langweilig zu werden, sondern mit allem Amüsement der „nur" methodischen Bücher, versehen ist. Es ist also ein gediegenes Hilfsbuch für den Schüler, der über Zweifel, die ihm seit der Unterrichtsstunde aufgetaucht sind, hier die ersten aufklärenden Worte findet; es ist in der Hand des Lehrers ein Führer, der aber keine gebundene Marschroute vorschreibt.

Natürlich hat das gesamte Aufgabenmaterial seit dem alten Bardey sein Gesicht ganz und gar verändert. Selbstverständlich, daß auf der Unterstufe der Funktionsbegriff bald in den Vordergrund geschoben wird, selbstverständlich, daß auf der Oberstufe viele rein formalen Aufgaben der Gleichungslehre fallen und gut ausgewählten der Infinitesimalrechnung Platz machen mußten. Die Formulierung der arithmetischen Gesetze ist häufig recht geschickt, was nicht ausschließt, daß eine Überprüfung dieses wichtigen Punktes immer noch angezeigt erscheint. Bd. I, S. 132 ist eine Bemerkung richtig zu stellen: die Griechen führten den Beweis der Inkommensurabilität von Seite und Diagonale des Quadrates *nicht geometrisch*, sondern *arithmetisch*; die Pointe ihres indirekten Beweises war, wie Aristoteles sich ausdrückt, daß unter der Annahme der Kommensurabilität „dieselbe Zahl gerade und ungerade" wäre. In Bd. II würde sich unter S. 43 bei Aufzählung der Stetigkeitsbedingungen zwischen 1. und 2. die Einschiebung der Bedingung „$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existiert" lohnen; zu erwägen wäre auch die Zerlegung von Abschnitt VIII, der „Gebrochene rationale Funktionen; kubische Gleichungen" überschrieben ist, in zwei gesonderte Abschnitte. Von gebrochenen Funktionen ist übrigens fast gar nicht die Rede, sondern von einer speziellen, die zur Lösung der kubischen Gleichungen benützt wird. Endlich muß leider auch ein sachlicher Fehler vermerkt werden: auf S. 148 ist der Beweis für die Konvergenz einer absolut konvergierenden Reihe mißglückt. Erstens braucht die Reihe nicht alternierend zu sein, zweitens ist $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$ keine hinreichende Bedingung für die Konvergenz einer alternierenden Reihe, wie das Beispiel $1 - \frac{1}{2^1} + \frac{1}{3} - \frac{2}{2^3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{7} - \frac{1}{2^4} + - \cdots$ lehrt.

Schulpforte. K. Bögel.

W. Lietzmann, Mathematisches Unterrichtswerk. Leipzig, B. G. Teubner.

Von mehreren Bänden dieses Werkes liegen Neuauflagen vor. Inhaltlich hat sich seit den letzten Besprechungen in dieser Zeitschrift (1916 und 1919) nicht viel geändert, da der Verfasser schon lange vor Aufstellung der neuen Lehrpläne, die in ihnen enthaltenen neuen Ideen vertrat. Äußerlich ist eine wesentliche Verbesserung eingetreten, indem der Verlag die Bände in ein dauerhaftes Leinengewand gekleidet hat, von dem nur einige im Jahr 1926 zuletzt neu aufgelegten noch ausgenommen sind. Die Ausstattung der Figuren mit Farben mußte aber wegen drucktechnischer Schwierigkeiten wegfallen; das ist zwar namentlich bei den Figuren zur Flächenlehre und darstellenden Geometrie bedauerlich, kann aber im Unterricht selbst durch ausgiebigen Gebrauch bunter Kreide wettgemacht werden. Der Preis beträgt durchschnittlich etwas mehr als *RM* 5.— pro Band, für die geometrische Kurzausgabe (ohne Leitfaden) *RM* 3.20. Ganz neu ist die Herausgabe von (kartonierten) Ergänzungsheften.

Seiner Leitidee folgend hat der Verfasser in jedem Band die Aufgabensammlung als das Lebenspendende vorangestellt; aus den Problemen soll sich das Bedürfnis nach Aufstellung von Definitionen und Sätzen ergeben; der Leitfaden ist daher gewissermaßen als psychologische Folgerung an den Schluß gestellt. Auch im Aufbau unterscheiden sich beide Teile: während die Aufgaben methodisch geordnet sind, ist der Leitfaden systematisch. Dies ist ein großer Vorzug gegenüber allen rein methodischen oder rein systematischen Lehrbüchern. Nach den ersteren nämlich können sich die Schüler zu Hause, wo sie selbständig arbeiten müssen, nichts „klar machen"; die letzteren schrecken viele von der Mathematik ab, da sie nicht ein naheliegendes Ziel erkennen lassen. Das vorliegende Werk bindet den Lehrer in keiner Weise, vor allem nicht in der Stoffwahl; es gibt ihm in seiner Reichhaltigkeit die erwünschte Gelegenheit, für jeden Jahrgang den Unterricht individuell zu gestalten. Vielleicht wäre in dieser Hinsicht noch Einschaltung eines Kapitels über Mechanik erwägenswert, da es sehr lohnend erscheint, mit einer Prima einmal die Differentialrechnung vom mechanischen Standpunkt aus zu betreiben.

Das ganze Werk ist für Knabenschulen und für Mädchenschulen gesondert erschienen; für Knabenschulen in zwei Ausgaben A und B (für Gymnasien bzw. Realanstalten), wozu noch die Kurzausgabe C kommt. Es ist dabei der allgemeine Brauch beibehalten worden, die Ausgabe A aus B einfach durch Weglassung einiger Teile entstehen zu lassen. Das erscheint zunächst ganz plausibel, geht aber an der Tatsache vorbei, daß an einem Gymnasium der mathematische Unterricht in seinem ganzen Wesen einen anderen Geist atmet als an einer Realanstalt. Um nur ein Beispiel anzuführen: der Gymnasiast will auch sprachliche Erklärungen seiner Termini (Kathete, irrational ...); auch hat er, der Platongeschulte, mehr den Trieb und das Verständnis für die Untersuchung der Urgründe. Doch ist das eine Bemerkung, die für alle Lehrbücher gleichermaßen gilt.

In der Oberstufe der Analysis fällt angenehm auf, daß Lücken im Beweis, wie sie sich in der Schule zwangsläufig bei Behandlung von Grenzwertsätzen ergeben, stets als solche vermerkt werden. Zu § 8 des Leitfadens in B (§ 16 in A) ist aber eine Bemerkung notwendig: aus dem Fundamentalsatz der Algebra und dem Satze, daß ein Polynom n-ten Grades $f_n(x)$

mit der Nullstelle x_1 sich in der Form $(x - x_1) \cdot f_{n-1}(x)$ darstellen läßt, folgt nur, daß $f_n(x)$ *mindestens n* Nullstellen besitzt; zum Nachweis, daß es genau n sind, ist noch die Eindeutigkeit der Zerlegung von f_n in Linearfaktoren nötig. In der Unterstufe der Geometrie (Leitfaden) wäre es angebracht, die Erklärungen und Sätze konsequent durchzuzählen; es finden sich einige Erklärungen ohne Nummer, die eine Bezugnahme erschweren.

Die Einschiebung von kurzen geschichtlichen Abschnitten, wie sie von anderen Werken jetzt meistens gebracht werden, hat sich bei diesem Werk erübrigt durch das Erscheinen der fünf Ergänzungshefte. Drei derselben sind nämlich der Geschichte der Mathematik gewidmet:

Nr. 1. Überblick über die Geschichte der Elementarmathematik. 1928. RM 2.—.

Nr. 4. Aus der Mathematik der Alten. 1928. RM 1.80.

Nr. 5. Aus der neueren Mathematik. 1929. RM 2.40.

Als Verfasser aller drei Heftchen zeichnet W. Lietzmann selbst. Nr. 1 gibt dem Schüler eine recht anregende Darstellung; nach einem 17 Seiten langen Gesamtüberblick folgt ein zweiter Teil, enthaltend die Geschichte der Einzelgebiete, natürlich nur in prägnanten Ausschnitten. 65 Abbildungen (Bilder von Mathematikern, Grabsteinen, alten Instrumenten, alten Zahlzeichen u. dgl.) sorgen für Belebung des Ganzen; am Schluß befindet sich ein Mathematikerverzeichnis, enthaltend die Lebensdaten, soweit sie bekannt sind. Die Benennung „Gerade" (statt „gerade Linie") dürfte doch schon älter sein, als es auf S. 43 angedeutet ist, da schon die Griechen durchweg ἡ εὐθεῖα sagten.

Den Bedürfnissen des modernen Unterrichts kommen ganz besonders Nr. 4 und Nr. 5 entgegen. Es sind Quellenhefte, enthaltend Originalabschnitte aus Mathematikern, bei fremden in deutscher Übersetzung; da sie durchweg Gedanken einstmals führender Geister bringen, sind sie vorzüglich geeignet, den Schüler zum wahren mathematischen Nachdenken über die von ihm gelernte Kunst und ihre Grundlagen zu erziehen. Der Inhalt beider Hefte ist nach Sachgebieten geordnet; kurze Einleitungen zu jedem einzelnen Abschnitt tragen zur leichteren Verständlichkeit bei. Die Art der Übersetzung ist immer Geschmackssache; vielleicht ließe sich aber doch noch manches glatter ausdrücken; warum es aber jetzt Mode zu werden scheint[1]), die erste Definition Euklids durch den Satz: „Der Punkt ist das, dessen Teil nichts ist" wiederzugeben, erscheint mir unbegreiflich; Euklid schrieb ganz einfach: „*Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐδέν*", zu deutsch: „Ein Punkt ist etwas, wovon es gar keinen Teil gibt".

Nr. 3. W. Lietzmann, Aufbau und Grundlage der Mathematik. 1927. RM 2.20.

Auch aus diesem Heftchen spricht die Erkenntnis des Verfassers, daß es mit einem zwei oder drei Seiten langen Einschiebsel über diesen Gegenstand in einem Lehrbuch nicht getan ist; alle vier Kapitel („Die Logik in der Mathematik", „Grundlegung der Geometrie", „. . . der Arithmetik", „. . . der Analysis") lassen an Klarheit nichts zu wünschen übrig und können

1) Vgl. Lörcher-Löffler, Mathem. Leitfaden und Aufgaben der Geometrie. Leipzig 1927, S. 171, und K. Fladt, Euklid. (Math.-naturw.-techn. Bücherei Bd. 8.) Berlin 1927, S. 47.

etwa in einer mathematischen Arbeitsgemeinschaft als wertvolle Richtschnur dienen. Gerade die besten unserer Schüler zeigen ja immer wieder das Bedürfnis, vom handwerksmäßigen Betrieb der Mathematik weg sich einmal ihrer philosophischen Untersuchung zuzuwenden.

Nr. 2. M. Hauptmann, Technische Aufgaben zur Mathematik. 1927. *RM* 3.—.

Enthält 89 Aufgaben mit Lösungen und vielen Nebenfragen aus 11 verschiedenen Gebieten; ein nach mathematischen Gesichtspunkten aufgestelltes alphabetisches Sachverzeichnis am Schlusse ermöglicht leicht die Benutzung im Unterricht an der passenden Stelle. In der Hand des richtigen Lehrers ist das Büchlein jedenfalls geeignet, manche rein theoretische „Textaufgabe" zu verdrängen, ganz abgesehen davon, daß es dem reichlich vorhandenen technischen *Interesse* unserer Jugend entgegenkommt und dieses zum technischen *Verständnis* umzuformen versucht.

Schulpforte. K. Bögel.

O. Richter, Wirtschaftliches Rechnen. Leipzig 1929, B. G. Teubner. *RM* 2.80.

Ein neues Heft innerhalb Lietzmanns Unterrichtswerkes; es bringt für die Tertien und die Untersekunda reichlich Stoff und Anregung zu Rechenaufgaben, die in der Wirklichkeit vorkommen: aus der Haus- und Volkswirtschaft, aus dem Handel.

Schulpforte. K. Bögel.

Behrendsen-Götting-Harnack, Lehrbuch der Mathematik. In zwei Ausgaben: A und B zu je vier Leinenbänden. Leipzig, B. G. Teubner. Durchschnittl. Preis des Bandes rund *RM* 4.—.

Die beiden Begründer dieses Werkes, das, der Zeit vorauseilend, von Anfang an die heutige Richtung im mathematischen Unterricht vertreten hatte, weilen nicht mehr unter den Lebenden. Ihr Nachfolger (und früherer Mitarbeiter), Herr Harnack, hat daher die letzten Neuauflagen selbständig bearbeiten müssen; und man muß anerkennen, daß ihm die Ausmerzung von noch vorhanden gewesenen einzelnen Schäden in den allerletzten Auflagen in hohem Maße gelungen ist, so daß das Werk in seiner jetzigen Gestalt als eines der am besten durchgearbeiteten Schulbücher innerhalb unserer sonst teilweise recht bedenklichen Schulbuchliteratur angesprochen werden kann. Insbesondere sind auch die eingeschobenen geschichtlichen Abschnitte in einem klaren Deutsch abgefaßt. Das Aufgabenmaterial erscheint ausreichend, vielleicht etwas knapp; namentlich die *leichten* Übungsaufgaben könnten wohl noch etwas verstärkt werden; und ganz besonders wünschenswert erschienen mir Übungsaufgaben zu den mechanischen Anwendungen der Differentialrechnung, welch letztere gerade in diesem Werk ausgezeichnet dargestellt sind.

Um dieses jetzt für Lehrer und Schüler gleich gute Unterrichtswerkzeug noch feiner gestalten zu helfen, sei auf einige Einzelheiten aufmerksam gemacht. In B I (Geometrie IV—U II, 9. Aufl.) wird die Sehnenlänge betrachtet als Funktion des Mittelpunktsabstandes; der Schlußsatz: „Ihr

kleinster Wert (Minimum) ist Null, die Sehne ein Punkt", tötet in dieser Form die im Tertianer entstehende Grenzwertidee, anstatt sie zu fördern; es gibt eben keine kleinste Sehne: das versteht jedes Kind. Auf S. 61 würde aus verwandten Gründen der Satz, daß die Tangente eine Gerade ist, die mit dem Kreise „zwei zusammenfallende" Punkte gemeinsam hat, besser weggelassen werden, da diese Vorstellungen meistens mißverstanden werden. Bei der Einführung des Strahlensatzes (S. 118) sei einmal auf einen grundsätzlichen Punkt hingewiesen, der *alle* Schulbücher angeht: für rationale Teilverhältnisse ist dieser Satz, weil dann durch Kongruenzen beweisbar, so trivial, daß seine Durchnahme erst an so später Stelle abwegig erschiene: es hilft nichts, *hier* muß man seinen Untersekundanern den Kopf darauf stoßen, daß auch in der Geometrie die Dinge nicht immer so einfach liegen wie sie scheinen.

Von A/B II liegt augenblicklich nur eine ältere Auflage vor (1927); nach Bericht des Herausgebers soll in der Neuauflage die apodiktische Form der arithmetischen Regeln durch die potentiale ersetzt werden, was natürlich sehr zu begrüßen ist.

In Oberstufe B I (5. Aufl. 1928) haben sich jetzt, durch die Verbesserung der Kapitel über Grenzwerte und Reihen, einige Inkonsequenzen eingeschlichen. Die Vorbetrachtungen des fünften Abschnittes in § 83 über den Begriff des Grenzwertes werden schon notwendig in §§ 73 und 74 über Konvergenz von Reihen gebraucht; und in der Tat enthält ja auch § 83 die Definition der Konvergenz noch einmal. Die Anmerkung auf S. 251, daß von sog. oszillierenden Zahlenfolgen hier abgesehen werden müsse, ist nicht am Platze, da die Partialsummen der in § 74 behandelten alternierenden Reihen solche Folgen darstellen; in § 74 wird die Beschränkung auf solche Reihen, deren Glieder mit ihren absoluten Beträgen nur zu- oder abnehmen (von einer gewissen Stelle an), im Beweise der Lehrsätze 1—3 nirgends gebraucht, bei Satz 4 und 5 steckt sie implizite in den Voraussetzungen, und bei Satz 6 (alternierende Reihe) wird sie sowieso noch einmal ausgesprochen. Der Abschnitt über absolut konvergente alternierende Reihen bringt nichts Neues, wird später nicht gebraucht und daher am besten fortgelassen. Eine Verdunkelung des Grenzwertbegriffes findet sich noch auf S. 272/73: man kann nicht sagen, daß nach der Annäherung des Kreises durch Vielecke im Grenzfall „der Ersatz: Sehne statt Bogen dann nicht nur annähernd, sondern vollkommen richtig" sei, d. h. beide Größen „gleich" seien. Das ist ein Spiel mit unendlich-kleinen Größen, das sonst in diesem Werk, mit Recht, abgelehnt wird. Auf S. 303 findet sich die Unterscheidung von konvexen und konkaven Funktionen umgekehrt wie sonst üblich; merkwürdigerweise übrigens in einigen anderen Schulbüchern auch!

In Oberstufe B II (5. Aufl. 1929) würde es sich empfehlen, auf S. 1 und 2 unter $\sqrt{x}$ stets, wie jetzt vereinbart, den positiven Wurzelwert zu verstehen; auf S. 31 ist von der Häufungsstelle von Gipfel- und Talpunkten die Rede, die eine Unstetigkeit bewirkt, „wenn die Wellen nicht mehr und mehr verebben, sondern eine endliche Höhe beibehalten" — das sind doch keine Gegensätze! (hier wieder ein verhülltes Spiel mit unendlich-kleinen Größen, die „nicht endlich" sind). Auf S. 32 ist es eigentlich bedauerlich, daß die Definition der Stetigkeit: Intervallschwankung S_n hat

den Grenzwert Null, wie sie in früheren Auflagen stand, nicht beibehalten wurde; denn sie ist die einfachste und klarste. Der Mittelwertsatz (S. 34) macht einem Beweise für Schulzwecke immer Schwierigkeiten; aber auch das Plausibelmachen scheitert hier daran, daß die Ableitung nicht stetig zu sein braucht! Schließlich ist es doch, nach der Definition des Differentials $dy = f'(x) \cdot dx$, wo dx eine *Konstante* ist, nicht angängig, zu sagen: „Man beachte wohl, daß die Differentiale mit dem Grenzprozeß, der die Ableitung ergibt, nicht unmittelbar zusammenhängen oder aus ihm hervorgehen." Verfasser will mit diesem Satze, wie aus dem Folgenden hervorgeht, die irrige Meinung bekämpfen, als ob dx und dy verschwindend kleine Größen wären, in Wahrheit aber unterstützt er sie! Gerade das Gegenteil ist richtig: Ohne vorherige Auswertung des Grenzwertes $f'(x)$ erhält das Differential dy keinen Inhalt, also geht es erst aus ihm hervor.

Zum Schlusse sei nun noch einmal ausdrücklich auf den hohen Wert dieses Schulbuches hingewiesen, der den Referenten veranlaßt hat, sich mit ihm etwas eingehender zu beschäftigen. Seine wenigen noch vorhandenen Mängel sind, wie wohl aus dem Bericht hervorgeht, durchaus „hebbar", so daß es immer mehr zu einem wahrhaft vollkommenen Schulbuche wird.

Schulpforte. K. Bögel.

J. F. Steffensen, Interpolation. Baltimore (The Williams & Wilkins Company) 1927. X u. 248, VI S., 47 Tabellen, 5 Abb., 23,5 × 15,5 cm. Geb. $ 8.—.

1925 ist von Steffensen, dem Vertreter der Versicherungsmathematik an der Universität Kopenhagen, ein Buch „Interpolationslære" erschienen (Verlag G. E. C. Gad, Kopenhagen). Mancher, dem flüchtige Kenntnisnahme einen bedeutenden Eindruck vermittelte, mag bedauert haben, daß ihm die dänische Sprache ein tieferes Eindringen verwehrte. Umso willkommener wird überall die vorliegende, sachlich nur unwesentlich veränderte Übersetzung ins Englische geheißen werden. Denn es handelt sich um die wichtigste Erscheinung auf dem Gebiete der eigentlichen Interpolationsrechnung seit langer Zeit. Um das recht zu verstehen, tut man gut, einen Blick auf die Geschichte der Interpolationsrechnung zu werfen. Von Gregory und Newton geschaffen und bereits im Beginne so meisterlich ausgestaltet, daß z. B. die Interpolationsformeln, welche heute unter den Namen von Stirling, Gauß und Bessel segeln, von Rechts wegen nach Newton heißen müßten, stand die Interpolationsrechnung während des ganzen 18. Jahrhunderts in lebendiger Wechselwirkung mit der gesamten Analysis; Namen wie Cotes, Taylor, der seine Reihenentwicklung von interpolatorischem Ansatze her fand, Simpson, Stirling, Euler — Eulersche Summenformel, Eulersche Behandlungsweise von Variationsproblemen — beleuchten das. Erst Lagranges mißglückte Reform der Infinitesimalrechnung zermürbte das Band. Der große „Traité des différences et des séries" von Lacroix um 1800 ist zusammenfassend, nicht wegbereitend oder Neues anbahnend. Zwar schaut die ragende Persönlichkeit von Gauß noch nach beiden Seiten der Theorie *und* der Praxis; man erinnere sich an die numerische Integration mittels Kugelfunktionen, an die Untersuchung der Pallasstörungen, an die unzähligen Anregungen,

die Gauß, mit einer ihn befriedigenden Lösung und Darstellung gerade von Interpolationsfragen lange Zeit ringend, im mündlichen und brieflichen Verkehre und durch die Veröffentlichungen von Bessel und Encke ausgestreut hat. Zwar schenkt Tschebyscheff der Welt seine auch heute noch viel zu wenig bekannten und gewürdigten Interpolationsmethoden. Aber all das vermag nicht darüber hinwegzutäuschen, daß im 19. Jahrhundert die Interpolationsrechnung im ganzen versandet. Die Astronomen, welche die Gaußsche Tradition übernehmen, entwickeln zwar den praktischen Gebrauch zu hoher Vollkommenheit — man vergleiche daraufhin die Anhänge der großen astronomischen Lehrbücher oder die Brunsschen „Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens" von 1903 —, vernachlässigen aber erklärlicherweise die Durcharbeitung und Anpassung an den Fortschritt nach der mathematischen Seite hin, so daß bei ihnen das Interpolieren ziemlich blindlings und ohne wirkliche Rechenschaft über Voraussetzungen und Tragweite geschieht. Die Mathematiker hingegen interessieren sich für andere Dinge, und zukunftsreiche Bemerkungen von Cauchy, Genocchi u. a. fallen auf keinen fruchtbaren Boden. Ja, nicht einmal die um die Jahrhundertwende immer wieder erhobene Stimme von Felix Klein findet die gewohnte Resonanz; die von ihm angeregte Übersetzung von Markoffs „Differenzenrechnung", einem ganz neuartig eingestellten Buche, entwickelt sich nicht zu einem so starken Anregungszentrum, wie es vielleicht erhofft worden war. Der Wechsel sollte von anderer Seite kommen, von den skandinavischen Ländern her. Es ist wohl einmal der Einfluß des großen Anregers dänischer Mathematik, T. N. Thiele, der hier spürbar wird — dank der Personalunion zwischen Astronomie und Mathematik bei Thiele wird in gewissem Sinne an die astronomische Überlieferung angeknüpft —, zum anderen die hohe und allgemeine Blüte der nordischen Versicherungsmathematik. Diese hat sich ja in glücklicher Weise von dem in Deutschland übermächtigen Einfluß der Juristen freizuhalten und auch die im Mutterlande England der Versicherungsmathematik bestehende Gefahr eines erstarrten Formalismus und Symbolismus klug zu vermeiden gewußt; im Gefolge davon ist in herausgehobenen Stellungen der Versicherungsgesellschaften eine Gemeinde weitbekannter, produktiver Mathematiker tätig, und die Ausbildung steht auf einem für den deutschen Beobachter ganz erstaunlich hohen Niveau.

So liegt das Steffensensche Buch vor uns, erwachsen aus dem Unterrichte des Verfassers an der Kopenhagener Universität und aus seinen Veröffentlichungen in der „Skandinavisk Aktuarietidskrift", dem wissenschaftlich erstklassigen Organ der nordischen Versicherungsmathematik im weitesten Sinn. Steffensen charakterisiert den jetzigen mangelhaften Zustand der Interpolationsrechnung, welche trotz rühmlichen Ausnahmen im ganzen mathematisch doch noch in den glücklichen Zeiten von Euler lebt, etwa Formeln für Polynome beweist und dann ohne weiteres für beliebige Funktionen anwendet. Er lehnt es ab, lediglich heuristisch begründete Dinge mitzunehmen, und setzt bewußt das Markoffsche Streben nach Strenge fort, wobei er aber die Ergebnisse so geschmeidig zu gestalten versucht, daß der Praktiker mit ihnen wirklich etwas anfangen kann. Eine wohlerwogene Grenze wird gegen die hauptsächlich durch Nörlund (von dem übrigens in Deutschland die wenigsten wissen, daß er von Haus aus

Astronom der Thieleschen Schule ist) so hochgeführte Theorie der Interpolationsreihen gezogen. Diese gehört ja insofern nicht mehr zur Interpolationsrechnung im engeren Sinne, sondern zur Lehre von den Entwicklungen nach Polynomen, als es der Praktiker nie mit unendlichen Reihen, sondern nur mit endlich vielen Gliedern zu tun hat, deren möglichst wenige ihm eine möglichst gute Näherung liefern sollen. (Ein kurzer Bericht über die Theorie der Interpolationsreihen könnte allerdings mit Vorteil angefügt werden.) Selbstverständlich steht als ein Grundproblem der angewandten Mathematik die Schätzung der Genauigkeit bei Steffensen im Vordergrunde des Interesses. Das von ihm selbst herrührende Fehlerkriterium, ein wahres Ei des Kolumbus, wonach durch entgegengesetztes Vorzeichen zweier aufeinanderfolgender Reste Pseudokonvergenz festgestellt werden kann, zieht sich durch das ganze Buch. Unnötig zu sagen, daß man auch sonst fortwährend auf eigene Leistungen des Verfassers stößt. Die Vorkenntnisse für das Studium des Buches beschränken sich auf Differential- und Integralrechnung. Trotzdem dürfte das Werk wenigstens für den Anfänger nicht leicht zu lesen sein, da, allerdings in der Natur der Sache liegend, außerordentlich zahlreiche Formeln in gleichmäßigem Flusse vorkommen. Mehr allgemeine Ausführungen über Sinn und Bedeutung der Formeln würden wahrscheinlich vieles erleichtern. Die Zahlenbeispiele sind vortrefflich. Mit besonderer Freude begrüßt der deutsche Leser die vielen aus der englischen Versicherungsliteratur mitgenommenen, bei uns zu wenig bekannten Dinge.

Gegliedert ist das Buch in 21 Paragraphen folgendermaßen. Nach Formulierung der Aufgabe in § 1 gemäß Thieles oft angeführtem Wort „Interpolation ist die Kunst, zwischen den Zeilen einer Tafel zu lesen" bringt § 2 Verschiebungssymbole (für die Abänderung des Arguments einer Funktion), auf- und absteigende Differenzen, Faktorielle, Zentraldifferenzen, Mittelwerte, § 3 dividierte Differenzen (Steigungen, allgemeine Differenzenquotienten), auch mit wiederholtem Argument, und die Waring-Lagrangesche Interpolationsformel. § 4 entwickelt im Anschlusse an die allgemeine Newtonsche Interpolationsformel mit beliebig verteilten Interpolationsstellen die nach Gregory-Newton, Gauß, Stirling, Bessel, Everett benannten Interpolationsformeln sowie eine neue solche Formel ähnlich der von Everett. Hierbei könnte und sollte der Formelapparat durch die geometrisch anschauliche Ausdeutung der Differenzenbildung mittels Bewegungen im Differenzenschema eingeschränkt werden. Zweifellos würden hierdurch Kürze, Übersichtlichkeit und Straffheit gefördert werden. Beim Restglied der allgemeinen Newtonschen Formel erfolgt der Übergang von der Ampèreschen Gestalt mit einer $(n+1)$-ten Steigung (welche erst durch Thieles „Interpolationsrechnung" von 1909 mit Nachdruck ins Bewußtsein der Mathematiker zurückgerufen worden ist) zur üblichen mit einer $(n+1)$-ten Ableitung über die Darstellung einer Steigung durch ein vielfaches Integral oder über den Rolleschen Satz. § 5 zeigt am Rungeschen Beispiel $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, daß bei Häufung der Interpolationsstellen in einem festen, endlichen Intervall die Interpolationspolynome einer stetigen und beliebig oft stetig differenzierbaren Funktion nicht im ganzen Intervall nach dieser gewünschten Funktion zu konvergieren

brauchen, gibt praktische Winke über den Gebrauch der einzelnen Interpolationsformeln, Zahlenbeispiele, Differenzenproben und untersucht die durch Abrundung und Vernachlässigung des Restgliedes entstehenden Fehler. In § 6 ist von den Faktoriellenkoeffizienten (von N. Nielsen Stirlingsche Zahlen genannt) die Rede, d. h. den Entwicklungskoeffizienten der Potenz nach Faktoriellen („Differenzen von Null") und der Faktoriellen nach Potenzen („Ableitungen von Null"). Mathematisch sehr interessante Dinge bringt § 7 mit der numerischen Differentiation, wobei sich für den Leser ein Vergleich mit den entsprechenden Entwicklungen von Markoff lohnt. § 8 handelt von der Konstruktion von Tafeln, d. h. von den schon von Briggs angebahnten Methoden zur Feinerteilung eines groben Tafelintervalls, § 9 von der inversen Interpolation, d. h. der Berechnung des Arguments, wenn in einer Tafel der zwischengeschaltete Funktionswert dazu bekannt ist (wichtig für die numerische Auflösung von Gleichungen). In § 10 beginnen die Auseinandersetzungen über Summation: § 10 elementare Methoden (Benutzung der „Summe"; zu Dirichlets Formel über die Umkehrung der Integrationsreihenfolge analoge Summenformel), § 11 wiederholte Summation (wichtig für die Berechnung von Momenten in der Kollektivtheorie), § 12 und § 14 wechselseitige Ersetzung von Summe und Integral. Und zwar wird in § 12 der Unterschied nach Differenzen entwickelt (Formeln von Laplace und Gauß), in § 14 nach Ableitungen (Eulersche Summenformel). Hierbei bietet sich Gelegenheit zu besonders hübschen und ertragreichen Anwendungen des Steffensenschen Fehlerkriteriums. Die Koeffizienten der Formeln von Laplace und Gauß werden in Schranken eingeschlossen und asymptotisch abgeschätzt. Kaum nötig, auf die praktische Anwendung dieser Dinge bei der numerischen Integration hinzuweisen. Der zwischengeschaltete § 13 bereitet die Eulersche Summenformel durch Bernoullische Zahlen und Polynome vor. Während in der dänischen Ausgabe die Definition unmittelbar an Nörlund anschließt, biegt sie die englische Übersetzung zu $\Delta B_\nu(x) = \nu x^{\nu-1}$, $B_\nu'(x) = \nu B_{\nu-1}(x)$ um, welche sachlich gleichwertig ist, aber besonders einleuchtend erscheint und schnell zu Ergebnissen führt. Die Formeln von Lubbock und Woolhouse in § 15 sind in Deutschland wenig bekannt. Sie ersetzen eine Summe von vielen Gliedern durch das m-fache der Summe jedes m-ten Gliedes. Die notwendige Verbesserung entwickelt Lubbock nach Differenzen, Woolhouse nach Ableitungen (Grenzfälle also die Formeln von Laplace aus § 12 und Euler aus § 14). Besser als die ursprüngliche Lubbocksche Formel sind neue, von Steffensen angegebene Formeln. Unter mechanischer Quadratur in § 16 versteht der Verfasser die Mittelwertformeln zur numerischen Integration, bei denen das Integral als gewogenes Mittel einer Anzahl von Funktionswerten aufgebaut wird, noch spezieller die Cotesischen Formeln mit äquidistanten Argumenten, aus denen durch Umformungen als zur Rechnung besonders geeignet die Hardysche und Weddlesche Formel hervorgehen. Die Methode von Gauß wird leider nur erwähnt. Beim Restglied muß wegen der Unmöglichkeit eines unmittelbaren Gebrauchs des Mittelwertsatzes ein interessanter Umweg eingeschlagen werden. Je nachdem die Funktionswerte in den Endpunkten des Integrationsintervalls mitbenützt werden oder nicht, scheiden sich die Formeln in einen geschlossenen und offenen Typus. Der offene Typus gestattet

in § 17 Steffensen die numerische Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen $\frac{dx}{dt} = f(x, t)$ bzw. Differentialsysteme mit vollständiger Genauigkeitsschätzung dadurch, daß das Integral der rechten Seite immer um einen Schritt weiter berechnet werden kann, als man die Werte von x und damit von $f(x, t)$ bereits kennt. Hier wäre es dringend erwünscht, etwas über die Wahl der Ausgangswerte zu sagen. Für andere Arten der numerischen Integration von Differentialgleichungen wird auf eine bekannte Arbeit von Nyström verwiesen. § 18 ist den symbolischen Methoden mit ihrem faszinierenden Reiz und ihrem außerordentlichen heuristischen Wert gewidmet und faßt auf diesem (natürlich einwandfrei gestalteten) Wege die früher gewonnenen Formeln noch einmal zusammen. Für die Interpolation bei mehreren unabhängigen Veränderlichen in § 19 kennt das deutsche Publikum die Abhandlungen von Neder aus den letzten Jahren; ein Vergleich der Ansätze und Ergebnisse von Biermann, Narumi, Neder und Steffensen auf diesem Gebiete ist lohnend. § 20 mit der mechanischen Kubatur bildet sozusagen die Fortsetzung von § 16. Schließlich greift § 21 das von Schlömilch, Hoppe u. a. eifrig gepflegte Gebiet der expliziten Angabe von Ableitungen beliebiger positiv ganzzahliger Ordnung auf. Ihm folgt noch ein sorgfältiges Sachverzeichnis.

Ein Vergleich der dänischen und der englischen Ausgabe läßt erkennen, wieviel für ein mathematisches Werk Druck und Ausstattung bedeuten. Die drucktechnisch ungeschickte und den Leser beängstigende Formeldarbietung des dänischen Originals löst sich in der englischen Übersetzung zu einfacher, ruhiger Klarheit auf. Es ist wohlberechtigt, wenn die Druckerei (Waverly Press, Baltimore) am Schlusse ihr Motto „Sans tache — Ohne Makel" und ihren Grundsatz handwerksmäßiger Gestaltung auch im Maschinenzeitalter auseinandersetzt und die am Drucke beteiligten Arbeiter namentlich aufführt; das Buch gehört äußerlich zu den besten, die ich kenne.

So ist ein würdiger Rahmen geschaffen für die Erhebung der Interpolationsrechnung auf einen modernen Stand, welche hier vorliegt. Das Buch von Steffensen ist ein bedeutsamer Schritt auf dem Wege dazu, die angewandte Mathematik wieder organisch in die Gesamtmathematik einzugliedern.

Darmstadt. Alwin Walther.

Fr. Bleich und E. Melan, Die gewöhnlichen und partiellen Differenzengleichungen der Baustatik. VIII u. 350 S., 74 Abb., 23,5 × 16,5 cm. Berlin u. Wien 1927, Julius Springer. Geb. ℛℳ 28.50.

Das Buch von Bleich und Melan bildet ein interessantes Belegstück dafür, wie eine mathematische Theorie in die Praxis des Ingenieurs eindringt und wie umgekehrt die Technik der mathematischen Forschung Anregungen mannigfaltigster und fruchtbarster Art zu bieten vermag. Nachdem schon um 1860 Clebsch wohl als erster den durchlaufenden Balken mittels Differenzengleichungen behandelt hatte, datiert ein wirklicher und weitergehender Gebrauch der Differenzenrechnung für technische Probleme, besonders solche der Baustatik, doch erst aus unserem Jahrhundert. Bei der Ausbildung dieser Methoden haben die beiden Ver-

fasser — sie sind Ingenieure, was man beim Lesen des Buches immer im Auge behalten muß — mit in der ersten Reihe gestanden. Die seitdem erschienene mathematische Lehrbuchliteratur zur Differenzenrechnung, d. h. die „Theorie der linearen Differenzengleichungen" von Wallenberg und Guldberg aus dem Jahre 1911 und die 1924 herausgekommenen „Vorlesungen über Differenzenrechnung" von Nörlund, ist in einer den für die Technik heute belangreichen Problemen abgewandten Richtung eingestellt und berücksichtigt sie (außer etwa im Literaturverzeichnis) nur in verschwindendem Maße. Die übliche, rasch das Konkrete suchende Denkweise des Ingenieurs pflegt daher auf diesem Wege nur schwer in das Gebiet einzudringen. Das Funksche Werkchen „Die linearen Differenzengleichungen und ihre Anwendungen in der Theorie der Baukonstruktionen" von 1920 hat zweifellos äußerst anregend gewirkt, ist aber recht knapp gehalten. Weitere Bücher von Fritsche, Marcus, Schneider u. a. verfolgen im wesentlichen nur Sonderziele. Demgegenüber zieht die Praxis des Ingenieurs gerade in den letzten Jahren die Differenzenverfahren mehr und mehr heran und drängt zur Systematisierung ihres Gebrauchs. So lag tatsächlich ein Bedürfnis für ein zusammenfassendes Lehrbuch vor, wie es die Verfasser, nachdem von mathematischer Seite nichts derart geliefert worden ist, dem Ingenieur und Mathematiker hier darbieten wollen. Man merkt deutlich, daß es mit Begeisterung für den Gegenstand geschrieben ist. Hierin ist wohl auch der Grund zu suchen, daß ein viel umfangreicherer mathematischer Apparat vorgeführt wird, als zur Bewältigung lediglich der technischen Probleme an sich erforderlich wäre. Bemerkenswert übrigens, daß das Werk, wie auch viele der einschlägigen Abhandlungen, von Österreichern stammt — ein beachtliches Zeugnis für die Güte der österreichischen Ingenieurausbildung nach der mathematischen Seite hin.

Hier ist das Buch hauptsächlich vom Standpunkte des Mathematikers aus zu würdigen. Ich hebe zunächst die Dinge hervor, die mir als Mängel erscheinen. Die Verfasser sagen: „Den richtigen Mittelweg bei der Darstellung zu finden, war nicht immer leicht, da die Gefahr besteht, daß der Mathematiker die Darstellung zu wenig streng, der Ingenieur aber zu abstrakt finden wird." Die Faßlichkeit ist, soviel ich zu beurteilen vermag, im großen und ganzen erreicht. Der Stil ist so breit und ausführlich, daß auch der Nichfachmathematiker bei ernstlicher Beschäftigung in den Stoff einzudringen vermag. Doch müßte die Übersichtlichkeit stellenweise größer sein; hierbei spielt allerdings der rein drucktechnische Mangel herein, daß viele Formeln zu eng gesetzt und ungeschickt umbrochen sind. Vielleicht dürften aber manche Formeln überhaupt fortfallen und durch „Wesensschau" (Herglotz) ersetzt werden. Daß Beweise nur da gegeben werden, wo sie zum tieferen Erfassen des Vorgetragenen notwendig sind, und daß die bei den Praktikern so verschrieenen Existenzbeweise (die freilich weniger schlimm sind als ihr Ruf; hier liegt viel Massensuggestion vor) fehlen, ist durchaus zu billigen. Ich glaube allerdings, daß man hierin und bei der Einschränkung formaler Rechnungen noch wesentlich weiter gehen könnte. So könnten und sollten vor allem Scheinbeweise (bei der Gammafunktion, der Eulerschen Summenformel, der Theorie der „Summe") unterdrückt und durch heuristische oder berichtende, auf den Kern der Sache hinzielende Betrachtungen ersetzt werden. Das Kompromiß, eine strenge Definition der

„Summe“ zu umgehen bzw. die Nörlundsche Definition abzuändern und doch die Nörlundsche Symbolik beizubehalten, stört teilweise die Einheitlichkeit. Bei den „periodischen Konstanten“ (über die Zweckmäßigkeit dieser Bezeichnung kann man geteilter Meinung sein) möchte man wünschen, daß durchweg der lichtvolle Standpunkt von S. 162—165 gewahrt wäre; an dieser Stelle wird ja scharf herausgearbeitet, welch tiefgreifender Unterschied hereinkommt, wenn man die unabhängige Veränderliche einmal, wie es in den Anwendungen meist geschieht, auf diskrete Werte beschränkt, also im wesentlichen ein lineares Gleichungssystem betrachtet, zum anderen frei läßt, also die Differenzengleichung als allgemeinere Funktionalgleichung auffaßt. Mit Grenzwerten und Konvergenz wird manchmal (z. B. bei der Eulerschen Summenformel, bei der logarithmischen Ableitung der Gammafunktion) allzu freiheitlich operiert; stetig und monoton sind zuweilen verwechselt; der Ausdruck analytisch wird mißbräuchlich angewandt. Bei all dem liegt es mir fern, von kleinlichem Fachstandpunkte aus herumzumäkeln; ich glaube aber, daß durch Besserung in den ausgestellten Punkten die Klarheit für *alle* Leser gewinnen würde.

Nun aber zum Positiven. Da ist vor allem der beträchtliche Ausbau und die Abrundung der Theorie der gewöhnlichen linearen Differenzengleichungen nach der Seite der Rand- und Eigenwertprobleme und des Zusammenhanges mit Extremalaufgaben zu nennen; bei weitem das meiste, was geboten wird, ist neu. Auch im Abschnitte über lineare partielle Differenzengleichungen, wo bis vor kurzem fast nichts, jedenfalls nichts Systematisches vorhanden war, kann der Mathematiker nur lernen. Merkwürdig übrigens die Duplizität der Ereignisse, welche zur Zeit der Abfassung des Buches Courant und seine Schüler ebenfalls die linearen partiellen Differenzengleichungen bearbeiten ließ, teilweise unter gleichen, teilweise unter anderen Gesichtspunkten. Eine Neuauflage wird sich in der glücklichen Lage befinden, den Courantschen Grenzübergang von der Differenzen- zur Differentialgleichung, Courants Betrachtungen über den Rand von Gebieten u. dgl. zu übernehmen und diese zukunftsreichen Dinge nach der Seite der Anwendungen weiterzuführen. Ganz ausgezeichnet sind die vielen bis in alle Einzelheiten durchgerechneten Beispiele, welche den erfahrenen Fachmann verraten und bei den theoretischen Darlegungen gebliebene Unklarheiten wettzumachen geeignet sind.

Im einzelnen werden in ziemlich engem Anschluß an Nörlunds „Vorlesungen“ im 1. Abschnitte S. 1—34 die grundlegenden Begriffe über Differenz und Summe, über Bernoullische Zahlen und Polynome, über Teilsummation, über die Eulersche Summenformel u. dgl. gebracht, im 2. Abschnitt S. 35—165, pädagogisch geschickt von praktischen Beispielen ausgehend, die Hauptsachen über gewöhnliche lineare Differenzengleichungen. Zweckmäßig scheint hier die Heraushebung der praktisch wichtigen symmetrischen Gleichungen und die eingehende Behandlung der Systeme von Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten. Die von den Verfassern neugeschaffene Eigenwerttheorie umfaßt u. a. den Zusammenhang mit einem Variationsproblem auf Grund einer Extremalforderung, die Orthogonalitätseigenschaften, die Entwicklung der Lösung einer inhomogenen Differenzengleichung nach Eigenlösungen der homogenen Gleichung (für welche der Anhang reichliche Tabellen enthält), das

Vorkommen verschwindender und mehrfacher Eigenwerte, die näherungsweise Lösung einer Gleichung mit veränderlichen Koeffizienten nach dem Analogon des Ritzschen Verfahrens. Bei linearen Koeffizienten wird ausführlich die Laplacesche Transformation besprochen und auf die Differenzengleichung der Zylinderfunktionen angewandt. Aus einer eingehenden Diskussion der Gleichung $y(x-1) - \varphi(x)\,y(x) + y(x+1) = 0$ entfließt auch die Reihenentwicklung der Zylinderfunktionen.

Der 3. Abschnitt S. 166—236 ist den Anwendungen der gewöhnlichen linearen Differenzengleichungen in der Baustatik gewidmet. Es werden behandelt: I. Statisch unbestimmte Träger (Spannung und Formänderungsarbeit), und zwar 1. der durchlaufende Balken auf festen Stützen mit a) gleichförmiger, b) gleichmäßig ansteigender Belastung, 2. der vielstielige Rahmen mit eingespannten Stützen, 3. der Rahmenträger, und zwar a) Parallelträgerbalken, b) Stockwerkrahmen, 4. der geschlossene elastisch gestützte Stabring, 5. die Durchbiegung einer Hängebrücke; II. Stabilitätsprobleme für den geraden Stabzug und den elastisch gestützten Stabring.

Der 4. Abschnitt S. 237—339 bringt die linearen partiellen Differenzengleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen an Hand der Beispiele 1. des biegungssteifen Rahmens a) mit seitlich unverschiebbar (fest, gelenkig oder frei), b) mit seitlich verschiebbar gelagertem Rand, 2. der rostförmigen Tragwerke. Für eine Neuauflage dürfte sich, wie schon erwähnt, empfehlen, den Grenzübergang zur Differentialgleichung (zu kontinuierlichen Systemen wie der elastischen Platte) offenzuhalten und den Anschluß an die von Marcus, Hencky u. a. mit viel Erfolg verwandte Ersetzung von Differential- durch Differenzengleichungen und an die theoretischen Arbeiten von Courant herzustellen.

Alles in allem ein begrüßenswertes Buch, dem eifriges Studium seitens der Ingenieure und willige Kenntnisnahme seitens der Mathematiker zu wünschen ist.

Darmstadt. ALWIN WALTHER.

F. Cajori, A history of mathematical notations. Vol. 1. Notations in elementary mathematics. 451 S. Vol. 2. Notations mainly in higher mathematics. 367 S. Chicago 1928 u. 1929, The Open Court Publishing Company. $ 12.—.

„Diese Geschichte der mathematischen Bezeichnungen ist ein Spiegel der Vergangenheit und des gegenwärtigen Zustandes der Frage der Bezeichnungen in der Mathematik. Die Erfolge und die Fehler der Vergangenheit können zu einer schnelleren Lösung entsprechender Fragen in der Gegenwart beitragen.

Diese Bände wollen nicht nur das erste Erscheinen eines Symbols nachweisen, sondern auch den Sinn und den Umfang feststellen, den es bei den verschiedenen Autoren besitzt."

So charakterisiert der Verfasser selber seine Absichten. Er hat sie reichlich erfüllt und darüber hinaus noch interessante Beiträge zur Geschichte der Begriffsbildung geliefert sowie das Material zu weitergehenden historischen Untersuchungen bereitgestellt.

So befaßt sich der erste Band sehr eingehend mit dem Ursprung unseres Positionssystems im Zusammenhang mit den Fragen der Bezeichnung der Ziffern bei den verschiedensten Kulturvölkern. Sehr instruktiv muß es da wirken, daß sich das Positionssystem schon im babylonischen Kulturkreis und bei den Mayas von Zentralamerika, bei letzteren besonders ausgeprägt, findet, lange bevor es in indischen Quellen nachweisbar ist. Auch bemüht sich der Verfasser, den Weg, den das Positionssystem aus den indischen Quellen zu uns genommen hat, erkennen zu lassen. Einen sehr breiten Raum nehmen die Bezeichnungen der elementaren Algebra zwischen 1500 und 1700 ein. An Hand einer großen Zahl von photographischen Reproduktionen wird fast eine Einführung in diesen Teil der mathematischen Paläographie geboten. Dem schließt sich dann die Entwicklungsgeschichte unserer heutigen Bezeichnungen an. Die Bezeichnungen der elementaren Geometrie schließen den ersten Band ab.

Der zweite Band enthält als eine Art Kuriosum u. a. eine Geschichte der Dollarbezeichnung $, die auf die Bezeichnung p^s für Pesos zurückgeführt wird, aus der sie sich anfangs des 19. Jahrhunderts entwickelt hat. Die romantische Deutung aus U. S. (United States oder Uncle Sam) hat somit ihr Ende gefunden. Aber abgesehen von dieser Abschweifung vom Thema ist der zweite Band den Bezeichnungen der höheren Mathematik gewidmet. Die Analysis beansprucht wieder den breitesten Raum, während die Bezeichnungen der Geometrie etwas knapp abgehandelt werden.

Auch in der Analysis wird ein Ausschnitt des weiten Gebietes geboten. Die Bezeichnungsweisen von Invariantentheorie und Matrizenkalkül z. B., wo heute noch lange keine Einheitlichkeit herrscht, werden nur gestreift. Mit gutem Grund bleiben Neuerungsversuche, die sich nicht durchgesetzt haben, wie z. B. die Hilbertsche Limesbezeichnung, beiseite.

Als eine zusammenhängende Lektüre wird das von Materialfülle strotzende Buch kaum Liebhaber finden. Es wird aber jedem Mathematiker, den historische Fragen interessieren, als Hilfs- und Nachschlagebuch nützlich sein und unentbehrlich werden. BIEBERBACH.

Rudolf Rothe, Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure. Teil II: Integralrechnung. Unendliche Reihen. Vektorrechnung nebst Anwendungen. VIII und 201 S. Leipzig und Berlin 1929, B. G. Teubner. Kart. *RM* 6.40.

Die „Höhere Mathematik" von Rothe, deren 1. Band bereits in zweiter Auflage erschienen und in diesen Berichten Bd. 34, S. *172*, bzw. Bd. *37*, S. *97* angezeigt worden ist, stellt sich die Aufgabe, alles das zusammenzustellen, was man in der gleichnamigen, drei bis vier Semester dauernden Vorlesung an einer Technischen Hochschule zu bringen pflegt, also nicht nur Differential- und Integralrechnung, sondern auch Differentialgleichungen, praktische Analysis, einiges aus analytischer und Differentialgeometrie, Funktionentheorie, Algebra, Mechanik usw. Während der 1. Band in der Hauptsache die Differentialrechnung und die Integralrechnung, soweit sie sich als deren Umkehr auffassen läßt, enthielt, bringt der 2. Band zunächst in einem ersten Teil weitere Ausführungen über die Berechnung unbestimmter Integrale, um dann das bestimmte Integral im Riemannschen Sinne einzuführen. Das Wort „bestimmtes Integral" ist schon im 1. Band für die

Differenz zweier Werte des unbestimmten Integrals gebraucht worden, und es wird nun ganz richtig angegeben, ob und wann diese beiden Begriffe mit demselben Namen auch wirklich übereinstimmen. Es dürfte sich jedoch empfehlen, diese Bemerkungen nicht erst ziemlich am Schluß (S. 36) anmerkungsweise zu bringen, sondern gleich in den Vorbemerkungen (S. 27) den Leser über diese Zusammenhänge zu informieren, da erfahrungsgemäß in vielen Büchern und daher auch in vielen Köpfen große Unklarheit über das Verhältnis von bestimmtem und unbestimmtem Integral besteht. — Es folgen dann: Praktische Quadratur, Anwendungen auf Geometrie und Analysis, z. B. harmonische Analyse, uneigentliche Integrale, Planimeter und Integraph. — Ein zweiter Teil behandelt die unendlichen Reihen, insbesondere Potenzreihen, ein dritter die Differentiation und Integration von Integralen nach einem Parameter sowie die Linienintegrale, der vierte und letzte die Determinanten und Vektoren mit Anwendungen auf Geometrie und Mechanik. — Wie im ersten Band sind auch hier jedem Abschnitt zahlreiche Aufgaben mit Lösung beigegeben. Das Buch setzt die Linie seines Vorgängers würdig fort und kann, da es gut verständlich ist und auf knappem Raum eine große Menge Stoff vermittelt, wie jener besonders den Ingenieuren, aber auch den Mathematikern bestens empfohlen werden.

Stuttgart. DOETSCH.

Gerhard Hauffe, Die symbolische Behandlung der Wechselströme. (Sammlung Göschen Nr. 991.) Berlin und Leipzig 1928, W. de Gruyter & Co. Geb. *RM* 1.50.

Das Büchlein gibt eine inhaltreiche und übersichtliche Einführung in die Methode, die bei Wechselströmen auftretenden Größen durch komplexe Zahlen darzustellen. Es ist zu begrüßen, daß der Verfasser nicht, wie es manchmal aus Scheu vor dem Komplexen geschieht, diese Methode in eine neue Symbolik eingekleidet hat, die doch nur eine verschämte Verhüllung des Komplexen sein kann und um nichts einfacher ist. Das Büchlein wird dem Elektrotechniker gute Dienste leisten, aber auch der Lehrer kann ihm manches hübsche Beispiel zur Einübung der komplexen Zahlen entnehmen. Bös sieht's nur auf den ersten vier Seiten (Maclaurinscher Satz) aus. Diese Dinge sollte sich der Verfasser von einem mathematischen Freund in Ordnung bringen lassen. Man kann sie mit nicht mehr Worten auch richtig sagen.

Stuttgart. DOETSCH.

G. Förster und G. Schütz, Systematische Fehler in Geodätischen Netzen. Veröffentlichung des Preußischen Geodätischen Institutes. Neue Folge Nr. 101. Mit 20 Figuren im Text. 4⁰. 73 S. Potsdam 1929.

Die astronomischen Beobachtungen haben in den letzten Jahrzehnten zu der Erkenntnis geführt, daß unsere Refraktionstheorien nicht imstande sind, den Verlauf des Lichtstrahles in der Erdatmosphäre mit hinreichender Genauigkeit darzustellen. Weil der vertikale Temperaturgradient an der Erdoberfläche eine Unstetigkeitsstelle hat, so treten Refraktionsanomalien auf, die durch horizontales Temperaturgefälle, also Neigung der Schichten gleicher optischer Dichte verursacht werden (Zenitrefraktion). Aber auch bei geodätischen Messungen sind ähnliche Anomalien bemerkt

worden, sie gaben sich kund in gruppenweisem Auftreten von Dreiecksschlußfehlern gleichen Vorzeichens über weite Erstreckung von Dreiecksnetzen sowie in der mangelhaften Darstellung der astronomisch bestimmten Koordinaten durch die Triangulationen. Der eine der Verfasser (Förster) hatte schon früher diese Erscheinung durch Seitenrefraktion zu erklären versucht, d. h. durch eine Krümmung des horizontal verlaufenden Lichtstrahles infolge Druck- oder Temperaturgefälle in der Atmosphäre, und hatte den Einfluß dieser Seitenrefraktion auf trigonometrische Netze theoretisch untersucht. Es hatte sich hier ergeben, daß man bei Auftreten von Seitenrefraktion mit größeren Netzverbiegungen zu rechnen hätte, die sich dann besonders in den Laplaceschen Gleichungen (für Punkte, auf denen die geographischen Koordinaten sowie das Azimut einer Dreiecksseite astronomisch bestimmt sind) bemerkbar machen. Der zweite der Verfasser (Schütz) hat nun auf Grund der theoretischen Vorarbeiten Försters den Einfluß der Seitenrefraktion untersucht, indem er eine Ausgleichung des astronomisch-geodätischen Dreiecksnetzes erster Ordnung südlich der Längengradmessung in 52 Grad Breite vornahm, ohne die astronomischen Messungen zu berücksichtigen, während eine Ausgleichung unter Hinzuziehung jener Messungen von früher her schon vorlag. Es konnten auf diesem Wege die einzelnen Punktverschiebungen infolge der Seitenrefraktion bestimmt werden. Es ergab sich in der Tat, daß große systematische Netzverbiegungen vorhanden waren, die indessen beseitigt werden können, wenn die astronomischen Bestimmungen ohne Korrektion in geeigneter Weise zur Ausgleichung herangezogen werden oder, mit anderen Worten, wenn man die astronomischen Messungen als unendlich genau betrachtet. In ähnlicher Weise hat Schütz noch eine Neuausgleichung der europäischen Längengradmessung in 52 Grad Breite vorgenommen, die das gleiche Ergebnis lieferte. Ein in ostwestlicher Richtung verlaufender Lichtstrahl ist danach in diesen Netzen nach Norden konkav gekrümmt, der Krümmungsradius der Lichtkurve wurde zu ungefähr dem 4000- bis 5000-fachen Erdradius ermittelt. Es lag nun nahe, den Versuch zu machen, unter Zugrundelegung von meteorologischen Daten die beobachteten Refraktionen darzustellen, indessen ließ sich auf diese Weise nur etwa ein Drittel des Betrages der Refraktion erklären. Ähnliche Erfahrungen liegen bei Messungen der Kimmtiefe sowie bei astronomischen Beobachtungen vor. Der Grund ist wohl darin zu suchen, daß die meteorologischen Verhältnisse längs des Weges des Lichtstrahles durch die am Ausgangspunkte des Lichtstrahles (eventuell auch am Endpunkte) gemachten meteorologischen Messungen nicht mit genügender Genauigkeit zu approximieren sind. Für die geodätische Praxis ergibt sich aus dieser inhaltsreichen und glücklichen Untersuchung, daß geodätische Netze vom Refraktionseinflusse befreit werden können, wenn man die astronomisch bestimmten geographischen Koordinaten der Laplaceschen Punkte als absolut genau festhält; die Frage, in wie weitgehendem Maße man solche Laplaceschen Punkte nun zweckmäßigerweise in Dreiecksnetze einzufügen hätte, steht noch offen und wäre noch zu erörtern.

Königsberg i. Pr. E. Przybyllok.

Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

[Die Titel der eingesandten Schriften, mit Ausnahme der Sonderabdrucke, werden hier regelmäßig veröffentlicht. Besprechungen geeigneter Bücher bleiben vorbehalten. Eine Rücksendung der eingegangenen Schriften kann nicht erfolgen.]

R. Gans, Vektoranalysis. Mit Anwendungen in Physik und Technik. Sechste, verbesserte Auflage. Mit 40 Fig. im Text. (Teubners mathematische Leitfäden Bd. 16.) 112 S. Leipzig 1929, B. G. Teubner. Kart. *RM* 5.40.

L. Heffter, Lehrbuch der analytischen Geometrie Bd. III. Nichteuklidische Geometrie der Ebene und des Raumes. Mit 14 Fig. im Text. 71 S. Karlsruhe 1929, G. Braun. Geh. *RM* 4.50.

L. Kaiser, Über die Verhältniszahl des goldenen Schnitts, die Reihe der mit ihr zusammenhängenden ganzen Zahlen und eine aus dieser abgeleitete Reihe. 125 S. Leipzig 1929, B. G. Teubner. Geh. *RM* 7.50.

O. D. Kellogg, Foundations of Potential Theory. With 30 Figures. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, herausgegeben von R. Courant, Bd. 31.) 384 S. Berlin 1929, Julius Springer. Geh. *RM* 19.60, geb. *RM* 21.40.

C. J. Keyser, Pastures of Wonder. The Realm of Mathematics and the Realm of Science. 208 S. New York 1929, Columbia University Press. sh. 14.—.

S. Lie, Gesammelte Abhandlungen Bd. IV. Abhandlungen zur Theorie der Differentialgleichungen. Zweite Abteilung. Herausgegeben von Friedrich Engel. Anmerkungen zum vierten Band. 684 S. Leipzig, B. G. Teubner, Oslo, H. Aschehoug u. Co. 1929. Kart. *RM* 23.—.

R. Oberdorfer, Das Rechnen mit symmetrischen Komponenten, ein Lehrbuch für Elektroingenieure und Elektrotechniker. Mit 40 Abbildungen im Text. (Sammlung math.-physikal. Lehrbücher, herausgegeben von E. Trefftz, Bd. 26.) 74 S. Leipzig 1929, B. G. Teubner. Kart. *RM* 5.—.

O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 5 Fig. (B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen Bd. 36.) 524 S. Leipzig 1929, B. G. Teubner. Geb. *RM* 27.—.

H. Schmidt, Aerodynamik des Fluges. Eine Einführung in die mathematische Tragflächentheorie. Mit 81 Fig. 258 S. Berlin 1929, W. de Gruyter. Geh. *RM* 15.—, geb. *RM* 16.50.

Spannungen zwischen den Aufgaben und Zielen des Hochschulunterrichtes und des Unterrichtes an den höheren Schulen in der Mathematik und den Naturwissenschaften. 6 Vorträge, gehalten auf der 90. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte zu Hamburg 1928 von Toeplitz-Bonn und Lony-Hamburg: Mathematik; Konen-Bonn und Hillers-Hamburg: Physik; Häckel-Freiburg i. B. und Mannheimer-Mainz: Chemie. (Schriften des Deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. II. Folge, Heft 10.) 63 S. Leipzig 1929, B. G. Teubner. Geh. *RM* 2.40.

O. Spieß, Leonard Euler. Ein Beitrag zur Geistesgeschichte des 18. Jahrhunderts. (Die Schweiz im Deutschen Geistesleben. Eine Sammlung von Darstellungen und Texten, herausgegeben von Harry Maync, Bd. 63 und 64.) 228 S. Frauenfeld, Huber u. Co. Geb. *RM* 4.—.

Angelegenheiten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Bericht über die Jahresversammlung in Hamburg, 16.—23. September 1928.

(Zusammen mit der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte Abt. 1: Mathematik und Abt. 15: Mathematischer und naturwissenschaftlicher Unterricht.)

Montag, den 17. September 1928, 15 Uhr.

Vorsitz: Lorey, Leipzig.

1. Toeplitz, Bonn, und Lony, Hamburg: Über die Spannung zwischen den Aufgaben und Zielen der Mathematik und der Naturwissenschaften an der Hochschule und an der höheren Schule.

2. Schülke, Berlin: Die Entwicklung der Geometrie und ihre Rückwirkung auf den Unterricht.

Dienstag, den 18. September 1928, 9 Uhr.

Vorsitz: Scheffers, Berlin.

1. Hans Hamburger, Köln: Über sphärische Abbildung im Großen. (Bericht.)

Der Ausgangspunkt des Berichtes ist das Problem, geschlossene stetig gekrümmte konvexe Flächen $\mathfrak{F}$ mit zwei Nabelpunkten zu konstruieren, wenn das sphärische Bild der Krümmungslinien, das die Einheitskugel vollständig und einfach überdeckt, gegeben ist.

Hierbei wird über die Bildkurven der Krümmungslinien auf der Kugel vorausgesetzt, daß die eine Schar aus geschlossenen Kurven besteht, während die Kurven der andern Schar die Bilder der beiden Nabel verbinden. In der Umgebung eines Nabelbildes verlangen wir, daß jede Kugeltangente im Nabelbild gleichzeitig Tangente an eine und nur eine dort einmündende Kurve der Schar ist. Das sphärische Bild der Krümmungslinien möge somit topologisch von gleichem Typus sein wie die gewöhnlichen Polarkoordinaten auf der Kugel. Den beiden Polen entsprechen dabei die beiden Nabelbilder.

Es gelingt nun auf analytischem Wege, das gestellte Problem vollständig zu lösen; d. h. es lassen sich zu einem beliebigen orthogonalen Kurvensystem, das die Einheitskugel vollständig und einfach überdeckt und nur zwei Singularitäten (die Nabelbilder) des geschilderten Typus hat, alle geschlossenen konvexen Flächen $\mathfrak{F}$ konstruieren, die das vorgelegte Kurvensystem zum sphärischen Bild der Krümmungslinien haben.

Es bezeichne $\mathfrak{x}$ den Vektor, der sich vom Koordinatenanfangspunkt zu einem Punkt von $\mathfrak{F}$ erstreckt. Die Lösung des Problems führt nun zur Unterscheidung zweier Fälle:

I. Fall: Es existieren n Lösungen $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ mit den zugehörigen Vektoren $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_n$ derart, daß der Vektor $\mathfrak{x}$ einer beliebigen Lösung $\mathfrak{F}$ des Problems immer als lineare Verbindung

$$\mathfrak{x} = \mathring{\mathfrak{x}} + c_1\mathfrak{x}_1 + c_2\mathfrak{x}_2 + \cdots + c_m\mathfrak{x}_m$$

dargestellt werden kann, wobei unter $\mathring{\mathfrak{x}}$ ein beliebiger fester Vektor und unter $c_1, c_2, \ldots, c_n$ passend gewählte Konstanten zu verstehen sind. Wir sagen im Fall I: das Problem sei von endlichem Range.

II. Fall: Das Problem ist von unendlichem Range, wenn unendlich viele Lösungen $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots$ existieren, derart, daß für jedes m aus

$$c_1\mathfrak{x}_1 + c_2\mathfrak{x}_2 + \cdots + c_m\mathfrak{x}_m = 0$$

immer $$c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$$ folgt.

Ist das Problem von endlichem Range, so hängt die Lösung von einer endlichen Zahl willkürlicher Konstanten ab, während für den Fall des unendlichen Ranges eine Funktion willkürlich gewählt werden darf.

Unter I wird auch der Fall $n = 1$ gerechnet. In diesem Fall ist die Kugel selbst die einzige Lösung des Problems.

Interessanter ist der Fall II, in dem zwei wichtige Spezialfälle hervorgehoben werden:

1. Das vorgegebene orthogonale Kurvensystem hat zwei Symmetrieebenen, deren eine durch die beiden Singularitäten des Systems geht, während die andere die Verbindungsstrecke der beiden Singularitäten im Mittelpunkt senkrecht schneidet.

2. Man wähle die Kurven des vorgegebenen Systems zu Parameterlinien und setze das auf sie bezogene Bogenelement

$$ds^2 = A^2du^2 + B^2dv^2,$$

dann führt das Problem der sphärischen Abbildung auf die lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vom hyperbolischen Typus

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial\zeta}{\partial u} + \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial v}.$$

Dies vorausgeschickt, ist unser Problem sicher dann von unendlichem Range, wenn die partielle Differentialgleichung durch die Laplacesche Kaskadenmethode nach endlich vielen Transformationen integrabel ist.

Besonders ausführlich wird der Fall behandelt, daß das vorgelegte orthogonale Kurvensystem analytisch ist; doch liefern die Untersuchungen auch dann noch hinreichende und notwendige Bedingungen für die Lösungen, wenn das Kurvensystem mindestens dreimal stetig differentiierbar ist.

2. W. Fenchel, Göttingen: Über Krümmung und Windung geschlossener Kurven.

Das sphärische Bild (Tangentenbild) einer geschlossenen Raumkurve hat die Eigenschaft, daß der Mittelpunkt der Kugel seiner kleinsten konvexen Hülle angehört.

Es wird nun der folgende Hilfssatz bewiesen: Gehört ein Punkt der kleinsten konvexen Hülle einer beschränkten, abgeschlossenen und zusammenhängenden Punktmenge an, so gehört er auch der kleinsten konvexen Hülle eines passenden ebenen Schnittes der Menge an.

Die Anwendung dieses Satzes auf das Tangentenbild einer geschlossenen Raumkurve liefert die folgenden beiden Sätze:

I. Die Gesamtkrümmung einer geschlossenen Raumkurve ist $\geqq 2\pi$, wobei das Gleichheitszeichen nur für ebene konvexe Kurven gilt.

II. Hat eine positiv gekrümmte geschlossene Raumkurve nicht negative, aber nicht identisch verschwindende Windung, so besitzt das Tangentenbild mindestens zwei Doppelpunkte.

(Ist in den Mathematischen Annalen Bd. 101 erschienen.)

3. E. Rembs, Berlin: Eine Verbiegung der Vollkugel.

Es gibt bekanntlich keine Verbiegung der Vollkugel, bei der die Biegungsflächen singularitätenfrei sind. Die Existenz geschlossener, mit Singularitäten behafteter Flächen, die längentreu auf die Vollkugel bezogen werden könnten, war aber scheinbar (abgesehen von Trivialitäten) ungewiß. Flächen dieser Art erhält man nun, wenn man in den ursprünglichen Gleichungen der von Liebmann benützten Sievertschen Flächen, die zur Klasse der Enneperflächen gehören, dem Scharparameter C negative Werte erteilt. Eine Beschreibung dieser Flächen (mit negativem C) soll an anderer Stelle gegeben werden. Da sie ein lehrreiches Beispiel für Flächen konstanter positiver Krümmung, insbesondere die sog. Transformationstheorie dieser Flächen darstellen, kommt möglicherweise Veröffentlichung eines Flächenmodells in Betracht.

4. K. Mayrhofer, Tübingen: Über Kurvensysteme.

Kurvensysteme auf Flächen. Eine Kurvenschar ist das topologische Bild eines Parallelenbüschels; n Kurvenscharen bilden ein (n-faches) Kurvensystem (für $n = 2, 3, 4$ ein Netz, Gewebe, Geflecht), wenn sich zwei Kurven aus verschiedenen Scharen höchstens einmal schneiden. Zwei Netze N_1, N_2 heißen diagonal, wenn in einem Netzvierecke aus N_1 mit einer „Diagonale" aus N_2 auch die zweite Diagonale zu N_2 gehört oder umgekehrt. Lassen sich in einem Kurvengewebe um jeden Punkt o als „Zentrum" geschlossene Sechsecke legen, deren Ecken auf den durch o gehenden Gewebekurven liegen und deren Seiten dem Gewebe entnommen sind, so heiße das Gewebe ein Sechseckgewebe; ein Kurvensystem, dessen Gewebe Sechseckgewebe sind, soll Sechsecksystem genannt werden.

Es gelten die folgenden Sätze. 1. Sechseckgewebe lassen sich auf drei Parallelenbüschel topologisch abbilden (Satz von Thomsen-Blaschke). 2. Ein n-faches Kurvensystem ($n > 3$) läßt sich auf n Parallelenbüschel dann und nur dann abbilden, wenn es $n - 2$ Sechseckgewebe mit einem gemeinsamen Netze enthält und wenn je zwei hinreichend kleine konzentrische Sechsecke dieser Gewebe auf einer Kurve des gemeinsamen Netzes entweder keine oder zwei gemeinsame Ecken haben. Daraus folgert man den Satz von W. Blaschke: 3. Zwei diagonale Netze lassen sich gleichzeitig in zwei Parallelogrammnetze überführen. 4. Eine topologische Abbildung,

die drei Parallelenbüschel in solche überführt, ist affin. 5. Eine Abbildung, die drei Strahlenbüschel in solche verwandelt, setzt sich aus projektiven und den Transformationen

$$u = e^{c\bar{u}+a}, \quad v = e^{-(c\bar{v}+b)} \quad \text{oder} \quad u = a\bar{u}^n, \quad v = b\bar{v}^n$$

$$(a,\ b,\ c,\ n = \text{konst.})$$

zusammen. 6. Eine Abbildung, die vier Strahlenbüschel in solche überführt, ist projektiv. 7. Ein n-faches Sechsecksystem ist auf n Strahlenbüschel abbildbar. 8. Ein Geflecht ist dann und nur dann auf drei Paralellenbüschel und ein (eigentliches oder uneigentliches) Strahlenbüschel abbildbar, wenn es drei Sechseckgewebe G_1, G_2, G_4 mit folgenden Eigenschaften enthält: Zwei konzentrische Sechsecke aus G_1, G_2 haben auf jeder Kurve der einen den Geweben G_1, G_2 gemeinsamen Schar s entweder keine oder zwei gemeinsame Ecken; G_4 ist das Gewebe, das die Schar s nicht enthält.

Kurvensysteme im Raume. Eine Flächenschar sei das topologische Bild eines Büschels paralleler Ebenen. Drei Flächenscharen bilden ein Flächennetz, falls sie sich zugleich auf drei Büschel paralleler Ebenen abbilden lassen. Hierfür ist notwendig und hinreichend, daß jede Fläche einer der drei Scharen in einem Kurvennetze geschnitten wird.

Das topologische Bild eines Parallelenbündels heißt eine Raumkurvenschar (Kurvenkongruenz); n Raumkurvenscharen bilden ein n-faches Raumkurvensystem (für $n = 3$, 4 ein Raumkurvennetz, -gewebe), wenn sich zwei Kurven aus verschiedenen Scharen höchstens einmal treffen. Ein Raumkurvennetz ist dann und nur dann ein Koordinatennetz, d. h. topologisches Bild von drei allgemein liegenden Parallelenbündeln, wenn man die Kurven aus je zwei seiner Scharen nach Netzen in den Flächen einer Flächenschar anordnen kann und die so entstandenen Flächenscharen ein Flächennetz bilden.

Es gelten die folgenden Sätze. 9. Ein Raumkurvengewebe ist dann und nur dann auf vier allgemein liegende Parallelenbündel abbildbar, wenn seine Netze Koordinatennetze sind. Nennt man ein derartiges Gewebe ein Dodekaedergewebe, so gilt 10. Ein n-faches Raumkurvensystem ($n > 4$) ist dann und nur dann auf n Parallelenbündel, von denen wenigstens vier allgemein liegen, abbildbar, wenn es in ihm $n - 3$ Dodekaedergewebe mit einem gemeinsamen Koordinatennetze so gibt, daß zwei hinreichend kleine, konzentrische „Dodekaeder" dieser Gewebe auf einer Kurve des gemeinsamen Neztes entweder keine oder zwei gemeinsame Ecken haben. 11. Eine topologische Abbildung, die vier allgemein liegende Parallelenbündel in solche überführt, ist affin.

Literatur: W. Blaschke, Top. Fr. d. Diffg. I, Mathem. Zeitschr. **28** (1928), S. 150—157; Top. Fr. d. Diffg. IV (zusammen mit J. Dubourdieu) Abh. aus d. Math. Sem. Hamburg. K. Mayrhofer, Top. Fr. d. Diffg. III, Math. Zeitschr. **28** (1928), S. 728—752; Top. Fr. d. Diffg. VI, VII, Math. Zeitschr. (im Druck); Top. Fr. d. Diffg. IX, Abh. aus d. Math. Sem. Hamburg (im Druck). K. Reidemeister, Top. Fr. d. Diffg. V, Math. Zeitschr. **29** (1929), S. 427—435. G. Thomsen, Un teorema topologico ... Bolletino dell' Unione Matematica Italiana **6** (1927), S. 80—85.

5. Wilhelm Süß, Greifswald: Relative Differentialgeometrie und Minkowskis Theorie von Volumen und Oberfläche.

Es wurde über denjenigen Teil der relativen Differentialgeometrie (nach der Bezeichnung von Emil Müller) berichtet, der von einem Eichflächenprinzip im Sinne von H. Minkowski konsequenten Gebrauch macht.

a) Das Extremalproblem der Relativ-Oberfläche (in Minkowskis Theorie von Volumen und Oberfläche, „verallgemeinerte Oberfläche") führt zu den Relativ-Minimalflächen. Der Drehriß einer infinitesimalen Verbiegung einer Fläche ist z. B. R-Minimalfläche bezüglich der zu verbiegenden Fläche als Eichfläche. Von hier aus gelingt ein Beweis der Vermutung des Herrn H. Liebmann, daß jede gelochte Eifläche infinitesimal verbiegbar ist. (Jap. Journ. of Math. IV, S. 203ff.)

b) Die Eigenschaft zweier Eiflächen, einander ähnlich zu sein und zueinander ähnlich zu liegen („homothetisch" zu sein), wird durch das Konstantsein einer der Größen $R_1 R_2$, $R_1 + R_2$, $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ oder $R_1 - R_2$ gekennzeichnet, worin die R_i die relativen Krümmungsradien der einen Fläche bezüglich der anderen als Eichfläche sind. Diese vier Behauptungen sind auf Grund Minkowskischer Formeln miteinander äquivalent; der Beweis der letzten ergibt sich sofort aus verallgemeinerten Formeln von O. Rodrigues.

Ist eine der beiden Eiflächen eine Einheitskugel, so geht die R-Geometrie in die gewöhnliche Flächentheorie über und man erhält bekannte Kennzeichnungen der Kugel. Ist aber eine der beiden Flächen das Affinkrümmungsbild der anderen, so entsteht die affine Flächentheorie. Auf diese Weise läßt sich der Gleichklang vieler Sätze über die die Kugel und das Ellipsoid kennzeichnenden Eigenschaften in der gewöhnlichen bzw. affinen Differentialgeometrie erklären. (Jap. Journ. of Math. IV, S. 57ff.)

c) Homothetische Eihyperflächen im R^{n+1} mit positiven R-Krümmungsradien R_i sind durch eine der Beziehungen gekennzeichnet

α) $$R_1 = R_2 = \cdots = R_n;$$

β) $$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n} = \text{const.};$$

γ) eine beliebige elementarsymmetrische Funktion der R_i ist konstant.

Auch hier gelten Anwendungen für die Überkugel und das mehrdimensionale Ellipsoid. (Tôhoku Math. Journ.; im Druck.)

6. M. Herzberger, Jena: Über die Eigenschaften erster Ordnung längs eines Strahls in allgemeinen Strahlensystemen.

Eine Strahlenmannigfaltigkeit sei in der Form $\mathfrak{a} + \lambda\mathfrak{s}$[1]) gegeben, derart, daß jedem Strahl ein und nur ein Punkt zugeordnet sei.

1) Mit Blaschke, Differentialgeometrie I, werden Vektoren mit deutschen Buchstaben bezeichnet. Das skalare Produkt zweier Vektoren wird durch einen Punkt bzw. Nebeneinanderschreiben der Vektoren angedeutet, das vektorielle Produkt durch ein Andreaskreuz ($\times$), $\mathfrak{a}'$ bedeutet $\frac{d\mathfrak{a}}{dt}$, unbestimmte Differentiation nach einen Parameter. $\mathfrak{a}_u$ bedeutet $\frac{d\mathfrak{a}}{du}$.

Hängen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{s}$ von *einem* Parameter ab, so haben wir eine Regelfläche, von *zwei* Parametern, so haben wir eine Kongruenz, von *drei* Parametern, so haben wir einen Komplex.

Für die Untersuchung ist wesentlich der Rang der beiden quadratischen Formen $(\mathfrak{a}' \times \mathfrak{s})^2$ und $(\mathfrak{s}' \times \mathfrak{s})^2$.

Wir werden finden, daß die Eigenschaften einer Regelfläche längs eines Strahls von dem Wert *einer* festen Größe ν abhängen, die Eigenschaften einer Kongruenz von *zwei* festen Größen N und D, die Eigenschaften eines Komplexes wieder nur von einer Größe $\mathfrak{N}$.

Die Regelflächen.

1. $(\mathfrak{a}' \times \mathfrak{s})^2$ und $(\mathfrak{s}' \times \mathfrak{s})^2$ haben beide den Rang Eins.

Es gibt dann einen ausgezeichneten Punkt auf dem Strahl, den Striktionspunkt. Sei r die Entfernung eines beliebigen Punktes vom Striktionspunkt, dann gilt die Gleichung

$$\nu = r \operatorname{tg} \varphi \tag{1}$$

in der ν für den Strahl eine Konstante, φ der Winkel ist, den die Tangentialebene im betrachteten Punkt mit der Grenzlage der Tangentialebene an die Regelfläche im Unendlichen bildet. φ wird im Striktionspunkt gleich $\frac{\pi}{2}$ und verschwindet für $\nu \neq 0$ im Endlichen nirgends. Es ist der Winkel zwischen $\mathfrak{a}' \times \mathfrak{s}$ und $\mathfrak{s}' \times \mathfrak{s}$.

Für $\nu = 0$ (wir nennen eine solche Regelfläche abwickelbar längs diesem Strahl) wird $\varphi \equiv 0$ längs dem ganzen Strahl. Die Tangentialebene bleibt konstant. Im Striktionspunkt eines solchen Strahls, den wir Brennpunkt nennen, wird $\mathfrak{a}' \times \mathfrak{s} = 0$.

2. $(\mathfrak{a}' \times \mathfrak{s})^2 = 0$, $(\mathfrak{s}' \times \mathfrak{s})^2 \neq 0$. Wir sind im Brennpunkt einer längs dem Strahl abwickelbaren Regelfläche.

3. $(\mathfrak{a}' \times \mathfrak{s})^2 \neq 0$, $(\mathfrak{s}' \times \mathfrak{s})^2 = 0$. Der Striktionspunkt rückt ins Unendliche. $r = \nu = \infty$. Wir nennen eine solche Regelfläche zylindrisch entlang dem Strahl.

Die Kongruenzen.

1. $(\mathfrak{a}' \times \mathfrak{s})^2$ und $(\mathfrak{s}' \times \mathfrak{s})^2$ haben den Rang Zwei.

Es gibt einen Punkt, den Mittelpunkt der Kongruenz, in dem alle Regelflächen, deren sphärische Bilder aufeinander senkrecht stehen (wir nennen zwei derartige Regelflächen konjugiert) einen rechten Winkel miteinander bilden. Die Striktionspunkte konjugierter Regelflächen liegen symmetrisch zum Mittelpunkt. Alle Paare konjugierter Regelflächen haben denselben mittleren Drall $N = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$. Die Gesamtheit aller Striktionspunkte füllt ein endliches Intervall von der Länge D aus.

Es sei $N \neq 0$; betrachten wir ein Paar konjugierter Regelflächen. Ihre Striktionspunkte mögen in der Entfernung

$$d = \pm D \cos \psi \tag{2}$$

vom Mittelpunkt liegen, dann stehen diese Regelflächen in dem Punkt von der Mittelpunktsentfernung M aufeinander senkrecht, wobei

$$N = M \operatorname{tg} \psi \tag{3}$$

ist. Das sphärische Bild der beiden Regelflächen bildet mit den Grenzregelflächen, deren Striktionspunkte vom Mittelpunkt die Entfernung $\pm D$ haben, den Winkel $\frac{\psi}{2}$ bzw. $\frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{2}$.

Abwickelbare Regelflächen existieren reell keine / eine / zwei, je nachdem ob $N \gtreqless D$ ist. Ihre Striktionspunkte, die Brennpunkte der Kongruenz, haben den Abstand vom Mittelpunkt

$$f = \pm \sqrt{D^2 - N^2}. \tag{4}$$

Bei Strahlen, für die $N = 0$ ($N \equiv 0$ längs allen Strahlen charakterisiert die Normalensysteme) ist, stehen außerhalb des Mittelpunktes nur die Grenzregelflächen aufeinander senkrecht, und zwar entlang dem ganzen Strahl; sie sind außerdem abwickelbar.

2. $(\mathfrak{a}' \times \mathfrak{s})^2$ habe den Rang Eins, $(\mathfrak{s}' \times \mathfrak{s})^2$ den Rang Zwei.

Wir sind in einem der Brennpunkte eines regulären Kongruenzstrahls. Hier berühren alle Regelflächen, mit Ausnahme der abwickelbaren Regelfläche, in deren Striktionspunkt wir uns befinden, die zweite abwickelbare Regelfläche.

3. $(\mathfrak{a}' \times \mathfrak{s})^2$ hat den Rang Null, $(\mathfrak{s}' \times \mathfrak{s})^2$ den Rang Zwei.

Alle Regelflächen sind abwickelbar und haben denselben Striktionspunkt. Wir befinden uns in demselben.

4. $(\mathfrak{a}' \times \mathfrak{s})^2$ habe den Rang Zwei, $(\mathfrak{s}' \times \mathfrak{s})^2$ den Rang Eins.

Es existiert eine zylindrische Regelfläche, für die $(\mathfrak{s}' \times \mathfrak{s}) = 0$ ist. Die andere, unsern Strahl enthaltende abwickelbare Regelfläche bilde mit der zylindrischen Regelfläche einen Winkel χ. Durch diesen Winkel χ ist die Kongruenz vollständig charakterisiert. Im Striktionspunkt der zweiten abwickelbaren Regelfläche hat

5. $(\mathfrak{a}' \times \mathfrak{s})^2$ den Rang Eins, $(\mathfrak{s}' \times \mathfrak{s})^2$ den Rang Eins.

In diesem Punkt berühren alle Regelflächen, mit Ausnahme der abwickelbaren Regelfläche, die zylindrische Regelfläche und besitzen einen konstanten Drehungswinkel χ, der gleich dem festen Winkel zwischen $\mathfrak{a}' \times \mathfrak{s}$ und $\mathfrak{s}' \times \mathfrak{s}$, dem Winkel zwischen abwickelbarer und zylindrischer Regelfläche ist.

6. $(\mathfrak{s}' \times \mathfrak{s})^2$ hat den Rang Null, $(\mathfrak{a}' \times \mathfrak{s})^2$ den Rang Zwei.

Alle Regelflächen sind zylindrisch.

Die Komplexe.

1. $(\mathfrak{a}' \times \mathfrak{s})^2$ und $(\mathfrak{s}' \times \mathfrak{s})^2$ haben den Rang Zwei.

Es gibt in unserm Komplex eine zylindrische Regelfläche und in jedem Punkt eine abwickelbare Regelfläche, die in ihm ihren Striktionspunkt hat. Mögen diese beiden Flächen den Winkel η miteinander bilden. Dann ist durch diese beiden Regelflächen eine in unserm Komplex enthaltene ausgeartete Kongruenz vom Drehungswinkel η gegeben. (Siehe Kongruenzen Nr. 5.) Ist $\eta \neq 0$, so ändert sich diese Kongruenz von Punkt zu Punkt.

Den Striktionspunkt derjenigen abwickelbaren Regelfläche, die auf der zylindrischen Regelfläche senkrecht steht, bezeichnen wir als Komplex-

mittelpunkt. Sei $\mathfrak{M}$ die Entfernung eines beliebigen Punktes vom Komplexmittelpunkt, so existiert eine Strahlkonstante $\mathfrak{N}$ derart, daß der durch

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{M} \operatorname{tg} \eta \tag{5}$$

gegebene Winkel gerade der Winkel ist, den die abwickelbare Regelfläche, die hier ihren Striktionspunkt hat, mit der zylindrischen Regelfläche bildet. Der Komplexmittelpunkt ist Mittelpunkt einer *Kongruenz* mit $N = \mathfrak{N}$ und $D = 0$.

Der Fall $\mathfrak{N} = 0$ spielt hier keine besondere Rolle, nur hat in seinem Mittelpunkt

2. $(\mathfrak{a}' \times \mathfrak{s})^2$ nur den Rang Eins, während $(\mathfrak{s}' \times \mathfrak{s})^2$ den Rang Zwei hat.

Der Komplexmittelpunkt ist Mittelpunkt einer ausgearteten Kongruenz (Kongruenz Nr. 3). Alle abwickelbaren Regelflächen haben denselben Mittelpunkt als Striktionspunkt.

3. $(\mathfrak{s}' \times \mathfrak{s})^2$ hat den Rang Eins, $(\mathfrak{a}' \times \mathfrak{s})^2$ den Rang Zwei.

Es gibt in einem solchen Komplex unendlich viel zylindrische Kongruenzen; er umfaßt außerdem alle Regelflächen, deren sphärische Bilder sich berühren, v und r kann alle Werte annehmen.

7. R. Sauer, München: Eine geometrische Ableitung der Codazzischen Gleichungen und des Gauß-Bonnetschen Satzes.

1. Die Codazzischen Gleichungen.

a) Beschreibung der Figur.

Wir betrachten zwei Krümmungslinien v, v' des gleichen Systems. Jeder Punkt P von v wird bezogen auf den Punkt P_1 von v', der mit P auf einer Krümmungslinie u des anderen Systems liegt. M ist der Mittelpunkt des kürzesten Abstandes der in P und P_1 errichteten Flächennormalen.

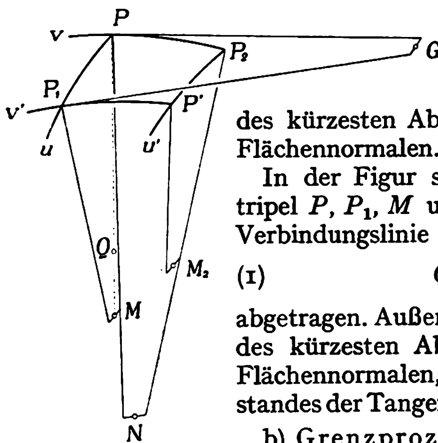


Fig. 1.

In der Figur sind zwei zusammengehörige Punktetripel P, P_1, M und P_2, P', M_2 eingezeichnet. Auf der Verbindungslinie PM wird

$$QM = PM - P_2M_2 \tag{1}$$

abgetragen. Außerdem sind eingeführt N als Mittelpunkt des kürzesten Abstands der in P und P_2 errichteten Flächennormalen, G als Mittelpunkt des kürzesten Abstandes der Tangenten an die Kurven v und v' in P und P_1.

b) Grenzprozeß.

Die Bogenlängen $\widehat{PP_1} = \varepsilon_1$, $\widehat{PP_2} = \varepsilon_2$ sollen kleiner und kleiner werden unter Konstanthaltung ihres Quotienten, also

$$\varepsilon_1 \to 0, \quad \varepsilon_2 \to 0, \quad \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \text{konst.} = k.$$

Das Ziel unserer Überlegungen ist es, einzusehen, daß bei dem Grenzprozeß die beiden Dreiecke $\triangle PMG$ und $\triangle QMM_2$ mehr und mehr ähnlich werden. Das eine Paar analoger Seiten PM, QM fällt in dieselbe Ge-

rade, die von den beiden anderen Paaren analoger Seiten gebildeten spitzen Winkel verschwinden in der Größenordnung ε_1; dies folgt, abgesehen von Stetigkeitsbedingungen, aus der Tatsache, daß längs einer Krümmungslinie sowohl die zu ihr senkrechten Hauptkrümmungstangenten als auch die Flächennormalen abwickelbare Flächen bilden und deshalb die vier vorher erwähnten kürzesten Abstände von der Größenordnung ε_1^3 werden.

Infolge der Ähnlichkeit der Dreiecke kann man setzen

(2) $$\frac{PM}{PG} = \frac{QM}{QM_2} + \varepsilon_1 R.$$

Die in (2) vorkommenden Strecken sind schließlich noch in Zusammenhang zu bringen mit dem wahren Wert des geodätischen Krümmungsradius g der Kurve u im Punkte P und den wahren Werten der Hauptkrümmungsradien m, m_2 und n, von denen sich m, m_2 auf u und u' in den Punkten P und P_2, n auf v im Punkte P beziehen.

Aus

(3) $$PM = m + \varepsilon_1 R_m(P), \qquad P_2 M_2 = m_2 + \varepsilon_1 R_m(P_2)$$

und der Stetigkeitsbedingung

(4) $$R_m(P) - R_m(P_2) = \varepsilon_2 R_d = \varepsilon_1 k R_d$$

folgt wegen (1) der Zusammenhang

(5) $$QM = PM - P_2 M_2 = m - m_2 + \varepsilon_1^2 k R_d.$$

Drückt man in ähnlicher Weise QM_2 und PG aus, so folgt durch Einsetzen in (2) die Beziehung

$$\frac{m}{g} = \frac{m - m_2}{n - m} \cdot \frac{n}{\varepsilon_2} + \varepsilon_1 \bar{R}.$$

und für $\varepsilon_1 = 0$ in der gewöhnlichen Schreibweise

(6) $$\boxed{\frac{m}{g} = \frac{n}{m - n} \frac{\partial m}{\partial s_v}}.$$

Die Gleichung (6) und eine zweite durch Vertauschung von u mit v usf. entstehende analoge Beziehung sind der geometrische Ausdruck der Codazzischen Gleichungen, die in dieser Form z. B. von Herrn Lagally (München. Akademieber. 1927, S. 14) angegeben wurden.

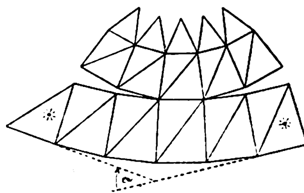


Fig. 2

2. Der Gauss-Bonnetsche Integralsatz.

a) Elementare Sätze über gewisse offene Polyeder.

Die (offenen) Polyeder sind aus lauter ebenen Dreiecken zusammengesetzt, und zwar aus einem n-Kant und m angefügten Kränzen von je $2n$ Dreiecken. Für $n = 5$, $m = 2$ wird die ebene Ausbreitung eines solchen Polyeders in der obenstehenden Figur gezeigt. Die 2 mit Stern versehenen Dreiecke müssen beim Zusammenkleben des Polyeders zur Deckung gebracht werden.

Für jeden inneren Knotenpunkt P_i sei σ_i die Summe der dort zusammentreffenden Dreieckswinkel und $\eta_i = 2\pi - \sigma_i$. Durch Abzählen der Dreiecke

und ihrer Winkelsummen folgt für den aus der ebenen Ausbreitung des äußersten Kranzes definierten Winkel α die Gleichung

(1) $$2\pi - \alpha = \sum \eta_i,$$

wobei die Summierung sich auf alle inneren Knotenpunkte bezieht.

Um zu einem zweiten Satz zu kommen, betrachten wir das auf der Einheitskugel gelegene sphärische n-Eck, welches die sämtlichen im Kugelmittelpunkt zusammengelegten, den inneren Knotenpunkten P_i des Polyeders zugehörigen Polarkante auf der Kugeloberfläche ausschneiden. Für den Flächeninhalt F dieses sphärischen n-Ecks folgt aus Sätzen über Polarkante

(2) $$F = \sum \eta_i$$

und vermöge (1) weiterhin (3) $F + \alpha = 2\pi$.

b) Grenzprozeß.

Durch einen hier nicht näher zu besprechenden Grenzprozeß ($n \to \infty$, $m \to \infty$) wird das Polyeder in ein einfach zusammenhängendes Flächenstück übergeführt, dessen Randkurve überall eine bestimmte Tangente und Krümmung haben möge. Dabei konvergieren

$\alpha \to$ Kontingenzwinkel der abgewickelten Randkurve $= \oint \frac{ds}{g}$;

ds = Bogenelement, $\frac{1}{g}$ = geodätische Krümmung.

$F \to$ Fläche des sphärischen Bildes $= \iint K\,df$;

df = Flächenelement des gegebenen Flächenstückes,

K = Krümmungsmaß.

Aus (2) folgt die Invarianz der Totalkrümmung bei Verbiegung, aus (3) der Gauß-Bonnetsche Integralsatz

(4) $$\boxed{\iint K\,df + \oint \frac{ds}{g} = 2\pi}.$$

Die vorgetragenen Ableitungen sind andeutungsweise in den Münchener Akademieberichten (1928, S. 97—104) veröffentlicht. Sie stehen in Zusammenhang mit einer Arbeit des Herrn Finsterwalder (Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1899, S. 45—90).

8. H. Graf, Karlsruhe: Geodätische Vierecksnetze inhaltsgleicher Felder.

Sind auf einer Fläche zwei Kurvensysteme u und v als Parametersysteme vorgegeben, dann wird durch Verfügung über die Anordnung der Kurven auf der Fläche ein Vierecksnetz ausgezeichnet. Der Grenzprozeß einer systematischen fortgesetzten Unterteilung eines solchen Netzes definiert auf der Fläche ein sog. „infinitesimales Vierecksnetz".

Die Forderung, daß ein Vierecksnetz besondere Eigenschaften besitzen soll, kann dazu hinreichen, spezielle Flächen bzw. Flächenklassen zu charakterisieren.

Beispielsweise sind die Liouvilleschen Flächen bekanntlich jene Flächen, welche infinitesimale *Rhomben*netze aus geodätischen Linien besitzen.

Fordert man an Stelle der infinitesimalen *Seiten*gleichheit der einzelnen Maschenvierecke des geodätischen Netzes nunmehr die infinitesimale *Inhalts*gleichheit aller Vierecksfelder, dann sind auch dadurch besondere Flächen charakterisiert, und zwar sind hier — ebenso wie bei den Liouvilleschen Flächen — lediglich die Flächenhäute definiert. Die geodätischen Linien eines infinitesimalen Vierecksnetzes inhaltsgleicher Felder können in diskreter Folge so angeordnet werden, daß auch die durch sie begrenzten endlichgroßen Vierecke inhaltsgleich sind; diese Eigenschaft besitzen in analogem Sinn die infinitesimalen geodätischen Rhombennetze der Liouvilleschen Flächen nicht.

Das Problem in der Ebene, aus zwei Geradensystemen in allgemeinster Weise ein infinitesimales Vierecksnetz inhaltsgleicher Felder aufzubauen, führt auf zwei verschiedene (d. h. affin nicht verwandte) Typen: 1. Das Parallelogrammnetz (bestehend aus zwei Parallelbüscheln gerader Linien), und 2. das Trapeznetz (bestehend aus einem gewöhnlichen Geradenbüschel und einem Parallelbüschel).

Das allgemeinere Problem, nicht abwickelbare Flächen mit geodätischen Vierecksnetzen inhaltsgleicher Felder zu bestimmen, fordert für die Fundamentalgrößen 1. Ordnung der Fläche die Erfüllung der Beziehung: $\sqrt{EG - F^2} = 1$, wobei E, F und G Funktionen von u und v sind; längs der Netzlinien $u =$ konst. und $v =$ konst. müssen die geodätischen Krümmungen verschwinden; d. h.: die Bestimmung von E, G und F hängt von der Lösung zweier partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung ab.

Durch den Ansatz $E = \frac{1}{u^2} U(u \cdot v)$ und $G = \frac{1}{v^2} W(u \cdot v)$ erhält man spezielle Lösungen des Problems und zwar ergeben sich U und W aus zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung als Funktionen von $u \cdot v$, folglich E, F und G nach der Substitution $v = \frac{1}{w}$ als homogene Funktionen von u und w vom Grade (-2). Nach Darboux ist diese Form der Fundamentalgrößen charakteristisch für Flächen, die auf *Drehflächen* verbiegbar sind. Nach Einführung neuer Koordinaten φ und σ auf der Drehfläche ($\varphi =$ Meridianwinkel, $\sigma =$ Meridianbogenlänge) schreiben sich die Systeme der geodätischen Netzlinien in der Form $\varphi + g_1(\sigma) = {}^c\log u$, $\varphi + g_2(\sigma) = -{}^c\log v$, d. h. die geodätischen Netzlinien der Drehfläche sind systemweise kongruent und gehen durch Drehung um die Achse auseinander hervor; eine einfache Untersuchung würde zeigen, daß die so erhaltenen Drehflächen, vom Drehzylinder abgesehen, die *allgemeinsten* Drehflächen mit geodätischen Vierecksnetzen inhaltsgleicher Felder von dieser Art sind.

Eine kurze Rechnung liefert die Gleichung der *Meridiankurve* σ als Funktion vom Achsenabstand r; die in dem geschlossenen Ausdruck vorkommenden Funktionen sind dabei nur Logarithmen und Quadratwurzeln. Wenn wir zueinander ähnliche und aufeinander verbiegbare Drehflächen als nicht wesentlich verschieden bezeichnen, dann bleibt eine einfache Mannigfaltigkeit von Lösungen. Die Meridiankurven können durch passende Verbiegung der Drehflächen als solche immer auf die Form einer Kurve mit zwei Wendepunkten und keinem Rückkehrpunkt gebracht werden; die Drehflächen besitzen dann einen Kehlkreis und laufen nach beiden Seiten

der Achse hin ins Unendliche; sie sind teils positiv, teils negativ gekrümmt. Als Spezialfall ist in dem Lösungssystem eine besonders bemerkenswerte Drehfläche enthalten, welche symmetrisch ist zur Kehlkreisebene und zwei verschiedene geodätische Vierecksnetze inhaltsgleicher Felder besitzt.

Das Problem läßt sich neben der unmittelbaren Übertragung auf Schraubenflächen durch Verbiegung der Drehflächen auch in analoger Weise für Liesche *Spiralflächen* lösen. Die sich ergebenden Spiralflächen sind die allgemeinsten Spiralflächen mit geodätischen Vierecksnetzen inhaltsgleicher Felder, deren Netzlinien ähnlich sind und durch die gleiche Spiraltransformation ineinander übergehen.

(Der Vortrag ist entnommen einer gemeinsam mit Herrn R. Sauer-München verfaßten Arbeit: „Geodätische Vierecksnetze mit inhaltgleichen Feldern", welche in diesem Jahresberichte erscheinen wird.)

Dienstag, den 18. September 1928, 15 Uhr.

(Vorsitz: Toeplitz, Bonn.)

1. H. Kneser, Greifswald: Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten.

(Erscheint im Jahresbericht.)

2. Reinhardt, Greifswald: Über die Zerlegung der euklidischen Ebene in kongruente Bereiche.

Nach einer von Hilbert ausgesprochenen Vermutung ist jeder Bereich mit der Eigenschaft, daß die (Euklidische) Ebene in zu ihm kongruente Stücke zerlegt werden kann, Fundamentalbereich einer Bewegungsgruppe, d. h. falls die Ebene überhaupt zerlegt werden kann, so kann sie auch in „regelmäßiger" Weise zerlegt werden. Der Vortrag soll ein Beitrag zum Beweis dieser Vermutung sein. Es wird gezeigt, daß jeder „Zerlegungsbereich", der von einer Jordankurve begrenzt ist, „im Grunde genommen" ein Zerlegungspolygon ist. Dadurch wird die Frage auf die Betrachtung von Zerlegungspolygonen zurückgeführt, zu der ebenfalls Ansätze vorhanden sind. Die benutzte Methode beruht auf der Einführung einer Grundkonstruktion, und auf dem Nachweis, daß Jordanbögen mit gewissen Eigenschaften zunächst Kreisbögen und dann sogar geradlinige Strecken sein müssen.

3. L. Vietoris, Innsbruck: Zum Homöomorphieproblem der kombinatorischen Topologie.

4. F. Rehbock, Stuttgart: Eine Abbildung des R_3 auf die Bewegungen einer nichteuklidischen Geometrie.

Der Vortrag erstrebte eine vollständige Diskussion und eine rein synthetische Behandlung einer Abbildung, die in analytischer Form für einen Fall bereits von Herrn L. Eckhart angedeutet wurde.

Mit Hilfe einer Fläche 2. Grades F — der Kernfläche — seien jedem Raumstrahl P zwei Strahlen P', P'' in einem Strahlenfeld (oder Strahlenbündel) π, das keine Erzeugende von F enthält, als „konjugierte Risse" zugeordnet: Um etwa die ersten Risse der Strahlen eines ebenen Feldes α zu ermitteln,

mache man die beiden Strahlen der ersten Erzeugendenschar, die den π-Strahl A von α schneiden, zu Brennlinien eines Netzes und projiziere die Strahlen in α punktweise durch die Strahlen dieses Netzes auf π. Dadurch wird jedem α-Strahl ein Riß P', jedem α-Punkt — aufgefaßt als Zentrum eines Büschels — ein Bildpunkt in π zugeordnet. Für die zweiten Risse benutze man ebenso die zweite Erzeugendenschar. Für diese einzweideutige Abbildung gilt u. a.[1]):

1. Das *Koindizidenzgebilde* besteht im Falle einer nicht ausgearteten Kernfläche F aus dem Bildfeld π, dem zu π in bezug auf F polaren Strahlenbündel und dem „Strahlengürtel", d. h. der Gesamtheit der Strahlen, die F in den Punkten der Spurkurve Δ berühren.

2. Die Ebenen α eines Ebenenbüschels, das π enthält, werden umkehrbar eindeutig abgebildet auf die einparametrige Schar automorpher Kollineationen der Fundamentalkurve Δ in sich mit *demselben invarianten Dreieck*; die Ecken dieses invarianten Dreieckes sind die Δ-Punkte a_1 und a_2 des gemeinsamen Strahles A jenes Büschels sowie sein Pol a in bezug auf Δ. Die Raumpunkte des zu A in bezug auf F polaren Strahles werden umkehrbar eindeutig abgebildet auf *dieselbe Schar* automorpher Kollineationen.

3. Die Tangentialebenen durch A an F bestimmen zwei Winkelräume: Ist Δ die Fundamentalkurve einer hyperbolischen Geometrie, die Kernfläche also ringartig, und hat A reelle Δ-Punkte, so werden die Ebenen, die zusammen mit π im gleichen Winkelraum liegen, auf die nichteuklidischen *Drehungen* mit jenem invarianten Dreieck, die Ebenen des anderen Winkelraumes auf die *Umlegungen* mit jenem invarianten Dreieck abgebildet.

4. Besteht die Kernfläche aus einem *Doppelpaar*, die Erzeugenden also aus zwei verschränkten Strahlbüschelpaaren mit gemeinsamem Strahl R, so ist dieser Strahl R Original eines jeden Bildpaares P', P''. Durch die Festsetzung, daß der von R verschiedene Schnittstrahl der zu P', P'' gehörenden „projizierenden Kongruenzen" als Original gemeint sei, wird die Abbildung im wesentlichen zu einer eineindeutigen. Das Vorhandensein eines solchen gemeinsamen singulären Strahles R charakterisiert die übliche *darstellende* Geometrie.

5. Das Doppelpaar bestehe aus zwei konjugiert imaginären Ebenen und zwei konjugiert imaginären Punkten, die Fundamentalkurve Δ also aus einem konjugiert imaginären *Strahlenpaar*. Die Ebenen des R_3 werden in diesem Falle umkehrbar eindeutig abgebildet auf die eigentlichen *starren* Transformationen des Fundamentalstrahlenpaares in sich (bei denen also die beiden Strahlen einzeln fest bleiben), die Punkte auf die uneigentlichen starren Transformationen (bei denen also die beiden Fundamentalstrahlen vertauscht werden); d. h.: die Ebenen auf die *Drehungen*, die Punkte auf die *Umlegungen* der zugeordneten nichteuklidischen Geometrie.

6. Wählt man dagegen als Bildgebiet ein Strahlen*bündel*, so wird auch in diesem Bündel die nichteuklidische Geometrie eines bestimmten Fundamentalstrahlenpaares festgelegt. Die zugehörigen Drehungen sind jetzt die Bilder der Punkte, die Umlegungen die Bilder der Ebenen des R_3. Schneidet man das Bündel mit einem Feld, so erhält man den projektiven Typus der *kinematischen* Abbildung von Herrn Blaschke, nämlich eine Abbildung des

1) Eine ausführliche Darstellung soll in einer späteren Arbeit folgen.

Strahlenraumes auf die orientierten Punktepaare eines Feldes mit einem konjugiert imaginären Punktepaar als Fundamentalgebilde. Schneidet das Fundamentalstrahlenpaar in dem neuen Bildfeld die Kreispunkte aus, so erhält man die Abbildung der projektiven Geometrie des R_3 auf die euklidische Kinematik.

5. O. Mühlendyck, Charlottenburg: Kinematische Einteilung der reellen analytischen Somenmannigfaltigkeiten.

Unter einem *Soma* ist ein starrer Körper zu verstehen, von dessen Begrenzung abgesehen wird. Man kann sich den starren Körper durch ein rechtwinkliges Achsenkreuz vertreten denken. Jeder Lage des Achsenkreuzes im Raum entspricht dann ein Soma. Study hat das Soma in die Geometrie eingeführt.[1] [2] Er verwendet als Koordinaten eines Soma acht homogene Größen α_i, β_i $(i = 0, 1, 2, 3)$, die der Ungleichung $\sum \alpha_i^2 \neq 0$ und der Gleichung $\sum \alpha_i \beta_i = 0$ genügen. Im folgenden werden die reellen analytischen Somenmannigfaltigkeiten *kinematisch, d. h. hinsichtlich der zwölfgliedrigen Gruppe der eigentlich orthogonalen Somentransformationen* eingeteilt. Die genannte Gruppe ist von Study behandelt worden.[1] Sind für zwei Somen die entsprechenden Größen α_i zueinander proportional, so sind die Somen zueinander *parallel*, d. h. das eine geht aus dem andern durch eine Schiebung hervor. Eine analytische Somen-M_n — Somen-M_n ist die abgekürzte Bezeichnung für n-dimensionale Somenmannigfaltigkeit — läßt sich in der Umgebung einer Stelle allgemeiner Lage durch n wesentliche Parameter ausdrücken. Von den n-Parametern wird dann eine gewisse Zahl n_1 auch noch für die Verhältnisse der Größen α_i wesentlich sein. Es sei $n = n_1 + n_2$. Dann läßt sich die Somen-M_n zerlegen in ∞^{n_1} Mannigfaltigkeiten von je ∞^{n_2} parallelen Somen. In den Fällen $n = 1, 2, 3, 4, 5$ hat n_2 mindestens den Wert $n_2 = 0, 0, 0, 1, 2$. Der Überschuß von n_2 über diesen Mindestwert heißt nach Study der *Grad der Planarität* der betrachteten Somenmannigfaltigkeit.[1]) Demgemäß spricht man von *aplanaren, uniplanaren, biplanaren und triplanaren Somenmannigfaltigkeiten*. Das ist eine erste Einteilung der reellen analytischen Somenmannigfaltigkeiten, die aber verfeinert werden soll.

Betrachten wir zunächst die *Somen-M_1*. Sie zerfallen in *aplanare* und *planare*. Ein allgemein gelegenes Soma (t) einer aplanaren Somen-M_1 — t sei der Parameter — läßt sich in das Nachbarsoma $(t + dt)$ durch eine Schraubung überführen. Zu dieser Schraubung gehört ein Gewinde, das eine eigentliche Gerade als Achse hat. Das Gewinde heißt das *begleitende Gewinde* der Somen-M_1 an der betrachteten Stelle. Ziehen wir alle Stellen allgemeiner Lage der Somen-M_1 in Betracht, so gehören zu ihnen im allgemeinen ∞^1 begleitende Gewinde mit ∞^1 Gewindeachsen. Sind diese Gewindeachsen nicht sämtlich zueinander parallel, so heißt die Somen-M_1 *regulär*, sind die Gewindeachsen parallel, ohne zu einer einzelnen Geraden zusammenzufallen, so möge die Somen-M_1 *zylindrisch* genannt werden, fallen die Gewindeachsen zu einer einzelnen Geraden zusammen, so heiße

1) E. Study, Geometrie der Dynamen, Anhang. Leipzig 1903.
2) E. Study, Grundlagen und Ziele der analytischen Kinematik. Sitzungsber. Berl. Math. Ges. 1913.

die Somen-M_1 *axial.* Beschreibt ein Soma eine planare Somen-M_1, so beschreiben die Punkte des Soma Kurven, die zueinander kongruent sind. Wir unterscheiden zwei Familien planarer Somen-M_1, je nachdem die eben erwähnten Kurven krumme oder gerade Linien sind. Im letzteren Fall haben wir es mit *Büscheln paralleler Somen* zu tun.

Die *Somenkongruenzen* zerfallen in *aplanare, uniplanare* und *biplanare.* Die aplanaren heißen auch *regulär.* Die uniplanaren gliedern wir in erstens Somenkongruenzen, die reguläre Somen-M_1 enthalten, zweitens solche, die keine regulären, aber zylindrische Somen-M_1 enthalten, drittens solche, in denen weder reguläre noch zylindrische Somen-M_1 enthalten sind. Im zweiten Fall unterscheiden wir noch, ob das zu einer Stelle allgemeiner Lage der Somenkongruenz gehörige *begleitende Gewindebüschel* ein koaxiales Büschel ist oder nicht. Das begleitende Gewindebüschel einer Somenkongruenz ist entsprechend dem begleitenden Gewinde bei einer Somen-M_1 zu erklären. Im dritten Falle haben wir es mit den von Study als *gerade Somenketten*[1]) bezeichneten Gebilden zu tun. Eine gerade Somenkette entsteht, wenn man auf ein Soma alle Drehungen um eine Achse verbunden mit beliebigen Schiebungen in Richtung der Achse ausübt.

Die *Somen-M_3* gliedern sich in *aplanare, uniplanare, biplanare* und *triplanare.* Die aplanaren werden auch *regulär* genannt. Bei den biplanaren unterscheiden wir, ob sie reguläre Somen-M_1 enthalten oder nicht. Im letzteren Fall nehmen wir eine weitere Gliederung in zwei Familien vor. Wir ziehen hier das zu einer Stelle allgemeiner Lage der Somen-M_3 gehörige *begleitende Gewindebündel* in Betracht, das dem begleitenden Gewindebüschel bei einer Somenkongruenz entspricht. Bei der einen der in Frage stehenden zwei Familien läßt sich das genannte Gewindebündel in koaxiale Büschel zerlegen, bei der andern nicht. Die triplanaren Somen-M_3 schließlich sind *Gebüsche paralleler Somen.* Ein Gebüsch paralleler Somen entsteht, wenn man auf ein Soma alle Schiebungen ausübt.

Die *Somen-M_4* zerfallen in *aplanare,* die auch *regulär* heißen, in *uniplanare* und *biplanare.* Bei den biplanaren ist zu unterscheiden, ob sie reguläre Somen-M_1 enthalten oder nicht.

Die *Somen-M_5* endlich gliedern sich in *aplanare,* auch *reguläre* genannt, und *planare.*

Unsere Einteilung ergibt im ganzen *23 Familien reeller analytischer Somenmannigfaltigkeiten:*

A. Somen-M_1.

1. Reguläre Somen-M_1.
2. Zylindrische Somen-M_1.
3. Axiale Somen M_1.
4. Planare Somen-M_1, aber keine Büschel paralleler Somen.
5. Büschel paralleler Somen.

B. Somenkongruenzen.

6. Reguläre Somenkongruenzen.
7. Uniplanare Somenkongruenzen, die reguläre Somen-M_1 enthalten.
8. Uniplanare Somenkongruenzen, die keine regulären, aber zylindrische Somen-M_1 enthalten. Das zu einer Stelle allgemeiner Lage der Somenkongruenz gehörige begleitende Gewindebüschel ist kein koaxiales Büschel.

9. *Uniplanare Somenkongruenzen, die keine regulären, aber zylindrische Somen-M_1 enthalten. Das zu einer Stelle allgemeiner Lage der Somenkongruenz gehörige begleitende Gewindebüschel ist ein koaxiales Büschel.*

10. *Gerade Somenketten.*

11. *Biplanare Somenkongruenzen.*

C. Somen-M_3.

12. *Reguläre Somen-M_3.*

13. *Uniplanare Somen-M_3.*

14. *Biplanare Somen-M_3, die reguläre Somen-M_1 enthalten.*

15. *Biplanare Somen-M_3, die keine regulären Somen-M_1 enthalten. Das zu einer Stelle allgemeiner Lage der Somen-M_3 gehörige begleitende Gewindebündel läßt sich nicht in koaxiale Büschel zerlegen.*

16. *Biplanare Somen-M_3, die keine regulären Somen-M_1 enthalten. Das zu einer Stelle allgemeiner Lage der Somen-M_3 gehörige begleitende Gewindebündel läßt sich in koaxiale Büschel zerlegen.*

17. *Gebüsche paralleler Somen.*

D. Somen-M_4.

18. *Reguläre Somen-M_4.*

19. *Uniplanare Somen-M_4.*

20. *Biplanare Somen-M_4, die reguläre Somen-M_1 enthalten.*

21. *Biplanare Somen-M_4, die keine regulären Somen-M_1 enthalten.*

E. Somen-M_5.

22. *Reguläre Somen-M_5.*

23. *Planare Somen-M_5.*

Jede reelle analytische Somenmannigfaltigkeit gehört zu einer und nur zu einer dieser 23 Familien. Unsere Einteilung ist derart, daß sich zu jeder Familie ein System von Grundgrößen (Fundamentalgrößen) angeben läßt, das für die Somenmannigfaltigkeiten der Familie kinematisch kennzeichnend ist. Das hat die Bedeutung, daß zwei Somenmannigfaltigkeiten einer Familie, sofern sie in den entsprechenden Grundgrößen übereinstimmen, durch eine eigentlich orthogonale Somentransformation ineinander übergeführt werden können. Ich gehe jedoch hierauf nicht weiter ein.

6. K. Hagge, Kiel: Die Grundlagen der Brocardschen Geometrie und die Erweiterung auf das Vieleck.

Im Laufe des vorigen Jahrhunderts erfuhr die Elementargeometrie durch Einführung neuer Gebilde, der Symmediane, des Brocardschen Winkels usw., eine ungeahnte Bereicherung. Der Anstoß dazu ging 1816 von A. L. Crelle aus. Entzückt von der Schönheit der Ergebnisse versuchten C. F. Jacobi und Grunert weite Kreise für die Crelleschen Funde zu interessieren. Unglückliche Formulierungen, unübersehbare Zusammenhänge und andere Umstände machten der ersten fruchtbaren Literaturperiode bald ein Ende.

Mit der Erneuerung des Crelleschen Problems, die *Winkel eines Dreiecks durch Ecklinien nach einem zu suchenden Punkt so zu teilen, daß abwechselnd gleiche Teilwinkel entstehen*, und zwar durch H. Brocard, setzte 1875 eine Hochflut der Literatur über Brocardsche Dreiecksgeometrie ein.

Es entstanden zahlreiche Abhandlungen über Brocardsche Punkte, Punkt und Gerade von Lemoine, Kreise von Brocard, Lemoine, Tucker, Neuberg, M'Cay, Parabeln von Artzt, Steinersche Ellipse und Kiepertsche Hyperbel. Allein der Wunsch, das Crelle-Brocardsche Dreiecksproblem auf das Vieleck zu erweitern, wurde bisher nur durch Tucker im speziellen Falle des harmonischen Sehnenvierecks befriedigt. Auch die Untersuchungen von A. Gob und J. Neuberg führten nicht darüber hinaus. Beim Eintritt der auf diesem Gebiete bis heute andauernden Ebbe verlor sich das Interesse für die eigenartigen Probleme, die einst viele Mathematiker begeisterten. Wesentlich trugen dazu auch umständliche Ableitungen der fundamentalen Beziehungen bei.

Ein Versuch des Vortragenden, die einfachsten Grundlagen herauszuschälen, wobei er sich der geometrographischen Methode Lemoines bediente, zeigte bald eine Übertragungsmöglichkeit der Probleme auf das Vieleck, und zwar unter Voraussetzung einer Erweiterung des Begriffs der harmonischen Punkte und Strahlen. Den harmonischen Strahlen stehen eigenartige verwandte und doch grundverschiedene Strahlengruppen zur Seite, die zur Konstruktion der Vielecke mit brocardalen Eigenschaften führen. Derartige Gebilde, die sich bei zirkularperspektiver Abbildung regelmäßiger Polygone ergeben, treten in einfachster Form bei regelmäßigen Vielecken und bei den Tangenten an Apollonischen Polen (im Dreieck bei den Isodynamischen Zentren) auf; sie wurden vom Vortragenden als „apollonisch" bezeichnet. Ein auf apollonischen Strahlen liegendes Kreisvieleck ist brocardal, sofern der Kreis durch den Scheitel geht.

Die Zirkel- und Linealkonstruktion brocardaler Vielecke ist an die Gaußsche Kreisteilungsgleichung gebunden; denn alle zirkularperspektiven Bilder der regelmäßigen Polygone — und auch nur diese — sind brocardal.

Die Hauptergebnisse der seit Crelle veröffentlichten Untersuchungen fallen unter das Problem der äquibrocardalen Gebilde und sind vom Vortragenden in höchst einfacher Weise abgeleitet, deren Veröffentlichung in diesem Jahresbericht in Aussicht genommen ist. Äquibrocardale Vielecke führen auf eine verallgemeinerte Theorie der Kreise von Brocard, Lemoine, Neuberg, M'Cay. Vom Problem der kosymmedianen Gebilde liegen bisher nur wenige Ansätze vor. Gewisse metrische Beziehungen, die bei den regelmäßigen Polygonen auftreten, sind der zirkularen Perspektive gegenüber invariant.

Mittwoch, den 19. September 1928, 9 Uhr.

(Vorsitz: Lagally, Dresden.)

1. G. Thomsen, Hamburg: Referat über differentialgeometrische Untersuchungen zur Kugelgeometrie.

(Erscheint im Jahresbericht.)

2. W. Haack, Danzig-Langfuhr: Affine Differentialgeometrie der Strahlensysteme. (Bericht.)

In einer langen Reihe von Arbeiten von W. Blaschke, G. Pick, L. Berwald, A. Winternitz u. a. ist die affine Differentialgeometrie der Kurven und Flächen systematisch behandelt worden. Sie wurden im zweiten Band

der Vorlesungen über Differentialgeometrie von W. Blaschke[1]) zusammengefaßt. Es soll hier über diejenige der Strahlensysteme kurz referiert werden:

I. Ein Strahlensystem sei etwa durch die sechs Funktionen zweier Parameter $p_i(u, v)$ gegeben, die als die homogenen Plückerschen Linienkoordinaten gedeutet werden. Für die p_i müssen dann folgende Relationen gelten: 1. die Plückersche Identität $p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_6 = 0$; 2. die sechs Funktionen p_i sollen mindestens dreimal stetig differenzierbar sein; 3. die Matrix

$$\left\| p_i; \quad \frac{\partial p_i}{\partial u}; \quad \frac{\partial p_i}{\partial v} \right\|$$

hat stets den Rang drei. Beschränkt man sich auf die Differentialgeometrie im kleinen, so liegt folgende Aufgabe vor: *Die Umgebung eines Systemstrahles ist hinsichtlich ihrer affinen Invarianten zu kennzeichnen.*

Der Gang der Untersuchung ist der übliche. Man beginnt mit der Konstruktion eines affin-invariant mit dem Systemstrahl verbundenen Koordinatensystems niedrigster Ordnung. Auf dieses wird dann die weitere Umgebung des Systemstrahles bezogen. Dies geschieht in den *Ableitungsgleichungen*. Hier treten drei Differentialformen auf: 1. eine quadratische Grundform $d\varphi^2 = \Phi$, auf die der Ricci-Kalkül aufgebaut wird; 2. eine kubische Form Ψ und 3. eine zweite quadratische Form Θ.

Die Integrierbarkeitsbedingungen zeigen jedoch, daß die Koeffizienten der Form Θ durch die Koeffizienten von Φ und Ψ und deren ersten partiellen Ableitungen bestimmt sind. Man erhält daher den Satz: *Ein Strahlensystem ist bis auf raumtreue Affinitäten bestimmt durch eine quadratische und eine kubische Grundform.*

Die Differentialgeometrie hat nun die Aufgabe, die Formen Φ und Ψ, deren Nullflächen, d. h. die durch $\Phi = 0$ und $\Psi = 0$ bestimmten Regelflächen des Systems, sowie ihre drei simultanen Invarianten (Krümmungen des Systems genannt) geometrisch zu interpretieren.

Wir beschränken uns hier auf einen kurzen Überblick über die geometrischen Ergebnisse; bezüglich des formalen Apparates sei auf meine in den Wiener Monatsheften erscheinenden Arbeiten verwiesen.

II. *Begleitendes Tetraeder:* Da das Strahlensystem durch die homogenen Linienkoordinaten gegeben ist, liegt es nahe, als begleitendes Koordinatensystem ein Tetraeder zu konstruieren. Eine Kante des Tetraeders ist der Systemstrahl $\mathfrak{p}$ selbst, dessen Umgebung zu untersuchen ist. In der Affingeometrie ist die uneigentliche Ebene W invariant. Sie bildet eine Seitenebene des Tetraeders und ihr Schnittpunkt x mit $\mathfrak{p}$ ist ein Eckpunkt. Zwei weitere Seitenebenen sind die beiden durch $\mathfrak{p}$ gehenden Brennebenen des Systems. Jetzt ist die Ecke x des Tetraeders konstruiert; man hat diese Ecke noch durch eine vierte Ebene abzuschließen. Die Berührungspunkte von $\mathfrak{p}$ mit den beiden Brennflächen seien p und $\bar{p}$. Auf dem Strahl sind also drei invariante Punkte $(x, p, \bar{p})$ bekannt. Der vierte harmonische Punkt y zu x bezüglich p; $\bar{p}$ ist der Mittenpunkt des Strahles; wenn $\mathfrak{p}$ das Strahlensystem durchläuft, beschreibt er die *Mittenfläche* des Systems. Zur Bestimmung der vierten Tetraederebene nehmen wir nun folgende Konstruktion

1) Springer, Berlin 1923.

vor: Durch die beiden Brennpunkte wird auf p eine bestimmte Strecke abgeschnitten. Diese tragen wir als Vektor von einem beliebigen festen Punkt aus ab. Wenn jetzt p das System durchläuft, dann wird der freie Endpunkt dieses Vektors eine Fläche beschreiben, die das *Krümmungsbild* des Strahlensystems heißt. Dabei ist auf Grund der Konstruktion jedem Strahl des Systems ein Punkt des Krümmungsbildes zugeordnet. In dem p zugeordneten Punkt hat das Krümmungsbild eine Tangentenebene; zu dieser legen wir durch den Mittelpunkt y die Parallelebene. Damit ist das invariante begleitende Tetraeder konstruiert; auf dieses ist die Umgebung des Systemstrahles zu beziehen.

Es ist zu bemerken, daß unser Grundtetraeder in gewissen Fällen ausartet: nämlich erstens, wenn einer der Brennpunkte von p in der uneigentlichen Ebene liegt, also die Umgebung von p zylindrisch ist, und zweitens, wenn die Brennpunkte oder die Brennebenen zusammenfallen, d. h. die Umgebung von p parabolisch ist. Diese beiden Fälle werden zunächst ausgeschlossen. Auf die überall parabolischen Systeme wird am Schluß kurz eingegangen.

III. Indem wir hier den formalen Teil übergehen, wenden wir uns gleich den *Differentialformen* zu. Die Form $d\varphi^2$ verschwindet längs der Torsen (= abwickelbare Flächen) des Systems. Schreitet man von p ausgehend auf einer Regelfläche des Systems fort, indem man etwa u und v als Funktionen eines Parameters t annimmt, so wird das Integral $\int_{t_1}^{t_2} d\varphi$, genommen zwischen irgend zwei Erzeugenden $t = t_1$ und $t = t_2$, eine bestimmte geometrische Bedeutung besitzen: es gibt die Affinoberfläche[1]) desjenigen Streifens der Regelfläche, der einerseits von den beiden Brennkurven, d. h. den Kurven, längs deren die Regelfläche die beiden Brennflächen berührt, andererseits von den durch die Integralgrenzen bestimmten erzeugenden Systemstrahlen begrenzt wird. Diese Deutung von $\int d\varphi$ liefert nun sofort die geometrische Interpretation der Grundform Φ. Zugleich aber versetzt sie uns in die Lage, den Extremalen des Variationsproblems $\delta \int d\varphi = 0$, das die affin-geodätischen Regelflächen des Systems bestimmt, einen geometrischen Sinn beizulegen. Die Geodätischen sind einfach diejenigen Regelflächen, für welche die Affinoberfläche des obigen Streifens ein Extremum ist.

Die geodätischen Regelflächen wiederum führen unmittelbar zu einer Kennzeichnung der durch $\Psi = 0$ bestimmten Regelflächen, d. h. den Nullflächen der kubischen Form. Es gilt nämlich der Satz: Nur längs jeder der drei Fortschreitungsrichtungen $\Psi = 0$, von einem Strahl aus fortschreitend, kann man drei konsekutive Systemstrahlen antreffen, die einer geodätischen angehören und gleichzeitig ein Paraboloid bestimmen.

Erwähnt sei hier, daß durch $\Theta = 0$ diejenigen Regelflächen gegeben werden, denen die Asymptotenlinien des Krümmungsbildes entsprechen.

IV. Erst der Satz vom *Krümmungskegel* des Systemstrahles und das damit verbundene Analogon zum Satz von Meusnier der elementaren

1) Vgl. Blaschke, Differentialgeometrie II, § 47.

Flächentheorie verleihen der Affingeometrie der Strahlensysteme ihre besondere Einfachheit: Die Umgebung II. Ordnung eines Systemstrahles ist bestimmt durch die Gesamtheit der Flächen II. Ordnung, die je durch drei infinitesimal-benachbarte Strahlen des Systems gelegt werden können. *Die Mittelpunkte dieser* ∞^2 *Flächen II. Ordnung bilden einen Kegel dritten Grades mit der Spitze im Mittelpunkt* y, *den wir als Krümmungskegel bezeichnen.* Der Krümmungskegel zusammen mit dem invarianten Tetraeder bestimmt die Umgebung II. Ordnung des Systemstrahls. An ihnen lassen sich sofort die Grundformen sowie alle gemeinsamen Invarianten dieser Formen geometrisch deuten. Jede Kegelerzeugende ist die Affinnormale im Mittelpunkt y aller derjenigen Regelflächen des Systems, die durch $\mathfrak{p}$ und einen infinitesimal-benachbarten Strahl gehen. Es entspricht also jeder Kegelerzeugenden eine Fortschreitungsrichtung im System vom Strahl $\mathfrak{p}$ aus. Dies führt zu einer neuen Deutung der Regelflächen $\Psi = 0$: den drei Kegelerzeugenden, die in der Tangentialebene der Mittenfläche liegen, entsprechen drei Fortschreitungsrichtungen; bestimmt man zu jeder von diesen die vierte harmonische bezüglich der beiden Torsen durch $\mathfrak{p}$, so erhält man die Richtungen $\Psi = 0$.

Von den drei simultanen Invarianten der beiden Formen werden zwei gedeutet in der Konfiguration, die aus der uneigentlichen Kurve des Krümmungskegels und dem uneigentlichen Dreieck des Grundtetraeders besteht. Die Dritte erhält man als Rauminhalt eines Oktaeders, das folgendermaßen bestimmt ist: Durch die beiden Brennpunkte von $\mathfrak{p}$ legt man Parallelebenen zur Tangentialebene des Krümmungsbildes und bringt diese zum Schnitt mit der Tangentialebene der Mittenfläche. Auf den beiden Schnittgeraden werden von den Brennebenen je zwei Punkte ausgeschnitten, die zusammen mit den beiden Brennpunkten das Oktaeder ergeben.

V. Nach diesem Überblick über einige der wichtigsten affin-invarianten Eigenschaften der allgemeinen Strahlensysteme mag noch kurz auf die *parabolischen Kongruenzen* eingegangen werden. Ein solches parabolisches System $\mathfrak{p}$ besteht bekanntlich aus den Tangenten an die eine Schar der Asymptotenlinien der einzigen Brennfläche. Es liegt nahe, ihm als konjugiertes System $\mathfrak{q}$ dasjenige der zweiten Schar von Asymptotenlinien zuzuordnen. Wie oben kann die Umgebung II. Ordnung eines Strahles jedes der beiden konjugierten Systeme durch die Gesamtheit der Flächen II. Ordnung bestimmt werden, die je durch drei infinitesimal-benachbarte Strahlen eines Systems gehen. Jedes der Systeme besitzt im betrachteten Strahl dann wieder einen Krümmungskegel; und zwar erhält man hier zwei *ausgeartete* kubische Kegel mit gemeinsamer Spitze, die in je einen quadratischen Kegel und in eine, den beiden Kegeln gemeinsame Tangentenebene zerfallen. Diese Ebene ist die Tangentenebene der Brennfläche; die Kegelerzeugenden, längs deren die Ebene die beiden Kegel berührt, sind die betrachteten Systemstrahlen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$. Die beiden quadratischen Kegel haben noch folgende Eigenschaft: legt man durch $\mathfrak{p}$ die nicht in die gemeinsame Tangentenebene fallende Tangentenebene an den zu $\mathfrak{q}$ gehörigen Kegel und ebenso durch $\mathfrak{q}$ an den zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Kegel, so schneiden sich diese beiden Ebenen in einer, beiden Kegeln gemeinsamen Erzeugenden. Diese ist die *Affin-Normale* der Brennfläche. Man hat so eine neue Konstruktion der Affin-Normalen einer Fläche gewonnen.

Zusammenfassend sei gesagt: Die Differentialgeometrie der parabolischen Strahlensysteme läßt sich auffassen als Flächentheorie, indem man die Fläche durch ihre Haupttangentensysteme gegeben denkt. Man erkennt dann, daß die Umgebung III. Ordnung eines Flächenpunktes bis auf Affinitäten im wesentlichen bestimmt ist durch die Konfiguration der beiden quadratischen Krümmungskegel.

Mittwoch, den 19. September 1928, 11 Uhr.

(Vorsitz: Kneser, Breslau.)

1. A. Hammerstein, Berlin: Über nichtlineare Integralgleichungen und die damit zusammenhängenden Randwertaufgaben.[1])

Es bedeute $L(u)$ einen sich selbst adjungierten Differentialausdruck zweiter Ordnung, der in einem ein- oder mehrdimensionalen, einfach zusammenhängenden, im Endlichen gelegenen Gebiet B erklärt ist. Dazu existiere[2]) eine am Rande verschwindende Greensche Funktion $G(x, y)$, wo unter x, y Punkte aus B verstanden sind. Ist $F(x, u)$ eine stetige Funktion des Punktes x, $(x \prec B)$ und der Variablen u, so kann die Frage nach Lösungen der nichtlinearen Differentialgleichung

$$L(u) = F(x, u)$$

bei vorgegebenen stetigen Randwerten für u bekanntlich auf die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichung

$$u(x) = \int_B G(x, y) F(y, u(y) + v(y))\, dy$$

zurückgeführt werden, wenn $v(y)$ diejenige Lösung von $L(v) = 0$ bedeutet[2]), welche die vorgeschriebenen Randwerte annimmt. Gleichungen der Gestalt

$$\varphi(x) = \int_B K(x, y)\, f(y, \varphi(y))\, dy, \tag{1}$$

worin $f(x, u)$ neben dem Kern K eine gegebene, $\varphi(x)$ die gesuchte Funktion ist, sind in der Literatur bisher lediglich unter sehr speziellen Annahmen über $K(x, y)$ oder $f(y, u)$ untersucht.[3]) Allgemeingültige Resultate finden sich nur in der bekannten Arbeit von E. Schmidt[4]), die in unseren Bezeichnungen kurz dahin charakterisiert werden können:

Kennt man eine Lösung $\varphi_0(x)$ der Gleichung (1), so wird festgestellt, wie viele zu $\varphi_0(x)$ benachbarte Lösungen bei geringer Abänderung von f existieren.

---

1) Eine ausführliche Darstellung erfolgt in den Acta mathematica.

2) Über die Existenz vergleiche man: L. Lichtenstein, Neuere Untersuchungen über die Entwicklung der Theorie der partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus. (Enzyklopädie II, C 12.)

3) Genaue Literaturangaben werden in der in Anm. 1) angekündigten Arbeit gemacht. Man vergleiche auch neben dem unter 2) genannten Enzyklopädieartikel den von Hellinger und Töplitz: Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten. (II. C. 13, insbesondere Seite 1481 ff.)

4) Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen III. Math. Annalen 65.

Freilich sind dabei komplexe Lösungen mit einbegriffen; zur Anwendung auf Randwertaufgaben müssen noch Realitätsbetrachtungen hinzutreten, die neuerdings von R. Iglisch[5]) durchgeführt sind. Es handelt sich also um Existenzsätze in der Umgebung einer bekannten Ausgangslösung.

Im folgenden sollen Eigenschaften der Funktionen K und f angegeben werden, welche die Existenz von Lösungen überhaupt gewährleisten. Wir begnügen uns damit, an dieser Stelle die übersichtlichsten Resultate anzuführen.

Über den Kern $K(x, y)$ wird vorausgesetzt, daß er symmetrisch, positiv definit und brauchbar unstetig im Sinne der linearen Integralgleichungen sei. Ein negativ definiter Kern kann natürlich durch die Substitution $f = -f_1$, $K = -K_1$ auf einen positiv definiten zurückgeführt werden. Die Funktionen $f(x, u)$ werden zunächst nach ihrem Verhalten für große Werte von $|u|$ eingeteilt. Das stetige $f(x, u)$ soll so beschaffen sein, daß es, wenn u gegen $+\infty$ oder $-\infty$ geht, für alle x in B entweder dem Betrage nach beschränkt bleibt oder aber nach der positiven oder negativen Seite über alle Grenzen wächst (d. h. also $\underline{\lim}\, f = +\infty$ oder $\overline{\lim}\, f = -\infty$). Alle so charakterisierten Funktionen zerfallen dann in neun durch das nachfolgende Schema definierte Klassen:

	Verhalten von f bei $u \to \infty$		Verhalten von f bei $u \to -\infty$
1.	beschränkt	1.	beschränkt
2.	beschränkt	2.	$+\infty$
3.	beschränkt	3.	$-\infty$
4.	$+\infty$	4.	beschränkt
5.	$+\infty$	5.	$+\infty$
6.	$+\infty$	6.	$-\infty$
7.	$-\infty$	7.	beschränkt
8.	$-\infty$	8.	$+\infty$
9.	$-\infty$	9.	$-\infty$

Für einen beschränkten Kern (z. B. Greensche Funktion in einer Dimension) gilt nun der Satz:

Die Gleichung (1) *ist für alle Funktionen der Klassen* (1), (2), (7) *und* (8) *stets lösbar, in den übrigen Fällen dagegen nicht stets lösbar.* Die zweite dieser Aussagen bedeutet, daß für Funktionen der Klassen 3., 4., 5., 6., 9. Beispiele von nicht lösbaren Gleichungen gebildet werden können. Freilich gibt es darin auch lösbare Gleichungen. Wählt man nämlich die stetigen Funktionen $g(x, u)$ und $w(x)$ willkürlich, setzt

$$w(x) + \int_B K(x, y)\, g(y, w(y))\, dy = k(x)$$

und macht die Substitution $w(x) - k(x) = \varphi(x)$, $g(x, u + k(x)) = f(x, u)$, so ist die dadurch entstehende Gleichung

$$\varphi(x) + \int_B K(x, y)\, f(y, \varphi(y))\, dy = 0$$

5) Reelle Lösungsfelder der elliptischen Differentialgleichung $\Delta u = F(u)$ und nichtlineare Integralgleichungen. Math. Annalen 101.

lösbar. f gehört dabei zur selben Klasse wie das beliebig gewählte g. Die Eigenschaften im Unendlichen reichen eben bei diesen Klassen nicht hin, um eine Lösung zu garantieren.

Sieht man von der Beschränktheit des Kernes ab, verlangt jedoch $K(x, y) \geqq 0$ (eine Eigenschaft der mehrdimensionalen Greenschen Funktionen), so bleiben die Ergebnisse des vorigen Satzes richtig, abgesehen von Fall (8), in dem die Methode keine Entscheidung liefert. Wenn $K(x, \xi; y, \eta)$ jedoch die Greensche Funktion von

$$L(u) = \frac{\partial}{\partial x}(p u_x) + \frac{\partial}{\partial \xi}(p u_\xi) \qquad (p(x, \xi) \geqq 0)$$

bedeutet, kann auch dieser Fall erledigt werden. Es gilt dann: *Die Randwertaufgabe für die nichtlineare Differentialgleichung*

$$L(u) = f(x, \xi, u)$$

hat bei beliebiger Wahl der stetig gegebenen Randwerte in den Fällen 1., 2., 7., 8. *stets eine Lösung, in den übrigen Fällen ist diese nicht bei willkürlich gewählten stetigen Randwerten gewährleistet.* Daß die Aufgabe auch hier in speziellen Fällen gelöst werden kann, liegt auf der Hand. Man braucht ja nur von irgendeiner Lösung auszugehen, und diejenigen Werte, welche sie auf der Begrenzung annimmt, als Randwerte vorzuschreiben.

Freilich erfassen die genannten Sätze nicht solche Funktionen f, die bei wachsendem u sowohl beliebig große positive als auch negative Werte annehmen.

Es lassen sich nun in der Tat allgemeinere Aussagen machen, aus denen die bisherigen größtenteils folgen. Die soeben betrachteten Funktionenklassen wurden deshalb besonders hervorgehoben, weil sich die Einteilung in stets lösbare und nicht stets lösbare Typen völlig durchführen läßt. Wir begnügen uns damit, die interessantesten Tatsachen herauszugreifen:

Der Kern K sei beschränkt; unter λ_1 werde sein kleinster Eigenwert im Sinne der linearen Integralgleichungen verstanden. Hinreichend für die Lösbarkeit der Gleichung (1) *ist, daß für alle x die Funktion $f(x, u)$ für negative Werte von u und von einer Stelle an unterhalb, für positive Werte von u von einer Stelle an oberhalb der Geraden der (f, u)-Ebene: $f = -\varkappa u$ mit $0 < \varkappa < \lambda_1$ verläuft.*

Die Schranke λ_1 für $\varkappa$ kann nicht verbessert werden.

Läßt man die Beschränktheit von K fallen, so kann die vorstehende Aussage nicht mehr im vollen Umfang bewiesen werden. Verlangt man dagegen wieder $K \geqq 0$, so gelten allgemeine Sätze, die einen von den bisherigen verschiedenen Charakter tragen. Einer davon sei angeführt. *Ist für $u \leqq 0$ stets $0 \leqq f(x, u) \leqq B|u| + D$, wobei B und D Konstanten sind, $0 < B < \lambda_1$, so existiert eine Lösung von Gleichung* (1). Die Schranken für f können nicht verbessert werden.

Hierin ist für das Verhalten von $f(x, u)$ für positives u überhaupt keine Voraussetzung gemacht. Ein Beispiel ist

$$f(x, u) = (\sin x)e^u + 1 \qquad (0 \leqq x \leqq 2\pi).$$

Schließlich möge noch ein Satz genannt sein, der in vielen Fällen die Lösbarkeit der Randwertaufgabe entscheidet.

$F(x, \xi; u)$ besitze stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung. Unter $v(x, \xi)$ werde diejenige Lösung von

$$L(v) = \frac{\partial}{\partial x}(p\, v_x) + \frac{\partial}{\partial \xi}(p\, v_\xi) = 0$$

verstanden, welche vorgeschriebene stetige Randwerte annimmt. Gibt es zwei Konstanten $u_1 < 0$ und $u_2 > 0$, so daß im abgeschlossenen Bereich B stets

$$F(x, \xi;\ u_1 + v(x, \xi)) < 0$$

und

$$F(x, \xi;\ u_2 + v(x, \xi)) > 0$$

ausfällt, so hat die Gleichung

$$L(u) = F(x, \xi; u)$$

eine Lösung, welche die gegebenen Randwerte annimmt und überdies ganz in das Intervall $u_1 \leqq u \leqq u_2$ hineinfällt. Zur Illustration sei für F ein mit u^n beginnendes Polynom in u betrachtet. Bei ungeradem n ist die Bedingung des Satzes bei beliebiger Wahl der Randwerte erfüllt. Ist n jedoch gerade, so gehen die Randwerte in die Bedingung ein; sie wird z. B. durch

$$F(x, \xi, v(x, \xi)) < 0 \qquad \text{gewährleistet.}$$

Bevor auf die Frage der Eindeutigkeit eingegangen wird, soll eine kurze Charakterisierung der Beweismethode folgen. Sie beruht auf der Zurückführung auf eine endliche Extremumsaufgabe.[6]) Das Prinzip mag unter der Annahme

$$(2) \qquad |f(x, u)| \leqq \varkappa\, |u| + B \qquad (0 < \varkappa < \lambda_1)$$

klargelegt werden. Die übrigen Resultate folgen — abgesehen von dem zuletzt genannten, über welches später noch einige Worte zu sagen sind — entweder durch Modifikationen oder durch Zurückführung auf diese Voraussetzung durch geeignete Abänderungen. Unter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$; $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x), \ldots$ verstehe man die Eigenwerte bzw. Eigenfunktionen des Kerns $K(x, y)$. Die Gleichung (1) kann jetzt leicht auf ein unendliches Gleichungensystem für die Fourier-Koeffizienten der Lösung $\varphi(x)$ in bezug auf $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ zurückgeführt werden. Besitzt nämlich

$$(1) \qquad \varphi(x) = \int_B K(x, y)\, f(y, \varphi(y))\, dy$$

eine Lösung φ, so ist diese als quellenmäßig dargestellte Funktion in eine gleichmäßig konvergente Reihe

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu\, \varphi_\nu(x)$$

6) Zur Behandlung von gewissen nichtlinearen Randwertaufgaben ist ein ähnliches Prinzip von L. Lichtenstein angewandt worden: Über einige Existenzproprleme der Variationsrechnung. Journal für Math. 145. Dort wird von dem zur Randwertaufgabe gehörigen Dirichletschen Integral ausgegangen und das Ritzsche Verfahren benützt.

entwickelbar, wobei für die Fourierkoeffizienten

$$\text{(I)}\quad a_\varrho = \int_B \varphi(x)\varphi_\varrho(x)\,dx = \frac{1}{\lambda\varrho}\int_B f(x,\varphi(x))\,\varphi_\varrho(x)\,dx = \frac{1}{\lambda\varrho}\int_B f\Big(x,\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu\varphi_\nu(x)\Big)\,\varphi_\varrho(x)\,dx$$

gilt. Aus der Besselschen Ungleichung folgt hieraus die Konvergenz von

$$\text{(II)}\quad \sum_{\varrho=1}^{\infty}(\lambda_\varrho a_\varrho)^2.$$

Somit genügen die Fourier-Koeffizienten jeder Lösung von (1) dem unendlichen Gleichungssystem I bei der Nebenbedingung II. Umgekehrt führt auch jedes Lösungssystem von I und II zu einer Lösung

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(x)$$

von (1), denn letztere Reihe konvergiert wegen

$$\Big|\sum a_\nu\lambda_\nu\cdot\frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}\Big| \leqq \Big\{\sum (a_\nu\lambda_\nu)^2\cdot\sum\Big(\frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}\Big)^2\Big\}^{\frac{1}{2}}$$

gleichmäßig. Es bleibt also die Existenz eines Lösungssystems von I und II zu erweisen. Hierzu setze man

$$\int_0^u f(x,v)\,dv = h(x,u)$$

und betrachte bei ganzem m folgende Funktion der m Veränderlichen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$:

$$H_m(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m) = \sum_{\nu=1}^{m}\lambda_\nu\alpha_\nu^2 + 2\int_B h\Big(y,\sum_{\mu=1}^{m}\alpha_\mu\varphi_\mu(y)\Big)\,dy.$$

Aus der Annahme (2) kann leicht erschlossen werden, daß H_m ein im Endlichen gelegenes Minimum besitzt. Infolgedessen existiert bei jedem ganzen m mindestens ein festes Lösungssystem $\alpha_\nu = a_\nu^{(m)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, m)$ der Gleichungen

$$(3)\quad \frac{1}{2}\frac{\partial H_m}{\partial\alpha_\varrho}\Big|_{\alpha_\varrho = a_\varrho^{(m)}} = \lambda a_\varrho^{(m)} + \int_B f\Big(y,\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu^{(m)}\varphi_\mu(y)\Big)\,\varphi_\varrho(y)\,dy = 0$$

$$(\varrho = 1, 2, \ldots, m).$$

Das sind aber gerade Näherungsgleichungen zu I. Daraus muß durch Grenzübergang jetzt ein Lösungssystem von I und II gewonnen werden. Die betrachteten Minima von H_m seien mit d_m bezeichnet; sie bilden offenbar eine abnehmende Folge. Somit gilt

$$d_1 \geqq d_m = H_m(a_1^{(m)},\ldots,a_m^{(m)}).$$

Daraus ergibt sich, unter erneuter Verwendung von (2), daß $\sum_{\nu=1}^{m}\lambda_\nu a_\nu^{(m)2}$ unter einer von m unabhängigen Konstanten liegt. Somit sind die Größen

$a_\nu^{(m)}$ gleichmäßig beschränkt, und nach dem bekannten Diagonalverfahren kann jetzt eine solche Teilfolge m_i gewonnen werden, daß bei festem ϱ stets $a_\varrho^{(m_i)} \to a_\varrho$ ist. Dabei bleibt $\sum_{(\lambda)} \lambda_\nu a_\nu^2$ konvergent. Dies ist aber noch nicht die verlangte Bedingung II. Hieraus kann aber, unter Hinzunahme der Voraussetzung (2) über f bewiesen werden, daß

$$\int_B f(y, \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu^{(m)} \varphi_m(y))^2 dy$$

unter einer von m unabhängigen Schranke liegt. In Rücksicht darauf folgt jetzt aus (3) mittels der Besselschen Ungleichung die gleichmäßige Beschränktheit von $\sum_{\nu=1}^{m} (\lambda_\varrho a_\varrho^{(m)})^2$, woraus in üblicher Weise die Konvergenz von $\sum_{\varrho=1}^{\infty} (\lambda_\varrho a_\varrho)^2$ erschlossen wird. Man überzeugt sich dann leicht davon, daß $a_1, a_2, a_3, \ldots$ das gesuchte Lösungssystem ist.

Ein wesentlich neues Moment tritt bei den Beweisen der auf die Randwertaufgabe von Differentialgleichungen bezüglichen Sätze hinzu. Um den Gedankengang kurz anzudeuten, sei angenommen, daß für die Funktion $f(u)$ an zwei Stellen u_1 und u_2 gelte:

$$f(u_1) < 0, \quad u_1 < 0; \quad f(u_2) > 0, \quad u_2 > 0.$$

Man definiere eine Funktion $f^*(u)$ durch

$$f^*(u) = \begin{cases} f(u_1) & \text{für} \quad u \leqq u_1 \\ f(u) & \text{,,} \quad u_1 < u < u_2 \\ f(u_2) & \text{,,} \quad u \geqq u_2 \end{cases}$$

und runde die Ecken ab. Da $|f^*(u)|$ beschränkt ist, sind die Voraussetzungen zum vorigen Satz erfüllt, und die mit f^* gebildete Integralgleichung hat also eine Lösung. Es genügt nun offenbar zu zeigen, daß dieselbe ganz in das Intervall $u_1 \leqq u \leqq u_2$ hineinfällt. Um dies einzusehen, wird zunächst gezeigt, daß die vorhin mit Hilfe von endlichen Extremumsaufgaben durch Grenzübergang gewonnene Lösung nichts anderes ist, als diejenige Funktion, die dem zur Aufgabe gehörigen Dirichletschen Integral das absolute Minimum erteilt (Ritzsches Verfahren!). Dann kann zu jeder über das Intervall $u_1 \leqq u \leqq u_2$ hinausragenden Funktion eine solche gefunden werden, die ganz in dasselbe hineinfällt und den Integralwert verkleinert. Daraus folgt die Behauptung.

Wesentlich verwickelter sind die Fragen der Eindeutigkeit. Es sollen an dieser Stelle nur zwei Klassen von Funktionen $f(x, u)$ gekennzeichnet werden, für welche die Gleichung (1) nur eine Lösung hat.

Verhältnismäßig einfach beweist man: *Ist $f(x, u)$ bei festem x in u monoton wachsend, so hat Gleichung* (1) *eine und nur eine Lösung.*

Mit Hilfe des Gleichungssystems I kann folgender Satz, in dem wieder der kleinste Eigenwert des Kerns eine Rolle spielt, erschlossen werden: *Be-*

sitzt die Funktion $f(x, u)$ *eine stetige Ableitung nach* u *und ist* $\left|\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right| \leqq a < \lambda_1$ *für alle* u *und* x *aus* B, *so hat die Gleichung* (1) *eine und nur eine Lösung.*

Diese Aussage kann als Verallgemeinerung der Tatsache angesprochen werden, daß die lineare Integralgleichung $\psi(x) + \lambda \int_B K(x, y)\,\psi(y)\,dy = g(x)$ für $\lambda < \lambda_1$ bei beliebiger Wahl der stetigen Funktion g eindeutig lösbar ist. Bringt man diese nämlich durch die Substitution

$$\psi(x) - g(x) = \varphi(x); \quad f(x, u) = \lambda(u + g(x))$$

auf die hier betrachtete Gestalt

$$\varphi(x) + \int_B K(x, y)\, f(y, \varphi(y))\, dy = 0,$$

so besagt der Satz, daß dieselbe für $\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right| = \lambda < \lambda_1$ eine und nur eine Lösung hat, was auch g sei. Daraus folgt natürlich, daß die Schranke λ_1 nicht verbessert werden kann.

Dies schließt freilich nicht aus, daß es spezielle Funktionen $f(x, u)$ mit $\left|\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right| \leqq 1$ derart gibt, daß die Gleichung

$$\varphi(x) = \lambda \int_B K(x, y)\, f(y, \varphi(y))\, dy \tag{4}$$

auch für Werte von λ, die größer als λ_1 sind noch eindeutig lösbar ist. Die Hilfsmittel zur Untersuchung der Änderung der Lösungszahl bei wachsendem λ liefert, f als analytisch vorausgesetzt, aber gerade die Schmidtsche Theorie. Auf eine ausführliche Diskussion sei an dieser Stelle nicht eingegangen.

Es mag jetzt eine Bemerkung über die Gleichung (4) folgen, wenn darin über f nur Stetigkeit vorausgesetzt wird. Man weiß seit langem, daß dieselbe für hinreichend kleines λ lösbar ist. Aus unseren Ergebnissen kann jedoch folgende allgemeinere Tatsache erschlossen werden: *Ist* $l < 0$ *beliebig vorgegeben, so gibt es dazu eine Konstante* $\lambda_0 = \lambda_0(l)$ *derart, daß für alle* $|\lambda| \leqq \lambda_0$ *genau eine Lösung von* (4) *existiert, die ganz in das Intervall* $-l \leqq \varphi \leqq l$ *hineinfällt.* Daraus folgt, daß genau eine Lösung $\varphi(x, \lambda)$ existiert, für die das Maximum des absoluten Betrages mit λ gegen 0 konvergiert. Sind außer dieser noch weitere Lösungen vorhanden, so muß das Maximum ihres Betrages über alle Grenzen wachsen, da l beliebig groß gewählt werden darf. Beispiele für dies Vorkommnis sind leicht anzugeben.

Man kann sich noch die Frage vorlegen, in welcher Beziehung die mit einem Lösungssystem $a_1^{(m)}, \ldots a_m^{(m)}$ der Näherungsgleichungen (3) als Fourier-Koeffizienten gebildeten Funktionen

$$\psi_m(x) = \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu^{(m)}\, \varphi_\nu(x)$$

zu den Lösungen von (1) stehen.

Konvergenz gegen jene kann offenbar nur bei Eindeutigkeit stattfinden. Unter der Annahme, auf die man, wie sogleich gezeigt wird, durch eine wichtige Anwendung kommt, daß $\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|$ und $K(x, y)$ beschränkt sind, gilt z. B. für die Lösung φ von (4) bei hinreichend kleinem λ

$$|\varphi - \psi_m| \leqq C \sum_{\nu=m+1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x)^2}{\lambda_\nu^2},$$

wo C eine von m unabhängige Konstante bedeutet. D. h. also, daß ψ_m so schnell gegen die Lösung konvergiert, wie die Bilinearreihe des iterierten Kerns $K^{(2)}(x, y)$ gegen diesen.

Zum Schlusse sei noch ein Beispiel, das in der Technik eine Rolle spielt, angeführt. Die Frage nach periodischen Lösungen der Gleichung der erzwungenen Schwingung $u''(x) = a \sin u(x) + g(x)$, wo $a > 0$ und $g(x)$ eine periodische Funktion von x ist, kann, wie Hamel[7]) gezeigt hat, auf folgende nichtlineare Integralgleichung zurückgeführt werden:

$$\varphi(x) + \int_0^1 K(x, y)\,(a \sin \varphi(y) + g(y))\,dy = 0,$$

$$K(x, y) = \begin{cases} x(1 - y) & \text{für} \quad x < y \\ y(1 - x) & \text{,,} \quad x > y. \end{cases}$$

Hamel hat die vorstehende spezielle Gleichung bereits im Jahre 1922 untersucht und nachgewiesen, daß sie stets lösbar ist, und zwar für $a < 1$ eindeutig. Dieses Resultat folgt jetzt ganz unmittelbar aus unseren allgemeinen Sätzen. Fragt man nun nach der Lösungszahl für Werte von $a \geqq 1$, so findet sich, wenn die Schmidtsche Theorie in der vorhin angedeuteten Weise mit herangezogen wird, daß bei wachsendem a die Lösungszahl wächst, und zwar stets in gerader Zahl[8]); es kann aber, bei geeigneter Wahl der Funktion g, auch vorkommen, daß vorhandene Lösungen bei einem bestimmten Wert von a wieder verschwinden. Schon dies einfache Beispiel lehrt also, daß allgemeingültige Sätze über die Lösungszahl nicht bestehen. Will man hierüber für die Anwendungen genauen Aufschluß haben, so müssen weitere Spezialisierungen gemacht werden, wie dies Hamel auch tut (z. B. $g(x) = \beta \sin \pi x$). Er gibt sodann eine Gleichung zur näherungsweisen Berechnung des ersten Fourier-Koeffizienten von $\varphi(x)$ an[9]), die man auch unmittelbar bereits aus der ersten Gleichung unseres Systems I erhält. Die Näherungsgleichungen (3) können weiter zur approximativen Bestimmung der Lösung verwandt werden.

2. J. von Neumann, Berlin: Allgemeine Eigenwerttheorie hermiteisch-symmetrischer Funktionaloperatoren.

---

7) Über erzwungene Schwingungen bei endlichen Amplituden. Math. Annalen 86.

8) Man vergleiche auch die Note des Verfassers in diesem Jahresbericht: Eine nichtlineare Randwertaufgabe.

9) Dieselbe ist, von der Differentialgleichung ausgehend, auch von Duffing gefunden worden. (Erzwungene Schwingungen.)

3. K. Dörge, Köln: Verschärfung des Hilbertschen Irreduzibilitätssatzes.

Das im natürlichen Rationalitätsbereich P irreduzible Polynom $f(x, t)$ von zwei Veränderlichen mit ganzen rationalen Koeffizienten ordne man nach Potenzen von x:

$$f(x, t) = a_0(t)\, x^n + a_1(t)\, x^{n-1} + \cdots + a_n(t), \quad a_0(t) \neq 0.$$

Es wird bewiesen: Wenn die Koeffizienten $a_0(t)$ und $a_n(t)$ nicht von t abhängen, also feste ganze rationale Zahlen sind, so gibt es im allgemeinen — d. h. immer, wenn nicht ein gewisses Diskriminantenprodukt identisch in t verschwindet — nur endlich viele rationale Zahlen t, für welche f als Polynom von x in P reduzibel wird.

4. W. Maier, Frankfurt a. M.: Über elliptische Funktionen.

Ein altes Thema, das der elliptischen Funktionen, wollen wir in neuer Weise behandeln. Aufzustellen sind identische Beziehungen in mehreren Veränderlichen zwischen analytischen Ausdrücken, die der Weierstraßschen $\wp$-Funktion ähneln, wenn diese als Teilbruchreihe gegeben ist. Verallgemeinernd potenziere man nun jeden $\wp$-Summanden und erweitere ihn dann mit einem Exponentialfaktor des Betrages 1; derartige Reihen führte Kronecker ein in seiner XX. Mitteilung zur Theorie der elliptischen Funktionen, und er brachte sie in Zusammenhang mit der klassischen Theorie der Thetafunktionen. Von anderer Seite aus betrachtet erscheinen diese Gebilde als Übertragung der Bernoullischen Polynome auf imaginär quadratische Zahlkörper.

Beginnen wir damit, einige Ergebnisse anzuschreiben. Sei für

$$\nu = 1, 2, \ldots; \quad 0 < x < 2; \quad 0 < y < 2; \quad \sum_{h,k}^{h+ik \neq 0} = \sum_{hk}{}'$$

der Grenzwert angesetzt

$$(1) \qquad \lim_{n \to \infty} \sum_{-n}^{n}{}'_{hk} \frac{e^{\pi i (xh + yk)}}{(h + ik)^\nu} = t_\nu(x, y),$$

dessen Existenz wir beweisen, erklärt man $t_0(x, y) = -1$ und wählt

$$\sigma = 0, 1, \ldots; \quad 0 < x < 1; \quad 0 < y < 1,$$

so besteht identisch in x, y die Aussage

$$(2) \quad \sum_{0}^{\sigma+2} {}_l\, t_l(x, y)\, t_{\sigma+2-l}(x, y) = (\sigma + 1)\, t_{\sigma+2}(2x, 2y) + 2 t_1(x, y)\, t_{\sigma+1}(2x, 2y),$$

woraus insbesondere $t_1(x, y) = \dfrac{t_3(x, y) + t_3(2x, 2y)}{t_2(x, y) - t_2(2x, 2y)}$ folgt.

Zum Beweis von (2) gelangt man für komplexe $u \not\equiv 0 \bmod. (1, i)$ und Benutzung der Kroneckerschen Funktion

$$(3) \qquad \lim_{n \to \infty} \sum_{-n}^{n}{}_{hk} \frac{e^{\pi i (xh + yk)}}{u + h + ik} = s(x, y).$$

Zwischen (3) und (1) besteht folgende Verknüpfung identisch in u, x, y, falls $u \not\equiv 0 \pmod{1, i}$; $0 < x < 1$; $0 < y < 1$ vorausgesetzt werden:

$$(4) \qquad s^2(x, y) + \frac{d}{du} s(2x, 2y) = 2t_1(x, y) \cdot s(2x, 2y).$$

Zum Beweis von (4) kommen wir auf zwei verschiedenen Wegen; man bilde etwa im gegenwärtigen speziellen Fall mit $e^{-\pi} = q$ die Thetafunktion

$$(5) \qquad \vartheta_{11}(u) = \vartheta(u) = 2q^{\frac{1}{4}} \sin \pi u \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - q^{2\nu})(1 - q^{2\nu} e^{-2\pi i u})(1 - q^{2\nu} e^{2\pi i u}),$$

so entnimmt man deren Periodizitätseigenschaften leicht die Kroneckersche Darstellung

$$(3') \qquad s(x, y) = \frac{\vartheta'(0)}{\vartheta\left(\frac{y - ix}{2}\right)} \frac{\vartheta\left(u + \frac{y - ix}{2}\right)}{\vartheta(u)} e^{-\pi i x u}$$

und durch Grenzübergang als Ergänzung zu (1)

$$(3'') \qquad t_1(x, y) = -\pi i x + \frac{\vartheta'}{\vartheta}\left(\frac{y - ix}{2}\right).$$

Trägt man (3′, 3″) in (4) ein und schreibt abkürzend $y - ix = 2g$, so erhält man in ϑ-Ausdrücken als Äquivalent zu (4)

$$(4') \qquad \vartheta'(0)\vartheta(2g)\vartheta^2(u + g) + \vartheta^2(g)\{\vartheta'(u + 2g)\vartheta(u) - \vartheta'(u)\vartheta(u + 2g)\}$$
$$= 2\vartheta(g)\vartheta'(g)\vartheta(u)\vartheta(u + 2g).$$

Ein funktionentheoretisches Prinzip von Hermite schließt aus den Begriffen „Ordnung" und „stetige Charakteristik" auf die Existenz einer Aussage der folgenden Gestalt:

$$\vartheta'(u + 2g)\vartheta(u) - \vartheta'(u)\vartheta(u + 2g) = b\vartheta(u)\vartheta(u + 2g) - c\vartheta^2(u + g)$$

mit $\frac{\partial b}{\partial u} = \frac{\partial c}{\partial u} = 0$. Mit Hilfe von (5) bestimmt man b und c, wodurch (4′), d. h. auch (4), bestätigt ist.

Entwickelt man $s(x, y)$ nach Potenzen von u, so gibt ein Koeffizientenvergleich die oben behauptete Rekursion (2).

Heuristisch interessanter scheint der folgende Zugang zur Identität (4), welcher von den besonderen Eigenschaften der elliptischen Funktionen keinerlei Gebrauch macht. Setzt man für $n = 1, 2, \ldots$

$$(5') \qquad \sum_{-n}^{n}{}_{hk} \frac{e^{\pi i (xh + yk)}}{u + h + ik} = s_n(x, y),$$

so folgt durch Teilbruchzerlegung

$$(4'') \qquad s_n^2(x, y) + \frac{d}{du} s_n(2x, 2y)$$
$$= 2 \sum_{-n}^{n}{}_{hk} \frac{e^{2\pi i (xh + yk)}}{u + h + ik} \cdot \sum_{\substack{-n-h \leqq p \leqq n-h \\ -n-k \leqq q \leqq n-k}}{}_{pq} \frac{e^{\pi i (xp + yq)}}{p + iq}.$$

Setzt man für $-1 < R(u)$

$$\sum_{1}^{n} {}_h \sum_{0}^{h} {}_k \frac{e^{2\pi i(xh+yk)}}{u+h+ik} \sum_{n+1-h}^{n} {}_p \sum_{0}^{n} {}_q \frac{e^{\pi i(xp+yq)}}{p+iq} = \varrho_n,$$

so erkennt man in

$$\lim_{n \to \infty} \varrho_n = 0 \tag{6}$$

die zureichende und notwendige Bedingung dafür, daß (5′, 4″) in der Grenze gegen (3, 4) streben. Setzt man für $0 < R(t)$; $0 < R(s)$ abkürzend

$$e^{\pi i x - t} = v; \quad e^{i(\pi y - t)} = w; \quad e^{i(2\pi y - s)} = z,$$

so leistet die Darstellung

$$\varrho_n = \sum_{1}^{n} {}_h e^{2\pi i x h} \lim_{r \to \infty} \int_{0}^{re^{-i}} ds\, e^{-s(n+h)} \frac{1 - z^{h+1}}{1 - z} \int_{0}^{re^{-i}} dt\, v^{n+1-h} \frac{1 - v^h}{1 - v} \frac{1 - w^{n+1}}{1 - w}$$

für $n_0(u, x, y) < n$ die Größenabschätzung $|\varrho_n| < \frac{1}{\sqrt{n}}$, d. h. (6).

Unabhängig von der Funktionalgleichung (4) und auf ähnliche Weise finden wir für $-\frac{d}{du} s(x, y) = \wp(x, y)$ durch Entfernung der Pole 4. Ordnung

$$\wp^2(x, y) - \frac{1}{6} \frac{d^2}{du^2} \wp(2x, 2y) = 2\, t_2(x, y)\, \wp(2x, 2y) - 4\, t_3(x, y)\, s(2x, 2y);$$

schließlich erscheint diese Aussage, wie (4) als Sonderfall zweier Additionstheoreme, die für $0 < x < 2$; $0 < y < 2$; $0 < \xi < 2 - x$; $0 < \eta < 2 - y$ gelten,

$$s(x, y) \cdot s(\xi, \eta) + \frac{d}{du} s(x + \xi, y + \eta) = \{t_1(x, y) + t_1(\xi, \eta)\} \cdot s(x + \xi, y + \eta) \tag{4‴}$$

und

$$\wp(x, y)\, \wp(\xi, \eta) - \frac{1}{6} \frac{d^2}{du^2} \wp(x + \xi, y + \eta) = \{t_2(x, y) + t_2(\xi, \eta)\} \cdot \wp(x + \xi, y + \eta) - 2\{t_3(x, y) + t_3(\xi, \eta)\} \cdot s(x + \xi, y + \eta). \tag{7}$$

Schreibt man (4‴, 7) als Potenzreihen in u und vergleicht je die Koeffizienten hinreichend hohen Zeigers, so ist der Grenzübergang

$$x + \xi \to 2; \quad y + \eta \to 2$$

zulässig. Für $\nu = 1, 2, \ldots$ besteht außerdem die Spiegeleigenschaft

$$t_\nu(2 - x, 2 - y) = (-1)^\nu t_\nu(x, y),$$

welche eine reine $t_\nu(x, y)$-Konsequenz aus (4‴, 7) zu ziehen ermöglicht; sie möge formuliert werden im nachstehenden

Basissatz: Für $\nu = 4, 5, \ldots$ und $0 < x < 2$; $0 < y < 2$ ist jedes $t_\nu(x, y)$ eine rationale Funktion der vier Elemente $t_1(x, y)$; $t_2(x, y)$; $t_3(x, y)$;

$t_4(0, 0)$ und ist sogar ein Polynom der drei letzten. Die eingehenden Koeffizienten sind rationale Zahlen.

Endlich lösen wir uns vom bisher behandelten Sonderfall, führen komplexes τ in einer Halbebene ein, etwa $0 < J(\tau)$; dann ist sinngemäß

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{n}{}'_{hk} \frac{e^{\pi i(xh+yk)}}{(h+\tau k)^{\nu}} = t_{\nu}(x, y), \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{n}{}_{hk} \frac{e^{\pi i(xh+yk)}}{u+h+\tau k} = s(x, y)$$

und $e^{i\pi\tau} = q$

abzuändern, während die Additionstheoreme (4''', 7) formal erhalten bleiben.

Donnerstag, den 20. September 1928, 9 Uhr.

(Vorsitz: Hensel, Marburg.)

1. Arthur Korn, Berlin: Mathematische Probleme, die in der Wellenmechanik auftreten.

Ich habe mich vor kurzem[1]) im Anschluß an die Schrödingersche Wellenmechanik und vor allem in der Absicht, diese auf eine durchaus mechanische Basis zu stellen, mit der folgenden Modifikation der Wellengleichung beschäftigt:

$$(1) \quad \Delta\varphi = \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + k\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \psi(x, y, z) + \alpha\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{C^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2\right\},$$

d. i. also die Gleichung einer gedämpften Welle für eine unbekannte Funktion φ der vier Variablen t, x, y, z mit einem von t explizite unabhängigen Störungsgliede ψ, bei Hinzufügung der in den ersten Ableitungen von φ quadratischen Glieder

$$\alpha\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{C^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2\right\},$$

α, k und $\frac{1}{C^2}$ sind dabei Konstanten, α und C^2 werden sehr groß angenommen. Durch die Substitution

$$(2) \quad \Phi = e^{-\alpha\varphi}$$

wird die Gleichung auf die folgende zurückgeführt:

$$(3) \quad \Delta\Phi + \alpha\psi\Phi = \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + k\frac{\partial\Phi}{\partial t},$$

welche den Vorteil der Linearität hat. Sind bei gewissen Grenzbedingungen

$$\Phi_j(x, y, z), \quad K_j$$

die Eigenfunktionen bzw. Eigenwerte der Differentialgleichung

$$(4) \quad \Delta\Phi_j + (\alpha\psi + K_j)\Phi_j = 0,$$

in welcher Sie die Schrödingersche Wellengleichung erkennen, so sind,

1) Sitzungsber. der Berl. Math. Ges. 27, 79—91, 1928.

immer bei den geeignet gewählten Grenzbedingungen, die allgemeinen Lösungen von (3) von der Form

(5) $$\Phi = \sum_j \Phi_j(x, y, z) e^{\Lambda_j t},$$

wo die Λ_j mit den K_j durch eine einfache algebraische Relation verbunden sind, somit allgemein

(5') $$\varphi = -\frac{1}{a} \log \left(\sum_j \Phi_j e^{\Lambda_j t}\right).$$

Wir betrachten den Fall einer Hauptlösung

(6) $$\begin{cases} \Phi = \Phi_0(x, y, z)\, e^{\Lambda_0 t} \\ \varphi = -\frac{1}{a} \log \Phi_0 - \frac{\Lambda_0}{a} t \equiv \varphi_0, \end{cases}$$

zu der die anderen Lösungen als verhältnismäßig kleine Korrekturgrößen hinzutreten mögen — die Existenz solcher Lösungen ist durch die eben angestellte kurze Untersuchung erwiesen —; wir sehen dann, daß eine solche Lösung sich additiv zusammensetzt aus einer — bis auf eine in t lineare Funktion — von t explizite unabhängigen Funktion φ_0, welche gewissermaßen die Hauptbewegung des Teilchens bestimmt, und einer Funktion

$$-\frac{1}{a\Phi_0} \sum_j \Phi_j e^{(\Lambda_j - \Lambda_0)t},$$

in welcher die Φ_j und ihre ersten Ableitungen gegen Φ_0 bzw. ihre ersten Ableitungen als klein vorauszusetzen sind, so daß also zu der Hauptbewegung Schwingungen additiv hinzutreten, deren Frequenzen durch die imaginären Bestandteile von $\Lambda_j - \Lambda_0$ bestimmt sind. Das unbekannte Wellenphänomen in der Schrödingerschen Wellenmechanik soll also als eine wirkliche mechanische Schwingungsbewegung erklärt werden, welche zu der Hauptbewegung hinzutritt, wenn die Hauptbewegung, welche der Funktion φ_0 entspricht, durch die Gleichung

(7) $$\frac{m}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial z}\right)^2\right\} = -\frac{m}{2a}\psi + \frac{m}{2a}\Delta\varphi_0 + \text{const}$$

gegeben ist.

Wenn wir

(8) $$\varphi = \varphi_0 + \chi$$

setzen, wobei χ mit seinen ersten und zweiten Ableitungen so klein vorausgesetzt wird, daß wir ihre Quadrate vernachlässigen können, so erfüllt das Schwingungsglied χ in erster Annäherung die Gleichung

(9) $$\Delta\chi = \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} + \bar{k}\frac{\partial\chi}{\partial t} + \text{const} + 2a\left\{\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\frac{\partial\chi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\frac{\partial\chi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_0}{\partial z}\frac{\partial\chi}{\partial z}\right\}$$
$$\left(\bar{k} = k - \frac{2\Lambda_0}{C^2}\right),$$

und wir sehen jetzt, daß das Glied

$$-\frac{a}{C^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2,$$

welches ich, um exakt zu rechnen, zunächst hinzugefügt hatte, auf die Form dieser ersten Annäherung gar keinen Einfluß hat, und daß wir die Gleichung (1) auch in der Form

$$(10)\quad \frac{m}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\} = -\frac{m}{2a}\psi + \text{const} + \frac{m}{2a}\Delta\varphi - \frac{m}{2aC^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{mk}{2a}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

ansetzen können, ohne daß in den obigen Schlußfolgerungen irgendein Unterschied auftritt. Eine Gleichung von der Form (10) ist aber leicht der mechanischen Interpretation zugänglich, bei Berücksichtigung von Kompressibilität und Reibung.

Um das Verständnis zu erleichtern, möchte ich ganz kurz zusammenfassen, worauf es ankommt: Eine Gleichung von der Form (10) hat Hauptlösungen φ_k, welche von t explizite unabhängig sind und einer Gleichung

$$(11)\quad \frac{m}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial z}\right)^2\right\} = -\frac{m}{2a}\psi + \frac{m}{2a}\Delta\varphi_k + C_k$$

genügen; wenn $$\frac{m}{2a}\Delta\varphi_k$$

klein ist, somit einer Hamilton-Jacobischen Gleichung

$$(12)\quad \frac{m}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial z}\right)^2\right\} = -\Psi + C_k$$

mit der Kräftefunktion

$$(13)\quad \Psi = \frac{m}{2a}\psi;$$

es gibt nun auch Lösungen der Gleichung (10), welche sich von den Hauptlösungen φ_k um Schwingungsgrößen

$$(14)\quad \chi = -\frac{1}{a\Phi_k}\sum_j \Phi_j e^{(\Lambda_j-\Lambda_k)t}$$

mit verhältnismäßig kleinen Amplituden unterscheiden; dabei sind die Φ_j und die mit den Λ_j durch einfache algebraische Relationen verbundenen K_j die Eigenfunktionen bzw. Eigenwerte der Schrödingerschen Wellengleichung

$$(15)\quad \Delta\Phi_j + (a\psi + K_j)\Phi_j = 0$$

bei geeignet gewählten Grenzbedingungen.

Anstatt die Hauptbewegung von gewöhnlicher Art und die Zusatzbewegung mit kleinen Amplituden anzunehmen, können wir auch die Hauptbewegung als außerordentlich rasch und die Schwingungsgeschwindigkeiten der Zusatzschwingungen von gewöhnlicher Art annehmen; wir werden also sagen können: Für die gewöhnlichen Bewegungen der klassischen Mechanik sind die zu betrachtenden Zusatzschwingungen zu vernachlässigen, für sehr rasche Bewegungen aber werden sich diese Trabantenschwingungen bemerkbar machen, und diese Schwingungen sind grade das Neue, das wir in der Wellenmechanik brauchen.

Bei dieser Art der Betrachtung zeigt sich nun aber, wenn wir zu den Spezialfällen der Schrödingerschen Untersuchungen übergehen, eine prinzipielle Schwierigkeit: Die der Hamilton-Jacobischen Gleichung

$$\frac{m}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\}=-\Psi+\text{const}$$

entsprechende Wellengleichung für die Φ_j ist

$$\Delta\Phi_j+\left(\frac{2\alpha^2}{m}\Psi+K_j\right)\Phi_j=0,$$

während sie bei Schrödinger

$$\Delta\Phi_j+(K_j-a^2\Psi)\Phi_j=0,\quad \left(a^2=\frac{8\pi^2 m}{h^2}>0\right)$$

lautet. Wenn wir

$$\frac{2\alpha^2}{m}=-a^2$$

setzen könnten, wäre formal alles in Ordnung, die mechanische Interpretation aber durch ein imaginäres α zerstört. Wir haben es also mit einer inversen mechanischen Analogie zu tun.

Können wir nun nicht durch eine geeignete Modifikation der Zusatzglieder zu der Hamilton-Jacobischen Gleichung, allgemein durch geeignete Zusatzglieder in dem dynamischen Grundprinzip, eine vollständige Analogie und damit eine befriedigende mechanische Interpretation der Schrödingerschen Theorie erreichen? Ich habe gefunden, daß hier zwei Wege möglich sind, von denen ich den einen kurz behandeln, den zweiten als den endgültigen Ausweg aus dem Labyrinth der modernen Quantentheorie an den Schluß meiner Ausführungen stellen werde.

Stellen wir die ursprüngliche Differentialgleichung für φ in der Form

(16) $$\Delta\varphi=\frac{1}{C^2}\frac{d^2\varphi}{dt^2}+k\frac{d\varphi}{dt}+\psi$$

auf, wo in üblicher Schreibweise

$$\frac{d(-)}{dt}=\frac{\partial(-)}{\partial t}+\frac{\partial(-)}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial(-)}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial(-)}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

dann haben wir rechts außer den Gliedern $k\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ und $\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$ sowie den folgenden

$$k\,\Box\,\varphi\equiv k\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\}$$

noch Glieder von der Form

$$\frac{3}{C^2}\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right\},$$

abgesehen von Gliedern

$$\frac{1}{C^2}\left\{\frac{\partial\Box\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\Box\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\Box\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right\},$$

die, mit der sehr kleinen Konstanten $\frac{1}{C^2}$ multipliziert, in den für uns in Betracht kommenden Fällen zu vernachlässigen sind. Bei der Behandlung

dieser Gleichung ergibt sich wieder folgendes: Es gibt explizite von t unabhängige Hauptlösungen φ_k, welche die Gleichung

$$(17)\qquad k\left\{\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial z}\right)^2\right\}=-\psi+C_k+\Delta\varphi_k$$

erfüllen, zu denen noch schwingungsartige (im Verhältnis zu den Hauptgleichungen) kleine Zusatzglieder χ von der Form

$$(18)\qquad \chi=\sum{}^{j} f_j(x,y,z)\,e^{\mu_j t}$$

hinzugefügt werden können, die in erster Annäherung die lineare Differentialgleichung

$$(19)\qquad \begin{cases}\Delta\chi=\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}+k\frac{\partial\chi}{\partial t}+\frac{3}{C^2}\left\{\frac{\partial^2\chi}{\partial x\,\partial t}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}+\frac{\partial^2\chi}{\partial y\,\partial t}\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}+\frac{\partial^2\chi}{\partial z\,\partial t}\frac{\partial\varphi_k}{\partial z}\right\}\\ \qquad\qquad+2k\left\{\frac{\partial\chi}{\partial x}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}+\frac{\partial\chi}{\partial y}\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}+\frac{\partial\chi}{\partial z}\frac{\partial\varphi_k}{\partial z}\right\}\end{cases}$$

erfüllen, gegenüber der früheren Gleichung (9). Die partikulären Lösungen

$$f_j(x,y,z)\,e^{\mu_j t}$$

erfüllen hier die Gleichung

$$(20)\qquad \Delta f_j=\left(\frac{\mu_j^2}{C^2}+k\mu_j\right)f_j+\left(\frac{3\mu_j}{C^2}+2k\right)\left\{\frac{\partial f_j}{\partial x}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}+\frac{\partial f_j}{\partial y}\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}+\frac{\partial f_j}{\partial z}\frac{\partial\varphi_k}{\partial z}\right\},$$

in der die μ_j komplexe Zahlen sind, gegenüber der früheren Gleichung

$$(20\text{a})\qquad \Delta f_j=\left(\frac{\mu_j^2}{C^2}+k\mu_j\right)f_j+\alpha\left\{\frac{\partial f_j}{\partial x}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}+\frac{\partial f_j}{\partial y}\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}+\frac{\partial f_j}{\partial z}\frac{\partial\varphi_k}{\partial z}\right\}$$

mit reellem α. Die Schwierigkeit, welche uns früher noch von der Schrödingerschen Wellengleichung trennte, bestand ja nur darin, daß bei reellem α das α^2 stets positiv sein muß, wir sehen also, daß hier bei großen Frequenzen, die durch die imaginären Teile der μ_j gegeben sind, die gewünschte Umkehrung des Vorzeichens herbeigeführt werden kann. Die für diesen ersten Weg zugrunde zu legende Wellengleichung (16) läßt sich mechanisch leicht unter Zuhilfenahme von Kompressibilität und Reibung interpretieren. Dabei will ich mich aber nicht lange aufhalten und sogleich den zweiten Weg zeigen, der zu einer vollständigen Analogie führt.

Ich lege die Grundgleichung in der Form zugrunde:

$$(21)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\}=-\Psi+\text{const}-\varepsilon\int^t\Delta\varphi\,dt,$$

wo ε eine sehr kleine Größe ist und es auf die untere Grenze des Integrales rechts nicht ankommt.

Wieder werden von t explizite unabhängige Hauptlösungen φ_k existieren, welche die Gleichung

$$(22)\qquad \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial z}\right)^2\right\}=-\Psi+C_k-\varepsilon\int^t\Delta\varphi_k\,dt$$

erfüllen, und zu diesen Hauptlösungen können schwingungsartige Zusatzglieder

$$(23)\qquad \chi=\sum{}^{j} f_j(x,y,z)\,e^{\mu_j t}$$

(zu den Hauptlösungen verhältnismäßig klein) hinzutreten, welche in erster Annäherung die lineare Integraldifferentialgleichung

$$(24)\qquad \frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}\frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial z}\frac{\partial \chi}{\partial z} = -\varepsilon \int^t \Delta \chi \, dt$$

erfüllen. Die partikulären Lösungen

$$f_j(x, y, z)\, e^{\mu_j t}$$

genügen der Gleichung

$$(25)\qquad \frac{\varepsilon}{\mu_j}\Delta f_j = -\mu_j f_j - \left\{\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\frac{\partial f_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}\frac{\partial f_j}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial z}\frac{\partial f_j}{\partial z}\right\},$$

wo wir jetzt die μ_j als rein imaginäre Zahlen annehmen können, wenn wir ungedämpfte Schwingungen wünschen und von Reibungserscheinungen absehen. Wir bekommen also gegenüber der früheren Gleichung (20a) an Stelle des reellen α eine rein imaginäre Größe, und damit wird die frühere inverse Analogie in eine vollständige verwandelt. Es bleibt übrig, die Klarlegung der mechanischen Interpretation zu geben: Denken wir uns die Bewegungsgleichungen eines Gases mit der Zustandsgleichung

$$(26)\qquad p = c\mu$$

bei räumlich und zeitlich konstanter Temperatur und bei Kräften

$$-\mu\frac{\partial \psi}{\partial x}d\tau, \ldots,$$

die auf jedes Raumelement wirken:

$$(27)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -\dfrac{\partial \Psi}{\partial x} - c\dfrac{\partial \log \mu}{\partial x}, \ldots \\ \dfrac{d \log \mu}{dt} = -\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right). \end{cases}$$

Bei Vorhandensein eines Geschwindigkeitspotentials φ, wenn also

$$(28)\qquad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \ldots, \qquad \text{haben wir}$$

$$(29)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right\} = -c\log\mu - \Psi + \text{const} \\ \log\mu = -\displaystyle\int^t \Delta\varphi\, dt; \end{cases}$$

somit ergibt sich für das Geschwindigkeitspotential die gewünschte Gleichung

$$(30)\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right\} = -\Psi + \text{const} - c\int^t \Delta\varphi\, dt.$$

Ein Elementarteilchen, dessen Hauptbewegung durch die Gleichung

$$(31)\qquad \frac{m}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] = -\psi + \text{const} - cm\int^t \Delta\varphi\, dt$$

oder, wenn

$$cm\int^t \Delta\varphi\, dt$$

sehr klein ist, durch die Hamilton-Jacobische Gleichung der klassischen Mechanik gegeben ist:

$$\frac{m}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]=-\psi+\text{const} \tag{32}$$

wird also immer infolge seiner Kompressibilität der Trabantenschwingungen fähig sein, wie sie durch die Schrödingersche Gleichung bestimmt werden können. Sind die Hauptbewegungen von gewöhnlicher Art, so sind die Trabantenschwingungen zu vernachlässigen; sind sie aber sehr rasch, so treten sie für uns, z. B. als Lichtschwingungen, d. h. Schwingungen elektrischer Teilchen, in Erscheinung.[1])

2. Stefan Bergmann, Berlin: Über unendliche Hermitesche Formen mit Anwendungen auf die Abbildung durch Paare von Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen.

Ein grundlegender Satz der Funktionentheorie besagt, daß man zu zwei einfach zusammenhängenden zweidimensionalen Bereichen B und B' eine Funktion einer komplexen Veränderlichen $w(z)$ finden kann, die B auf B' abbildet.

Im Anschlusse an den Riemannschen Abbildungssatz stellte Poincaré die folgende Frage auf: seien $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ zwei einfach zusammenhängende Bereiche des vierdimensionalen Raumes; es ist zu entscheiden, ob es ein Funktionenpaar $V(X,Z)$, $W(X,Z)$ von zwei komplexen Veränderlichen X, Z gibt, welches $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{B}'$ abbildet (d. h. während $\mathfrak{R}(X), \mathfrak{J}(X), \mathfrak{R}(Z), \mathfrak{J}(Z)$ alle inneren Punkte von $\mathfrak{B}$ durchläuft, durchläuft $\mathfrak{R}[V(X,Z)]$, $\mathfrak{J}[V(X,Z)]$, $\mathfrak{R}[W(X,Z)]$, $\mathfrak{J}[W(X,Z)]$ alle inneren Punkte von $\mathfrak{B}'$).

Außer von Poincaré selbst wurden wichtige und interessante Sätze zu diesem Problem von Reinhardt, Carathéodory, Blaschke, Behnke und Kritikos aufgestellt und bewiesen.

In einer früheren Arbeit (Math. Annalen 86, S. 238) zeigte der Vortragende, daß man das anfangs angedeutete Problem der Abbildung eines ebenen Bereiches B auf B' mit den Methoden der Algebra von unendlich vielen Veränderlichen behandeln kann, indem man die in bezug auf den Bereich orthogonalen Funktionensysteme einführt. Unter einem in bezug auf den Bereich B orthogonalen Funktionensystem wird ein System $\varphi_s(z)$ verstanden, das die Eigenschaft besitzt, daß

$$\iint\limits_B \varphi_s(z)\,\overline{\varphi_k(z)}\,d\omega_z \begin{matrix} =1 \\ =0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} (s=k) \\ (s\neq k) \end{matrix}$$

ist; dw_z bedeutet dabei das Flächenelement von B.

In dem Vortrag werden die Methoden der Algebra von unendlich vielen Veränderlichen auf das Poincarésche Problem angewandt.

Unter dem zu einem Bereich $\mathfrak{B}$ (des vierdimensionalen Raumes) gehörigen Orthogonalsystem wird ein Funktionensystem $\Omega_s(X,Z)$ $[s=1,2,\ldots]$ von

1) Ich möchte hier kurz auf zwei Veröffentlichungen hinweisen, die formal mit dem obigen eine gewisse Verwandtschaft haben, prinzipiell aber abweichend sind: E. Madelung, Ztschr. f. Phys. 40, 322, 1927; Isakson ib. 44, 893, 1927.

zwei komplexen Veränderlichen X, Z verstanden, das die Eigenschaft besitzt, daß

$$\iiiint\limits_{\mathfrak{B}} \Omega_s(X,Z)\overline{\Omega_k(X,Z)}\,d\omega \begin{matrix} = 1 \\ = 0 \end{matrix} \quad . \qquad \begin{matrix} (s = k) \\ (s \neq k) \end{matrix}$$

ist; $d\omega$ bedeutet dabei das (vierdimensionale) Volumenelement. Es gelten die Sätze:

1. Jede in $\mathfrak{B}$ reguläre Funktion $h(X, Z)$ mit endlichem

$$\iiiint\limits_{\mathfrak{B}} |h(X,Z)|^2 d\omega$$

läßt sich in $\mathfrak{B}$ in der Form

$$h(X,Z) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(X,Z) \iiiint\limits_{\mathfrak{B}} h(\xi,\zeta)\overline{\Omega_s(\xi,\zeta)}\,d\omega \quad \text{darstellen.}$$

2. Bildet das „normierte" Funktionenpaar

$$V(X,Z),\ W(X,Z)$$

den Bereich $\mathfrak{B}$ auf den Reinhardtschen Kreisbereich ab, so ist

$$\frac{\partial(V,W)}{\partial(X,Z)} = \frac{\sum\limits_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(X,Z)\overline{\Omega_s(0,0)}}{\sum\limits_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(0,0)\overline{\Omega_s(0,0)}}.$$

Unter dem (in bezug auf den Punkt 0, 0) normierten Funktionenpaar wird ein Paar V, W verstanden, für welches

$$V(0,0) = 0, \quad \left(\frac{\partial V(X,Z)}{\partial X}\right)_{\substack{X=0\\Z=0}} = 1, \quad \left(\frac{\partial V(X,Z)}{\partial X}\right)_{\substack{X=0\\Z=0}} = 0,$$

$$W(0,0) = 0, \quad \left(\frac{\partial W(X,Z)}{\partial X}\right)_{\substack{X=0\\Z=0}} = 0, \quad \left(\frac{\partial W(X,Z)}{\partial X}\right)_{\substack{X=0\\Z=0}} = 1 \quad \text{gilt.}$$

3. Die Ausdrücke

$$\frac{1}{\sum\limits_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\overline{\Omega_s(a,b)}}, \quad \frac{\sum\limits_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\overline{\Omega_s(a,b)}}{\begin{vmatrix} \sum\limits_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\overline{\Omega_s(a,b)} & \sum\limits_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a,b)\,\overline{\dfrac{\partial\Omega_s(a,b)}{\partial a}} \\ \sum\limits_{s=1}^{s=\infty} \dfrac{\partial\Omega_s(a,b)}{\partial a}\,\overline{\Omega_s(a,b)} & \sum\limits_{s=1}^{s=\infty} \dfrac{\partial\Omega_s(a,b)}{\partial a}\,\overline{\dfrac{\partial\Omega_s(a,b)}{\partial a}} \end{vmatrix}}, \ldots$$

sind bei einer Transformation durch ein in bezug auf den Punkt a, b normiertes Funktionenpaar invariant. Es wird dabei vorausgesetzt, daß a, b ein innerer Punkt von $\mathfrak{B}$ ist.

4. Die Koeffizienten der Funktionenelemente des (in bezug auf den Punkt 0, 0 normierten) Funktionenpaares, das $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{B}'$ abbildet, lassen sich durch

die Werte der Orthogonalfunktionen an der Stelle o, o (d. h. durch die $\Omega_s(0, 0)$ und $\varphi_s(0, 0)$) und deren Ableitungen in einer einfachen Weise ausdrücken. Ω_s bzw. φ_s ($s = 0, 1, 2, \ldots$) bedeutet das zu $\mathfrak{B}$ bzw. zu $\mathfrak{B}'$ zugehörige vollständige Orthogonalfunktionensystem. Auf diese Weise läßt sich feststellen — zumindest im Prinzip — ob sich zwei gegebene Bereiche $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ aufeinander abbilden lassen oder nicht.

5. Man kann zu jedem Bereich $\mathfrak{B}$ eine unendliche Hermitesche Form bilden, wobei der Abbildung eines Bereiches auf den anderen eine lineare Transformation der zugehörigen Formen entspricht.

Eine ausführliche Darstellung des Vortrages befindet sich in der Arbeit „Über unendliche Hermitesche Formen, die zu einem Bereiche gehören, nebst Anwendungen auf Fragen der Abbildung durch Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen", Math. Zeitschrift 29 (1929), S. 641—677, eine vorläufige Mitteilung in den Sitzungsber. d. Berliner Math. Ges. 26 (1927), S. 178—184.

3. L. Koschmieder, Brünn: Über die C-Summierbarkeit gewisser Verallgemeinerungen der Laplaceschen Reihe.

Vortragender führt die mittlerweile in den Math. Annalen 101 (1929), S. 120—125, veröffentlichten Untersuchungen in der dort in der Einleitung angegebenen Richtung weiter. Eine ausführliche Mitteilung erscheint an anderer Stelle.

4. Hermann Schmidt, Jena: Neue Verallgemeinerung der Legendreschen Funktionen.

Der Vortrag berichtet über die Weiterführung gewisser Untersuchungen von Herrn R. König.[1] [2]) Betrachtet werden Differentiale

$$d v_{\lambda+l}^{(\mu+m)} = \tau^{\lambda+l} f^{\mu+m}(\tau, z)\, d\tau \quad [f(\tau, z) = \tau^n - n z \tau + n - 1;\ n \text{ ganz} \geqq 2]$$

mit beliebigen komplexen Exponenten $\lambda + l$, $\mu + m$ [λ, μ die „reduzierten Exponenten"; l, m ganz] und ihre Integrale als Funktionen von z. Der Fall $\mu = 0$ (hier ausgeschlossen) ist z. T. schon behandelt[2]); $\mu = \frac{1}{2}$, $m = -1$, $n = 2$ führt auf die Legendreschen Funktionen; μ bel., m bel., $n = 2$ auf die Gegenbauer-Nielsenschen metasphärischen Funktionen.

Die arithmetische Voruntersuchung zeitigt ähnliche Ergebnisse wie in [2]). Als Integrationswege hat man im *allgemeinen Fall* ($\lambda \neq 0$, $\lambda + n\mu$ nicht ganz) Jordan-Pochhammersche Doppelschleifen zu wählen. Bei passender Auswahl von n solchen, etwa $C_j = (t_j^+ 0^+ t_j^- 0^-)$ [t_j die Wurzeln von $f(t, z) = 0$] erhält man für jedes l, m ein System von n Funktionen

$$\int_{C_j} d v_{\lambda+l}^{(\mu+m)} = V_{j, \lambda+l}^{(\mu+m)} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

folgender Art:

1) Neue funktionentheoretische Betrachtungen über Polynomreihen. Vortrag Düsseldorf, dieser Jahresbericht 1927.

2) Über Polynomsysteme, die aus der hypozykloidischen Abbildung entspringen, I. Crelles Journal 159, 1928. S. 67.

Die Matrix

$$\left(V_{j,\lambda+l}^{(\mu+m)}\right)\begin{bmatrix} j = 1, 2, \ldots, n \\ l = l_0, \ldots, l_0 + n - 1 \end{bmatrix} \quad \text{oder ebenso} \quad \frac{d^{k-1} V_{j,\lambda+l_0}^{(\mu+m)}}{dz^{k-1}} \begin{bmatrix} j = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{bmatrix}$$

enthält in ihren n Spalten eine rational unabhängige Basis einer (von der Wahl von m unabhängigen) Klasse $K_{\lambda\mu}$ Riemannsche Funktionensysteme. Der Übergang zu den der gleichen Klasse angehörigen

$$V_{j,\lambda+l}^{(\mu+m)} \quad [l \text{ bel. ganz}]$$

erfolgt vermöge einer linearen Differenzengleichung $\Delta_l(v, z) = 0$ hinsichtlich l mit dem Parameter z;

der Übergang zu den der gleichen Klasse angehörigen

$$\frac{d^k V_{j,\lambda+l_0}^{(\mu+m)}}{dz^k} \quad [k \text{ bel. ganz} > n - 1]$$

durch eine lineare Differentialgleichung $D_z(v, l) = 0$ hinsichtlich z mit dem ganzzahligen Parameter l, die dem Fuchsschen Typ angehört und nur in den n-ten Einheitswurzeln und im Unendlichen singuläre Punkte hat.

In der 1. Spalte jeder der Matrizen steht ein Fundamentalsystem der Differenzengleichung wie der Differentialgleichung. Alle Integrale über „geschlossene" Integrationswege sind von diesen linear abhängig. Die Gruppe von $K_{\lambda\mu}$ läßt sich mit Hilfe der Methode der veränderlichen Integrationswege vollständig aufstellen.

Im *Spezialfall* $\lambda = 0$ (bzw. $\lambda + n\mu$ ganz) erscheinen als (nicht verschwindende) Residuen an den nunmehr unverzweigten Stellen $\tau = 0$ (bzw. $\tau = \infty$) Polynome, die sich als Eigenlösungen der Differentialgleichung, jetzt als abhängig vom Parameter $\lambda + l$ angesehen, auffassen lassen. Im ersten Fall sind die ganzzahligen Werte $l = -l' - 1 < 0$ die Eigenwerte. Es ergeben sich Reihenentwicklungen analytischer Funktionen nach den Polynomen $P_\nu(z)$ bzw. den ihnen „zugeordneten" $Q_\nu(z)$, die sich in die Theorie von Herrn Krafft[1]) einordnen. Man gelangt jedoch hier zu einem unmittelbaren Konvergenzbeweis auf Grund asymptotischer Formeln von Darboux[2]) und Herrn Perron.[3])[4]) Die $Q_\nu(z)$ genügen ebenfalls einer Differentialgleichung $D_z(v, l') = 0$, in der jedoch μ durch $1 - \mu$ (bzw. $-\mu$ für $\Re(\mu) = 0$) zu ersetzen ist. Der Konvergenzbereich ist von einer singularitätenfreien Hypozykloide $|T_1(z)| = \text{konst.}$ begrenzt (T_1 absolut kleinste Wurzel von $f(t, z) = 0$).

Eine ausführliche Darstellung soll im Crelleschen Journal erscheinen.

---

1) Zur Theorie der Faberschen Polynome und ihrer zugeordneten Funktionen. Diss. Marburg 1915.

2) Approximation des fonctions de très grands nombres. Journal de mathématiques, s. 3, t. 4, 1878.

3) Über das Verhalten von $f^{(\nu)}(x)$ für lim $\nu = \infty$, wenn $f(x)$ einer linearen homogenen Differentialgleichung genügt. Münchener Sitzungsber. 1913.

4) Über die näherungsweise Berechnung von Funktionen großer Zahlen. Münchener Sitzungsber. 1917.

5. E. Hopf, Berlin: Ein Beitrag zur Theorie der elliptischen Differentialgleichungen.

6. H. Cremer, Leipzig: Über das Zentrumproblem.

Eine analytische Funktion $f(z)$ besitzt ein Zentrum in einem Punkte ζ, wenn es beliebig kleine Umgebungen von ζ gibt, die durch $f(z)$ schlicht auf sich selbst abgebildet werden.[1])

Durch Betrachtungen über die Güte der Approximation der Identität durch die Iterierten einer Zentrumfunktion einerseits und die Iterierten eines Polynoms andererseits wird gezeigt, daß ein Polynom $P(z)$ in solchen Fixpunkten $\zeta = P(\zeta)$, deren Drehwinkel $\varphi = \arg P'(\zeta)$ gewisse transzendente Vielfache einer Drehung sind, kein Zentrum besitzen kann.

Das Verfahren läßt sich leicht auf gewisse Lückenreihen übertragen; es gestattet u. a. die Konstruktion ganzer transzendenter Nichtzentrumfunktionen.

Eine ausführliche Darstellung erscheint demnächst.[2])

7. J. Lense, München: Über die konforme Abbildung durch die Funktion $w = \frac{1}{\Gamma(z)}$.

Durch die genannte Funktion wird eine konforme Abbildung zwischen der z- und w-Ebene festgelegt. Die über der w-Ebene ausgebreitete Riemannsche Fläche soll hergestellt werden. Zu diesem Zweck werden folgende Sätze bewiesen:

Die algebraischen Verzweigungspunkte — sie seien mit $a_1, a_2, a_3, \ldots$ bezeichnet — sind von der ersten Ordnung, abwechselnd positiv und negativ und wachsen dem absoluten Betrage nach über alle Schranken. Die entsprechenden Kreuzungspunkte, d. h. die in der z-Ebene den Verzweigungspunkten entsprechenden Punkte, fallen mit den Nullstellen von $\Gamma'(z)$ zusammen. Die transzendenten Verzweigungspunkte sind identisch mit den Konvergenzwerten der Gammafunktion, als solche kommen nur 0 und ∞ in Frage. Die Gammafunktion strebt in allen Winkelräumen der rechten Halbebene ausschließlich der imaginären Achse nach ∞, in allen Winkelräumen der linken Halbebene ausschließlich der negativen reellen Achse und einschließlich der imaginären Achse nach 0, ebenso auf allen Wegen dieser Halbebene, deren Abstände von der negativen reellen Achse schließlich oberhalb einer festen Schranke bleiben. Sie besitzt außer 0 keinen Ausnahmewert. Die Kurven $|w| =$ konst. der z-Ebene werden konstruiert. Sie liegen symmetrisch zur reellen Achse und erstrecken sich in der rechten Halbebene ins Unendliche. Dabei konvergiert das Argument von z in der $\left\{\begin{matrix}\text{oberen}\\ \text{unteren}\end{matrix}\right\}$ rechten Halbebene nach $\pm\frac{\pi}{2}$, das von w divergiert gleichzeitig nach $\mp\infty$. Ebenso divergiert das Argument von w in allen Winkelräumen der $\left\{\begin{matrix}\text{oberen}\\ \text{unteren}\end{matrix}\right\}$ Halbebene ausschließlich der reellen Achse nach $\mp\infty$.

1) Vgl. Math. Ann. 98, S. 151ff.

2) Berichte der Math.-Phys. Klasse der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig.

Die über der w-Ebene ausgebreitete Riemannsche Fläche hat folgenden Aufbau: Ein Blatt der w-Ebene wird längs der reellen Achse von 0 nach $-\infty$ und von a_1 nach $+\infty$ aufgeschnitten. An den ersten Schlitz wird eine logarithmische Wendeltreppe, an den zweiten ein zweites Blatt, entsprechend einem Verzweigungspunkt erster Ordnung, angeheftet. Das zweite Blatt wird außerdem längs der reellen Achse von a_2 nach $-\infty$ aufgeschnitten und daran in ähnlicher Weise ein drittes Blatt angeheftet. Dieses wird längs der reellen Achse von a_3 nach $+\infty$ aufgeschnitten und daran wieder in ähnlicher Weise ein viertes Blatt geheftet und so fort.

Eine ausführliche Behandlung des Gegenstandes ist im Jahrgang 1928 der Berichte der Münchener Akademie der Wissenschaften erschienen.

8. K. Knopp, Tübingen: Neuere Sätze über Reihen mit positiven Gliedern.

Im Jahre 1915 hat Hardy zuerst bewiesen, daß aus der Konvergenz von $\sum x_n^2$ stets diejenige von $\sum\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^2$ folgt ($x_n \geqq 0$) und daß die letztere Summe kleiner als viermal der ersteren ist. Später hat er gezeigt, daß statt des Exponenten 2 irgendein Exponent $\varkappa > 1$ genommen werden darf, wenn statt 4 die Konstante $\left(\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\right)^{\varkappa}$ eingesetzt wird. 1923 hat Carleman bewiesen, daß mit $\sum a_n$, $a_n \geqq 0$, auch $\sum \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ konvergiert und $< e \sum a_n$ ist. In beiden Fällen kann die Konstante durch keine bessere ersetzt werden. Bedeutet also $\varphi(x)$ eine der Funktionen x^t mit $0 < t < 1$ oder $\log x$, $\Phi(x)$ die dazu inverse Funktion und $\sum a_n = s$ eine beliebige konvergente Reihe mit nichtnegativen Gliedern (die nicht alle verschwinden), so ist damit bewiesen:

A. $\sum \Phi\left(\frac{\varphi(a_1)+\varphi(a_2)+\cdots+\varphi(a_n)}{n}\right) = S$ ist konvergent.

B. Es gibt eine nur von φ abhängige Konstante $K(\varphi)$, so daß $S < K(\varphi)\, s$ ist.

C. Die untere Grenze der in B. zulässigen Konstanten $K(\varphi)$ ist

$$K_*(\varphi) = \lim_{m\to+\infty} \frac{1}{\log m} \sum_{n=1}^{m} \Phi\left(\frac{\varphi(1)+\varphi\left(\frac{1}{2}\right)+\cdots+\varphi\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\right).$$

Es wird die Frage aufgeworfen, für welche zueinander inversen Funktionen φ und Φ diese Sätze gültig sind, und es werden umfassende Klassen von Funktionen angegeben, für die dies der Fall ist.

Eine ausführliche Darstellung der Untersuchung wird in der Mathematischen Zeitschrift erscheinen.

9. L. Neder, Münster i. W.: Über unbeschränkt differenzierbare Funktionen von reellen Argumenten.

Freitag, den 21. September 1928, 9 Uhr.

Mitgliederversammlung
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Vor Eintritt in die Tagesordnung gedenkt der Vorsitzende der verstorbenen Mitglieder.

1. Bericht des Schriftführers. Die D. M.-V. hat heute 1111 Mitglieder gegen 1047 zum gleichen Zeitpunkt des Vorjahres. Zur Zeit sind noch ℛℳ 1850.— verfügbar. Seit der letzten Ausschußsitzung gab es keine Angelegenheit, die den Ausschuß beschäftigen mußte.

2. Der Vorsitzende berichtet über die von ihm versandten Kondolenz- und Gratulationsschreiben.

3. An Stelle der ausscheidenden F. Schilling und E. Schmidt werden K. Knopp und R. Rothe zu Mitgliedern des Ausschusses gewählt.

4. Die Herren Lorey und Schnee werden wieder zu Kassenrevisoren gewählt.

5. Als nächster Versammlungsort wird auf Anregung der Physiker Prag gewählt.

Nachstehender Bericht der Eulerkommission lag zum Zeitpunkt der Tagung noch nicht vor. Er wird hiermit zur Kenntnis der Mitglieder gebracht.

Bericht an die Deutsche Mathematiker-Vereinigung,
erstattet von ihrer Eulerkommission.

Die D. M.-V. hat seinerzeit das großartige Unternehmen der Eulerausgabe mit der lebhaftesten Freude begrüßt, sie hat nicht nur einen namhaften Beitrag für die Ausgabe gespendet, sondern auch schon 1907 durch die Einsetzung einer besonderen Eulerkommission bekundet, daß sie das Fortschreiten der Ausgabe unausgesetzt mit Teilnahme verfolgen will. Unter diesen Umständen wird die D. M.-V. eine Tatsache, die den beiden Unterzeichneten erst vor kurzem bekannt geworden ist, nicht mit Stillschweigen übergehen können, die Tatsache nämlich, daß Ferdinand Rudio schon vor Jahresfrist die Generalredaktion der Eulerausgabe niedergelegt hat.

Rudio hat in jahrzehntelanger, nie ermüdender Arbeit für die Eulerausgabe gewirkt; sein Name wird für alle Zeit mit dieser verknüpft bleiben. Was er in dieser Hinsicht geleistet hat, gibt ihm Anspruch auf den Dank aller Mathematiker, der jetzt lebenden und der kommenden. Mit der größten Treue und Aufopferung hat er sich dem Unternehmen auch dann noch gewidmet, als ihm seine treuen Mitarbeiter, unsre unvergeßlichen Stäckel und Krazer durch den Tod entrissen wurden. Sein Rücktritt von der Generalredaktion bedeutet für die Eulerausgabe einen neuen Verlust, der aufs tiefste zu beklagen ist. Die Unterzeichneten sind der Meinung, daß die D. M.-V. das Recht und die Pflicht hat, die Öffentlichkeit von diesem Rücktritt in Kenntnis zu setzen und dem hochverdienten Generalredakteur ihren Dank auszusprechen für alles das, was er in diesen langen Jahren für die Eulerausgabe getan hat.

Die Eulerkommission der D. M.-V.
F. Engel. Alfred Pringsheim.

Freitag, den 21. September 1928, $10^1/_2$ Uhr.

Vorsitz: Fraenkel, Kiel.

1. P. Hertz, Göttingen: Über Axiomensysteme von Satzsystemen.[1])

Gegenstand der Betrachtungen sind elementare Sätze ohne Variabeln und Sätze mit Variabeln:

1. a und b bedingen zusammen c.

2. $\varrho(x_1 x_2)\, \varrho(x_2 x_3) \rightarrow \varrho(x_1 x_3)$,

wo rechts keine anderen Variabeln vorkommen als links (wenn Sauerstoff und Wasserstoff zusammentreten und ein Funke überspringt, so entsteht Wasser; wenn zwei Dinge einem dritten gleich sind, so sind sie untereinander gleich). Es wird zunächst der Schluß wie in der klassischen Logik definiert; daraus ergeben sich die Definitionen für Beweis, abgeschlossenes System (System, zu dem durch Schlüsse kein neuer Satz gefunden werden kann) und Axiom.

Unter den Beweisformen sind ausgezeichnet die *aristotelische* und die *goklenische* (die übrigens nicht von Goklenius herrührt). In jener sind alle Obersätze, in dieser alle Untersätze Axiome. Es läßt sich für den elementaren Fall zeigen, daß jeder Beweis nach Wahl in einen Beweis von einer dieser beiden Formen übergeführt werden kann.

Sätze, die im Vordersatz ein überflüssiges Glied enthalten, wird man vermeiden, also Sätze von der Form $a_1 a_2 \rightarrow b$, wenn schon $a_1 \rightarrow b$ gilt.

Man kann nun für den elementaren Fall beweisen, daß diese Sätze auch als Durchgangspunkt im Beweis entbehrlich sind. Endlich wird eine notwendige Bedingung dafür angegeben, daß ein Satzsystem mehrere unabhängige Axiome besitzt.

Die Theorie der Sätze mit Variabeln, der *Makrosätze*, kann auf die Theorie der elementaren Sätze zurückgeführt werden, indem man alle Variabeln durch Konstanten ersetzt. Die so entstehenden Sätze heißen *Mikrosätze*. Ist gegeben ein System von Makrosätzen und ein endliches Axiomensystem dafür, so stehen die daraus hervorgehenden Mikrosysteme in demselben Verhältnis, aber das Mikroaxiomensystem braucht nicht unabhängig zu sein. Auch enthält es unendlich viele Sätze. Nun kann man zwar aus einem *endlichen* Axiomensystem immer ein unabhängiges Axiomensystem durch Wegstreichen von Sätzen herstellen, aber nicht immer aus einem unendlichen. Aber gerade die unendlichen Mikrosysteme, die auf die eben beschriebene Weise entstehen, haben immer die Eigenschaft, daß aus ihnen durch Wegstreichen ein unabhängiges Axiomsystem hervorgeht.

In diesem Zusammenhang ist vielleicht noch folgende Bemerkung von Interesse: Wenn für ein unendliches System elementarer Sätze die Streichmethode versagt, enthält man unter Umständen ein Restsystem, das unabhängig, aber kein Axiomsystem ist. Es gibt dann also Sätze, die aus endlich vielen Sätzen des Restsystems nicht bewiesen werden können. Dennoch

1) Ein ausführlicher Bericht wird in den Annalen der Philosophie erscheinen.

könnte man in manchen Fällen wenigstens eine engere Beziehung zwischen einem solchen nicht beweisbaren Satz und dem Restsystem vermuten. Es gibt nämlich manchmal beweisartige, ins Unendliche reichende Gebilde (Stammbäume), für die die Sätze des Restsystems die Rolle von Axiomen zu spielen scheinen. Man könnte dann meinen, daß jene Sätze den betreffenden Satz, wenn sie ihn auch nicht zu beweisen gestatten, doch implizieren.[1]) Indes ist eine solche Implikation nicht möglich, denn es gilt der Satz: Wenn eine unendliche Satzmenge einen Satz impliziert, so läßt sich dieser auch aus einer endlichen Teilmenge beweisen. Der Beweis aus endlich vielen Sätzen des Restsystems ist ja aber unmöglich.

2. A. Scholz, Berlin: Anwendung der Klassenkörpertheorie auf die Konstruktion von Körpern mit vorgeschriebener Gruppe.[2])

Das Artinsche Reziprozitätsgesetz gibt eine eineindeutig-isomorphe Abbildung der Galoisschen Gruppe eines relativ-Abelschen Körpers $K_{\mathfrak{J}}/K$ auf eine Idealklasseneinteilung $\mathfrak{J}$ im Grundkörper K. Die Isomorphie bezieht sich dabei nicht bloß auf Komposition, sondern auch auf Transformation von Gruppenelementen, in folgendem Sinne: Sind K und $K_{\mathfrak{J}}$ beide Galoissch in bezug auf einen Körper $K_0 < K < K_{\mathfrak{J}}$, ist $\mathfrak{G}$ die Gruppe von $K_{\mathfrak{J}}/K_0$, $\mathfrak{A} < \mathfrak{G}$ die Gruppe von $K_{\mathfrak{J}}/K$, $\mathfrak{J}$ die zugehörige Idealklassengruppe in K, so entsprechen sich für $S < \mathfrak{G}$ die Zuordnungen: $J \leftrightarrow A$ und $J^S \leftrightarrow A^S = S^{-1}AS$ $(J < \mathfrak{J},\ A < \mathfrak{A})$.

Für die Konstruktion von Körpern mit vorgeschriebener Gruppe (über gegebenem algebraischen Zahlkörper K_0) läßt sich diese Isomorphie so ausnutzen: Hat man schon einen Körper K/K_0 zur Gruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ Abelsche invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$), so genügt es unter Umständen schon, in K eine Idealklasseneinteilung $\mathfrak{J}$ zu machen, die der Gruppe $\mathfrak{A}$ in bezug auf Komposition und Transformation isomorph (und außerdem invariant gegenüber den Substitutionen S) ist, um als zugehörigen Körper $K_{\mathfrak{J}}$ einen Körper mit der Galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}$ über K_0 zu bekommen, nämlich dann, wenn die Gruppe $\mathfrak{G}$ schon durch die Struktur von $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}$ und die in $\mathfrak{A}$ stattfindenden Transformationen bestimmt ist. Dies ist der Fall bei einem gewissen metabelschen Gruppentyp $\mathfrak{G}$, den ich „Dispositionsgruppe" nenne. Für diesen Typ kann $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ eine beliebige Abelsche Gruppe sein; betreffs der Struktur der Gruppe $\mathfrak{A}$, die jedenfalls die Kommutatorgruppe enthält, verweise ich auf die oben zitierte Arbeit. Für die Dispositionsgruppe $\mathfrak{G} > \mathfrak{A}$ läßt sich auch stets eine Idealklassengruppe $\mathfrak{J}$ im Körper K aufstellen, ohne Rücksicht darauf, wie K zur Gruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ über K_0 konstruiert ist. Es ergibt sich damit, daß die Konstruktion von „Dispositionskörpern" durchweg möglich ist, weiter daraus, daß man insbesondere zu jeder Gruppe quadratfreier Ordnung Körper bilden kann. Würde man außerdem für alle metabelschen Gruppen von Primzahlpotenzordnung die Konstruktion von Körpern beherrschen, so überhaupt für alle metabelschen Gruppen.

---

1) Ein Satzsystem $\mathfrak{A}$ impliziert einen Satz $\mathfrak{e}$, wenn $\mathfrak{e}$ in allen Bereichen gilt, in denen $\mathfrak{A}$ gilt.

2) Eine ausführliche Publikation wird in der Math. Zeitschrift erfolgen.

3. A. Brauer, Berlin: Über die Approximation algebraischer Zahlen durch algebraische Zahlen.

Für die Approximation einer algebraischen Zahl α vom Grade n über dem Körper der rationalen Zahlen durch algebraische Zahlen eines festen Grades h gilt der folgende Siegelsche Satz[1]):

Versteht man unter der Höhe $H(\alpha)$ von α das Maximum der absoluten Beträge der teilerfremden ganzen rationalen Koeffizienten in der irreduzibeln Gleichung, der α genügt, so gilt für alle algebraischen Zahlen ξ vom Grade h die Ungleichung

$$|\alpha - \xi| > \frac{\Gamma}{H(\xi)^{2h\sqrt{n}}},$$

wo Γ eine nur von α und h abhängende Konstante bedeutet.

Es wird gezeigt, daß dieser Satz nur dann tief gelegen ist, wenn

$$h < \frac{n}{2\sqrt{n} - 1}$$

ist. Für

$$h > \frac{n}{2\sqrt{n} - 1}$$

liefert der folgende Satz eines bessere Abschätzung:

Ist α eine algebraische Zahl vom Grade n, $H(\alpha)$ ihre Höhe, so gilt für alle algebraischen Zahlen ξ vom Grade h die Ungleichung

$$|\alpha - \xi| > \frac{C}{H(\xi)^m},$$

wo m den Relativgrad von α in bezug auf $P(\xi)$ und C eine angebbare, nur von α und h abhängende Konstante bedeutet.

Der Beweis dieses Satzes wird mit elementaren Mitteln erbracht.

Eine ausführliche Darstellung erscheint im Crelleschen Journal.[2])

4. Richard Brauer, Königsberg: Über Systeme hyperkomplexer Größen.

Es wird der Satz bewiesen: Δ sei ein nullteilerfreies System hyperkomplexer Größen, also ein Schiefkörper, über dem als vollkommen vorausgesetzten Grundkörper K. Ist, wie man ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit annehmen kann, K auch das Zentrum von Δ, und ist m^2 der Rang von Δ über K[3]),

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r},$$

so kann man Δ als direktes Produkt $\Delta_1 \times \Delta_2 \times \cdots \times \Delta_r$ darstellen, wo Δ_ϱ ein Schiefkörper mit dem Zentrum K vom Rang $(p_\varrho^{\alpha_\varrho})^2$ über K ist.

1) Approximation algebraischer Zahlen, Mathematische Zeitschrift 10 (1921), S. 173 bis 213.

2) Die Arbeit ist inzwischen erschienen: Bd. 160 (1929), S. 70—99; s. insbesondere S. 75—78.

3) Dieser Rang ist unter unseren Voraussetzungen stets eine Quadratzahl.

Beim Beweis spielen die folgenden Überlegungen eine Rolle. Ist A ein einfaches System hyperkomplexer Größen über K, so ist zu A nach einem Satz von Maclagan Wedderburn eindeutig ein Schiefkörper Δ zugeordnet; A ist dem System aller Matrizen eines wohlbestimmten Grades mit Koeffizienten aus Δ isomorph. A_1 und A_2 seien zwei einfache Systeme mit dem Zentrum K; dann ist auch das direkte Produkt $A_1 \times A_2 = A_3$ einfach und hat K als Zentrum. Sind Δ_1, Δ_2, Δ_3 die zu A_1 bzw. A_2 bzw. A_3 zugeordneten Schiefkörper, so zeigt sich, daß Δ_3 allein durch Δ_1 und Δ_2 bestimmt ist; man erhält so ein Verknüpfungsgesetz, das je zwei Schiefkörpern Δ_1, Δ_2 einen wohlbestimmten dritten Δ_3 zuordnet. Die Gesamtheit aller Schiefkörper mit dem Zentrum K bildet bei dieser Verknüpfung eine Abelsche Gruppe. Weiter ergibt sich, daß in dieser Gruppe jedes Element endliche Ordnung hat. Ist Δ ein Schiefkörper vom Rang m^2 über K mit dem Zentrum K, so hat Δ als Element der Abelschen Gruppe eine Ordnung l, die in m aufgeht und durch alle Primzahlen, die in m aufgehen, teilbar ist. Der oben genannte Satz ist dann eine Folge der einfachen Tatsache, daß ein Gruppenelement von endlicher Ordnung sich als Produkt von Elementen von teilerfremden Ordnungen darstellen läßt.

Eine ausführliche Darstellung erscheint in etwas anderer Behandlung in der Mathematischen Zeitschrift.

5. Th. Estermann, Hamburg: Über die Summe der Teilerzahlen der Glieder einer arithmetischen Reihe.

Es bezeichne $d(m)$ die Anzahl der positiven Teiler von m, $\sigma_s(m)$ die Summe der s-ten Potenzen derselben und $\sigma_s'(m)$ die Ableitung von $\sigma_s(m)$ nach s. c und v seien feste natürliche Zahlen. Ich betrachte die Summe

$$D(n) = \sum_{m=1}^{n} d(c + mv).$$

Für $D(n)$ hat Ramanujan die folgende Formel ohne Beweis angegeben:

$$D(n) = \alpha_c(v) n \,(\log n + 2\gamma - 1) + \beta_c(v) n + O\,(n^{\frac{1}{3}} \log n).$$

Dabei ist γ die Eulersche Konstante, und $\alpha_c(v)$ und $\beta_c(v)$ sind als Koeffizienten der Dirichletschen Reihen

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{\alpha_c(v)}{v^s} = \frac{\zeta(s)\,\sigma_{-s}(c)}{\zeta(1+s)}$$

und
$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{\beta_c(v)}{v^s} = -\frac{\zeta(s)\,\sigma_{-s}(c)}{\zeta(1+s)} \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{\zeta'(1+s)}{\zeta(1+s)} + \frac{\sigma'_{-s}(c)}{s_{-s}(c)}\right)$$

definiert. Ich habe die etwas schwächere Formel

$$D(n) = \alpha_c(v) n \,(\log n + 2\gamma - 1) + \beta_c(v) n + O\left(\sqrt{n}\right) \tag{1}$$

elementar bewiesen und will den Beweis für den besonders einfachen Fall $(c, v) = 1$ hier durchführen.

Eine leichte Rechnung ergibt in diesem Falle

$$(2) \qquad \alpha_c(v) = \sum_{q|v} \frac{\mu(q)}{q}, \quad \beta_c(v) = \sum_{q|v} \frac{\mu(q)}{q} \log \frac{v}{q^2}.$$

Bekanntlich ist $d(m) = O(m^\varepsilon)$ für jedes positive ε, also jedenfalls $d(m) = O(\sqrt{m})$ und daher

$$D(n) = \sum_{\substack{h \leqq nv \\ h \equiv c \pmod v}} d(h) + O(\sqrt{n}) = \sum_{\substack{kl \leqq nv \\ kl \equiv c \pmod v}} 1 + O(\sqrt{n})$$

$$= 2 \sum_{\substack{kl \leqq nv,\ k > l \\ kl \equiv c \pmod v}} 1 + O(\sqrt{n}) = 2 \sum_{\substack{l \leqq \sqrt{nv} \\ (l, v) = 1}} A_l + O(\sqrt{n}),$$

wo A_l die Anzahl der ganzen Zahlen k ist, die den Bedingungen $l < k \leqq \frac{nv}{l}$ und $kl \equiv c \pmod v$ genügen. Letztere besagt, daß k einer bestimmten Restklasse mod v angehört. Daher ist $A_l = \frac{n}{l} - \frac{l}{v} + O(1)$ und

$$(3) \qquad D(n) = 2 \sum_{\substack{l \leqq \sqrt{nv} \\ (l, v) = 1}} \left(\frac{n}{l} - \frac{l}{v}\right) + O(\sqrt{n}).$$

Nun ist

$$\sum_{\substack{qr = l \\ q|v}} \mu(q) = \sum_{q|(l,v)} \mu(q) = \begin{cases} 1 & [(l, v) = 1] \\ 0 & [(l, v) > 1] \end{cases}$$

also

$$(4) \qquad \sum_{\substack{l \leqq \sqrt{nv} \\ (l, v) = 1}} \left(\frac{n}{l} - \frac{l}{v}\right) = \sum_{\substack{qr \leqq \sqrt{nv} \\ q|v}} \mu(q) \left(\frac{n}{qr} - \frac{qr}{v}\right)$$

$$= n \sum_{q|v} \frac{\mu(q)}{q} \sum_{r \leqq \frac{\sqrt{nv}}{q}} \frac{1}{r} - \frac{1}{v} \sum_{q|v} q\mu(q) \sum_{r \leqq \frac{\sqrt{nv}}{q}} r.$$

Berücksichtigt man, daß

$$\sum_{r \leqq \frac{\sqrt{nv}}{q}} \frac{1}{r} = \log \frac{\sqrt{nv}}{q} + \gamma + O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right) \quad \text{und} \quad \sum_{r \leqq \frac{\sqrt{nv}}{q}} r = \frac{nv}{2q^2} + O(\sqrt{n})$$

ist, so ergibt sich (1) leicht aus (2), (3) und (4).

Kassenbericht.

Nach dem Stande vom 31. Dezember 1928.

Einnahmen	RM	Rpf	Ausgaben	RM	Rpf
An Kassenvortrag:			Per Beitrag zum Reichsverband mathematischer Gesellschaften, Berlin	275	—
Bar . . . . RM 121.40					
Postscheckkonto . . . . „ 32.95	154	35	„ Beitrag zur Aufstellung der Cantor-Büste an Prof. Dr. Jung, Halle a. S.	150	—
An Jahresbeiträgen der Mitglieder:					
Für 1924 . . . . RM 3.—			„ Zuschuß zu d. Jahresberichten Band 37, Heft 1/4, 5/10	2882	25
„ 1925 . . . . „ 3.—					
„ 1926 . . . . „ 76.—			„ nichtbezahlte Jahresberichte Band 36, Heft 5/8, 9/10	21	20
„ 1927 . . . . „ 337.—					
„ 1928 . . . . „ 2313.70			„ Druckrechnungen, Porti, Adressenschreiben, Schreibarbeit, Postscheckgebühren, Zahlkarten	533	87
„ 1929 . . . . „ 296.—					
„ 1930 . . . . „ 5.—					
„ 1931 . . . . „ 5.—			„ Postscheckamt, Leipzig	1000	—
„ 1932 . . . . „ 5.—			„ Irrtümliche Überweisung	16	15
Einmalige Zahlung . . „ 30.—	3073	70	„ Kassenbestand:		
„ Postscheckamt, Leipzig	1000	—	Bar . . . . RM 45.23		
„ Allgemeine Deutsche Credit-Anstalt, Leipzig	800	—	Postscheckkonto . . . . „ 104.35	149	58
RM	5028	05	RM	5028	05

Vermögensbestand:

RM 637.50 Deutsche Reichsanleihe Ablösungsschuld
„ 137.50 „ „ Auslosungsscheine
„ 225.— Stadt-Ablösungs-Anleihe
„ 100.— „ Auslosungsscheine.

Allgemeine Deutsche Credit-Anstalt, Leipzig: Laufende Rechnung RM 1270.40.

Vorstehenden Kassenbericht und Vermögensbestand haben wir geprüft und richtig befunden.

Leipzig, den 24. Juni 1929. gez. Dr. W. Lorey, gez. Dr. W. Schnee.

Gesehen und genehmigt:

München, den 29. Juni 1929. gez. Dr. G. Faber, Schatzmeister der D. M.-V.

Personalnachrichten.

Habilitationen.

Dr. W. Hurewicz hat sich an der Universität Amsterdam habilitiert.

Ernennungen, Auszeichnungen usw.

Der ord. Prof. an der Universität Kiel A. Fraenkel hat einen Ruf an die Universität Jerusalem (auf den Lehrstuhl der Mathematik und als Direktor des mathematischen Institutes) abgelehnt. Er hat aber diesen Auftrag für zwei Jahre (Herbst 1929 bis Herbst 1931) angenommen und ist zu diesem Zweck von der preußischen Unterrichtsverwaltung beurlaubt worden. Er wird in Kiel von R. Schmidt vertreten werden.

Der ord. Prof. an der Universität Berlin I. Schur wurde zum korrespondierenden Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu Leningrad gewählt.

Th. Kaluza, bisher Privatdozent an der Universität Königsberg i. Pr., wurde zum ordentlichen Professor an der Universität Kiel ernannt.

Anläßlich der hundertsten Wiederkehr des Todestages von N. H. Abel am 6. April 1929 wurden Engel in Gießen, Juël in Kopenhagen, Landau in Göttingen und Phragmén in Stockholm von der Universität Oslo zu Ehrendoktoren ernannt.

Sprechsaal der Enzyklopädie.

Herr Kneser hat am Ende der Einleitung seiner Arbeit „Neue Untersuchung einer Reihe aus der Theorie der elliptischen Funktionen" (Journal für Mathematik, Bd. 158 S. 211) folgenden Satz ausgesprochen: „Ich bemerke noch, daß weder die Formel (1) noch eine ihr gleichwertige in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften trotz ihrer fundamentalen Bedeutung vorkommt, was ich nicht dem Verfasser des betreffenden Artikels zur Last lege, sondern dem in sich verfehlten System des berühmten Sammelwerkes."

Ich erwidere hierauf: Die von Herrn Kneser vermißte Formel steht in der Enzyklopädie Bd. II, 2 S. 293 als Gleichung (320). Sie findet sich damit auch genau an jener Stelle, wo das Problem besprochen wird, an das auch Herr Kneser anknüpft, nämlich die Aufgabe der Berechnung der Perioden bei gegebenem Integralmodul.

Bad Harzburg, den 5. Juni 1928. Robert Fricke.

Mitteilungen und Nachrichten.

Geeignete Mitteilungen nimmt der Herausgeber stets mit größtem Danke entgegen.

Preisaufgaben und gekrönte Preisschriften.

Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis.

Der von Herrn Domherrn Dr. Dr. Ing. Alfred Ackermann-Teubner in Leipzig im Jahre 1912 bei der Universität Leipzig gestiftete „Alfred Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis zur Förderung der mathematischen Wissenschaften", der zur Zeit 500 RM beträgt, ist für das Jahr 1928 durch das Preisgericht dem Direktor des Instituts für Meereskunde in Berlin, Herrn Prof. Dr. Albert Defant, für seine in dem Werk „Das Zeitenproblem des Meeres in Landesnähe, Hamburg 1925" zusammengefaßten Arbeiten zuerkannt worden.

Literarisches.

Besprechungen.

Johannes Kepler, Neue Astronomie. Übersetzt und eingeleitet von Max Caspar. 416 S. Mit XIII und 68 Figuren. München 1929, R. Oldenbourg.

Herr Caspar, der der Wissenschaft schon seine schöne Ausgabe des Mysterium cosmographicum geschenkt hat, hat sich durch die Ausgabe der Astronomia Nova von 1609 einer noch ungleich schwierigeren Aufgabe unterzogen. Denn dies Werk bereitet durch die Art seiner Sprache und die temperamentvolle Ausgeglichenheit seiner Darstellung dem Leser und erst recht dem Übersetzer ganz erhebliche Schwierigkeiten. Dafür führt es aber auch wie kein anderes mitten in Keplers Art zu arbeiten ein. Denn es schildert fast dramatisch bewegt die Entdeckung der Planetengesetze, nicht in Gaußscher Manier in der fertigen Darstellung die Spuren der Erfindung verwischend und absichtlich verbergend, sondern gerade darauf bedacht, jeden Schritt, der in jahrelanger mühsamer Arbeit zum Ziele führte, den Leser miterleben zu lassen. In einer ausführlichen Einleitung schildert

weiter der Herausgeber noch an Hand uns überkommener Briefe die äußeren Lebensumstände, die auf der einen Seite in glücklicher Fügung Kepler mit Tycho de Brahe zusammenführte und ihm so die Bearbeitung von dessen Marsbeobachtungen ermöglichte, die aber auf der anderen Seite in all ihrer Widrigkeit gewiß nicht die schwierige Aufgabe erleichterten. Ferner enthält die ausführliche Einleitung einen Kommentar zu den einzelnen Kapiteln, der dem Leser einen Faden in die Hand gibt, an dem er sich durch das Labyrinth der Darstellung geleiten lassen kann. Eine Zusammenstellung der Fachausdrücke und Erläuterungen zu einzelnen Stellen machen das Maß der Mühe voll, das der Herausgeber im Interesse des Lesers auf sich genommen hat. Zu bewundern ist auch die Begeisterung, mit der Caspar sich Jahr um Jahr für die Herausgabe Keplerscher Schriften einsetzt. Auch ihm wird es dermaleinst eine schöne Genugtuung sein, wenn der stolze Plan einer würdigen Gesamtausgabe der Keplerschen Werke, der zur Zeit im Werden ist, endlich zur Wirklichkeit geworden sein wird.

Noch sei angemerkt, daß der Verlag sich dankenswerterweise entschlossen hat, den Mitgliedern der Deutschen Mathematiker-Vereinigung einen Vorzugspreis einzuräumen. Alles nähere besagt ein diesem Hefte beiliegender Prospekt.

Bieberbach.

E. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie. 3 Bde. Leipzig 1927, S. Hirzel.

Ein imposantes Meisterwerk, einzig dastehend in seiner Art, hat Landau uns hier beschert. Dafür gebührt ihm warmer Dank aller Freunde der Zahlentheorie und aller, die es werden wollen.

Entstanden aus einem groß angelegten, über sechs Semester erstreckten Vorlesungszyklus, behandelt das Werk einen großen Teil des gegenwärtigen Bestandes der Zahlentheorie. Nicht in Form eines Handbuches, das systematisch alles Vorhandene sammelt und ordnet. Vielmehr hebt Landau nach dem Prinzip größtmöglicher Prägnanz, nicht größtmöglicher Allgemeinheit, aus jedem der großen Hauptgebiete — elementare, additive, analytische, geometrische, algebraische Zahlentheorie — eine Reihe von scharf umgrenzten Einzelkomplexen heraus, in deren jedem er die wichtigsten und interessantesten Ergebnisse bis an die Grenze unseres heutigen Wissens entwickelt.

Er bevorzugt bei dieser Auswahl solche Komplexe, bei denen in neuerer und neuester Zeit grundlegende Fortschritte erzielt sind und an deren Ausbau er selbst beteiligt ist:

„Goldbachsche Vermutung, Waringsches Problem, Primzahlverteilung und Zetafunktion, Gitterpunkttheorie." Diese Gebiete werden hier zum ersten Male in Lehrbuchform dargestellt.[1]) Sie geben in ihrer Gesamtheit einen schönen Überblick über den gegenwärtigen Stand der analytischen Zahlentheorie, willkommen nicht nur dem Kenner als »kanonische Darstellung« (um einen in dem Werk häufig verwendeten Ausdruck Landaus zu gebrauchen) dessen, was er im Laufe der Zeit gelernt oder selbst gefunden hat, sondern vor allem auch dem Lernenden als leicht zugänglicher und

1) Inwiefern man dies auch für „Primzahlverteilung und Zetafunktion" sagen kann, die Landau ja schon in seinem „Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen", 1909, behandelt hatte, führe ich nachher genauer aus.

„lesbarer“[1]) Ersatz für die zahlreichen, weit verstreuten, größtenteils recht schwierigen Originalarbeiten.

Aber auch klassische Bestandteile der Zahlentheorie: „Dirichlets Satz von den Primzahlen in einer arithmetischen Progression, Gauß-Dirichlets Klassenzahlbestimmung der binären quadratischen Formen, die Grundlagen der algebraischen Zahlentheorie, Kummers u. a. Sätze zur Fermatschen Vermutung“ kommen zu ihrem Recht.

Die eigene Leistung Landaus erstreckt sich bei weitem nicht allein auf seinen Anteil am Ausbau der in den analytischen Teilen dargestellten Komplexe. Darüber hinaus hat er in diesen wie in den übrigen Teilen die in den Originalarbeiten gegebenen oder zum klassischen Bestand gehörigen Beweise der liebevollsten Durcharbeitung unterzogen und sie dabei in glattere und leichter zugängliche Form gesetzt. Sei es der Aufbau des Beweises eines „großen Satzes“ aus einer Reihe von Einzelbeweisen, sei es ein solcher Einzelbeweis für einen „kleinen Satz“ — stets gibt er eine Fassung, die sich durch möglichste Kürze, oder möglichst wenig Aufwand, oder möglichste Prägnanz, oder möglichste Eleganz, oder mehreres von diesen auszeichnet. Selbst in elementaren Beweisen, die längst zum klassischen Bestande der Zahlentheorie gehören, wird der Kenner vielfach neuartige Wendungen entdecken, die sich von den bisher üblichen in genannter Art abheben.

Die äußere Form des Werkes kommt dem Leser in jeder Weise entgegen. Definitionen, Sätze und Formeln sind durch alle drei Bände fortlaufend numeriert, die Nummern der Definitionen und Sätze zudem jeweils am Kopf der rechten Druckseite vermerkt, die „großen Sätze“ durch besonders fetten Druck von „Satz“ und Nummer gekennzeichnet. Fußnoten mit sachlichen Erläuterungen oder Literaturzitaten gibt es nicht, störende Druckfehler auch nicht dank der besonders sorgfältigen Korrektur. Durch weiträumigen Satz, ohne die leider heute so verbreitete Scheu vor viel weißem Papier, wird eine schöne Übersichtlichkeit im Kleinen wie im Großen erreicht. Für die Bequemlichkeit manches Lesers wäre vielleicht ein Übriges zu tun durch ein Quellen- und Literaturverzeichnis wie im „Handbuch“, an Stelle des bloßen Hinweises im Vorwort auf die Enzyklopädie und Dicksons „History of the Theory of Numbers“. Eine Anzahl in den Text eingestreuter Übungsaufgaben, deren — für den weiteren Text entbehrliche — Lösungen am Schluß des dritten Bandes gegeben sind, regt den Leser zu selbständigem Nachdenken über manche dem Gang der Handlung entspringende Frage an. »Auf Wunsch seiner Freunde« hat Landau »den lebendigen, mitunter scherzhaften Stil seiner Vorlesungen tunlichst beibehalten und nicht überall durch den trockenen Lehrbuchstil ersetzt«. Die zahlreichen eingestreuten scherzhaften Bemerkungen dienen aber keineswegs nur zur zeitweiligen Erheiterung des Lesers, sondern verfolgen darüber hinaus bestimmte Zwecke, meist Verhütung eines — nahe- oder fernliegenden — Mißverständnisses, und erreichen dies jedenfalls prägnanter als längere sachliche Ausführungen.

Vorkenntnisse aus der Zahlentheorie bedarf der Leser nicht. Doch muß er mit den Grundlagen von Differential- und Integralrechnung und komplexer Funktionentheorie vertraut sein.

1) Nicht alle Anführungszeichen im folgenden zitieren Landau, sondern nur diese: » «.

Eine ausführliche Aufzählung auch nur aller „großen Sätze" des Werkes würde über den Rahmen einer Besprechung hinausgehen. Ich will daher im folgenden die auf die drei Bände verteilten 13 Teile nur kurz durchstreifen und hier und da eine Bemerkung anknüpfen, ohne — auch nur mir selbst gegenüber — Anspruch auf Vollständigkeit oder systematische Auswahl des zur Sprache kommenden zu machen.

Teil I. Hier werden die **Grundlagen der Zahlentheorie** bis zum quadratischen Reziprozitätsgesetz und der Pellschen Gleichung kurz und prägnant eingeführt. Damit ist schnell ein Fundament für alles Kommende geschaffen und — »nun geht's los«.

Teil II. Brunscher [Satz von den Primzahlzwillingen] **und Dirichletscher Satz** [von den Primzahlen in einer arithmetischen Progression]. Es mutet ungewöhnlich an, diese beiden nach Entdeckungszeit, Gehalt und Beweismethode grundverschiedenen Sätze in einem Atem genannt und unter einer Überschrift zusammengestellt zu finden, »nur (nur!)« weil es zwei nichttriviale Aussagen über Primzahlverteilung sind, bei deren Beweis man noch wesentlich mit den Hilfsmitteln der reellen Analysis auskommt.

An Kürze der Darstellung ist hier, wie im folgenden mehrfach, ein Rekord geleistet: Der eigentliche Dirichletsche Beweis, nach Erledigung der Vorbereitungen über Restklassen und Charaktere auf neun Seiten, erfordert nur neun Seiten!

Die Beschränkung der Restklassencharaktere $\chi(a)$ auf Argumente $a > 0$ ist mitunter in der Handhabung unbequem. Es fragt sich auch, ob eine Belastung der Grundlagen in Teil I durch Aufnahme der Theorie der endlichen Abelschen Gruppen nicht durch die zahlreichen Vorteile für Darstellung und Verständnis ausgeglichen werden würde, die sich bei gruppentheoretischer Einkleidung der Restklassentheorie, sowie später mannigfacher Teile der algebraischen Zahlentheorie, ergäben.

Der Beweis, daß $L(1,\chi) \neq 0$ für komplexes χ ist, ist — abweichend von dem klassischen — nachgebildet dem Mertensschen Beweis für $\zeta(1+it) \neq 0$. Durch diese Wendung und durch geschickte Anwendung des Satzes vom geometrischen und arithmetischen Mittel wird es Landau möglich, nicht nur die bei ihm recht unbeliebten Logarithmen der L-Reihen, sondern auch deren zwar eindeutigen, aber darum nicht schöneren Ersatz durch Exponentialdarstellung ganz zu umgehen. Nicht für jeden Leser wird übrigens der Satz vom geometrischen und arithmetischen Mittel (bei mehr als zwei Zahlen) zu den »kanonischen« Kenntnissen gehören, so daß ein kurzer Beweis zwar entbehrlich (weil mit den »kanonischen« Kenntnissen leicht herstellbar), »aber nicht unnötig« gewesen wäre; übrigens auch nicht aus dem Rahmen des Werkes fallend, das doch sonst überall dem Leser es so leicht wie möglich macht.

Der auf Mertens und Landau zurückgehende elementare Beweis, daß $L(1,\chi) \neq 0$ für reelles $\chi \neq \chi_0$ ist, ist vielleicht in der zweiten Fassung des „Handbuchs" (§ 106) doch etwas durchsichtiger als in der hier übernommenen ersten, die eine mittels Integration auszuführende Summenabschätzung spart.

Über den klassischen Beweis erfährt der Leser lediglich: »Dirichlet bewies ihn [den Satz $L(1,\chi) \neq 0$ für reelles $\chi \neq \chi_0$] nur durch einen großen Umweg über die sog. Theorie der Klassenzahl quadratischer Formen«.

Mit diesem »nur durch einen großen Umweg« wird aber der Sache nur die eine Seite abgewonnen. Sicherlich ist der elementare Mertens-Landausche Beweis der einzig bekannte direkte Weg zum Gipfel (Dirichletscher Satz). Aber hat nicht ein Umweg, der aufs beste geebnet Schritt für Schritt die schönsten Ausblicke gewährt, auch seine Vorzüge vor dem direkten Weg durch undurchsichtiges Dickicht? Soll man sich nicht in der Zahlentheorie, als einer Liebhaberwissenschaft, auch einmal genießend ergehen, wie in einer reizvollen Gebirgslandschaft, über Berge und Täler, offenen Blicks für alle sich darbietenden Schönheiten, anstatt nur die Gipfel ohne Blick nach rechts und links in atemraubenden Gewaltmärschen zu erklimmen?[1]) Erst der kann den Mertens-Landauschen Beweis als ein Erproben der Kräfte im sportlichen Training gebührend würdigen, der durch Studium des klassischen Dirichletschen Beweises ein genaues topographisches Bild der zu überwindenden Hindernisse gewonnen hat. Es ist daher recht zu bedauern, daß Landau nicht wenigstens nachträglich Dirichlets klassischen Beweis bringt, um so mehr, als das im Rahmen der später in Teil IV behandelten Theorie der Klassenzahl quadratischer Formen nur noch einige wenige Zeilen erfordert hätte. Landaus Bekenntnis in Band 1, S. 128 zu den Schönheiten dieser klassischen Theorie motiviert sich doch sicher nicht lediglich aus dem unerhörten Schwung, mit dem sie ihr Ziel, die Klassenzahlbestimmung, meistert, sondern auch aus dem ästhetischen Reiz der Beziehungen dieser Theorie zu vielen wichtigen Fragen der Zahlentheorie, insbesondere der überraschenden Anwendung auf den Satz von der arithmetischen Progression.

Teil III bringt, als Vorbereitung für die spätere Behandlung des Waringschen Problems, die klassischen Sätze über **Zerlegung in zwei, drei, vier Quadrate** in prägnantester Darstellung. Der üblicherweise durch »Schubfachschluß« bewiesene Satz von der Approximation einer reellen durch eine rationale Zahl wird hier sehr schnell aus der vorangestellten Theorie der Farey-Brüche gefolgert.

Teil IV, Klassenzahl binärer quadratischer Formen, bringt die klassische Gauß-Dirichletsche Theorie auf kurzem Raum in klarer, durchsichtiger Darstellung. Für die Vorzeichenbestimmung der Gaußschen Summen $\sum_{s=0}^{n-1} e^{2\pi i \frac{s^2}{n}}$ bringt Landau neben der Dirichletschen Methode, mittels Fourierreihen, anhangsweise noch drei modernere Methoden, von Kronecker, I. Schur, Mertens. Es ist schade, daß statt Kroneckers Methode nicht die verwandte, technisch einfachere von Mordell[2]) gebracht wird; schade auch, daß nicht die allgemeine Reziprozitätsformel

$$\sum_{s=0}^{n-1} e^{2\pi i \frac{ms^2}{n}} = \frac{1+i}{4}\sqrt{\frac{n}{m}} \sum_{r=0}^{4m-1} e^{-2\pi i \frac{nr^2}{4m}}, \qquad (n>0,\ m>0)$$

für die Gaußschen Summen bewiesen wird, was doch ebenso »mit« fast

1) Die ganz ähnlichen Worte aus Minkowskis Nekrolog auf Dirichlet waren mir bei der Niederschrift nicht bekannt.

2) „On a simple summation of the series $\sum_{s=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i s^2}{n}}$", Messenger of Mathematics, vol. 48 (1918), p. 54—56.

»gleicher Mühe oder vielmehr mit gleicher Leichtigkeit (heute!)« gegangen wäre, wie die mit dieser Begründung durchgeführte Bestimmung in dem nicht benötigten allgemeinen Fall, an Stelle des allein benötigten Spezialfalles $n = p > 2$.

Teil V bringt als erste der großen zahlentheoretischen Fragen, die in neuester Zeit durch geniale Anwendung tiefstliegender Methoden der komplexen Analysis »angreifbar« geworden sind, die Hardy-Littlewoodschen Sätze **zur Goldbachschen Vermutung**, begleitet durch das »unangreifbare«, drohend-fette: »**Wenn** es eine absolute Konstante $\Theta < \frac{3}{4}$ gibt, so daß keine Wurzel irgendeines $L(s)$ der Halbebene $\sigma > \Theta$ angehört«.

Wundervoll klar herausgearbeitet ist die Zergliederung des Hauptbeweises in fünf fest umgrenzte Schritte, hier wie auch in Teil VI beim Waringschen Problem. Beim mündlichen Vortrag hieß es, wie ich höre: »Drama in fünf Akten, das sich von anderen Dramen zu seinem Vorteil dadurch unterscheidet, daß in ihm etwas bewiesen wird«.

Während Hardy-Littlewood den Integrationsweg von $\sigma = 2$ nach $\sigma = -\frac{1}{4}$ verschieben und durch die dabei auftretenden, von den Nullstellen der L-Funktionen herrührenden Residuenglieder genauere Einsichten über die Unumgänglichkeit des: »**Wenn** usw.« erhalten, verschiebt Landau, ähnlich wie bei seinen Beweisen in der Primzahlverteilungslehre, nur möglichst wenig nach links, bis $\sigma = \Theta + \varepsilon$. So kommt er zwar mit geringerem Aufwand durch, gelangt aber nicht zu jenen interessanten Unumgänglichkeitseinsichten.

Teil VI, Das Waringsche Problem, zählt Landau »zu dem Wichtigsten, was er seinen Lesern zu erzählen hat«. So gibt er denn auch in diesem Teil ein ganz besonders gelungenes Meisterstück seiner Darstellungskunst. In imposanter Folge werden in den vier ersten Kapiteln die vier Hauptsätze der vier großen Hardy-Littlewoodschen Arbeiten zum Waringschen Problem entwickelt. Durch seine Art der Darstellung und durch mannigfache, teils auf ihn selbst zurückgehende Vereinfachungen der Originalbeweise hat Landau sein Bestes getan, um das Studium dieser hochinteressanten und bedeutungsvollen, aber schwierigen Theorie weiten Kreisen zu ermöglichen.

Sicherlich hätte es die Beweisführung mit neuen Überlegungen belastet und den an sich schon beträchtlichen Umfang in unliebsamer Weise weiter vergrößert, wenn Parameter, wie der Radius des Integrationskreises, die Ordnung der Farey-Teilung, die Grenze zwischen major und minor arc's nicht von vornherein festgelegt, sondern erst im Laufe der Untersuchung gegeneinander abgeglichen worden wären. Aber sollte nicht ein solches Ausbalanzieren der Parameter auf der anderen Seite auch seine didaktischen Vorteile haben, indem es die Einsicht in den Mechanismus des Beweisgangs vertieft? Allein auf solche Weise, verbunden mit einem Verfolgen der einzelnen Etappen der Entstehungsgeschichte, dürfte beispielsweise der Grund für die Beweisanordnung des Hilfssatzes über die major arc's (Satz 278) und für das Abzielen auf den dortigen n-Exponenten $\frac{aK}{K+1} + \varepsilon$ verständlich werden. Und so hätte es wohl auch in Kapitel 3 das Verständnis erleichtert, wenn s nicht von vornherein als Funktion von k festgelegt worden wäre, um Konstantenserien zu sparen.

In Kapitel 1, § 1, S. 244 wäre es vielleicht doch dienlich gewesen, den Beweis für die Grenzformel für $f(x)$ bei radialer Annäherung an eine Einheitswurzel vor der Durchführung in der für spätere Beweise »zweckmäßigsten« Form auch in der gedanklich »einfachsten« Form, mittels Ersetzung der Summe durch ein Integral, durchzuführen.

Das fünfte und letzte Kapitel dieses Teils bringt die Winogradoffsche Methode zum Waringschen Problem, die zwar auf kürzestem, aber man kann — trotz aller Schwierigkeiten der ursprünglichen Hilbertschen und der Hardy-Littlewoodschen Methode — nicht sagen auf durchsichtigstem und elegantestem Wege, die Existenz der Anzahl $g(k)$, d. h. das zuerst von Hilbert erzielte Grundresultat zum Waringschem Problem ergibt. Die Winogradoffsche Methode hat aber den Vorteil, daß sie durch eine von Landau herrührende Verschärfung die erste »anständige« Abschätzung für die Anzahl $g(k)$ gibt, während die Hardy-Littlewoodsche Methode Abschätzungen nur für die (an sich interessanteren) Anzahlen $G(k)$ und $G_1(k)$ liefert.

Teil VII, Analytische Zahlentheorie, behandelt Primzahlverteilung und Zetafunktion.

Dieser Teil wird als einziger unter der Gesamtüberschrift »Aus der analytischen Zahlentheorie« geführt, während die Goldbachsche Vermutung und das Waringsche Problem unter »Aus der additiven Zahlentheorie« und die Gitterpunkttheorie unter »Aus der geometrischen Zahlentheorie« stehen. Der Sache nach sind doch aber all diese Dinge, und überdies auch Dirichletscher Satz und Klassenzahl quadratischer Formen, die unter »Aus der elementaren Zahlentheorie« stehen, Teilgebiete der analytischen, d. h. mit Hilfsmitteln der Analysis arbeitenden Zahlentheorie.

In Teil VII wird zunächst, gleich für die Primzahlen in einer arithmetischen Progression, der Primzahlsatz mit der weniger scharfen Restabschätzung $O\left(xe^{-\alpha_1\sqrt{\log x}}\right)$, ($\alpha_1 > 0$, vom Modul k der Progression unabhängig), bewiesen. Auf Grund neuerer, 1924 gewonnener Erkenntnisse gelingt das Landau jetzt, ohne wie 1909 im „Handbuch“ die Fortsetzbarkeit der L-Funktionen über die ganze Ebene, ihre Funktionalgleichung und ihre Weierstraßsche Produktzerlegung zu benutzen, auf nur 20 Seiten. Auf weiteren 17 Seiten leitet er dann die sehr tiefliegende, durch Littlewood 1924 speziell für die Verteilung aller Primzahlen ($k = 1$) erzielte, schärfste derzeit bekannte Restabschätzung $O\left(xe^{-\alpha_2\sqrt{\log x \log\log x}}\right)$, ($\alpha_2 > 0$, von k unabhängig), für die Primzahlen in einer arithmetischen Progression her, ebenfalls wieder unter Umgehung jener Sätze über die ζ-Funktion, die bei Hardy-Littlewood im Spezialfall $k = 1$ gebraucht werden, und der analogen Sätze über die L-Funktionen.

Diese im bisherigen Verlauf vermiedene „klassische Theorie“ kommt aber — wenigstens für die ζ-Funktion — dann auch zu ihrem Recht. Ihre Darstellung ist im wesentlichen aus dem „Handbuch“ übernommen, aber hier vielleicht durch ihre Gedrängtheit noch prägnanter. Über das „Handbuch“ hinausgehend, ist sie durchsetzt mit der Theorie der Lindelöfschen μ-Funktion und den neuen Ergebnissen von Hardy und Bohr-Landau über die Nullstellen der ζ-Funktion auf und in der Nähe von $\sigma = \frac{1}{2}$, sowie

gefolgt von den Sätzen Hardy-Littlewoods und anderer über den genauen Zusammenhang der Riemannschen Vermutung mit der wahren Ordnung des Fehlergliedes im Primzahlsatz, in der entsprechenden Formel für die summatorische Funktion der Möbiusschen μ-Funktion und mit einer Aussage über Farey-Brüche.

Teil VIII, Gitterpunkte, behandelt die Frage nach dem wahren Exponenten in der Restabschätzung der Gitterpunktanzahl, zunächst für den Kreis (»Weltkonstante« ϑ), dann für allgemeinere Kurven $\mathfrak{C}$ (Konstante $\vartheta_{\mathfrak{C}}$), und bringt, jedenfalls darstellerisch, recht schöne »Ordnung in das Chaos, das van der Corput durch seine Entdeckung von $\vartheta_{\mathfrak{C}} < \frac{1}{3}$ der Wissenschaft geschenkt hat« und das »durch Jarníks Entdeckung von $\vartheta_{\mathfrak{C}_0} = \frac{1}{3}$ bei passendem $\mathfrak{C}_0$ nur verschlimmert worden« ist.

Wieder hat Landau manche Originalbeweise, z. B. die von $\vartheta \leqq \frac{1}{3}$ (Sierpiński), $\vartheta \geqq \frac{1}{4}$ (Hardy-Landau) für den Kreis, erheblich vereinfacht, und der Zustand, in dem diese eigenartige Theorie jetzt glatt und verhältnismäßig leicht zugänglich vorliegt, kann als schönes Ergebnis seiner Vorlesungen gebucht werden.

Teil IX entwickelt die **Elemente der Idealtheorie** mit den zwar nicht unter diese Überschrift gehörenden, aber nichtsdestoweniger willkommenen Beigaben: Thue-Siegelscher Satz und (auf nur 4 Seiten mit nur einem Hilfssatz!) Transzendenz von e und π.

Auch sonst ist dieser Teil nicht lediglich eine Wiederholung des ersten Teils aus Landaus inzwischen in zweiter Auflage erschienenem Buch: „Elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale". Anders wie dort steht hier ein didaktisch wesentliches, vorbereitendes Kapitel über die Körper $\mathsf{P}(i)$, $\mathsf{P}(\varrho)$, $\mathsf{P}(i\sqrt{5})$ an der Spitze, werden ferner die grundlegenden Sätze über algebraische und ganze algebraische Zahlen gleich, zwecks späterer Anwendung beim Fermatschen Problem, für beliebige Zahlkörper als Grundkörper bewiesen, und auch in der Einzelausführung ist manches einfacher geworden.

Teil X bringt **Weiteres aus der Idealtheorie.** Zunächst kommt der Dedekindsche »Grundzahl«satz (aus $\mathfrak{p}^2/\mathfrak{d}$ folgt $\mathfrak{p}/\Delta$ und umgekehrt), der auf die elegante, ursprüngliche Dedekindsche Art mittels der Theorie der Spuren mod. $\mathfrak{p}$ und mod. $\mathfrak{d}$, nicht wie im Hilbertschen „Zahlbericht" mittels der Kroneckerschen Formentheorie, bewiesen wird. Weiter der Minkowskische »Grundzahl«satz ($\Delta > 1$ für $n > 1$), in dessen Beweis der übliche Minkowskische Satz von den linearen Formen auf Grund einer geschickt angesetzten »kanonischen Transformation« durch einen eigenartigen, „eindimensionalen", durch »Schubfachschluß« herauskommenden Hilfssatz (Satz 843) ersetzt werden konnte; ob der Beweis auch in dieser Form leicht verständlich ist, kann nur der beurteilen, der, mit Unkenntnis der bisherigen Beweise ausgestattet, diese nicht durchschimmern sieht. Schließlich nach einigem anderen der Dirichletsche Satz über die Grundeinheiten, dessen Beweis in der jetzigen Fassung gegenüber dem zitierten Landauschen Buch ganz entschieden an Klarheit und Prägnanz gewonnen hat; an Stelle des Minkowskischen Satzes von den linearen Formen wird hier ein sehr durchsichtiger, mehrdimensionaler Schubfachschluß gesetzt, der zu einer für den Zweck ausreichenden, weniger scharfen Tatsache von der Art des Minkowskischen Satzes führt.

Teil XI, Quadratische Körper, entwickelt als Beispiel die klassische Theorie der Primideale, Einheiten und Klassenzahl eines quadratischen Körpers. Die Klassenzahl wird durch Herstellung der bekannten Zuordnung zwischen Idealklassen und Formenklassen auf die bereits in Teil IV behandelte Klassenzahl binärer quadratischer Formen zurückgeführt.

Teil XII, Beweis der Fermatschen Vermutung für reguläre Primzahlen. Die Anwendung auf die Fermatsche Vermutung, über die bisher nirgends eine so klar umrissene Darstellung, wie sie Landau hier gibt, vorlag, »war nach den Grundlagen das einzige Ziel« Landaus »in der algebraischen Zahlentheorie«. „Zum Glück" erfordert diese Anwendung so erhebliche Hilfsmittel, daß die ihr zuliebe geschriebenen Teile IX und X die Hauptsätze der (ja historisch aus dem gleichen Anlaß erwachsenen) algebraischen Zahlentheorie in großer Vollständigkeit bringen mußten, und daß so diese Teile, auch losgelöst von der beabsichtigten Anwendung, als Einführung in die algebraische Zahlentheorie geeignet sind.

Sehr schön wird die Kummersche Methode zunächst an den beiden einfachsten Fällen $n = 4,3$ herausgearbeitet. Hier ist noch keine Idealtheorie nötig, und der Leser gewinnt so den Blick dafür, an welchen Punkten in Kummers Beweisen für $p = n > 2$ die Idealtheorie wesentlich eingreift.

In klarer Folge werden sodann die beiden Kummerschen Sätze über die Unmöglichkeit der Fermatschen Gleichung für reguläre Primzahlen p bewiesen, jedesmal nach Herleitung der erforderlichen Hilfssätze über den Kreiskörper der p-ten Einheitswurzeln.

Die Hauptschwierigkeit beim Beweise des zweiten Kummerschen Satzes liegt in den heranzuziehenden Hilfssätzen über die Einheiten eines Kummerschen Körpers. Diese leider nicht zu umgehenden Hilfssätze, deren Verallgemeinerungen übrigens ebenso zu den unerfreulichsten Kapiteln der allgemeinen Klassenkörpertheorie gehören, dürften wohl erst in gruppentheoretischer Einkleidung ganz durchsichtig werden. Demjenigen, der nicht weiß, daß die in Definition 125 definierten und in Satz 963 als vorhanden nachgewiesenen relativen Grundeinheiten eine Basis der Faktorgruppe in der Gruppe aller Einheiten nach der Untergruppe der Einheiten von der Form $\mathsf{N}\mathsf{H}^{1-S}$ sind, und demjenigen, dem der gruppentheoretische Zusammenhang dieses Tatbestandes mit dem in Satz 964 als vorhanden erwiesenen Basiselement der Faktorgruppe der Gruppe aller Einheiten mit Relativnorm 1 nach der Untergruppe der Einheiten von der Form H^{1-S} nicht vor Augen geführt wird — dem werden sicherlich wesentliche Gesichtspunkte vorenthalten, die ihm über ein so oder so zu verzeihendes Gruseln bei der Lektüre dieses Paragraphen hinweghelfen könnten.

Übrigens ist das gänzliche Totschweigen der gruppentheoretischen Bedeutung des S, als erzeugenden Elements der Galoisschen Relativgruppe, durchaus nicht in gleicher Weise zu beurteilen. Es geht in der Tat alles auch sehr gut und klar, ohne daß man die Galoissche Gruppe explizit einführt.

In dem musterhaft klar herausgekommenen Beweis des »großen Hilfssatzes von Kummer« in § 5 würde vielleicht der Kernpunkt, nämlich die in Satz 967 nachgewiesene Unverzweigtheit des betr. Kummerschen Körpers, noch besser unterstrichen sein, wenn in Teil X die Dedekindsche «Grundzahl«theorie auch für Relativkörper entwickelt und dann hier die Beziehung zur Relativdiskriminante der Zahl A ausgeführt wäre.

„Die" Primzahl heißt bei Landau p — leider! Denn in diesem Zusammenhang ist die Bezeichnung l für „die" Primzahl heute vielleicht ebenso »kanonisch« geworden (trotz Bachmann[1]), wie die Bezeichnung s für die Variable Dirichletscher Reihen (trotz Knopp[2]).

Teil XIII. Die Sätze von Furtwängler, Wieferich, Mirimanoff und Vandiver. Diese weiteren Kriterien zur Fermatschen Vermutung sind größtenteils schon in dem eben genannten bekannten Bachmannschen Buch dargestellt, heben sich aber dort in der bunten Fülle nicht so klar heraus wie in Landaus Darstellung. Sie fließen ohne Schwierigkeit aus dem — bei Bachmann nur zitierten — Eisensteinschen Reziprozitätsgesetz, dessen Herleitung auf 25 Seiten den Hauptraum dieses letzten Teils, aber doch nur einen einzigen Paragraphen in Anspruch nimmt. Durch Abtrennung der mit ungemeiner Sorgfalt behandelten vorbereitenden Definitionen und Sätze über symbolische Potenzen und das Potenzrestsymbol (weshalb bekommt es nicht diesen üblichen Namen?) in besondere Paragraphen würde wohl der eigentliche Beweis noch klarer herausgehoben sein.

In diesem Beweis, wie auch an manch anderer Stelle des Werks, wirkt die Beschränkung auf Kongruenzen zwischen ganzen Zahlen und auch die Beschränkung auf ganze Ideale hemmend für die technische Durchführung. Es ist schade, daß Landaus bekannte Antipathie gegen Kongruenzen zwischen gebrochenen Zahlen und vor allem die gegen gebrochene Ideale auch durch diesen mit jener Beschränkung spröden, ohne sie glatten Stoff unbeeinträchtigt geblieben ist, besonders da auch in den Grundlagen der elementaren Zahlentheorie und Idealtheorie durch Aufgabe jener Beschränkung mannigfache Kürzungen und Vereinfachungen zu erzielen sind.

Zum Schluß noch einige allgemeine Bemerkungen über die Darstellungsform. Die von Landau geschaffene »kanonische« Form der mathematischen Darstellung ist wohl aus seinen bisherigen Publikationen jedermann hinreichend bekannt, so daß ich mir hier eine Definition dessen, was ich darunter verstehe, ersparen darf. Dieser sog. „Landau-Stil" ist in dem vorliegenden Werk, wo Landau bewußt so schreibt, wie er mündlich vorgetragen hat, in vielleicht noch prägnanterem und individuellerem Maße durchgebildet als in seinen früheren Publikationen.

Die zweifellos vorhandenen Vorzüge des „Landau-Stils" liegen in der unbedingten Klarheit und in der großen Schärfe und Prägnanz. Bei jeder Definition, jedem Satz, jeder Formel ist ein Zweifel, was gemeint ist, völlig ausgeschlossen. Jeder, der die geforderten Vorkenntnisse besitzt, kann von Definition 1, Satz 1, Formel (1) bis Definition 137, Satz 1046, Formel (1141) alles „verstehen". „Verstehen" ja, aber es gibt auch Grade des „Verstehens", gibt ein formales und ein inhaltliches Verständnis. Für das letztere sollen Landaus Einleitungen zu den einzelnen Teilen und Vorbemerkungen zu den wichtigsten Sätzen sorgen, in die aller verbindende Text zwischen den nachher folgenden Definitionen und Sätzen verlegt ist. Für den Kenner ist das sehr bequem. Einmal findet er in den Einleitungen eine kurze Übersicht, meist mit historischem Einschlag, über alles, was nachher bewiesen wird, und in den Vorbemerkungen kurze Angaben über Sinn, Stellung, Tragweite des Satzes und ähnliches. Und dann tritt die spätere genaue

1) „Das Fermat-Problem in seiner bisherigen Entwicklung", 1919.
2) „Funktionentheorie II", 2. Aufl. 1920, S. 52ff.

Durchführung, befreit von allem aufhaltenden Beiwerk, um so deutlicher heraus. Der Lernende jedoch wird häufig stöhnen, wenn er dem auf Einleitung oder Vorbemerkung folgenden streng deduktiven, absolut unsuggestiven Beweisgang, gleichsam blind durch dick und dünn geführt, bis ans angekündigte Ziel zu folgen hat. Dort angelangt, kann er dann und nur dann aufatmen, wenn ihm das formale Verständnis genügt. Verlangt er darüber hinaus auch das inhaltliche Verständnis, so bleibt ihm nichts übrig, als jetzt auf eigene Faust, ohne jede Anleitung, das Gebiet kreuz und quer, aber in der Hauptrichtung von hinten nach vorne zu durchstreifen, um sich die erwünschten Einsichten über Mechanismus und Zusammenhang der einzelnen Etappen des Beweises zu verschaffen.

Diese meine Ausführungen gründen sich nicht nur auf Mitteilungen anderer, sondern auch auf meine eigene Beobachtung; in den analytischen Teilen als „Lernender", in den übrigen als „Kenner"; ein Doppelumstand, der vielleicht auch zu Ungleichmäßigkeiten meiner obigen Stellungnahme zu den einzelnen Teilen geführt hat.

Die Mehrzahl aller mathematischen Darsteller erlebt es immer wieder an sich selbst, wie sich ein Stoff, mehr oder weniger bewußt und gewollt, aus der analytisch-heuristischen Form in die synthetisch-deduktive gestaltet. Nicht das Ergebnis, vielmehr dieser Gestaltungsprozeß selbst ist es aber, auf Grund dessen man zum Schluß sagen kann: „Nun erst ist die Sache verständlich geworden." Dieser zum tiefsten Verständnis führende Prozeß kommt also ganz naturgemäß nur dem Gestalter, nicht auch unmittelbar dem Leser zugute. Ein Leser, der sich der Mühe unterzieht, nach erster Lektüre eines Kapitels das oben beschriebene „Kreuz- und Quer-Verfahren" anzuwenden, wird dann allerdings schließlich auch hinter alle Schliche des Darstellers kommen und wird viele Feinheiten, die ihm zunächst entgingen, verstehen und sachlich wie psychologisch motiviert finden. Er wird dabei zudem die Punkte erkennen, wo fruchtbare Weiterarbeit einsetzen kann, vielleicht deutlicher als bei einer suggestiven, weniger zum Widerspruch herausfordernden Darstellung, bei der er sich in Ruhe gewiegt hätte.

Es kann nicht meine Aufgabe sein, das vorstehend aufgeführte Für und Wider in der Beurteilung des „Landau-Stils" gegeneinander abzuwägen. Letzten Endes handelt es sich um Geschmacksfragen, ich glaube sogar um solche, die durch alle Weiterentwicklung des mathematischen Geschehens unbeirrt fortbestehen werden, und darüber soll man nicht streiten, besonders dann nicht, wenn man durch seine Publikationen in der einen, durch manches Wort in dieser Besprechung in der anderen Richtung belastet ist.

Jedenfalls wird jeder, der Landaus neues Werk liest, mag er den „Landau-Stil" als solchen beurteilen wie er will, unter dem gewaltigen Eindruck des in und zwischen den Zeilen pulsierenden, echten mathematischen Lebens und der dahinterstehenden starken Persönlichkeit stehen, besonders wenn er einmal Landaus mündlichen Vortrag hören durfte. Und jeder wird mit mir gerne Landau das schöne Geschenk danken, das er mit der Herausgabe dieser „Vorlesungen" unserer Generation bereitet hat.

Bei der Vorbereitung und Abfassung dieser Besprechung hat mir Herr »B ± H«[1]) in dankenswerter Weise durch zahlreiche Ratschläge und Bemerkungen geholfen.

H. Hasse.

1) Jahresbericht der D. M.-V. 35, S. 4, Nr. 55.

R. von Mises, Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit. (Schriften zur wissenschaftlichen Weltauffassung, hrsg. von Ph. Frank und M. Schlick, Band 3.) VII u. 189 S. Wien 1928, Julius Springer. Geh. RM 9.60.

Der Verf. hat in diesem Buch die Anschauung, die seinen früheren mathematischen Publikationen über die Wahrscheinlichkeitsrechnung zugrunde lag, einmal ausführlich auseinandergesetzt und es durch die Art seiner Darstellung, die an mathematischen Kenntnissen fast nichts voraussetzt, auch einem breiteren Publikum ermöglicht, in die neuen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und damit in diese selbst einzudringen. Die alte Wahrscheinlichkeitsrechnung, die auf der Voraussetzung fußt, daß man a priori z. B. bei einem Spiel gleichwahrscheinliche Ergebnisse unterscheiden kann, läßt sich zwar in einem gewissen Umfang als rein mathematische Theorie aufbauen, diese hat aber einen entscheidenden Mangel: sie ist keiner Anwendung fähig, sie versagt z. B. schon vollständig gegenüber einem „falschen" Würfel, über dessen physikalische Struktur man nichts weiß. Nun wird aber schon von jeher in den Anwendungsgebieten, z. B. in der Statistik und der Versicherungsmathematik, in Wahrheit eine Wahrscheinlichkeit ganz anders bestimmt, als es die alte Theorie will. Man beobachtet in einer sehr großen Versuchsreihe die relative Häufigkeit des Auftretens eines gewissen Merkmals. Um zu einem theoretisch brauchbaren mathematischen Grundbegriff zu kommen, braucht man diese Versuchsreihe bloß als unbegrenzt fortsetzbar anzunehmen und von jener relativen Häufigkeit einen Limes zu postulieren. Dies ist genau (mit einigen notwendigen Verfeinerungen) der Begriff, den von Mises seiner Theorie, die er in früheren Publikationen schon weit entwickelt hat, zugrunde legt. In dem vorliegenden Büchlein führt nun der Verf. mit großem pädagogischen Geschick in das Wesen dieser Theorie ein und zerstreut damit zugleich die metaphysischen Nebel, die die Darstellungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung früher meist so unerfreulich machten. Eine besonders schöne Frucht der Misesschen Untersuchungen ist der neue Aspekt, den sie hinsichtlich der Gesetze der großen Zahlen gewähren (Bernoulli-Poissonsches und Bayessches Theorem), über die in der früheren Literatur meist die größte Unklarheit herrscht und die hier zwar einen ganz anderen Inhalt bekommen, aber eigentlich erst jetzt das halten, was ihr alter Wortlaut zu versprechen schien. Die Klarheit der geschaffenen Begriffe bewährt sich dann weiter an einer größeren Reihe von wichtigen Beispielen aus der Statistik und Physik. Für letztere erschließt die Wahrscheinlichkeitsrechnung, wie der Verf. schon früher in Vorträgen scharf herausgearbeitet hat, eine theoretische Betrachtungsweise von gänzlich anderer Art, als sie durch die „deterministische" Theorie der Differentialgleichungen vermittelt wird, oder noch deutlicher: Es gibt Erscheinungen wie z. B. die Brownsche Bewegung, die Szintillationen bei radioaktiven Entladungen u. ä., die sich der deterministischen Betrachtungsweise entziehen und nur mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung sinnvoll behandelt werden können.

Die neue Theorie wird sicher bald in weitere Kreise dringen, wenn sie erst einmal voll entwickelt in Form eines Lehrbuchs vorliegt, dessen baldiges Erscheinen der Verf. bereits in Aussicht gestellt hat. Vorläufig wird das vorliegende Büchlein nicht nur von Mathematikern mit Genuß gelesen werden, sondern es gehört vor allem auch in die Hände jedes Statistikers,

Philosophen, Biologen und Physikers, der sich gründlich über das Wesen der so häufig, aber leider so oft falsch angewendeten Wahrscheinlichkeitsrechnung unterrichten will.

Stuttgart. G. Doetsch.

R. Courant, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Bd. I, II. I: Funktionen einer Veränderlichen. XIV u. 410 S. mit 127 Textfiguren. II: Funktionen mehrerer Veränderlicher. VIII u. 360 S. mit 88 Textfiguren. Berlin 1927/28, J. Springer. Geb. je *RM* 18.60.

Die vorliegenden Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung nehmen in der Fülle der Darstellungen dieser Grunddisziplinen der Analysis durchaus eine Sonderstellung ein. Einerseits ist wohl zum erstenmal in einem deutschen Lehrbuch, wie schon seit einer Reihe von Jahren im Vorlesungsbetrieb mancher deutscher Universitäten (z. B. der Berliner) und Technischen Hochschulen, die aus historischen Zufälligkeiten entstandene, sachlich ungerechtfertigte Trennung in Differentialrechnung und Integralrechnung aufgegeben und durch das naturgemäße Einteilungsprinzip nach Funktionen von einer und von mehreren Veränderlichen ersetzt worden. Diese Neueinteilung ermöglicht durch gleichzeitige Einführung der Begriffe Integral und Ableitung (die sich in der älteren Literatur z. B. in dem klassischen Cours d'analyse von Jordan findet, dort aber nicht so konsequent durchgeführt und ausgewertet worden ist wie hier) die scharfe Herausarbeitung und Klarstellung des Kernpunktes der ganzen Infinitesimalrechnung, nämlich des Zusammenhangs zwischen bestimmtem Integral, Ableitung und unbestimmtem Integral. Andererseits gibt das Werk, das mathematisch auf einem hohen Niveau steht, dem Leser einen deutlichen Einblick in die enge Verbundenheit der Analysis mit den Anwendungsgebieten. Die Beispiele aus den Anwendungsgebieten der Infinitesimalrechnung, nicht nur aus der Geometrie, sondern auch aus der Mechanik, aus allen Zweigen der Physik, aus der Chemie und Biologie sind aber in die Darstellung nicht nachträglich hineingezwängt; sie bilden vielmehr, durch allgemeine Bemerkungen über die Anwendbarkeit mathematischer Theorien in den Naturwissenschaften überhaupt eingeleitet, in der Art, wie sie zur Vorbereitung und Erläuterung der Begriffsbildungen und der Methoden ausgenutzt werden, einen organischen Bestandteil des Werkes. Die Begriffe werden fast stets aus der Anschauung oder aus den Anwendungsgebieten entwickelt und erst allmählich, häufig erst in den den einzelnen Abschnitten folgenden Anhängen, die auch Verschärfungen mancher zunächst nur unter sehr weiten Voraussetzungen und unter Berufung auf die Anschauungen bewiesener Sätze und stoffliche Ergänzungen enthalten, zu voller Präzision geführt. Die Darstellung ist lebendig und frei von jeder Pedanterie; sie bietet dem Leser, da häufig Beweise nur kurz angedeutet werden, reichlich Gelegenheit zu selbständiger Arbeit und zeigt außerdem das Bestreben, durch Ausblicke auf ferner liegende mathematische Dinge Interesse und Freude an der Mathematik zu wecken.

Über den reichen Inhalt des Werkes unterrichtet das Inhaltsverzeichnis. Bd. I: 1. Vorbereitungen. 2. Grundbegriffe der Integral- und Differentialrechnung. 3. Differential- und Integralrechnung der elementaren Funktionen. 4. Weiterer Ausbau der Integralrechnung. 5. Anwendungen. 6. Die Taylor-

sche Formel und die Annäherung von Funktionen durch ganze rationale. 7. Exkurs über numerische Methoden. 8. Unendliche Reihen und andere Grenzprozesse. 9. Fouriersche Reihen. 10. Die Differentialgleichungen der einfachsten Schwingungsvorgänge. Bd. II: 1. Vorbemerkungen über analytische Geometrie und Vektorrechnung. 2. Funktionen mehrerer Veränderlicher und ihrer Ableitungen. 3. Ausbau und Anwendungen der Differentialrechnung. 4. Integrale von Funktionen mehrerer Veränderlicher. 6. Integration über mehrdimensionale Bereiche, Fortsetzung. 6. Anwendungen, insbesondere Differentialgleichungen. In stofflicher Hinsicht ist hervorzuheben, daß im Gegensatz zu vielen (auch guten) Büchern die Theorie der Funktionen mehrerer Veränderlicher wirklich in dem für die Physik notwendigen Umfang (Transformation mehrfacher Integrale, Behandlung der Kurven- und Oberflächenintegrale; Herleitung der Integralsätze von Green, Stokes und Gauß, und zwar in vektorieller Form) entwickelt wird.

Zum Inhalt sind im einzelnen noch folgende Bemerkungen zu machen: Der Aufbau der Menge der reellen Zahlen, der auch in den Vorlesungen über Infinitesimalrechnung gewöhnlich unter Hinweis auf eine Spezialvorlesung nicht vorgetragen wird, weil er dem eigentlichen Stoff der Vorlesung zuviel Zeit entziehen würde, wird in dem Buch mit Recht nicht behandelt. Die Stetigkeit der Menge der reellen Zahlen wird nur durch die Forderung der eineindeutigen Abbildbarkeit auf die Menge der Punkte einer Geraden bzw. durch die Forderung, daß jeder unendliche Dezimalbruch eine reelle Zahl darstellt, gesichert. Vielleicht hätte Verf. im Anhang zu Kap. 1., der auch einen Beweis des Bolzano-Weierstraßschen Satzes über die Existenz eines Häufungspunktes, und zwar mit Hilfe der Intervallschachtelung bringt, einige Worte über eine der üblichen Formulierungen des Stetigkeitsaxioms sagen können; das wäre um so mehr am Platze gewesen, als in Band II (Kap. 2, Anhang) das Axiom der Intervallschachtelung für die Ebene explizite formuliert wird. — Der Begriff der oberen Grenze tritt in dem Werk etwas zurück. Z. B. wird die Bogenlänge als Limes der Längen einer ausgezeichneten Folge einbeschriebener einfacher Polygonzüge und nicht, was wohl einfacher wäre, als obere Grenze der Längen der einbeschriebenen einfachen Polygonzüge definiert. — Bei der Auswertung des Integrals $\int R(x, y)\,dx$ (R = rationale Funktion von x und y, $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$) wird der (in der Möglichkeit einer rationalen Parameterdarstellung für die Kegelschnitte liegende) geometrische Grund für die Reduzierbarkeit auf das Integral einer rationalen Funktion nicht erwähnt. Diese geometrische Behandlungsweise ist der in dem Buch gegebenen rein rechnerischen wesentlich überlegen und bietet überdies den Ausblick auf die große Klasse von Integralen $\int R(x, y)\,dx$ (y = algebraische Funktion von x, d. h. $f(x, y) = 0$, f = Polynom in x und y), die elementar ausgewertet werden können, wenn die algebraische Kurve $f(x, y) = 0$ eine rationale Parameterdarstellung zuläßt.

Diese kleinen Ausstellungen sollen natürlich den Wert des Werkes in keiner Weise herabsetzen. Sein Studium kann jedem Studierenden der Naturwissenschaften und der Technik, jedem Naturwissenschaftler und Ingenieur auf das wärmste empfohlen werden; für die Lehrer und Studierenden der Mathematik bildet es eine wertvolle Ergänzung der bekannten guten Lehrbücher der Infinitesimalrechnung.

Berlin-Lankwitz. FEIGL.

R. Orthner, Über physikalische und mathematische Abhängigkeit. Umrisse eines neuen Verfahrens zur Aufstellung von Gleichungen zwischen geometrischen und physikalischen Größen. 28 S. Leipzig u. Wien 1928, Franz Deuticke.

Das Heft soll eine Weiterentwicklung des Buches vom gleichen Verfasser, „Entwurf einer Theorie der physikalischen Abhängigkeit", sein. Ich kenne dieses Buch nicht und habe auch nach der Lektüre des vorliegenden Opus keinen Drang verspürt, es kennen zu lernen. Was an dem Vorgetragenen neu sein soll, ist mir gänzlich unerfindlich, es stellt im Gegenteil einen Rückschritt zu ganz primitiven und unklaren Schlußweisen dar. Als Ersatz für die sauberen Methoden der Differential- und Integralrechnung wird ein unverständlicher Brei angerührt, in dem die naivsten Schlüsse, vage Redensarten und einiges zufällig Richtige durcheinanderschwimmen. So mögen manche Zeitgenossen von Leibniz und Newton operiert haben, heute ist so etwas undiskutabel.

Stuttgart. DOETSCH.

Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

[Die Titel der eingesandten Schriften, mit Ausnahme der Sonderabdrucke, werden hier regelmäßig veröffentlicht. Besprechungen geeigneter Bücher bleiben vorbehalten. Eine Rücksendung der eingegangenen Schriften kann nicht erfolgen.]

H. Beck, Elementargeometrie. 112 S. Leipzig 1929, Akademische Verlagsgesellschaft. Geh. RM 5.30; geb. RM 6.30.

F. F. P. Bisacre, Praktische Infinitesimalrechnung. Berechtigte deutsche Ausgabe unter Mitwirkung von Prof. Dr. E. Trefftz, Dresden; hrsg. von Dr. phil. Ernst König, Elberfeld. Mit 104 Abbildungen und 5 Bildnistafeln. 364 S. Leipzig 1929, B. G. Teubner. Geb. RM 18.—.

R. Carnap, Abriß der Logistik. (Schriften zur wiss. Weltauffassung Bd. 2.) 113 S. Wien 1929, Julius Springer. Geh. RM 10.80.

H. Detlefs, Darstellende Geometrie. Drittes Heft. Frankfurt a. M. 1929, M. Diesterweg. Kart. RM 1.70.

L. E. Dickson, Höhere Algebra. Autorisierte deutsche Ausgabe von L. E. Dicksons Modern algebraic theories. Herausgegeben von Ewald Bodewig in Köln a. Rh. 242 S. Mit 3 Figuren. Leipzig 1929, B. G. Teubner. Geb. RM 14.—.

F M. Feldhaus, Kulturgeschichte der Technik. Teil I und Teil II. (Math.-nat.-techn. Bücherei Bd. 20, 21.) Berlin 1929, Otto Salle, Teil I 154 S. Geb. RM 5.—; Teil II 201 S. Geb. RM 6.—.

Flächenland, Eine Geschichte von den Dimensionen, erzählt von einem Quadrat (E. A. Abbot), deutsch von W. Bieck. (Phys.-math. Bibl. Bd. 83). 49 S. Leipzig 1919, B. G. Teubner. Kart. RM 1.20.

G. Förster und **G. Schütz,** Systematische Fehler in geodätischen Netzen. Veröff. d. pr. geodät. Inst. Neue Folge Nr. 101. Potsdam 1929, RM 7.50.

K. Försterling, Lehrbuch der Optik. 610 S. 198 Fig. Leipzig 1928, S. Hirzel. Geh. RM 20.—; geb. RM 22.—.

R. H. Fowler, Statistical Mechanics. The theory of the properties of matter in equilibrium. 570 S. Cambridge University Press 1929. Geb. sh 37/—.

A. Haas, Atomtheorie. 258 S. Mit 64 Fig. Zweite, völlig umgearb. und wesentlich vermehrte Aufl. Berlin 1929, W. de Gruyter. Geh. RM 10.—; geb. RM 11.50.

O. Haupt, Einführung in die Algebra. Mathematik in Monographien und Lehrbüchern Bd. V, 1 und 2. 1928. Akademische Verlagsgesellschaft. Leipzig Bd. I. 366 S. Geh. RM 24.—; geb. RM 26.—. Bd. II. S. 367—S. 663. Geh. RM 20.—; geb. RM 21.50.

W. Kaiser, Die geometrische Vorstellung in der Astronomie. Versuch einer Charakteristik des Wahrheitsgehaltes astronomisch-mathematischer Aussagen. 146 S. Basel 1929, Rudolf Geering. Geb. RM 18.—.

J. Kepler, Neue Astronomie. Übers. und eingel. von Max Caspar. 416 S. Mit XIII und 68 Fig. München 1929, R. Oldenbourg. Geb. *RM* 38.50; für Mitglieder der D. M.-V., die bis 31. 7. 29 bestellen, *RM* 30.—.

Ph. Lenard, Große Naturforscher. Eine Geschichte der Naturforschung in Lebensbeschreibungen. 324 S. Mit 67 Bildnissen. J. F. Lehmanns Verlag München. Geh. *RM* 10.—; geb. *RM* 12.—.

F. Malsch, Grundriß der darstellenden Geometrie. 113 S. Mit 160 Abbildungen. Leipzig 1928, Quelle & Meyer. Geb. *RM* 3.20.

E. Müller, Vorlesungen über darstellende Geometrie Bd. II: Die Zyklographie. Aus dem Nachlaß herausgegeben von J. E. Krames. 476 S. Mit 208 Fig. Wien 1929, Fr. Deuticke. Geh. *RM* 38.—.

W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie. Bd. I. 5. Aufl. 818 S. Leipzig 1929, B. G. Teubner. Geh. *RM* 42; geb. *RM* 44.—.
Bd. II. 2. Aufl. 307 S. Leipzig 1929, B. G. Teubner. Geh. *RM* 16.—; geb. *RM* 18.—.

Prabodh Chandra Sengupta, The Aryabhatiyam (Translation). 56 S. Calcutta, University Press 1927.

— , The Aryabhata. The father of indian epicyclic Astronomy. 56 S. Calcutta, University Press 1928.

R. Rothe, Höhere Mathematik. Teil II. 201 S. Leipzig 1929, B. G. Teubner. Kart. *RM* 6.40.

A. Schülke, Vierstellige Logarithmentafeln, nebst Hilfstafeln für das praktische Rechnen. D. R. G. M. Ausgabe B. Mit Anhang, Mathematische Formeln. 18., verb. Auflage. 38 S. Leipzig 1929, B. G. Teubner. Geb. *RM* 2.—.

E. Thoma, Rechenbuch für höhere Lehranstalten Ausg. A. Teil III. Frankfurt a. M., M. Diesterweg. *RM* 2.80.

E. Thoma, Rechenbuch für höhere Lehranstalten. Ausgabe B. Teil III. Frankfurt a. M., M. Diesterweg. *RM* 2.60.

E. Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik. 288 S. Leipzig 1928, S. Hirzel. Geh. *RM* 20.—; geb. *RM* 22.—.

H. Wieleitner, Infinitesimalrechnung. 160 S. (Math.-nat.-techn. Bücherei. Bd. 24.) Berlin 1929, Otto Salle. Geb. *RM* 4.50.

J. Züllig, Geometrische Deutung unendlicher Kettenbrüche und ihre Approximation durch rationale Zahlen. 91 S. Zürich 1928, Orell Füßli. Geh. *RM* 6.—; geb. *RM* 7.60.

Jahresversammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1929.

Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung hält ihre diesjährige Jahresversammlung zusammen mit der Deutschen Physikalischen Gesellschaft vom 15.—22. September 1929 in Prag ab. Vortragsanmeldungen nimmt schon jetzt der Schriftführer der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Prof. Dr. L. Bieberbach, Berlin-Dahlem, Gelfertstraße 16, entgegen.

Nähere Mitteilung über Wohnungsbeschaffung u. dgl. wird rechtzeitig erfolgen. Man vgl. auch eine Beilage zu diesem Heft.

Angelegenheiten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Jahresversammlung in Prag vom 17. bis 24. September 1929.

Am Donnerstag, dem 20. September 1929, um 16 Uhr, findet die Geschäftssitzung statt.

Tagesordnung.

1. Bericht über den Stand der Vereinigung und die Tätigkeit des Ausschusses.
2. Ersatzwahl zweier Mitglieder des Ausschusses.
3. Wahl der Kassenrevisoren.
4. Verschiedenes.

Bericht über die Tagung des Mathematischen Reichsverbandes auf der Jahresversammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Hamburg am 21. September 1928.

A. Tagesordnung:

I. Gemeinsame Sitzung des Mathematischen Reichsverbandes mit der Gruppe 15 für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht: Herr Dreetz, Zur Frage der Fachausbildung der Studienreferendare.

II. Geschäftssitzung des Mathematischen Reichsverbandes.

1. Bericht des Arbeitsausschusses, Kassenbericht.
2. Neuwahl des Arbeitsausschusses und der Kassenprüfer.
3. Anregungen aus der Versammlung.

B. Herr Hamel eröffnet die Tagung. Er begrüßt die Anwesenden und macht darauf aufmerksam, daß es 25 Jahre her sind, seit sich die Naturforschertagung mit Schulfragen beschäftigt. Er spricht kurz über die Geschichte sowie Stellung und Aufgaben des M. R.

C. Herr Dreetz spricht zur Frage der Fachausbildung der Studienreferendare. Hierüber hat der Vortragende im deutschen Philologenblatt 1928 Nr. 18 berichtet. Sonderabdrücke stehen auf Wunsch zur Verfügung.

D. Die anschließende Diskussion eröffnet Herr Toeplitz (Bonn), er hebt die beiden Hauptpunkte des Vortrages noch einmal hervor: a) die Ausbildung der Referendare wird besonderen Lehrern (Tutoren und Leitern von Fachseminaren) anvertraut und damit konzentriert, b) die Hochschule wird zur Mitwirkung herangezogen. Die Verkoppelung mit der Hochschule kann nur versuchsweise an einigen Hochschulen durchgeführt werden und zwar mit Persönlichkeiten, die dafür ein besonderes Interesse haben. Der Hochschullehrer kann mit den Tutoren und Studienreferendaren in einer

Arbeitsgemeinschaft zu dem Stoff, der auf der Schule gelehrt wird, zweierlei beitragen: a) die Historie (Genesis), b) die logischen Grundlagen. Dann kommen das didaktische Problem, die wirkliche Unterrichtserfahrung und die Lehrbücher und zum Schluß die Frage zur Erörterung, wie die Sache besser zu machen sei. Auch die Hochschullehrer sollen ihre mitwirkende Tätigkeit nicht ohne Entschädigung ausüben; da es sich hier um eine Hilfe für den Schulunterricht handelt, möge dies die Abteilung U II übernehmen.

Herr Wieleitner (München) spricht zuerst über die Verhältnisse in Bayern bez. Seminarleiter und „Seminarlehrer", welchen Ausdruck er für das Wort „Tutoren" empfiehlt. Er meint ferner, wenn auch Herr Dreetz glaubte, daß im zweiten Jahre die Referendare hinaus müssen in die Provinz, um dort selbständig zu unterrichten, ihre Ausbildung im ersten Jahre doch beendigt werden könnte und sollte, wie es z. B. in Bayern, Württemberg und Sachsen der Fall ist. Zum Schluß führte er den Gedanken aus, daß Seminarleiter und Seminarlehrer innerhalb der nur kurz zu haltenden Vorschriften große Freiheit in der Wahl ihrer theoretischen und in der Art ihrer praktischen Belehrung haben sollten, weil sich nicht jeder für alles eigne und die „Persönlichkeit" doch viel wichtiger sei als alle Vorschriften.

Herr Witting (Dresden) berichtet über die sächsischen Verhältnisse und spricht dann über den günstigen Einfluß, den pädagogisch gute Vorlesungen der Hochschuldozenten auf die Ausbildung der künftigen Lehrer ausüben.

Herr Schröder (Hamburg) gibt einen Überblick über die gegenwärtig in Hamburg übliche Art der Ausbildung der Kandidaten. Jeder Kandidat wird einer besonderen Anstalt überwiesen und an dieser von einem Studienrat in die praktischen Aufgaben seiner Unterrichtsfächer eingeführt. Die allgemeine theoretische Unterweisung in Fragen der Schulgesetzgebung, Schulorganisation u. a. m. erfolgt in dem an der Anstalt befindlichen Seminar durch den Seminarleiter. Eine Reihe von allgemeinen Dingen (Geschichte der Pädagogik, Jugendpsychologie, Schulhygiene usw.) werden von besonders dazu bestellten Dozenten im Institut für Lehrerfortbildung vor den Kandidaten sämtlicher Schulen zugleich behandelt. Die Ausbildungsdauer der Kandidaten beträgt zwei Jahre. Einer zu scharfen Scheidung zwischen den Aufgaben des von Dreetz vorgeschlagenen ersten und zweiten Jahres wird nicht zugestimmt.

Herr Lorey (Leipzig) hält im Gegensatz zu der von Herrn Witting vertretenen Auffassung die derzeitige Ausbildung in Sachsen für völlig unzureichend, besonders weil die literarischen Hilfsmittel an vielen Schulen mangelhaft sind und andererseits die Referendare fast nie von der Hochschule eine Kenntnis der betreffenden Literatur mitbringen.

Herr Jung (Stuttgart). Württemberg hat einjährige Ausbildung im pädagogischen Seminar, dessen Leitung ein Oberstudiendirektor im Hauptamt hat. Alle Fachrichtungen sind hier für die allgemeine Ausbildung vereinigt. Die Fachausbildung findet an den Schulen statt. Jeder Schule wird eine kleine Anzahl Studienreferendare zugewiesen. Die praktische und theoretische Einführung in den Unterricht geschieht durch besonders geeignete Lehrer. Gleichzeitig erfolgt die praktische Ausbildung der Physiklehrer an der Landesanstalt für Physikunterricht.

Herr Baar (Hamburg). Eine Unterstützung der theoretisch-pädagogischen Ausbildung des Kandidaten kann durch eine mehr pädagogische Einstellung beim Philosophiestudium erreicht werden.

Herr Meyer (Altona) stimmt im wesentlichen den Ausführungen Dreetz' zu. Nur opponiert er gegen eine Scheidung in Fachseminar und allgemeines Seminar. Er hält eine enge Verbindung zwischen allgemein pädagogischer und Fachausbildung für durchaus erforderlich und unumgänglich.

Als ein Beispiel in dieser Richtung schildert er den seit zwei Jahren im Gange befindlichen Versuch mit dem pädagogischen Studienseminar in Altona a. E., wo eine Zentralisation aller zu Michaelis jeden Jahres eintretenden Referendare stattfindet. Innerhalb dieses Gesamtseminars kommt nun die Fachausbildung durchaus zu ihrem Recht, sowohl in praktischer als auch theoretischer Form. Vorlesungen, Unterrichtsversuche, praktische Handfertigkeitskurse gehen Hand in Hand miteinander, um den Kandidaten das Bestmögliche für ihren Beruf zu geben.

Herr Dreetz übernimmt das Schlußwort.

E. Herr Hamel gibt folgenden Bericht über den Arbeitsausschuß:

Der Arbeitsausschuß hat im vergangenen Jahr wieder 6 Sitzungen abgehalten, über die die Rundschreiben R. 58—63 Auskunft geben. Im einzelnen sei hervorgehoben:

1. Das Bücherverzeichnis für die Städte wurde fertiggestellt und an diese sowie an die Beiräte rundgeschickt. Von einzelnen Städten trafen erfreuliche Antworten ein.

2. Der Vortrag, den Herr Ministerialrat Metzner in Kissingen gehalten hat, ist in der Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht, Heft 1 (1928) erschienen und steht den Beiräten auf Wunsch zur Verfügung.

3. Auf der Tagung des Fördervereins in Stuttgart war der M. R. durch die Herren Dreetz und Zabel vertreten.

4. Die Hauptarbeit galt der Ausbildung der Studienreferendare. Über die Vorgeschichte und die Zusammensetzung des Ausschusses habe ich bereits in Kissingen berichtet. Der Ausschuß hat jetzt seine Arbeiten beendet, der soeben gehörte Vortrag Dreetz hat Sie davon in Kenntnis gesetzt. Ich danke allen beteiligten Herren, namentlich auch denen, die von auswärts dazu nach Berlin gekommen sind, sowie den Ministerialräten Metzner, Freitag und Löffler ganz besonders für ihre wertvolle Mitarbeit. Wir werden weiterhin über die Sache auf der Tagung des Fördervereins in Breslau berichten.

5. Von geplanten Arbeiten sind zu erwähnen: Einen Aufsatz über die Frage des Unendlichen auf der Schule hat uns Herr Feigl in sichere Aussicht gestellt. Die Frage der Jahresgemeinschaften und der Jahresarbeiten bearbeitet ein Ausschuß Fuchs. Der Ausschuß zur kritischen Sichtung der Lehrbücher will sich jetzt vor allem auch die didaktische Literatur näher ansehen. Dies scheint im Zusammenhang mit der Ausbildung der Studienreferendare unerläßlich. Endlich vielleicht das Wichtigste: es soll ein Ausschuß gebildet werden, der sich mit der Frage beschäftigen wird, welche Wünsche die Schule für eine Umgestaltung des Hochschulunterrichtes vorzubringen hat.

Geschäftlich ist noch zu bemerken: Leider verloren wir durch den Tod vier Beiratsmitglieder: die Herren Müller (Wien), Bräuer (Hannover), Staude (Rostock) und Wiechert (Göttingen). Ehre ihrem Andenken!

Die Landesgruppe des F. V. in Stuttgart hat es doch ermöglichen können, dem M. R. nach ihrer Umorganisation wieder beizutreten.

Auf seinen Wunsch scheidet Herr Schulrat Dr. Neis aus dem A.-A. aus. Wir danken ihm für seine Mitarbeit. Der Unterzeichnete wird als Rektor der Technischen Hochschule im kommenden Jahr die Geschäfte des M. R. nicht führen können. Er hatte deshalb die Absicht, den Vorsitz überhaupt niederzulegen. Der A.-A. schlägt Ihnen aber vor, es beim alten zu lassen, jedoch Herrn Salkowski (Berlin) neu in den A.-A. zu wählen und ihn mit der Stellvertretung des Vorsitzenden zu betrauen.

F. Herr Hamel verliest folgenden Kassenbericht:

Jahresabschluß über das Geschäftsjahr 1927/28.

Einnahmen.

Bestand am 1. September 1927	RM 260.89
Beiträge der Gesellschaften	„ 535.—
Bankzinsen	„ 4.90
Zusammen:	RM 800.79

Ausgaben.

I. 1. Schriftführung (einschließlich Versand von Rundschreiben	RM 70.—	
2. Kassenführung (einschl. Postscheckgebühren)	„ 4.70	
3. Zeitungen und Bücher	„ 75.—	
4. Unterausschüsse	„ —.—	
		RM 149.70
II. 5. Druck von Rundschreiben	RM 35.55	
6. Drucksachen (Berichte, Sonderdrucke)	„ 87.60	
		„ 123.15
III. 7. Reisezuschüsse (Beteiligung an Tagungen usw.)	RM 215.20	„ 215.20
	Insgesamt:	RM 488.05

Aufrechnung.

Einnahmen	RM 800.79
Ausgaben	„ 488.05
Kassenbestand am 12. August 1928:	RM 312.74

Nachweis über den Kassenbestand.

Auf Postscheckkonto 15401	RM 151.67
Bei der Dresdner Bank	„ 148.60
Bar in der Kasse	„ 12.47
Zusammen:	RM 312.74

Berlin-Karlshorst, den 12. August 1928.

gez. Max Ebner.

Kasse und Belege vom 9. September 1927 bis 17. August 1928 geprüft und richtig befunden.

Berlin-Dahlem und Berlin-Lichterfelde, 17. August 1928.

gez. Scheffers. gez. P. B. Fischer.

G. Zum stellvertretenden Vorsitzenden des M. R. wird Herr Salkowski gewählt. Der A.-A. setzt sich aus folgenden Herren zusammen: Bieberbach, Dorner, Dreetz, Ebner, Feigl, Fuchs, Hamel, W. Jacobsthal, Salkowski, Schwerdt, Zabel, Zacharias; Kassenrevisoren bleiben die Herren Scheffers und P. B. Fischer. Ein Mitgliederverzeichnis des M. R. steht auf Wunsch zur Verfügung.

Dem A.-A. wird Entlastung erteilt.

Der neue Jahresbeitrag wird, wie im Vorjahre auf *RM* —.50 für jedes einer angeschlossenen Gesellschaft (Verein) angehörende Mitglied festgesetzt.

Die bisherigen Mitglieder sowie die Kassenrevisoren werden wiedergewählt.

H. Herr Lorey weist aut zwei Punkte hin: a) für die nächste Tagung ist Prag festgelegt; für den Reichsverband erscheint dieser Ort als Tagungsort nicht unbedenklich. (Die Annahme einer Einladung nach Dresden wird in Aussicht gestellt.) b) Eine Aufgabe des M. R. ist die, dafür zu sorgen, daß über die Dinge, die den M. R. auf den Tagungen beschäftigen, in den großen Tageszeitungen in verständlicher Weise berichtet wird.

Hamel.

Aufgaben und Lösungen.

Aufgaben.

63. Zur Axiomatik der 3-dimensionalen projektiven Geometrie. Man kann bekanntlich nach Hilberts Grundlagen der Geometrie die Inzidenzrelationen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen der euklidischen Geometrie, unabhängig vom Archimedischen Axiom, aus den räumlichen Verknüpfungsaxiomen und dem Pascalschen Satz ableiten.

Man zeige, daß man den Pascalschen Satz durch die Forderung ersetzen kann, daß eine der Möbiusschen Konfigurationen aus 8 Punkten und 8 Ebenen (vgl. etwa Enzyklopädie III AB 5a „Konfigurationen der projektiven Geometrie“ Nr. 6) erfüllt ist. K. Reidemeister.

(Eingegangen am 18. 5. 1928.)

64. Die Bestimmung der Fundamentalgruppe einer Mannigfaltigkeit. Aus dem Schema einer etwa 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit, das aus den 3-dimensionalen Zellen $Z_1, \ldots, Z_l$, den Flächenstücken $F_1, \ldots, F_m$ und den Kanten $K_1, \ldots, K_n$ besteht, kann man bekanntlich (vgl. H. Tietze, Mon. f. Math. u. Physik, XIX. Jahrg. S. 65—77) in folgender Weise die Fundamentalgruppe der Mannigfaltigkeit bestimmen: man wählt im Innern jeder Zelle Z_ϱ einen Punkt P_ϱ $(\varrho = 1, \ldots, l)$, legt durch jedes Flächenstück F_σ, das der Berandung der beiden Zellen Z_α, Z_β angehört, ein orientiertes fundamentales Wegstück S_σ, das von P_α nach P_β (oder von P_β nach P_α) führt, und ordnet den Kanten K_ϱ je eine der Relationen

$$R_\varrho = R_\varrho(S_1, \ldots, S_m) = 1 \qquad (\varrho = 1, \ldots, n)$$

zu, wo $R_\varrho(S_1, \ldots, S_m)$ einem geschlossenen Wege aus fundamentalen Wegstücken entspreche, der K_ϱ einmal umschlingt.

Alsdann wählt man einen der Punkte P_ϱ, etwa P_1, als Grundpunkt, verbindet P_1 mit jedem der übrigen Punkte P_ϱ durch je einen Hilfsweg H_ϱ aus fundamentalen Wegstücken und nimmt nun geeignete Produkte

$$s_\varrho = H_{\alpha_\varrho} S_\varrho H_{\beta_\varrho}^{-1} \qquad (\varrho = 1, \ldots, m) \tag{1}$$

als Erzeugende der Fundamentalgruppe, geeignet, d. h. s_ϱ beginne in P_{α_ϱ} und endige in P_{β_ϱ}.

Die definierenden Relationen der Gruppe zerfallen in zwei Klassen: die der ersten Klasse findet man, indem man in den R_ϱ die S_σ durch s_σ ersetzt; die der zweiten Klasse sind erklärt als alle diejenigen Produkte aus den s_ϱ, welche in Identitäten übergehen, wenn die s_ϱ nach (1) durch die S_σ ausgedrückt werden.

Man stelle die Relationen der zweiten Klasse, in Anlehnung an das Verfahren, Untergruppen von unendlichen diskreten Gruppen zu bestimmen (vgl. Hamb. Abhdl. Bd. 5 [1926], S. 8 und S. 172) auf und zeige weiter: bei geeigneter Wahl der Hilfswege besagen die Relationen der zweiten Klasse, daß gewisse der Erzeugenden s_ϱ, die anzugeben sind, gleich 1 werden.

K. Reidemeister.

(Eingegangen am 18. 5. 1928.)

65. Ein Mittenkugelsystem besitze zwei Hüllmäntel, zu deren sphärischem Bild die isotropen Vierervektoren $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ gehören. Die Schmiegkreise $\mathfrak{k}^1$, $\mathfrak{k}^2$, die zum sphärischen Bild der Krümmungslinien (bzw. Nullinien der 3. Grundform) der Ausgangsfläche gehören, schneiden sich in $\mathfrak{w}$. Die Punkte $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{w}$ bestimmen einen Kreis $\mathfrak{k}$, der mit den $\mathfrak{k}^i$ feste Winkel bildet, wenn die Laguerre-invarianten Beziehungen $R : P =$ konst. (bzw. für die 3. Grundform $Q : P =$ konst.) gelten.

Vgl. K. König, Untersuchungen über das sphär. Bild. Tôhoku Journal 1928, S. 91.

Der dortige Ansatz für $\mathfrak{w}$ schließt nur die Zykliden Dupins aus.

K. König.

(Eingegangen am 19. 11. 1928.)

66. Es sei A eine *symmetrische* Matrix von n^2 Elementen $a_{ik} = a_{ki}$, B eine Matrix von n^2 Elementen b_{ik}. Aus diesen Matrizes bildet man eine Determinante Δ vom Grade $2n$, die in leicht verständlicher Schreibweise die Form hat:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}.$$

Alsdann gelten die zu beweisenden Sätze:

1. Ist die Matrix B ebenfalls *symmetrisch*, so zerfällt Δ in das Produkt zweier Determinanten n-ten Grades; die Elemente der einen sind Binome $a_{ik} + b_{ik}$, die der anderen $a_{ik} - b_{ik}$.

2. Ist die Matrix B *schiefsymmetrisch* ($b_{ik} = -b_{ki}$, $b_{ii} = 0$), so wird Δ das Quadrat einer Determinante n-ten Grades mit Elementen $a_{ik} + b_{ik}$.

Wird die *eine* der beiden Matrizes B transponiert, so hat man folgende Sätze:

3. Ist B *symmetrisch*, so gilt natürlich wieder Satz 1.

4. Im Falle $b_{ik} = -b_{ki}$, $b_{ii} = 0$ ist Δ das Quadrat einer ganzen rationalen Funktion der Elemente von Δ, im allgemeinen aber nicht etwa das Quadrat einer Determinante n-ten Grades wie bei Satz 2.

Ein Beispiel zu dem *letzten* Fall, wo also $b_{ik} = -b_{ki}$ und die *eine Matrix* B zu *transponieren* ist, bildet eine Determinante 12. Grades, die bei Untersuchung der Fundamentschwingungen moderner Kraftmaschinen, z. B. großer Turbogeneratoren, auftritt. Hier ist

$$B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z & -y \\ 0 & 0 & 0 & -z & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & y & -x & 0 \end{vmatrix}.$$

In diesem Falle erhält man

$$\Delta = \{(a)_{44}x^2 + (a)_{55}y^2 + (a)_{66}z^2 + 2(a)_{56}yz + 2(a)_{64}zx + 2(a)_{45}xy - D\}^2,$$

wo D die aus den a_{ik} gebildete Determinante 6. Grades bedeutet; $(a)_{56}$ ist eine Determinante 4. Grades, die man aus der Determinante 3. Grades $\Sigma \pm (a_{11}a_{22}a_{33})$ erhält, indem man unten die Zeile $a_{51}a_{52}a_{53}$, rechts die Spalte $a_{16}a_{26}a_{36}$ beifügt und die dann noch freie Ecke durch a_{56} ausfüllt. Analoge Bedeutung haben die anderen Koeffizienten. F. Dingeldey.

(Eingegangen am 14. 1. 1929.)

67. Seien x, y, v, w positive Zahlen < 2. Identisch in diesen 4 Parametern gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{n}{}_{h,k} \frac{e^{\pi i(wh+vk)}}{\frac{w-iv}{2}+h+ik} = e^{\frac{\pi i}{2}[yv-xw]} \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{n}{}_{l,m} \frac{e^{\pi i(vl+wm)}}{\frac{y-ix}{2}+l+im}.$$

Wilhelm Maier.

(Eingegangen am 22. 1. 1929.)

68. Es seien a und b teilerfremde ganze Zahlen, und es sei $0 < |a| < |b|$; dann hat die diophantische Gleichung

$$ax + by = z$$

mindestens eine und höchstens zwei Lösungen in ganzen Zahlen, für die

$$|x| < \sqrt{|b|}, \quad |y| < \sqrt{|b|}, \quad 0 < |z| < \sqrt{|b|}$$

und x und y teilerfremd sind (zwei Lösungen, die sich nur durch die Vorzeichen unterscheiden, sollen nicht als verschieden gelten). Zeitz.

(Eingegangen am 29. 1. 1929.)

Lösungen.

Lösung der Aufgabe 54. (Dieser Jahresbericht Bd. 37, Heft 1/4, S. 28.)[1]) Die Aufgabe lautete:

$l_1, l_2, \ldots, l_n$ sollen gegebene reelle (positive oder negative) Zahlen sein. Bildet man

$$(l_1 - l_2)^2 + (l_2 - l_3)^2 + \cdots + (l_{n-1} - l_n)^2 + (l_n - l_1)^2 = B,$$

so wird gefragt: Bei welcher Anordnung der Zahlen l_i ist B ein Minimum?

Lösung. Es mögen unter den n gegebenen Zahlen $m \leqq n$ sämtlich voneinander verschiedene vorkommen, welche, der Größe nach geordnet, mit $b_1, b_2, \ldots, b_m$ $(b_1 < b_2 < \cdots < b_m)$ bezeichnet seien. Die ebenfalls der Größe nach geordnete Reihe der n gegebenen Zahlen sei

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \qquad (a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n).$$

Ist eine Zahl der Reihe $b_1, b_2, \ldots, b_m$ mindestens zweien der Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ gleich, so will ich sie eine „mehrfache Zahl" nennen, im entgegengesetzten Falle eine „einfache Zahl".

Man ordne nun den Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in derselben Reihenfolge (z. B. von links nach rechts) angeordnete Punkte auf einer Geraden zu, $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Den m untereinander verschiedenen Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_m$ entsprechen die m voneinander verschiedenen Punkte $B_1, B_2, \ldots, B_m$, einer „einfachen Zahl" entspricht ein „einfacher Punkt" und einer „mehrfachen Zahl" ein „mehrfacher Punkt". Die Absolutwerte der Differenzen $|b_1 - b_2|$, $|b_2 - b_3|, \ldots, |b_{m-1} - b_m|$ mögen mit $d_1, d_2, \ldots, d_{m-1}$ und die ihnen entsprechenden Strecken $\overline{B_1 B_2}, \overline{B_2 B_3}, \ldots, \overline{B_{m-1} B_m}$ mit $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$ bezeichnet werden. Sei nun $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}$ irgendeine Anordnung der n gegebenen Zahlen und $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n}$ der ihnen entsprechenden Punkte, wobei $i_1, i_2, \ldots, i_n$ eine Permutation der Indizes $1, 2, \ldots, n$ bedeutet. Die Punkte $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n}$ zerfallen nun in bezug auf eine Strecke $s_k (k = 1, 2, \ldots, m - 1)$ in solche, welche links, und in solche, welche rechts von ihr liegen, wobei wir B_k zu den ersteren und B_{k+1} zu den letzteren zählen.

Wir wollen nun annehmen, A_{i_1} wäre ein „linker" Punkt (der eventuell mit B_k zusammenfällt). Für den Fall, daß A_{i_1} ein „rechter" Punkt wäre, brauchten in der folgenden Betrachtung nur die Wörter „links" und „rechts" miteinander vertauscht werden. Den im Ausdrucke für B auftretenden Differenzen $a_{i_1} - a_{i_2}, a_{i_2} - a_{i_3}, \ldots, a_{i_n} - a_{i_1}$ entsprechen die Intervalle $\overline{A_{i_1}, A_{i_2}}$, $\overline{A_{i_2} A_{i_3}}, \ldots, \overline{A_{i_n} A_{i_1}}$, welche in dieser Reihenfolge einen in sich geschlossenen zusammenhängenden Streckenzug bilden.

Sei A_{i_l} der letzte in der Reihe der Punkte $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots$, der noch links von s_k liegt, so daß A_{i_l} und alle in der Reihe vorangehenden Punkte „linke

1) Vgl. auch die Bd. 37 des Jahresberichtes S. 113 ff. abgedruckten Lösungen, sowie die Lösung, welche Herr A. Galle zusammen mit Herrn Kühnen in den „Mitteilungen aus dem Markscheidewesen" 1928, S. 29 veröffentlicht hat. Dort wird auch dargelegt, wie die Aufgabe aus einem Problem der Anwendungen entstanden ist.

Punkte“ sind, während $A_{i_{l+1}}$ rechts von s_k liegt. Sei ferner A_{i_r} der letzte in der Reihe der auf $A_{i_{l+1}}$ folgenden Punkte, der noch rechts von s_k liegt, so daß $A_{i_{r+1}}$ wieder links liegt. Enthält die Reihe der Punkte $A_{i_{l+1}}$, $A_{i_{l+2}}, \ldots, A_{i_r}$ nicht sämtliche „rechte“ Punkte, so gibt es in der Reihe der auf $A_{i_{r+1}}$ folgenden Punkte einen letzten, $A_{i_{l'}}$, der noch links von s_k liegt, so daß $A_{i_{l'+1}}$ wieder rechts liegt. Der letzte noch „rechte“ Punkt der Reihe $A_{i_{l'+1}}, A_{i_{l'+2}}, \ldots$ sei $A_{i_{r'}}$, so daß $A_{i_{r'+1}}$ wieder links liegt.

Ist die Menge der „rechten“ Punkte mit den Punkten $A_{i_{l+1}}, A_{i_{l+2}}, \ldots, A_{i_r}$, $A_{i_{l'+1}}, A_{i_{l'+2}}, \ldots, A_{i_{r'}}$ noch nicht erschöpft, so fahre man in gleicher Weise fort. Jedes der Intervalle $\overline{A_{i_l}A_{i_{l+1}}}, \overline{A_{i_r}A_{i_{r+1}}}, \overline{A_{i_{l'}}A_{i_{l'+1}}}, \overline{A_{i_{r'}}A_{i_{r'+1}}}, \ldots$, deren Anzahl mindestens zwei ist, enthält s_k als Teilstrecke, und immer sind auch die Nachbarstrecken s_{k-1} und s_{k+1} (wobei unter s_0 der Punkt B_1 und unter s_m der Punkt B_m zu verstehen ist) in mindestens einem dieser Intervalle enthalten, wenn B_k und B_{k+1}, die Grenzpunkte von s_k, beide „einfache Punkte“ sind. Ist aber B_k ein „mehrfacher“, B_{k+1} ein „einfacher“ Punkt, so enthält — bei jeder Anordnung — stets mindestens eines der Intervalle $\overline{A_{i_l}A_{i_{l+1}}}, \overline{A_{i_r}A_{i_{r+1}}}, \ldots$ außer s_k noch s_{k+1}. Wenn B_{k+1} ein mehrfacher, B_k ein einfacher Punkt ist, so kommt s_{k-1} in mindestens einem dieser Intervalle als Teilstrecke vor. Sind beide Grenzpunkte von s_k, B_k und B_{k+1} „mehrfache“ Punkte, so braucht weder s_{k-1} noch s_{k+1} in irgendeinem solchen Intervall vorzukommen, sondern nur s_k.

Man erkennt so vermittelst dieser Abbildung, daß in dem nach den $d_k (k = 1, 2, \ldots, m-1)$ entwickelten Ausdruck B das Quadrat jedes d_k mindestens zweimal, ferner, wenn keine der beiden Zahlen b_k, b_{k+1} eine „mehrfache“ Zahl ist, jedes der Glieder $2\, d_k d_{k-1}$ und $2\, d_k d_{k+1}$ $\left(\begin{matrix} d_0 \\ d_m \end{matrix}\right\} = 0\Big)$ mindestens einmal vorkommt. Ist b_k eine „mehrfache“, b_{k+1} eine „einfache“ Zahl, so kommt das Glied $2 d_k d_{k+1}$ und ist b_k eine „einfache“, b_{k+1} eine „mehrfache“ Zahl, so kommt das Glied $2 d_{k-1} d_k$ gewiß mindestens einmal vor. Ist sowohl b_k als b_{k+1} eine „mehrfache“ Zahl, so kommen diese Glieder nicht bei jeder Anordnung vor. Wenn nun eine Anordnung existiert, für welche in dem Ausdruck B nur diese Glieder, die bei jeder Anordnung als vorhanden erkannt worden sind, und keine anderen vorkommen, so muß diese Anordnung B zu einem Minimum machen. Durch diese Forderung des Minimums ist — wie aus dem Obigen leicht folgt — der zusammenhängende geschlossene Streckenzug $(A_{i_1}A_{i_2} \ldots A_{i_n}A_{i_1})$ eindeutig bestimmt. Man erhält eine solche Anordnung, für die B Minimum wird, wenn man, bei geradem n,

$$l_1 = a_1, \quad l_2 = a_3, \ldots \quad l_{\frac{n}{2}} = a_{n-1}, \quad l_{\frac{n}{2}+1} = a_n, \quad l_{\frac{n}{2}+2} = a_{n-2}, \ldots \quad l_n = a_2$$

und — bei ungeradem n

$$l_1 = a_1, \quad l_2 = a_3, \ldots \quad l_{\frac{n+1}{2}} = a_n, \quad l_{\frac{n+3}{2}} = a_{n-1}, \quad l_{\frac{n+5}{2}} = a_{n-3}, \ldots \quad l_n = a_2$$

setzt. Die übrigen Anordnungen, welche B zu einem Minimum machen, erhält man durch diejenigen Permutationen der l_i, welche B ungeändert

lassen, also jene, die aus $l_1, l_2, \ldots, l_n$ und $l_n l_{n-1} \ldots l_2, l_1$ durch zyklische Vertauschung hervorgehen, sowie im Falle des Auftretens „mehrfacher" Zahlen noch einige weitere.

Wien. F. Gruber.

(Eingegangen am 22. 10. 1928.)

Lösung der Aufgabe 56. (Dieser Jahresbericht Bd. 37, Heft 1/4, S. *28*.)

Die Aufgabe lautete:

Es sei k eine stetig gekrümmte geschlossene Krümmungslinie, auf welcher der ihr entsprechende Hauptkrümmungsradius R, sowie sein reziproker Wert stetige Funktionen sind. Durch je zwei Punkte A, B soll sich eine Ebene legen lassen, die keine weiteren Punkte von k enthält, zu deren beiden Seiten aber Punkte von k existieren. Dann gibt es auf k mindestens vier Stellen, wo R einen stationären Wert besitzt.

Ein analoger Satz gilt auch für geschlossene Affinkrümmungslinien auf Flächen mit regulärem Affinkrümmungsbild. W. Süss.

k sei dargestellt in der Parameterform $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t)$; dabei sei $\mathfrak{x}$ in t eindeutig, habe die Periode τ und die stetige erste Ableitung $\dot{\mathfrak{x}} \neq 0$; ebenso sei $\frac{1}{R} = h(t)$ in t eindeutig, habe die Periode τ und die stetige erste Ableitung $\dot{h}$. Dies bedeutet eine kleine Modifikation der obigen Voraussetzungen. Damit von k als Krümmungslinie einer Fläche gesprochen werden kann, muß die Flächennormale ξ in jedem ihrer Punkte eindeutig definiert sein und eine stetige erste Ableitung $\dot{\xi}$ besitzen. Alsdann gilt die Formel von Rodrigues

$$h\dot{\mathfrak{x}} + \dot{\xi} = 0. \tag{1}$$

Aus ihr geht hervor, daß auch ξ die Periode τ hat.

R ist stationär nur an den Nullstellen von $\dot{h}(t)$. Ist die tragende Fläche keine Kugel, so ist R nicht stets konstant. Besitzt $\dot{h}$ nur isolierte Nullstellen, so sind diese wegen der Periodizität von *gerader* Anzahl $\geqq 2$, so daß sicher zwei verschiedene Punkte $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ auf k mit stationärem R existieren, Angenommen nun, $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ seien die ***einzigen*** Punkte auf k mit stationärem R. Dann ist $\dot{h}$ auf dem ***einen*** Teilbogen zwischen $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ — genannt $\mathfrak{B}^+$ — ***positiv***, auf dem ***andern*** Teilbogen $\mathfrak{B}^-$ zwischen $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ ***negativ***. Ferner gibt es eine Ebene $E \equiv (\mathfrak{a}\mathfrak{x}) + p = 0$ durch $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$, welche keinen weitern Punkt von k enthält und zu deren beiden Seiten Punkte von k existieren. Es läßt sich erreichen, daß $E > 0$ für die Punkte in B^+, $E < 0$ für die Punkte in $\mathfrak{B}^-$. Sodann gilt

$$\int_{\mathfrak{B}^+} E\dot{h}\,dt > 0, \quad \int_{\mathfrak{B}^-} E\dot{h}\,dt > 0, \tag{2}$$

beide Integrale im Sinn des wachsenden t erstreckt. Ist die obige Annahme richtig, so gilt

$$\oint_k E\dot{h}\,dt = \int_{\mathfrak{B}^+} + \int_{\mathfrak{B}^-} > 0; \tag{3}$$

das Integral $\oint_k$ ist einmal im Sinn der wachsenden t um k zu erstrecken.

Nun gilt offenbar wegen der Periodizität von h, $\mathfrak{x}$, ξ und wegen (1)

$$(4)\qquad \oint_k \dot{h}\,dt = 0, \quad \oint_k \mathfrak{x}\dot{h}\,dt = (\mathfrak{x}h)_0^\tau - \oint_k h\dot{\mathfrak{x}}\,dt = \oint_k \dot{\xi}\,dt = 0.$$

Daher ist sicher $\oint_k E\dot{h}\,dt = 0$ und (3) falsch. Somit ist die obige Annahme falsch, und es muß außer in $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ noch in weiteren Punkten von k stationäre Werte von R geben.

Die Mindestzahl isolierter Stellen auf k mit stationären Werten von R ist vier; diese Zahl kann nicht mehr erhöht werden. Dies lehrt das folgende Beispiel: Die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$ ist geschlossene, überdies ebene Krümmungslinie des Ellipsoids $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $a > b > c > 0$. Die sonstigen Voraussetzungen des Satzes sind erfüllt. Hier ist R zum Krümmungsradius ϱ der Ellipse geworden. Die Punkte auf k mit stationärem R liegen also in den Scheiteln der Ellipse und sind genau vier an Zahl.

Der Beweis beruht auf der Gültigkeit der Formel (1). Nun ist diese für Affinkrümmungslinien mit regulärem Affinkrümmungsbild zu ersetzen durch $\frac{1}{R} \cdot d\mathfrak{x} + d\mathfrak{y} = 0$ (vgl. Blaschke II, § 61, S. 158/59, Formel (159)), sodaß die Schlußweise entsprechend zu führen ist, wenn der Zusatz bewiesen werden soll. Der ganze hier gegebene Beweis ist eine naheliegende Verallgemeinerung aus Blaschke I (2. Aufl.) S. 76/77.

Darmstadt. Jos. E. Hofmann.

(Eingegangen am 5. 5. 1928.)

Mitteilungen und Nachrichten.

Geeignete Mitteilungen nimmt der Herausgeber stets mit größtem Danke entgegen.

Akademien. Gesellschaften. Vereinigungen. Versammlungen.

Aachener Mathematische Gesellschaft. *1. Juni 1927.* Brandt, Carl Friedrich Gauß. — *28. Juni 1927.* Wenner, Praktisches aus der Nomographie. — *20. Juli 1927.* Bosch, Gösta Mittag-Leffler. — *26. Oktober 1927.* Bosch, Über Berechnung von Logarithmen mit elementaren Mitteln. Grösser, Einiges Neue vom Rundfunkempfang. — 30. *November 1927.* Epstein (Pasadena), Theorie der Atomstruktur in Anwendung auf das periodische System der Elemente. — *14. Dezember 1927.* Wulf (Valkenburg), Über die Grundgesetze der Elektrostatik und ihren Nachweis mit dem Wulfschen Universalelektroskop. — *18. Januar 1928.* v. Kármán, Einfache Berechnung des Auftriebs von Tragflügeln (eine Anwendung der konformen Abbildung). — *29. Februar 1928.* Starke, Eine Vorlesung über die Grundgesetze und Definitionen der Elektrostatik. Buchkremer, Vorführung eines Klapptafeltisches für die darstellende Geometrie. — *21. März 1928.* Bosch, Über merkwürdige Punkte und Linien in der neueren Dreiecksgeometrie. — *18. Mai 1928.* Toeplitz-Bonn, Die Infinitesimalrechnung im Unterricht der höheren und der Hochschule. — *20. Juni 1928.* Ebner, Aus der Praxis des Unterrichts in der Infinitesimalrechnung. — *11. Juli 1928.* Buchkremer und Wimmers, Bericht über den Unterricht in der In-

finitesimalrechnung. — *22. November 1928.* Blumenthal, Einige Anwendungen des Taylorschen Restglieds. — *13. Dezember 1928.* Study-Bonn, Über die sog. Grundlagenforschung in der Mathematik. — *16. Januar 1929,* Loewenstein-Göttingen, Über neuere physikalische und chemische Apparate (bes. nach Prof. Pohl). (Experimentalvortrag.) — *22. Februar 1929.* Frank-Köln, Zur Didaktik der Infinitesimalrechnung. — *20. März 1929.* Kniesche, Vom Weltstoff (das Innere der Sterne nach Eddington).

Mathematisches Kolloquium an der Universität Berlin. *3. Mai 1927.* E. Rothe, Ein Beitrag zum Cauchyschen Problem. Es wird die Frage behandelt, wann die partielle Differentialgleichung $\frac{\partial^\mu z}{\partial x^\mu} = \frac{\partial^\lambda z}{\partial y^\lambda}$ analytische Lösungen besitzt, wenn z und seine Ableitungen nach x für $x = 0$ vorgeschriebene Funktionen von y sind und (im Gegensatz zu dem auf Grund der Cauchyschen Existenzsätze erledigten Fall) $\lambda > \mu$ ist. Mit Hilfe der Theorie der ganzen Funktionen werden für die vorgeschriebenen Funktionen Bedingungen angegeben, die für die Lösbarkeit des Problems notwendig und hinreichend sind. Die hinreichenden Bedingungen werden auf lineare partielle Differentialgleichungen von allgemeinerem Typ als die oben angegebene übertragen. (Erscheint in der Math. Zeitschr.) — *10 Mai.* Alexandroff, Über die Beziehungen zwischen der kombinatorischen und mengentheoretischen Topologie. — *17. Mai.* St. Bergmann, Anwendung der Hermiteschen Formen auf analytische Abbildungen. Zu jedem vierdimensionalen, ganz im Endlichen gelegenen Bereich $\mathfrak{B}$ läßt sich eine unendliche Hermitesche Form

$$f(\alpha_{\nu\mu}, \overline{\alpha_{\nu'\mu'}}) \equiv \sum_{(\nu\mu),(\nu'\mu')=1}^{(\nu\mu),(\nu'\mu')=\infty} \alpha_{\nu\mu}\overline{\alpha_{\nu'\mu'}} \iiiint\limits_{\mathfrak{B}} X^\nu Z^\mu \overline{X^{\nu'} Z^{\mu'}}\, d\omega$$

angeben, wobei X und Z komplexe Veränderliche, $d\omega$ das Volumenelement bedeuten. Durch gewisse Betrachtungen, die sich auf diese Formen beziehen, wird gezeigt: I. daß man jede in $\mathfrak{B}$ reguläre Funktion $H(X, Z)$ mit endlichem $\iiiint\limits_{\mathfrak{B}} H(X, Z)\,\overline{H(X, Z)}\,d\omega$ nach einem in $\mathfrak{B}$ vollständigen Orthogonalfunktionensystem $\Omega_s(x, z)$ entwickeln kann; II. daß es zu jedem $\mathfrak{B}$ eine ausgezeichnete Funktion $u(X, Z) \equiv \frac{\sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(X, Z)\,\overline{\Omega_s(a, b)}}{\sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(a, b)\,\overline{\Omega_s(a, b)}}$ gibt (a, b ist ein innerer Punkt von $\mathfrak{B}$) mit der Eigenschaft, daß die Funktionaldeterminante des (in bestimmter Weise normierten) Funktionenpaares, welches $\mathfrak{B}$ auf einen Minimalbereich abbildet, $u(X, Z)$ ist (ein Minimalbereich ist z. B. der Reinhardtsche Kreisbereich); III. daß es zu jedem Bereich eine unendliche Folge von Größen gibt, die in einfacher Weise mit den Größen $\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\partial^{\nu+\mu}\Omega_s(a, b)}{\partial^\nu a\, \partial^\mu b} \overline{\frac{\partial^{\nu'+\mu'}\Omega_s(a, b)}{\partial^{\nu'} a\, \partial^{\mu'} b}}$ zusammenhängen, die invariant bei einer Transformation durch ein normiertes Funktionen-

paar $V(X, Z)$, $W(X, Z)$ sind; IV. schließlich wird, falls sich $\mathfrak{B}$ auf einen Kreisbereich abbilden läßt, gezeigt, wie man aus der Gestalt und den Dimensionen von $\mathfrak{B}$ die Form und Größe des Kreisbereiches und das die Abbildung leistende Funktionenpaar bestimmen kann. (Die Arbeit ist als vorläufige Mitteilung in den Berichten der Berliner Mathematischen Gesellschaft [XXVI (1927), S. 178—184] erschienen.) Nähere Ausführungen folgen in der Math. Zeitschr. und in den Math. Ann. — *31. Mai.* A. Hammerstein, Nichtlineare Integralgleichungen. Unter gewissen Voraussetzungen über $K(x, y)$ und $f(w)$ wird die nichtlineare Integralgleichung $\varphi(x) = \int K(x, y) f(\varphi(y))\, dy$ betrachtet, worin $\varphi(y)$ eine gesuchte Funktion bedeutet. Der Nachweis der Existenz einer Lösung wird auf eine Extremumsaufgabe zurückgeführt. Sodann wird die Frage der Eindeutigkeit behandelt. (Erscheint in den Acta mathem. Man vgl. auch die Arbeit: Nichtlineare Integralgleichungen und direkte Methoden der Variationsrechnung, Sitzungsber. der Berl. Math. Ges. XXVI (1927), S. 66—70.) — *28. Juni.* R. Remak, Über die Darstellung der endlichen Gruppen als Untergruppen direkter Produkte. — *5. Juli.* H. Hopf, Zur Theorie des Abbildungsgrades, Es wird der Beweis des folgenden Satzes skizziert: Jede eindeutige und stetige Abbildung einer geschlossenen n-dimensionalen Mannigfaltigkeit auf eine andere n-dimensionale Mannigfaltigkeit läßt sich durch stetige Abänderung derart modifizieren, daß die Bildmannigfaltigkeit „fast überall", d. h. überall mit Ausnahme einer höchstens $(n - 1)$-dimensionalen Menge, genau γ-mal bedeckt wird, wobei γ den Grad der gegebenen Abbildung bezeichnet. Hierin ist die Tatsache enthalten, daß der absolute Betrag des Grades sich als Minimalzahl der eindeutigen Bedeckungen eines hinreichend kleinen Gebiets in der Bildmannigfaltigkeit charakterisieren läßt, die man durch stetige Abänderung erreichen kann. Beim Beweise macht die Dimensionenzahl zwei merkwürdige und anscheinend wesentliche Schwierigkeiten. (Ausführliche Darstellung erscheint voraussichtlich in den Math. Ann.) — *12. Juli.* R. Remak, Über die Darstellung der endlichen Gruppen als Untergruppen direkter Produkte (Fortsetzung). — *19. Juli.* St. Bergmann, Zur Theorie der algebraischen Potentialfunktionen des dreidimensionalen Raumes. Man kann eine algebraische dreidimensionale Potentialfunktion $F(x, y, z)$ in der Form $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u, e^{it})\, dt$ $[u \equiv x + iy\cos t + iz\sin t]$ darstellen, wobei f — als eine Funktion einer komplexen Veränderlichen u (bei konstantem t) betrachtet — entweder eine algebraisch-logarithmische Funktion oder ein bestimmtes Integral $\int_0^1 a(u, e^{it}, T)\, dT$ einer in u, e^{it}, T algebraischen Funktion ist. Man kann deshalb mit funktionentheoretischen Mitteln auch die dreidimensionalen Potentialfunktionen untersuchen. In diesem Vortrag werden diejenigen harmonischen Funktionen betrachtet, die ein algebraisches f besitzen. Man gelangt auf diese Weise I. zu einer Klasse von algebraischen Potentialfunktionen, II. zu gewissen Transzendenten, die als Periodenfunktionen bezeichnet werden. In dem Vortrag werden diese Klassen von algebraischen Potentialfunktionen und ihre Singularitäten

(Punkt- und Linienpole, Verzweigungslinien) geschildert. Ferner werden die Periodenfunktionen, ihre Singularitäten, die stets auf algebraischen Kurven liegen (Verzweigungslinien endlicher und unendlichhoher Ordnung) untersucht und schließlich der Zusammenhang zwischen den Periodenfunktionen einerseits und den Perioden der Abelschen Funktionen andererseits und die Möglichkeit der Darstellung in geschlossener Form mit Hilfe der Θ-Funktionen und gewisser (in dem Vortrag definierter) Funktionen geschildert. Betrachtet man diese Transzendenten als Funktionen der Veränderlichen x [bzw. y oder z], so genügen sie gewöhnlichen Differentialgleichungen von der Form $\sum_{k=1}^{k=2\varrho} A_k(x, y, z) \frac{d^k F(x, y, z)}{d x^k} = 0$ mit algebraischen Koeffizienten $A_k(x, y, z)$. (Erscheint in den Math. Ann.) — *26. Juli.* J. v. Neumann, Eigenwertprobleme symmetrischer Operatoren. Vgl. den Bericht Bd. 37 S. *11*) über den auf der Kissinger Naturforscher- und Ärzteversammlung gehaltenen Vortrag über das gleiche Thema. — *8. November.* A. Hammerstein, Über die Schwingungsgleichung. Die im Vortrag am 31. Mai entwickelten Methoden werden in Verbindung mit E. Schmidts Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen zur Untersuchung des Verlaufs der Lösungen der Gleichung der erzwungenen Schwingung herangezogen. — *15. November.* J. v. Neumann, Zum allgemeinen Maßbegriff. — *6. Dezember.* E. Hopf, Über die Integralgleichung des Strahlungsgleichgewichtes. (Erscheint i. d. Zeitschr. für Phys.) — *13. Dezember.* v. Mises, Mathematische Formulierung des Turbulenzproblems.

Mathematisches Kolloquium an der Technischen Hochschule in Dresden. *20. Januar 1927.* Kneschke, Die Quantenmechanik Schrödingers. — *3. Februar 1927.* Wiarda, Über die Schmidtsche Auflösungsformel in der Theorie der Integralgleichungen. — *17. Februar 1927.* Böhmer, Über eine unstetige Funktion. — *3. März 1927.* Trefftz, Konvergenz und Fehlerabschätzung beim Ritzschen Verfahren. — *19. Mai 1927.* Kowalewski, Aus der Geometrie der Funktionen. — *2. Juni 1927.* Löwner, Das Helmholtz-Liesche Raumproblem. — *7. Juli 1927.* Lagally, Über geodätische Dreiecksnetze. — *21. Juli 1927.* Threlfall, Unendliche diskrete Gruppen. — *1. Dezember 1927.* Lagally, Ebene Strömung um zwei kreisförmige Ringe. — *15. Dezember 1927.* Trefftz, Zum Ritzschen Verfahren (Fortsetzung).

Mathematische Gesellschaft Isis in Dresden. *3. Februar 1927.* Trefftz, Praxis der konformen Abbildung. — *3. November 1927.* Kneschke, Über die Bewegung elektrischer Schwebeteilchen in Magnetfeldern. — *15. Dezember 1927.* Böhmer, Über ebene monotone Streckenzüge.

Mathematisches Kolloquium in Freiburg i. Br. Wintersemester 1927/28. 8. *November 1927.* W. Krull, Galoissche Theorie der unendlichen Körper. — *22. November 1927.* Literaturbericht: E. Zermelo, Über Carathéodorys Spiegelung an analytischen Kurven. W. Krull, Über die Artinschen Reziprozitätsgesetze. R. Baer, Über die Urysohn-Mengersche Dimensionstheorie. — *29. November 1927.* W. Krull, Topologie der algebraischen Zahlkörper. — *6. Dezember 1927.*[1]) H. Kapferer, Über eine

Erweiterung des Fundamentalsatzes der Algebra auf zwei Veränderliche. — *20. Dezember 1927.* Fr. Ziebold, Über Hermitesche Geometrie. — *17. Januar 1928.* R. Baer, Über die Einführung des Scharbegriffs und seine Stellung in der Topologie der Gruppen. — *31. Januar 1928.*[1]) W. Krull, Extrema reeller Funktionen von zwei Veränderlichen. — *7. Februar 1928.* E. Zermelo, Über Kernzahlen und Kontinuumsproblem. — *14. Februar 1928.* O. Becker, Über die konstruktive Kennzeichnung der transfiniten Ordnungszahlen. — *28. Februar 1928.*[1]) K. Feurstein, Innerer Aufbau der Sterne nach Eddington.

Sommersemester 1928: *1. Mai.* E. Zermelo, Über den Eindeutigkeitssatz in der Tourniertheorie. — *8. Mai.* W. Krull, Zahlentheorie in allgemeinen Körpern. — *15. Mai.* R. Baer, Über geordnete Gruppen. — *22. Mai.* H. Kapferer, Über Diophantische Gleichungen höheren Grades. — *5. Juni.* W. Krull, Summationsmethoden und Momentenproblem nach Robert Schmidt. — *12. Juni.*[1]) A. Ostrowski (Basel), Über die lexikographische Anordnung in der Algebra. — *3. Juli.* H. Kapferer, Über die Jacobische Kurve von drei Kurven. — 10. *Juli.* F. Jauch, Kontinuierliche Behandlung der Kontribution einer allgemeinen Versicherung. — *17. Juli.* W. Krull, Idealtheorie in Ringbereichen ohne Endlichkeitsbedingung. — *24. Juli.* E. A. Ansel, Analyse versteckter Periodizitäten.

Mathematische Gesellschaft in Göttingen. *8. November 1927.* Lewy, Ein neuer Beweis des analytischen Charakters der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen. — *22. November 1927.* Emmy Noether, Quaternionenkörper. van der Waerden, Eine Eigenschaft der Flächen vom Geschlecht 1. — *6. Dezember 1927.* Bernays, Über Baldus' Bemerkungen zum Hilbertschen Vollständigkeitsaxiom. van der Waerden, Das allgemeine Reziprozitätsgesetz. — *10. Januar 1928.* Grandjot-Grell-van der Waerden, Literaturbericht. — *24. Januar 1928.* Harald Bohr, Bericht über eine gemeinsame Untersuchung mit Herrn Besicovitsch über Verallgemeinerung von fastperiodischen Funktionen. — *7. Februar 1928.* Emmy Noether, Differentialquotienten von Idealen und Verzweigungstheorie. — *21. Februar 1928.* Lewy, Die Übertragung der Riemannschen Integrationsmethode bei hyperbolischen partiellen Differentialgleichungen auf mehr Dimensionen. Bernays, Die Rekursion als Grundlage der Zahlentheorie.

Mathematisches Kolloquium in Greifswald. Wintersemester 1926/27. *19. November.* H. Kneser, Kreuzen bei veränderlichem Wind. — *10. Dezember.* Vahlen, Lösungszahlen diophantischer Gleichungen. — *14.* und *21. Januar.* Koschmieder, Invarianten bei der Variation vielfacher Integrale. — *11. Februar.* Reinhardt, Über die Zerlegung der Ebene in kongruente Bereiche.

Sommersemester 1927. *20. Mai.* H. Kneser, Eine funktionentheoretische Arbeit von E. Landau. — *17. Juni.* Furch (Rostock), Zur Topologie des dreidimensionalen Raumes. — *8. Juli.* Reinhardt, Über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. — *22. Juli.* Koschmieder, Das Additionstheorem der Hermiteschen Polynome mehrerer Veränderlichen.

1) Gemeinsam mit der mathematischen Gesellschaft.

Wintersemester 1927/28. *11.* und *25. November.* Reinhardt, Über die Zerlegung der euklidischen Ebene in kongruente Bereiche. — *9. Dezember.* Hoheisel, Eine Illustration zur Riemannschen Vermutung. — *21. Januar.* H. Kneser, Glättung von Flächenabbildungen. — *4. Februar.* Hoheisel, Die Nullstellen der Zetafunktion. — *18. Februar.* H. Kneser, Zentralkraftfelder mit geschlossenen Bahnen.

Mathematische Gesellschaft an der Universität Jena. Winterhalbjahr 1927/28. *11. November.* Koebe (Leipzig), Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen. — *1. Dezember.* Gekeler, Biegungs- und Faltungserscheinungen an Schalen und Blechen (mit Lichtbildern). — *12. Dezember.* König, Reihenentwicklung analytischer Funktionen. — *25. Jan.* Heiland, Das mathematische Lehrbuch. — *9. Februar.* Joos, Das periodische System der Elemente als Problem der Kombinatorik. — *23. Februar./1. März.* Mackensen, Über das Schleifen von Flächen zum Zwecke der Optik.

Sommerhalbjahr 1928. *5. Mai.* Ullrich, Theorie der wesentlichen Singularitäten. — *24. Mai.* Trefftz (Dresden), Elementare Konvergenzbetrachtungen zum Ritzschen Verfahren. — *14. Juni.* Grell, Neue Begründung des Hauptsatzes der algebraischen Zahlentheorie. — *28. Juni.* Bauersfeld, Über die Kartenherstellung nach photographischen Geländeaufnahmen. — *11. Juli.* Schmidt, Herm. Über die Legrendreschen Funktionen. — *26. Juli.* Frl. Starke, Maximalmomentenfläche eines Gerberschen Balkens.

Mathematisches Jugendkolloquium Jena. Sommersemester 1928. *15.* und *23. Mai.* Grell, Über einen neuen Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern. — *23. Mai.* Ringleb, Über glatte Potentialströmungen. — *6. Juni.* Hermann Schmidt, Zur Theorie der uneigentlichen Integrale, insbesondere Differentiation nach einem Parameter. — *13. Juni.* Grell, Algebraische Theorie der reell abgeschlossenen Körper. — *20. Juni.* Starke, Die Maximalmomentenfläche eines Gerberschen Balkens. — *27. Juni.* Ullrich, Approximation der Abbildungsfunktion von schlichten Gebieten durch Polynomfolgen. — *4. Juli.* Hermann Schmidt, Bericht über lineare Differentialgleichungen mit Übertragung der Fuchsschen Theorie auf Riemannsche Flächen. — *18. Juli.* Herzberger, Die Eigenschaften erster Ordnung von Strahlsystemen längs eines Strahls. — *25. Juli.* Grell, Über die algebraische Theorie der reellen Körper.

Wintersemester 1928/29. *7. und 14. November.* Grell, Über den v. d. Waerdenschen, logarithmenfreien Beweis des Dirichletschen Einheitensatzes. — *23. November.* Hermann Schmidt, Doerges Untersuchungen zum Hilbertschen Irreduzibilitätssatz. — *30. November.* Herzberger, Über aplanatische Abbildung. — *5. Dezember.* Grell, Über eine idealtheoretische Charakterisierung der Galoisschen Zahlkörper. — *12. Dezember.* Ullrich, Normalfamilien. I. Ausgangspunkt und Grundsätze der elementaren Theorie. — *19. Dezember.* Ullrich, Normalfamilien. II. Transzendente Theorie, Modulfunktion und Picardsche Sätze. — *9. Januar.* Herta Schmidt, Über die Periodenquersumme der n-adischen Entwicklung einer rationalen Zahl. — Hermann Schmidt, Über eine spezielle Permutations-

gruppe. — *16. Januar.* Herzberger, Über nichteuklidische Farbenmetrik nach Schrödinger. — *23. Januar.* Ullrich, Normalfamilien. III. Die Methoden von Julia und seine Verschärfungen des Picardschen Satzes. — *30. Januar.* Ullrich, Normalfamilien. IV. Ostrowskis Bestimmung der Juliaschen Ausnahmefunktionen. — *6.* und *13. Februar.* Grell, Über eine Beziehung des allgemeinen Dimensionbegriffes zur elementargeometrischen Anschauung (Deformationssatz von Alexandroff). — *20. Februar.* Hermann Schmidt, Existenz- und Eindeutigkeitssätze bei gewöhnlichen Differentialgleichungen im Reellen. — *27. Februar.* Wolfgang Franz (Halle), Über die Steinitzschen Untersuchungen zur Theorie der Polyeder. — Ringleb, Über schlichte, konforme Abbildungen. — Herzberger, Über die Umgebung eines Strahls in optischen Systemen. — *28. Februar.* Grell, Stetige Abbildungen und allgemeiner Dimensionsbegriff. — Ullrich, Über meromorphe Funktionen ohne Defekt. — Hermann Schmidt, Über Potenzreihen mit nur multiplikativen Randsingularitäten. — Georg Nöbeling (Göttingen), Über die Bohrsche Theorie der fastperiodischen Funktionen.

Mathematisches Kolloquium an der Technischen Hochschule Stuttgart. *15. November 1927.* Härlen u. Lösch, Bericht über die Kissinger Tagung. — *29. November* u. *6. Dezember 1927.* Mehmke, Logarithmographisches Rechnen mit komplexen Zahlen. Anwendung auf die Herstellung konformer Abbildungen. — *21.* u. *28. Februar 1928.* Betsch, Über Binäranalyse und die Formen regulärer Polyeder.

Sommersemester 1928. *24. Mai* u. *14. Juni 1928.* Haack, Kleins Erlanger Programm und die Differentialgeometrie. — *21. Juni* u. *5. Juli 1928.* Mehmke, Über die konstruierende Differentialgeometrie. — *19. Juli 1928.* Mehmke, Zur Affingeometrie.

Wintersemester 1928/29. *15. November 1928.* Mehmke, Über binäre Zahlen (insbesondere duale und Hyperbelzahlen) mit Anwendungen auf Geometrie und Funktionentheorie. — *29. November 1928.* Loebell, Hauptschubspannungslinien in plastischen Stoffen. (Im Anschluß an Jenne, Zeitschrift f. Angew. Math. u. Mech. Bd. VIII.) — *13. Dezember 1928.* Rehbock, Über den Begriff des Risses. — *31. Januar 1929.* Mehmke, Fragen der Liniengeometrie, mit Punktrechnung und Strahlrechnung behandelt. — *14.* u. *28. Februar 1929.* Lösch, Über den Zusammenhang der Koeffizienten eines Funktionselements mit seinen Singularitäten auf dem Konvergenzkreis.

Schwäbisches Kolloquium (Universität Tübingen und Technische Hochschule Stuttgart gemeinsam). *10. Dezember 1927.* Pfeiffer, Über die Painlevésche Reibungstheorie. — *11. Februar 1928.* Späth, Zur Transzendenz von e und π. — *12. Mai 1928.* Lotze, Projektive Begründung der Punktrechnung. — *14. Juli 1928.* Schönhardt, Lateinische Quadrate und Gruppen.

Mathematisches Kränzchen in Prag. *2. Dezember 1927.* Pöschl, Über achsensymmetrische elastische Probleme. — *3. Februar 1928.* Fürth, Über neuere Probleme der statistischen Mechanik. — *10. Februar 1928.* Fürth, Über Wellenmechanik in Systemen, die aus sehr vielen gleichen Teilsystemen bestehen. — *24. Februar 1928.* Fürth, Schwankungserscheinungen bei

entarteten Gasen. — *2. März 1928.* Berwald, Über die Abhandlung von Levi-Civita „Sur l'écart géodésique" (Math. Ann. 97 (1927)) und einige daran anschließende Arbeiten. — *9.* u. *16. März 1928.* Frank, Quantenmechanik und Hermitesche Formen. — *18. Mai* u. *8. Juni 1928.* Löwig, Die Differentialgleichungen der Extremalen eines Mayerschen Problemes in der Variationsrechnung als Gleichungen einer infinitesimalen Berührungstransformation. — *15. Juni 1928.* Kuhn, Zur Viggo Brunschen Methode in der Zahlentheorie. — *23., 30. November 1928, 19. April 1929.* Frank, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. — *10. Mai 1929.* Menger, Wien, Der Euklidische Raum. — *31. Mai, 7., 14. Juni 1929.* Glaser, Über die Arbeiten von H. Geppert: „Sugli invarianti adiabatici di un generico sistema differenziale." Lincei Rendiconti 6. 8. 1928.

Wiener mathematische Gesellschaft. *28. Oktober 1927* (Generalversammlung). Menger, Theorie der Konvexität. — *11. November 1927.* Mayer, Ein Axiomensystem der kombinatorischen Topologie. — *28. November 1927.* Hahn, Über Streckenbilder. — *9. Dezember 1927.* Brauner, Über algebraische Singularitäten von Kurven. — *16. Dezember 1927.* Oppenheim, Über die Periodizität der Sonnenflecken. — *13. Januar 1928.* Schatz, Über die Laguerresche Geometrie. — *27. Januar 1928.* Kruppa, Emil Müllers Leben und Wirken. — *10. November 1928.* Knoll, Über Interpolationsreihen. — *17. Februar 1928.* Burstin, Über projektive Differentialgeometrie. — *2. März 1928.* Basch, Über Motorrechnung. — *10. März 1928.* Brouwer, Wissenschaft, Mathematik und Sprache. — *14. März 1928.* Brouwer, Über die Struktur des Kontinuums. — *24. April.* Levi-Civita, Über die mechanische Beanspruchung elastischer Systeme. — *18. Mai 1928.* Radakovic, Über Extremeigenschaften von Eigenwerten. — *1. Juni 1928.* Petersson, Über Gitterpunkte in Ellipsoiden. — *15. Juni 1928.* Mayer, Zur Variationsrechnung.

Abelfeier in Oslo.

Die Universität Oslo hat am 6. April d. J. Abels hundertsten Todestag durch einen feierlichen Aktus begangen. Der Rektor Prof. Sæland hielt eine einleitende Ansprache und Prof. W. Bjerknes die Gedächtnisrede. Nach dieser vollzog der Rektor die Promotion von sechzehn Mathematikern zu Doktoren der Philosophie ehrenhalber. Von diesen waren vier anwesend: Juel (Kopenhagen), Engel (Gießen), Phragmén (Stockholm), Landau (Göttingen). Landau dankte im Namen der vier für die ihnen zuteil gewordene Ehrung. Eingerahmt wurden die Reden durch eine Aufführung der Kantate, die Björnson 1902 zur Feier von Abels 100. Geburtstage gedichtet hatte, und zwar wieder mit der Musik von Chr. Sinding. Der Komponist wohnte der Feier bei.

Die Namen der zwölf nicht anwesenden Ehrendoktoren sind:

L. E. J. Brouwer (Amsterdam). R. Fueter (Zürich). J. Hadamard (Paris). G. H. Hardy (Oxford). K. Hensel (Marburg). E. L. Lindelöf (Helsingfors). P. Painlevé (Paris). S. Pincherle (Bologna). T. Takagi (Tokio). Ch. J. G. N. de la Vallée-Poussin (Löwen). O. Veblen (Princeton). H. Weyl (Zürich).

Preisaufgaben und gekrönte Preisschriften.

Mathematische Preisaufgabe der Universität Gießen.

„Der Begriff der sechsgliedrigen Gruppe der Euklidischen Bewegungen ist heute Allgemeingut aller Mathematiker, findet sich aber allem Anschein nach bei Euler noch nicht. Es soll festgestellt werden, ob dieser Begriff mit voller Deutlichkeit oder doch andeutungsweise in den Schriften von Lagrange, Cauchy, Poncelet, Moebius, Hamilton und deren Zeitgenossen auftritt."

Wer sich um den Preis bewirbt, muß mindestens in einem der beiden auf die Stellung der Aufgabe folgenden Semester an der Universität Gießen immatrikuliert gewesen sein. Die Arbeit ist vor dem 1. April 1930 an die Fakultät einzusenden.

Ernst-Abbe-Gedächtnispreis.

Der von der Carl Zeiß-Stiftung zu Jena begründete Ernst Abbe-Gedächtnispreis und die damit verbundene *Abbe-Medaille*, die im Jahre 1928 zum ersten Male für *Anwendungsgebiete der Mathematik und Physik* zur Vergebung kommen sollten, sind nach dem Urteil des Preisgerichts (Prof. Hecker-Jena, Prof. Prandtl-Göttingen, Prof. Zenneck-München) dem Prof. Dr. Dr.-Ing. h. c. Alexander Meißner-Berlin, dem *„Erfinder des Röhrengenerators"*, zuerkannt worden.

Literarisches.

Besprechungen.

Pascals Repertorium der höheren Mathematik. Repertorium der höheren Analysis unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen herausgegeben von E. Salkowski. Bd. 2 und 3. 2. Aufl. Leipzig 1927 und 1929. S. 529—1598.

Die nun endlich vorliegenden Schlußbände des Repertoriums enthalten folgende Beiträge: A. Guldberg, Gewöhnliche Differentialgleichungen und Differenzengleichungen. — A. Guldberg, Partielle und totale Differentialgleichungen. — E. Pascal, Totale Differentialgleichungen und Differentialformen. — A. Guldberg und F. Engel, Die Lehre von den Transformationsgruppen. — H. Hahn, Variationsrechnung. — G. Doetsch, Funktionentheorie. — E. Jahnke und A. Barneck, Elliptische Funktionen und Integrale. — H. W. E. Jung, Algebraische Funktionen und ihre Integrale. — H. W. E. Jung, Die Thetafunktionen und die Abelschen Funktionen. — R. Fricke, Automorphe Funktionen unter Einschluß der elliptischen Modulfunktionen. — E. Kamke, Neuere Theorie der reellen Funktionen. — G. Hoheisel, Neuere Entwicklungen zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. — W. Sternberg, Die Theorie der Randwertaufgaben im Gebiete der partiellen Differentialgleichungen. — A. Walther, Differenzenrechnung. — H. Hahn, L. Lichtenstein, J. Lense, Die Theorie der Integralgleichungen und Funktionen unendlich vieler Variablen und ihre Anwendung auf die Randwertaufgaben bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen. — A. Plessner, Trigonometrische Reihen. — E. Hilb, Kugelfunktionen, Besselsche und verwandte Funktionen. — E. Bessel-Hagen, Zahlentheorie. Bieberbach.

O. Th. Bürklen, Mathematische Formelsammlung. Vollständig umgearbeitete Neuausgabe von F. Ringleb. (Sammlung Göschen Nr. 51.) 241 S. Berlin und Leipzig 1927, Walter de Gruyter & Co.

Diese altbekannte Formelsammlung ist von dem neuen Herausgeber um die Abschnitte über Zahlentheorie und Differentialgleichungen vermehrt worden, so daß jetzt etwa der Stoff der Schule und der drei ersten mathematischen Hochschulsemester vereinigt ist. Manche stark verbesserungsbedürftige Teile sind modernisiert, jedoch kann nicht verschwiegen werden, daß das Büchlein auch jetzt noch eine Reihe von Mängeln enthält, von denen mit Rücksicht auf seine starke Verbreitung einige genannt seien. So fehlt S. 14 der Satz über den Geradheitscharakter der Anzahl von Inversionen, aus denen eine Permutation besteht, obwohl der Satz zwei Seiten weiter bei der Definition der Determinanten gebraucht wird. Der Satz 4 der Wahrscheinlichkeitsrechnung S. 21 ist unverständlich formuliert. Auf S. 22 findet sich die Definition: „Unter einer irrationalen Zahl versteht man eine reelle nicht rationale Zahl, welche einer algebraischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten genügt.“ Ohne den Relativsatz wäre sie richtig, aus der nachfolgenden Definition der transzendenten Zahlen aber sieht man, daß der Verf. eigentlich die Definition der algebraischen Zahl geben wollte, für die sie aber nur richtig wird, wenn man die Worte „reelle nicht rationale“ streicht. S. 166 wird zwar $\lim a_n$ für ganzzahlig wachsendes n definiert, der aber wenige Zeilen später und natürlich noch öfter benutzte $\lim f(x)$ für kontinuierliches x nicht. S. 175 findet sich der Satz: „Wenn die Partialsummen einer Reihe ihrem absoluten Betrage nach sämtlich unterhalb derselben positiven endlichen Größe bleiben, so ist die Reihe konvergent“, also z. B. $1 - 1 + 1 - 1 \ldots$! Beim Taylorschen Satz S. 178, der hier den unangemessenen Namen Taylorsche Reihe führt (diese selbst wird nicht behandelt), wird die im Restglied vorkommende Ableitung als stetig vorausgesetzt, während vier Seiten vorher im Spezialfall des Rolleschen Satzes diese Voraussetzung ganz richtig als überflüssig weggelassen ist. S. 193 wird die Taylorsche unendliche Reihe bei einer Integration benutzt, ohne daß vorher von ihr die Rede war, so daß also die Frage, ob die Reihe überhaupt konvergiert und die Funktion darstellt, gar nicht geklärt ist. — Ich habe diese Mängel deshalb etwas ausführlicher hervorgehoben, weil eine derartige Formelsammlung hauptsächlich doch in die Hände eines ziemlich kritiklosen Publikums gelangt und Fehler daher bei ihr doppelt gefährlich sind, ich stehe aber nicht an zu erklären, daß das Büchlein auch sehr viele schätzbare Vorzüge besitzt.

Stuttgart. DOETSCH.

J. C. Poggendorfs biographisch-literarisches Handwörterbuch für Mathematik, Astronomie, Physik, Chemie und verwandte Wissenschaftsgebiete. Bd. V. 1904—1922. Herausgegeben unter Mitwirkung der preußischen Akademie der Wissenschaften in Berlin, der Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen, der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, der bayrischen Akademie der Wissenschaften in München und der Akademie der Wissenschaften in Wien, von der Sächsischen Akademie der Wissenschaften

zu Leipzig. Redigiert von Prof. Dr. P. Weinmeister. 1423 S. Leipzig und Berlin 1926, Verlag Chemie G. m. b. H.

Der neue Band, der die Jahre 1904—1922 behandelt, enthält wie die vorigen biographische Angaben über exakte Gelehrte und Verzeichnisse ihrer Veröffentlichungen. Nach Möglichkeit sind dabei die eigenen Angaben der Forscher verwendet worden. Wo die Erlangung solcher Angaben scheiterte, wurden andere Hilfsmittel benutzt. So ist außerordentlich viel nützliches Material zusammengetragen, und das Buch wird jedem nützlich sein, der sich rasch darüber orientieren will, was dieser oder jener deutsche oder nichtdeutsche Forscher geschrieben hat. Zum Teil sind diese Angaben durch mühsames Durchsuchen von Zeitschriften herangeschafft. Sehr unvollständig sind leider oft die biographischen Angaben auch da, wo sie leicht zu erlangen gewesen wären, wenn der Redakteur wirklich, wie er angibt, die gesamte einschlägige Literatur herangezogen hätte. Dann hätte er vermutlich bemerkt, daß im Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung regelmäßig ein Mitgliederverzeichnis erscheint, dem er viele ihm fehlende biographische Angaben hätte entnehmen können. Z. B. Bernays, Brouwer, Carathéodory, M. Großmann, J. Hamburger, A. Ostrowski, um nur einige Beispiele zu nennen. Vielfach werden Gestorbene zu den Lebenden gerechnet. Schlimm steht es mit der Berücksichtigung des Umstandes, daß es vorkommt, daß Gelehrte Bücher schreiben. Das ist dem Herrn Redakteur oft entgangen. So bei Bromwich, Brouwer, G. Scorza. Ein Zahlentheoretiker von der Eigenart eines Kraïtchik fehlt. Daß die Arbeiten eines Wieferich einmal Aufsehen erregten, ist dem Herrn Redakteur entgangen, er hätte sonst den Namen aufgeführt. Das Wunderkind Ramanujan fehlt nicht minder.

Aus allem mag ersichtlich sein, daß der Herr Redakteur mehr Fleiß und Mühe verwenden muß und gewissenhafter sein Versprechen einzulösen hat, alle einschlägige Literatur heranzuziehen. Dazu gehört außer der schon erwähnten auch der Besprechungsteil der Zeitschriften und am Ende auch das Buchhändlerbörsenblatt. BIEBERBACH.

W. W. Rouse Ball, Histoire des Mathématiques. Bd. I. Paris 1927, Librairie scientifique J. Hermann.

Der erste Band der französischen Übersetzung des englischen Originals behandelt die Mathematik vom Altertum bis zu Huyghens. Gegenüber dem englischen Original sind Erweiterungen durch verschiedene zusätzliche Anmerkungen vorgenommen. Die Absicht des Buches ist aber die gleiche. Es will einen knappen Überblick über die Haupttatsachen der Geschichte geben, und faßt daneben auch übersichtlich die Lebensschicksale und die Werke der einzelnen Mathematiker zusammen. Zahlreiche Portraits geben diesem anastatischen Nachdruck des zuerst 1906 erschienenen Bandes einen besonders freundlichen Charakter. BIEBERBACH.

F. Malsch, Geschichte der Mathematik. Leipzig 1928, Quelle & Meyer.

Die für weitere Kreise bestimmte Darstellung reicht vom Altertum bis zu Gauß. Der Umstand, daß nur Vorkenntnisse vorausgesetzt werden in dem Rahmen, in dem sie die höheren Schulen vermitteln, bestimmt Inhalt und Form der Darstellung, die so vielfach mehr dem äußeren Leben

der Wissenschaft als den Ideen der Mathematiker gelten muß. Viel Interessantes aus dem Leben der Mathematiker und ein reiches Bildermaterial machen die Lektüre angenehm. BIEBERBACH.

Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik. Hrsg. von O. Neugebauer in Göttingen, J. Stenzel in Kiel, O. Toeplitz in Bonn. Abt. B. Studien. Bd. I. Heft 1. Mit 28 Textabbildungen. Berlin 1929, Julius Springer. *RM* 12.—.

Mit einem ausnehmend hohen geistigen Niveau führt sich durch ihr erstes Heft diese neue Zeitschrift ein. Es vermittelt ganz neue Einsichten in die Grundlagen der griechischen Mathematik, namentlich in die Absichten Platos, deren Verständnis sehr große philologische Schwierigkeiten im Wege standen, die nun allmählich überwunden werden. Diesem Gegenstand der Grundlagen der griechischen Mathematik gelten die Aufsätze von Toeplitz, Stenzel und Solmsen. Zwei weitere Aufsätze führen die Untersuchungen fort, die Neugebauer im Verein mit anderen über die babylonische Mathematik begonnen hat. Auch in diesem Heft werden wieder überraschende neue Aufschlüsse gegeben, so z. B. die merkwürdige Tatsache, daß die Babylonier bereits im Besitze der Auflösungsformel für die allgemeine Gleichung zweiten Grades waren. Neben den Heften der Studien sollen in einer besonderen Abteilung Quellen mit philologischem Kommentar und Übersetzung dargeboten werden. BIEBERBACH.

O. Neugebauer, Die Grundlagen der ägyptischen Bruchrechnung. Berlin 1926, Julius Springer.

Es ist erfreulich zu sehen, wie die Geschichte der Mathematik unter den Händen einiger Forscher allmählich aus dem Stadium der Reportage oder Chronik zur Wissenschaft erhoben wird. Gerade das moderne Interesse an Grundlagenfragen scheint den Blick der Forscher auch für historische Zusammenhänge und das historische Urteil zu schärfen. Erfreulich ist es auch, daß sich der Geschichte der Wissenschaft immer mehr Forscher zuwenden, deren mathematische Kenntnisse sie zu einem brauchbaren Urteil befähigen. So arbeitet hier der Verfasser die additive Grundlage des ägyptischen Rechnens heraus und läßt die Konsequenz hervortreten, mit der diese Rechner an dem einmal gewählten additiven Fundament festhalten, und auch durch alle Umständlichkeit sich nicht in andere Bahnen drängen lassen. Dies mag freilich sowohl durch die noch mangelnde Fähigkeit zur Abstraktion als auch durch zähes Festhalten am Überkommenen bedingt sein. BIEBERBACH.

H. Hasse und H. Scholz, Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik. Charlottenburg 2, Panverlag Kurt Metzner.

Ein Mathematiker und ein Philosoph haben sich zusammengetan, um eine der aufschlußreichsten Schriften über die Eudoxische Proportionenlehre und ihre Beziehung zur modernen Theorie der Irrationalzahlen zu verfassen. Es tat wirklich not, diese Dinge einmal von dem Standpunkt moderner Einsichten in Grundlagenfragen aus zu betrachten. Hat doch ein mehrbändiger englischer Euklidkommentar im Vorwort bekennen müssen, daß sein Verf. erst von fremder Seite hat aufmerksam gemacht werden

müssen, daß die Dedekindsche Theorie mit der Eudoxischen Proportionenlehre methodische Beziehungen besitzt, und hat doch eine mehrbändige Deutsche Geschichte der Mathematik die Bedeutung der Zenonischen Paradoxien für die Mathematik geleugnet. Herrschend war in diesen Dingen die auf Gauß zurückgehende Auffassung, daß die arithmetische Auffassung erst die moderne Zeit charakterisiere. In der vorliegenden Schrift wird die Pythagoreische Entdeckung des Irrationalen als eine Krisis der Grundlagen der griechischen Arithmetik gewertet und die Eudoxische Lösung eben darin gesehen, daß es diesem gleichwohl gelingt, allein mit der Arithmetik der ganzen Zahlen auch das Irrationale zu beherrschen. Charakteristisch gegenüber Dedekind ist dabei der formale Charakter der Eudoxischen Theorie. Warum nun gleichwohl die Griechen nicht bis zur modernen Theorie der Irrationalzahlen gelangt sind, darauf sucht ein von H. Scholz verfaßter Anhang die Antwort, in dem er sich gleichzeitig mit der von Spengler gegebenen auseinandersetzt. Während letzterer, ausgehend von einer vorgefaßten Meinung über das, was man Geist der griechischen Wissenschaft nennt, eine Antwort gibt, wird hier gerade der eigentümliche Charakter der griechischen Mathematik verwertet, um daraus Aufschlüsse über die Grundauffassungen vom Wesen der Wissenschaft und der Stellung des Denkens zur Wirklichkeit zu gewinnen, die jenen Charakter der griechischen Mathematik erklärlich erscheinen lassen. Die Lösung wird darin nachgewiesen, daß die Griechen bereits bewußt die Brüche aus der Mathematik verbannten. Der Grund hierfür wird darin vermutet, daß die ganzen positiven, also „die natürlichen Zahlen", allein „dem Postulat" einer „von aller Willkür des Denkens unabhängigen Existenz genügen, dessen Erfüllung" nach griechischer Auffassung „eine notwendige Bedingung dafür ist, daß eine wissenschaftliche Mathematik überhaupt möglich ist". BIEBERBACH.

Franz Neumanns Gesammelte Werke. Herausgegeben von seinen Schülern. Erster Band. 4°. 428 S. Leipzig 1928, B. G. Teubner.

Nachdem die den physikalischen Arbeiten gewidmeten Bände 2 und 3 schon 1906 und 1912 erschienen, ist es nun endlich der Energie E. R. Neumanns im Verein mit A. Wangerin — dem einzigen lebenden Schüler F. Neumanns —, M. Krafft und H. Steinmetz gelungen, auch die mathematischen Arbeiten zum Druck zu bringen. Dem Band geht die Gedächtnisrede von W. Voigt voraus. Dann folgt die geometrische Dissertation von 1825 nebst dem Abdruck dreier hinterlassener Manuskripte, die sich alle auf das Berühren und Schneiden von Kreisen, Kugeln oder Kegeln unter gegebenen Winkeln beziehen. Sie sind von einem ausführlichen Kommentar E. R. Neumanns begleitet. Dann folgen die auf die Kristallographie bezüglichen Arbeiten. BIEBERBACH.

C. F. Gauß' Werke, Bd. XI, Abteilung 1. Herausgegeben von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. In Kommission bei Julius Springer. Berlin 1927.

Der Band enthält Nachlaßstellen aus der Physik, der Chronologie und der Astronomie, sammelt noch nicht abgedruckte Stücke aus dem umfangreichen Briefwechsel von Gauß, bringt aber auch einiges aus dem von Gauß

selber Veröffentlichten, das bisher in die Werke noch nicht Aufnahme gefunden hatte. Auch die amtlichen Berichte von Gauß sind herangezogen worden. BIEBERBACH.

Nicomachus of Gerasa, Introduction to arithmetic. Translated into English by Martin Luther D'Oge. With studies in greek arithmetic by Frank Egleston Robbins and Louis Charles Karpinski. 318 S. New York 1926, The Macmillan Company.

Der Wert dieses trefflichen Buches dürfte nicht nur in der englischen Übersetzung des griechischen Textes als auch in der Einleitung liegen, die dieser Übersetzung vorausgeht. Sie enthält eine Zusammenfassung alles dessen, was uns von griechischer Arithmetik überkommen ist.

BIEBERBACH.

Leonhard Euler, Drei Abhandlungen über die Auflösung der Gleichungen (1738, 1764, 1790). Übersetzt und herausgegeben von Dr. Samson Breuer (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Bd. 226.) Leipzig 1928, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H.

In dem Bande sind die drei Abhandlungen Eulers vereinigt, die sich mit der algebraischen Auflösung der Gleichungen fünften Grades befassen. Die hübschen Zusätze des Herausgebers machen die Lektüre bequem und stellen Eulers Untersuchungen in den Zusammenhang mit der modernen Theorie der algebraischen Auflösung der Gleichungen. BIEBERBACH.

H. Wieleitner, Mathematische Quellenbücher III, Analytische und synthetische Geometrie. (Mathematisch-naturwissenschaftlich-technische Bücherei, Band 19.) Berlin 1928, Otto Salle.

Wieleitner gibt in diesem dritten seiner Quellenbücher zunächst einige wichtige Abschnitte aus dem Kegelschnittwerke von Apollonios wieder, weil die moderne analytische Geometrie in Anlehnung an die antike Lehre von den Kegelschnitten entstanden ist. Es folgen dann lehrreiche Stellen aus Fermats Einführung in die ebenen und körperlichen Örter und aus Descartes' Geometrie. Darauf folgen einige Stücke aus De Baunes Noten zu Descartes' Geometrie, aus F. van Schootens Kommentar zu dieser, aus den Kegelschnittwerken von La Hire und de L'Hospital. Den Schlußabschnitt über analytische Geometrie bilden einige Stücke aus der Eulerschen Introductio. Aus der synthetischen Geometrie werden zuerst der wichtige Abschnitt über Involution aus dem Desarguesschen Brouillon und die ursprüngliche Form des Pascalschen Satzes aus dem Essay pour les coniques gegeben. Darauf folgen Abschnitte aus Poncelets Hauptwerk, aus dem Baryzentrischen Kalkul von Möbius und endlich aus Steiners Systematischer Entwicklung. Man muß sagen, daß die getroffene Auswahl ein gutes Bild von den geschichtlichen Anfängen der analytischen und der synthetischen Geometrie gibt. Wieleitner gibt zu jedem Quellenstück vortreffliche erläuternde Bemerkungen und schließt sein Bändchen mit einem Namenverzeichnis, das nicht nur die Namen der in dem Bändchen vorkommenden Mathematiker sondern auch zugleich die wichtigsten Lebensdaten enthält. Man kann auch dieses Quellenbuch wie seine Vorgänger aufs wärmste empfehlen.

Berlin. M. ZACHARIAS.

F. Cajori, Mathematics in liberal education. Boston (U. S. A.) 1928, The Christopher Publishing House.

Der Verf. hat in dem vorliegenden Buche Äußerungen hervorragender Männer über den Bildungswert der Mathematik gesammelt. Er will damit den Bestrebungen entgegentreten, die den Bildungswert der Mathematik, von psychologischen Tests ausgehend, leugnen, und dementsprechend den Platz der Mathematik im Schulunterricht kürzen wollen. Der Verf. stellt mit Recht fragwürdigen psychologischen Experimenten die Erfahrung entgegen, die hervorragende Männer am eigenen Leibe gemacht haben. Es sind in der Literatur nachgewiesene Äußerungen von 731 Männern gesammelt. Darunter sind nur 195 Mathematiker. Nur 128 Stimmen sind gegen den Bildungswert der Mathematik, darunter auch die von 5 Mathematikern.

BIEBERBACH.

F. Auerbach, Lebendige Mathematik. Breslau 1929, Ferdinand Hirt.

Der Verf. hat die löbliche Absicht, weitere Kreise von der Furcht vor mathematischem Denken zu befreien und ihnen einen klaren Einblick in Wert und Wesen der mathematischen Betrachtung zu geben. Er bringt im Laufe der 347 Seiten viele Einzelheiten, die Interesse verdienen und Interesse erwecken werden. Indessen steht es mit den Einblicken, die der Verf. in das eigentliche Begriffliche zu geben weiß, recht kümmerlich. Wenn das Buch des Verf. aus Vortragskursen hervorgegangen ist, die er im Zusammenhang mit der Reform der Lehrerbildung gehalten hat, so berührt es besonders peinlich, daß das Unkraut der unendlich kleinen Größen in dem Buch ganz tolle Blüten treibt. Hier und bei ähnlichem liegen die Hauptschwierigkeiten für eine Popularisierung der Mathematik. Mit Redensarten aber kann man Schwierigkeiten nicht überwinden. Man muß sie zunächst einmal selber klar erfassen und sie dann dem Leser zur Klarheit bringen. Sollte es wirklich so schwer sein, weiteren Kreisen den Grenzbegriff klarzumachen oder ihnen über die vierte Dimension Zulänglicheres und Klareres zu sagen, als der Verf. zu bieten weiß? BIEBERBACH.

G. Rose, Die Schulung des Geistes durch den Mathematik- und Rechenunterricht. (Eine psychologische Analyse.) (Beihefte zur Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 11.) Leipzig 1928, B. G. Teubner.

Der Verfasser, der Psychologe und Mathematiker zugleich ist, gibt eine umfassende Darstellung der psychologischen Bedeutung des gesamten mathematischen Unterrichts unter Benutzung eigener Unterrichtsbeobachtungen. Jede einzelne Geistestätigkeit kommt zu ihrem Rechte: die Beobachtungsfähigkeit, das Vorstellungsvermögen, Assoziation und Reproduktion, Gedächtnis, Apperception, Aufmerksamkeit, Interesse, Phantasie, Denken, Urteilen, Begriffsbildung. Weitere Abschnitte behandeln das Definieren, das Systematisieren, die Analogiebildung, Induktion und Deduktion, das Beweisen und die mathematische Sprache. Überall bringt der Verfasser teils Beispiele und Beobachtungen aus seiner eigenen unterrichtlichen Tätigkeit, teils verwertet er die in der Literatur vorliegenden Einzeluntersuchungen. Für den Mathematiker ist es wichtig, daß der Verfasser nirgends besondere psychologische Kenntnisse voraussetzt. Das Ziel des Verfassers

ist, den Leser zu eigenen psychologischen Beobachtungen im mathematischen Unterrichte anzuregen. Möchten recht viele Lehrer der Mathematik dieser Anregung folgen. Der Gewinn für den Unterricht dürfte nicht gering sein.

Berlin. M. Zacharias.

F. Grundel, Die Mathematik an den deutschen höheren Schulen. Teil I. Von der Zeit Karls des Großen bis zum Ende des 17. Jahrhunderts. Teil II. Vom Anfang des 18. Jahrhunderts bis zum Anfang des 19. Jahrhunderts (Beihefte zur Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 12 und 13). Leipzig 1928 und 1929, B. G. Teubner.

Die sehr verdienstvolle Schrift gibt eine auf Quellenstudien beruhende eingehende Untersuchung über die Stellung und Bedeutung der Mathematik an den deutschen höheren Schulen von den ältesten Zeiten bis zum Anfang des 19. Jahrhunderts. Das Mittelalter ist mit Rücksicht auf die bereits vorliegende Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter von S. Günther nur kurz behandelt. Desto eingehender schildert der Verfasser im 1. Teile die Stellung der Mathematik an den gelehrten Schulen von der Reformation bis 1700. Der Verfasser gibt weniger allgemeine Betrachtungen, als vielmehr zahlreiche Schilderungen einzelner Schulen und ihrer Lehrpläne. Er setzt dadurch den Leser in den Stand, sich selbst ein Urteil über den Stand des mathematischen Unterrichts in der geschilderten Zeit zu bilden. Der Verfasser kommt im 1. Teile zu dem Ergebnis, daß die überwiegende Mehrzahl der Lateinschulen es im 16. und auch noch im 17. Jahrhundert nicht zu einem geregelten mathematischen Unterricht hat bringen können. Die Methode des Unterrichts lag sehr im argen. Man begnügte sich im allgemeinen mit dem Auswendiglernen von Definitionen und Regeln und der mechanischen Übung im Aufgabenlösen.

Im 2. Teile, der von dem mathematischen Unterricht im 18. Jahrhundert handelt, betrachtet der Verfasser zunächst die Mathematik in den Lehrplänen der höheren Schulen und in den damals gebräuchlichsten Lehrbüchern, sodann die Stellung der Mathematik in den nach der preußischen Ordnung von 1788 abgehaltenen Reifeprüfungen. Zeigt der erste Abschnitt dieses Teils hauptsächlich die Absichten und idealen Ziele des mathematischen Unterrichts, so läßt der zweite Abschnitt erkennen, wie viel oder vielmehr wie wenig von diesen Absichten und Zielen in der Wirklichkeit erreicht wurde. Nach den Lehrplänen wurden außer der Planimetrie an den meisten Schulen die ebene, vereinzelt auch die Anfangsgründe der sphärischen Trigonometrie, auch Stereometrie durchgenommen. Die Buchstabenrechnung ging stellenweise bis zu den Wurzeln, Proportionen, auch den Logarithmen und Reihen. Die angewandte Mathematik war vielfach Ziel und Zweck des Unterrichts. Diesem Bilde, das die Lehrpläne bieten, entsprechen die Leistungen in der Reifeprüfung nur in sehr geringem Maße. Die mathematischen Durchschnittsleistungen der Abiturienten um 1800 entsprachen nach den vom Verfasser mitgeteilten zahlreichen Angaben aus den Prüfungsprotokollen etwa denen eines heutigen Tertianers; die Kenntnisse eines heutigen Sekundaners werden nur an wenigen Anstalten erreicht und ganz selten überschritten. Die Bedeutung der Anschauung wurde ganz allgemein unter-

schätzt. Gedächtnis und logisches Denken sind die Fähigkeiten, die besonders gepflegt wurden. Erst im 19. Jahrhundert errang sich die Anschauung im mathematischen Unterricht die ihr gebührende Stellung. Charakteristisch ist es, daß im 18. Jahrhundert nur wenige höhere Schulen einen wirklichen eigenen Fachlehrer für Mathematik besaßen. Auch fehlte es durchweg an geeigneten Lehrbüchern und an Mitteln zur Anschaffung von Instrumenten und Büchern. Der hohen Wertschätzung, der sich im 17. und 18. Jahrhundert die Mathematik als Kulturfaktor erfreute, entsprach also keineswegs ihre Stellung im Unterrichtsplan der höheren Schulen.

Zusammenfassend sei noch einmal das große Verdienst hervorgehoben, das sich der Verfasser durch sein mühsames und umfassendes Quellenstudium um die Aufhellung der Unterrichtsgeschichte unseres Faches erworben hat. Es ist sehr zu wünschen, daß diese große Arbeit nicht umsonst getan sein möchte, daß vielmehr die Lehrer der Mathematik an den deutschen höheren Schulen sich recht eingehend mit der in vielen Beziehungen lehrreichen und interessanten Abhandlung beschäftigen möchten.

Berlin. M. ZACHARIAS.

J. Gottsbachner, Prüfungsfragen aus der Mathematik zum Gebrauche für die oberen Klassen der Mittelschulen und Lehrerbildungsanstalten. IV u. 204 S. mit 196 Fig. Leipzig und Wien 1928, Verlag Franz Deuticke. — **Physikalische Aufgabensammlung** für Maturanten aller Arten von Mittelschulen. 160 S. Mit 113 Fig. Ebenda.

Es handelt sich um Sammlungen von Aufgaben aus dem ganzen Umkreis der Schulmathematik und -physik, die zur Repetition des Stoffes in den oberen Klassen dienen sollen. Die Auflösungen sind ausführlich durchgerechnet, so daß die Hefte nicht bloß dem Lehrer Material an die Hand geben, sondern auch zum Selbststudium geeignet sind.

Stuttgart. DOETSCH.

M. Pasch, Mathematik am Ursprung. Gesammelte Abhandlungen über Grundfragen der Mathematik. Leipzig 1927, F. Meiner. Geh. *RM* 8.—.

Diese (zum Teil schon vorher in den fiktionalistisch eingestellten „Annalen der Philosophie" erschienenen) Aufsätze des Mannes, auf den die moderne Axiomatik trotz all ihrer Wandlungen doch schließlich in einem sehr beträchtlichen Ausmaße zurückgeht, verteilen sich auf drei verschiedene Gebiete. Die beiden ersten und der vorletzte Aufsatz, betitelt „Der starre Körper in der Geometrie", „Die Begriffswelt des Mathematikers in der Vorhalle der Geometrie" und „Dimension und Raum in der Mathematik", behandeln das Verhältnis der Geometrie zur Erfahrung, das im Zeitalter der Relativitätstheorie vermehrtes Interesse gewonnen hat. Den Begriff des starren Körpers festzulegen, den Übergang vom empirischen starren Körper zu Begriffen wie Linie, gerade Strecke, Fläche, Ebene, Bewegung zu bahnen und den Gebrauch der Ausdrücke „Dimension" und „Raum" in der Mathematik zu klären, ist das Ziel dieser Abhandlungen. Dabei tritt die schon aus den „Vorlesungen über neuere Geometrie" (1882) bekannte Einstellung des Verf. hervor; er will von der Empirie her die Tatsachen sammeln, die die eigentlich mathematische Behandlung der Geometrie ermöglichen sollen.

In einem für sich alleinstehenden Aufsatz „Der Begriff des Differentials" zeigt Verf. an Hand einer für weitere Kreise verständlichen Darstellung, wie

der Mathematiker die Grundbegriffe der Differentialrechnung einführt und warum demgemäß die Deutung Vaihingers irrig ist, als lägen hier zweckmäßige, aber in sich widerspruchsvolle Konstruktionen (Fiktionen) vor. Bemerkungen zu Fermats Maximumverfahren und zu dessen Behandlung durch Vaihinger bilden den Abschluß dieser Skizze.

Mit einem Doppelaufsatz „Begriffsbildung und Beweis in der Mathematik" und dem Schlußartikel „Die axiomatische Methode in der neueren Mathematik" behandelt das Buch endlich auch das Grenzgebiet zwischen den Grundlagen der Analysis und dem Bereiche der Logik, das Gebiet also, dem die Forschungen des Verf. in den letzten Jahrzehnten vorzugsweise gegolten haben. Neben einigen Einzelbetrachtungen (z. B. über die Einführung des Imaginären) findet man hier die dem Verf. eigentümlichen allgemeinen Betrachtungsweisen, denen der Mathematiker von heute wenig Geschmack abzugewinnen pflegt, indem er sie vielmehr der Logik oder der Epistemologie zuweist. Daß dennoch eine spätere Zeit im Laufe des Prozesses der „Tieferlegung der Fundamente" auch hier manches ihr Wesentliche finden und in einen anderen Zusammenhang als wertvoll einbetten wird, ist sehr wohl denkbar. Heute aktuell sind in diesen Aufsätzen namentlich die Bemerkungen über das Entscheidbarkeitsproblem; es zeugt für ein „In-der-Luft-liegen" der intuitionistischen Ideen, daß auch Pasch — unabhängig vom modernen Intuitionismus — manchen längst begraben geglaubten Gedankengängen Kroneckers Beachtung und Gefolgschaft geschenkt hat.

Kiel. A. Fraenkel.

H. Behmann, Mathematik und Logik. (Mathematisch-Physikal. Bibliothek, Bd. 71.) Leipzig und Berlin 1927, B. G. Teubner. Kartoniert *RM* 1.20.

In modernem Sinn, tiefgehender Analyse und präziser Darstellung werden der Reihe nach die Elemente der Aussagenlogik, der Begriffslogik, der Klassenlogik und der Zuordnungslogik entwickelt und zum Schluß die Grundlage für den Aufbau der Kardinalzahlarithmetik aufgerichtet. Trotz des knappen Umfangs findet der Leser in den wichtigeren Grundfragen teils volle Aufklärung, teils die zur weiteren Orientierung wegweisenden Ausblicke. Im wesentlichen baut sich das Büchlein auf dem System der *Principia Mathematica* auf, wobei — entsprechend der Beschränkung auf symbolisch darstellbare Begriffe und Aussagen — von der verzweigten Typen-(Stufen-) Theorie abgesehen wird. Daß der Verfasser auch in der Symbolik nicht unwesentlich von Whitehead und Russell abweicht, ist trotz sachlich guter Gründe zu bedauern, weil damit einem nicht unbeträchtlichen Teil der Leser das Studium erschwert wird.

Ein sehr erheblicher Nachteil fließt aus dem engen Rahmen, der dem Buch durch seine Einreihung in die Math.-Phys. Bibliothek aufgenötigt wird. Eine allzu weitgehende Stoffbeschränkung erschien dem Verf. mit Recht als untunlich, weil die elementaren Verfahren der Logik kaum eine fruchtbare eigentlich mathematische Verwendung zulassen und den Eindruck der Zwecklosigkeit und des toten Symbolisierens zu erwecken geeignet sind. So konnte der Verf. zu seinem Ziel nur dadurch vordringen, daß er eine knappe, schwierige und von didaktischen Grundsätzen wenig beeinflußte Darstellungsart wählte, die den wissenschaftlichen Wert des Büchleins zwar nicht mindert, aber seine Verbreitung innerhalb des sonstigen Leserkreises der Sammlung

erheblich einschränken wird. Das ist um so mehr zu bedauern, als es in der deutschen Literatur an einem Buch fehlt, das dem Lehrer an höheren Schulen die moderne Logik in einer für den Unterricht bequem auszuwertenden Form darböte.

Kiel. A. Fraenkel.

W. Lietzmann, Aufbau und Grundlage der Mathematik. (Lietzmann, Mathematisches Unterrichtswerk, Ergänzungsheft 3.) Leipzig und Berlin 1927, B. G. Teubner. Kartoniert *RM* 2.20.

Eine ihrem Programm und Ziel nach überaus nützliche, auch hinsichtlich Stoffauswahl und Darstellungsart meist nur zu rühmende Schrift! Wenn der — m. E. grundsätzlich mit an die erste Stelle zu rückende — formale und logische Bildungswert der Mathematik auf der höheren Schule (und ganz Entsprechendes gilt für die Universität!) zu seinem Recht gelangen soll, so muß auf die Bewältigung des eigentlichen Stoffes zum Schluß neben einem die Zusammenhänge klärenden Blick aus der Vogelschau vor allem noch ein Hinabstieg zu den Fundamenten nachfolgen. Nicht nur um der Mathematik willen ist das nötig, die sonst in der Erinnerung vieler Schüler nur als Tummelplatz einer besonderen Art von Gewandtheit fortlebt, sondern auch im Hinblick auf die Gesamtaufgabe der Schule, soweit diese auch auf die Hochschule und nicht allein auf das praktische Leben vorbereiten will; denn im Zeitalter der Kulturkunde und der stofflichen Ausbreitung, das selbst im Lateinunterricht die formalbildend so wertvolle Grammatik-, Stil- und Aufsatzlehre (zugunsten der Klassiker) in den Hintergrund schiebt, ist unbeschadet einer vernünftigen Einstellung auf die Anwendungen gerade jene Funktion der Mathematik von gesteigerter Bedeutung.

Die Schrift behandelt in einem ersten Kapitel die Logik in der Mathematik, in drei weiteren die Grundlegungen der Geometrie, der Arithmetik und der Analysis, und zwar im Dienst einer philosophischen (z. T. auch psychologischen) Vertiefung des im Schulunterricht behandelten Stoffes. Sie ist als Leitfaden in der Hand des Lehrers gedacht; doch ist die Darstellung bei aller Knappheit so verständlich und die Betrachtungsart der Probleme so vielseitig, daß von vielem der begabtere Schüler auch beim Selbststudium Nutzen haben wird und andererseits auch im Kreis der Studierenden die Verbreitung der Schrift nur erfreulich wirken kann, sofern sie nicht als Ersatz für eine weitergehende Behandlung nach ausgewählten Richtungen auf der Universität angesehen wird. Daß die „Tieferlegung der Fundamente" nicht in dem der heutigen Forschung entsprechenden Maße, sondern mit einer den Zielen der Schrift entsprechenden (namentlich dem Abstraktionsvermögen reifer Schüler der Oberstufe halbwegs angepaßten) Beschränkung erstrebt wird, kann nur gebilligt werden. Dagegen wäre eine größere Freigebigkeit in den Verweisen (namentlich auf tieferschürfende Literatur) sicherlich den Lesern aus dem Kreise der Lehrer und der Studierenden zugute gekommen; ein mäßiger Ausbau nach dieser Richtung ist für die sicherlich bald erforderliche Neuauflage wünschenswert.

Am meisten werden über die Stoff- und Methodenwahl in dem der Logik gewidmeten Eingangskapitel die Meinungen auseinandergehen. Vor allem besteht das vom Verf. selbst stark gefühlte Bedenken, daß der (hier geübte) Anschluß an die Aristotelische Logik nicht mehr ganz zeitgemäß ist und

gar manche zukunftsträchtige Ideen des modernen Logizismus für die Schule durchaus nutzbar gemacht werden können. Daß dieser im wesentlichen ausgeschaltet worden ist, erscheint dem Referenten um so bedauerlicher, als abgesehen von Russells trefflicher, doch für den vorliegenden Zweck nicht recht geeigneter „Einführung in die mathematische Philosophie" keine gleichzeitig elementare und gute Darstellung am deutschen Büchermarkt vorliegt. Auch abgesehen hiervon sind zu diesem Abschnitt noch mancherlei berechtigte Wünsche im einzelnen möglich; so wäre, um nur zwei Beispiele anzuführen, sehr wertvoll eine eingehendere Behandlung der Negation und Umkehrung von Urteilen, worüber man von Anfängerstudenten selten eine richtige Antwort erhält, oder des indirekten Beweisverfahrens, das namentlich auch in psychologischer Hinsicht noch vielfach klärungsbedürftig ist.

Der Reichtum an Stoff, der im zweiten, der Geometrie gewidmeten Kapitel verarbeitet ist, werde durch folgende (nicht vollständige) Reihe von Stichwörtern angedeutet: Die Begriffe Fläche, Kurve, Länge (einseitige Flächen, Peanosche Kurve); Euklids System; die Axiomgruppen Hilberts; Unabhängigkeitsfragen; Beziehungen der Axiome zur Wirklichkeit; nichteuklidische Geometrien; Archimedisches Axiom; der vierdimensionale Raum und die regelmäßigen Polytope darin.

Am wenigsten gelungen scheint mir der folgende Abschnitt, der sich mit den Grundlagen der Arithmetik befaßt. Hier hätte im weiteren Verlauf die Heranziehung des Körper-(und Gruppen-)Begriffs aufklärend und vereinheitlichend gewirkt; die keineswegs so recht deutlich herausgekommene Begründung des Verbots, durch Null zu dividieren, ferner das Permanenzprinzip und manches andere wären dann bedeutend klarer geworden. Das entscheidende (letzte) der Peanoschen Axiome für die natürlichen Zahlen ist unrichtig (oder mindestens sehr mißverständlich) wiedergegeben, wie überhaupt diese Axiome in diesem knappen Rahmen kaum verstanden werden dürften. In dem kurzen, der Mengenlehre gewidmeten Anhang endlich hätte der (ohnehin nicht ganz korrekte) Nachweis der Äquivalenz zwischen linearem und ebenem Kontinuum ohne Schaden fortbleiben können, während elementarere und mindestens ebenso wichtige Gegenstände eine ernstliche Behandlung verdient hätten: z. B. das nur ganz nebenbei erwähnte Charakteristikum der endlichen Mengen, keinem echten Teil äquivalent zu sein, oder gewisse Grundbegriffe und -tatsachen der Ordnungslehre (wie die wesentlich eindeutige Ordnungsfähigkeit der endlichen Mengen im Gegensatz zu den unendlichen).

Daß auf den die Analysis behandelnden 14 Seiten nur das Wichtigste flüchtig berührt werden konnte, liegt auf der Hand. Dennoch hätte bei der relativen Ausführlichkeit, mit dem die Differentialrechnung zu Worte kommt, der Integralbegriff sowie die Beziehung zwischen Ableitung und bestimmten Integral wohl nicht völlig unter den Tisch fallen sollen. Doch können solche Bedenken, denen weitere unschwer anzureihen wären, die allgemeine Bedeutung der Schrift nicht wesentlich mindern; hoffen wir, daß sie namentlich im Kreis der Lehrer vielfach vorgenommen werde und einen nachhaltigen Einfluß auf die Gestaltung des mathematischen (und philosophischen) Unterrichts in der Prima ausübe!

Kiel. A. Fraenkel.

A. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre. Dritte Auflage. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Band IX.) Berlin 1929, Julius Springer.

Die dritte Auflage des bekannten vorzüglichen Werkes ist in der Anlage dem Plan der beiden ersten treu geblieben. So behandelt auch sie die Grundbegriffe der allgemeinen Mengenlehre und geht mit besonderer Ausführlichkeit auf die Grundfragen ein. Die Anwendungen auf Punktmengen und reelle Funktionen bleiben wieder beiseite, und es ist zu begrüßen, daß der Verf. sich nicht von den Sirenenklängen einer Rezensentin hat verlocken lassen, auf diese im Hausdorffschen Buche so ausgezeichnet behandelten Dinge näher einzugehen. So ist sein Werk nach wie vor keine Konkurrenz des Hausdorffschen, sondern ein Buch, zu dem jeder Kenner des Hausdorffschen gerne noch greifen kann, da ja Hausdorff auf Grundlagenfragen nicht eingeht. Die vorliegende dritte Auflage unterscheidet sich von den beiden vorhergehenden durch die Aufnahme von Aufgaben zur allgemeinen Mengenlehre und durch die Verdoppelung des Raumes, der den Grundlagenfragen gewidmet ist. BIEBERBACH.

E. Kamke, Mengenlehre. (Sammlung Göschen Bd. 999.) Berlin 1929, W. de Gruyter.

Das Bändchen behandelt die Fragen der Mächtigkeit, Ordnung und Wohlordnung, ausgehend von der Cantorschen Mengendefinition. Überall wo zu schematisches Verfolgen der Überlegungen zu Paradoxien führen kann, ist darauf aufmerksam gemacht. Einem axiomatischen Aufbau würden Zweck der Einführung und Umfang des Bandes widersprochen haben. Der Band gipfelt in der Darstellung des ersten Zermeloschen Beweises für den Wohlordnungssatz nebst Anwendungen desselben. BIEBERBACH.

O. Haupt, Einführung in die Algebra. (Mathematik in Monographien und Lehrbüchern, hrsg. von E. Hilb, Bd. V in 2 Teilbänden.) 663 S. Leipzig 1929, Akademische Verlagsgesellschaft.

Nach Hasses schönen Göschenbändchen wird hier ein breit angelegter Versuch gemacht, die Algebra vom Standpunkt der modernen Körper- und Ringtheorie aus darzustellen. Verschiedene Tendenzen sind es wohl, die die Zeit für solche Pläne haben reifen lassen. Zunächst mag aus dem Wesen alles Mathematischen der Wunsch fließen, begrifflichem Schließen den Vorrang vor rechnerischem Operieren zugestehen. Dann die Beobachtung der Isomorphie verschiedener Theorien, die Kleins Jugendruhm begründete und die in der Axiomatik zur beherrschenden Theorie reifte. Im Gefolge derselben der Wunsch, sich peinlich Rechenschaft zu geben von denjenigen Eigenschaften der Begriffe, die für einen Beweis wesentlich sind, schließlich die Begriffe so abzugrenzen, daß nur die wirklich notwendigen Eigenschaften ihnen zukommen. Endlich der begreifliche Wunsch nach begrifflicher Durchleuchtung, ich möchte sagen, der Mathematik des täglichen Lebens; Zurückdrängung des unmittelbar gegebenen, keiner weiteren Erklärung bedürftigen auf ein Minimum.

Alt ist schon die Beobachtung vom Zusammenhang der Körpertheorie mit der Theorie der algebraischen Gleichungen. Und es liegt nahe, z. B. die Galoissche Theorie für beliebige Körper zu entwickeln, um so dem

Umstand Rechnung zu tragen, daß sie sowohl bei funktionentheoretischer wie bei zahlentheoretischer Auffassung gilt, beide Male die Struktur des Zusammenhangs erforschend, der Wurzeln und Koeffizienten verbindet. Erst die Flucht ins Formale ermöglicht hier sachgemäße Einheitlichkeit und so die Herausarbeitung der wahren Gründe.

Auch nach Steinitz' grundlegender Arbeit zur allgemeinen Körpertheorie blieb noch die Sonderstellung des Reellen übrig.

Eine grundlegende Arbeit von Artin und Schreier hat es ermöglicht, auch diese um den Sturmschen Satz und die näherungsweise Auflösung der Gleichungen gruppierten Dinge organisch der Körpertheorie einzufügen, d. h. auch sie formal zu verstehen. Allgemeine Gruppentheorie, Theorie der Ringe und Integritätsbereiche sind die anderen allgemeinen Gebiete, auf deren Boden sich hier die Lehre von der Bestimmung der Nullstellen der Polynome abhebt. Doch will mir beim Blick über dies Buch wohl die straffe Einheitlichkeit der Darstellung imponieren, will mir gefallen, wie die gemeinsamen formalen Hintergründe sonst nur verwandt erscheinender Theorien zum Vorschein kommen. Doch vermag ich nicht zu sehen, inwieweit die größere Abstraktheit der Darstellung dem stofflichen Gehalt der Algebra zum Vorteil gereicht. Gerade die Dinge, wo das wohl zum Vorschein gekommen wäre, wie z. B. die Eliminationstheorie, sind in Haupts Buch nicht zur Darstellung gekommen. So wird von dieser neuen Algebra der besonders angezogen sein, dem Grundlagenfragen und Systematik besonders am Herzen liegen. Wer aber über der abstrakten Theorie sich Sinn für konkrete Aufgaben bewahrt hat, kann von Haupts Buch nicht befriedigt werden.

Denn schließlich hat doch die neue Tendenz nichts an der alten Aufgabe der Algebra der Polynome einer Unbestimmten — oder Variablen — geändert; es handelt sich doch nach wie vor darum, die Eigenschaften der Wurzeln aus denen der Koeffizienten zu ermitteln.

Nur möchte sich die neue Generation in der Algebra gerne auf das Formale dieser Zusammenhänge beschränken, während die alte Generation über Polynome in der Algebra gerne noch etwas mehr zu lernen wünschte. Solche Mathematiker werden also durch Haupts Algebra etwas enttäuscht werden, denn das Skelett allein macht noch keinen Körper.

Trotzdem empfehle ich auch dieser Sorte von Mathematikern, zu der ich mich leider selber rechne, dies Buch zur Lektüre. Denn an bekanntem Material gewinnt man einen besonders lebhaften Eindruck von der eigentümlichen Schönheit dieser neuen Richtung und Verständnis für die Begeisterung, mit der eine junge Generation diesen Bahnen folgt.

BIEBERBACH.

Jean Züllig, Geometrische Deutung unendlicher Kettenbrüche und ihre Approximation durch rationale Zahlen. 91 S. Zürich (o. J.) (1928), Orell Füßli.

Der bekannten Klein-Minkowskischen Deutung der Kettenbrüche im Zahlengitter stellte Speiser durch seine Kreisfigur eine weitere zur Seite. Man erhält diese Figur, wenn man vom in der oberen Halbebene gelegenen Fundamentalbereich der elliptischen Modulgruppe durch die der reellen Achse parallele Gerade $y = 1$ einen Zipfel abschneidet. Wendet

man auf diese Strecke der Länge 1 die sämtlichen Operationen der Gruppe an, so schließen sich die äquivalenten Kreisbogen zu unendlich vielen Kreisen zusammen. Die entsprechenden Kreisscheiben überschneiden sich nirgends. Sie bestehen aus der Gesamtheit der Kreise vom Radius $\frac{1}{2q^2}$, die in den rationalen Punkten $\frac{p}{q}$, $(p, q) = 1$ die reelle Achse berühren. Unbedeckt bleiben die zum vorhin erwähnten Zipfel äquivalenten Teile der oberen Halbebene. Sie bestehen aus unendlich vielen Kreisbogendreiecken, deren Begrenzungskreise sich in den Ecken berühren. Daneben werden noch andere Kreisfiguren betrachtet, die ähnlich wie die eben besprochene entstehen, wenn man die Ausgangsstrecke, die den Zipfel abschnitt, nach oben oder unten im Fundamentalbereich verschiebt. Wählt man z. B. die Gerade $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ zum Ausgang, so bedecken die Kreisscheiben die Ebene vollständig, indem immer drei bisher ein Kreisbogendreieck begrenzende Kreise in drei durch das Symmetriezentrum desselben gehende Kreise verwandelt werden. Schiebt man die Ausgangsgerade weit genug nach oben, so kann erreicht werden, daß die Kreisscheiben es gestatten, an einzelne Punkte der reellen Achse von oben vertikal heranzukommen.

Diese geometrischen Verhältnisse erlauben es, mit Hilfe der ersten Figur die Lösungen der Diophantischen Gleichungen

$$xp - yq = \pm 1$$

zu deuten. Dem (p, q) entspricht der in $\frac{p}{q}$ berührende Kreis. Den Lösungen $\frac{x}{y}$ alle anderen ihn berührenden Kreise der Figur. Die Berührung findet von rechts oder links statt, je nachdem ob oben $+1$ oder -1 steht. Will man $xp - yq = n$ lösen, so betrachte man wieder den in $\frac{p}{q}$ berührenden Kreis k_0, nehme einen der ihn berührenden Kreise k' und betrachte alle k' berührenden Kreise. Man wandere von dem Berührungspunkt von k_0 aus längs der Peripherie von k', bis man zu einem n-ten Berührungspunkt gelangt ist. Die Stelle, wo dieser Kreis die reelle Achse berührt, geht durch Zähler und Nenner einer Lösung jener Diophantischen Gleichung.

Die zweite Figur, bei der im Punkte $\frac{p}{q}$, $(p, q) = 1$ ein Kreis vom Radius $\frac{1}{\sqrt{3}q^2}$ berührt, führt z. B. in einfacher Weise zum Beweise des Satzes, daß man zu jeder positiven quadratischen Form

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

ein Paar ganzer Zahlen x, y finden kann, so, daß

$$ax^2 + 2bxy^2 + cy^2 \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{ac - b^2}$$

ist. Das beruht einfach darauf, daß jene Kurven die obere Halbebene lückenlos bedecken, und daß daher der einer Nullstelle der quadratischen Form

entsprechende Punkt in einen der Kreise fällt, der dann durch seine Berührungsabszisse eine Lösung des Problems gibt.

In der Schrift selbst möge man entsprechende schöne Veranschaulichungen zur Kettenbruchtheorie nachlesen. BIEBERBACH.

L. Bieberbach, Differential- und Integralrechnung. (Teubners Technische Leitfäden Band 4 u. 5.) Band I: Differentialrechnung. VI u. 142 S. Kart. RM 4.40. Band II: Integralrechnung. VI u. 150 S. Kart. RM 5.80. 3. Aufl. Leipzig und Berlin 1928, B. G. Teubner.

Die Bieberbachschen Leitfäden, die sich zum Unterschied von den in der gleichen Sammlung erscheinenden, für Technische Hochschulen bestimmten Bänden von Rothe über denselben Gegenstand an Universitätsstudierende wenden, sind nun schon in dritter Auflage erschienen und erfreuen sich demnach verdienter Verbreitung und Beliebtheit, so daß sich eine ausführliche Inhaltsangabe wohl erübrigt. Als eine besondere Eigenart sei vermerkt, daß der erste Band mit dem Funktionsbegriff beginnt und erst im zweiten Kapitel die Erörterungen über den Zahlbegriff aufnimmt. Das ist eine offenbar vom Verf. wohlüberlegte pädagogische Maßnahme, die manches für sich hat. Was jedoch den befolgten Aufbau des Zahlbegriffes selbst angeht, so lassen sich dagegen wohl Bedenken erheben. Zunächst nämlich werden die Rechenregeln (Axiome) der Arithmetik für die *reellen* Zahlen aufgestellt, diese also gewissermaßen axiomatisch definiert. Dann werden die *rationalen* Zahlen auf einer Zahlenachse dargestellt, wobei implizit die ganzen Zahlen als Ordinalzahlen gefaßt werden müssen. Die Tatsache, daß so nicht alle Punkte der Geraden erschöpft werden, leitet zu dem Wunsch nach Komplettierung durch weitere Zahlbildungen über. Nun wird aber zunächst ein Paragraph über den Grenzbegriff ($\lim a_n$) eingeschoben, der nur Sinn hat, wenn die irrationale Zahl schon bekannt ist. Diese selbst wird dann im nächsten Paragraphen durch das Axiom, daß sämtlichen Individuen einer Folge von ineinander geschachtelten Intervallen, deren Länge gegen 0 geht, genau ein Punkt zugleich angehört, definiert. (Diese Definition wird durch das ganze Buch hin benutzt, sie ist in der Tat wohl für den Anfänger anschaulicher als die mit ihr äquivalente Dedekindsche.) Der Kenner überblickt natürlich leicht, wie diese Erörterungen in eine logische Rangordnung zu bringen sind, es besteht aber die Gefahr, daß der Anfänger nicht recht weiß, was er von seinen früheren Kenntnissen behalten darf und was er neu lernen muß, d. h. in welcher Hinsicht sein naiver Glaube erschüttert werden soll. — Im übrigen ist das so oft behandelte Gebiet der Differential- und Integralrechnung in der lebendigen Art dargestellt, die man von Bieberbachs Publikationen gewöhnt ist. Der Inhalt ist bei dem geringen Umfang sehr reichhaltig, so kommen Dinge vor, die man selbst in größeren Werken häufig nicht findet, z. B. Sätze über die Darstellbarkeit von Funktionen (im großen) durch Fouriersche Reihen, die sehr anschaulich abgeleitet werden, ferner die Eulersche Summenformel; auch wird der Kenner an mancher originellen Herleitung seine Freude haben.

Stuttgart. DOETSCH.

G. Kowalewski, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. V u. 417 S. Leipzig und Berlin 1928, B. G. Teubner. Geb. RM 16.—.

Die Vorzüge dieses 1909 zum erstenmal erschienenen Werkes sind bekannt: Es entwickelt die Infinitesimalanalysis in einer kaum überbietbaren Exaktheit und in strenger Konzentration. Ist es daher auch zur ersten Einführung bei der Mehrzahl der Studierenden nicht geeignet, so bietet es dem Reiferen einen um so höheren Genuß und ist als Nachschlagewerk unbedingt zuverlässig. Der Inhalt ist gegenüber den früheren Auflagen so gut wie unverändert geblieben, nur ist jetzt noch ein Anhang über die Fredholmschen Determinanten und Integralgleichungen hinzugefügt.

Stuttgart. Doetsch.

L. Tonelli, Serie trigonometriche. Bologna 1928, Nicola Zanichelli.

Man behauptet nicht zu viel, wenn man in diesem Buch die erste moderne zusammenfassende Darstellung der weitschichtigen Resultate sieht, die bisher auf dem großen Gebiete der trigonometrischen, insbesondere der Fourierschen Reihen erarbeitet worden sind. Das Buch ist in neun Abschnitte von insgesamt 520 Seiten gegliedert. Nach einem kurzen historischen Überblick werden in einem ersten Abschnitt die Konvergenzfragen der trigonometrischen Reihen behandelt. Im zweiten folgt dann die Darstellung von Funktionen durch trigonometrische Reihen. Hier ist dann auch der Platz zur Einführung der Fourierschen Reihen. Im dritten Abschnitt wird die Annäherung durch trigonometrische Polynome behandelt, insbesondere also die Interpolation, die Methode der kleinsten Quadrate, die Fejérsche und die Tschebychefsche Methode. Kapitel IV handelt von der Bestimmung einer Funktion durch ihre Fourierkoeffizienten. Kapitel V behandelt die Konvergenzfragen, insofern sie mit den Eigenschaften der durch die Fourierreihe dargestellten Funktion zusammenhängen. Kapitel VI behandelt die Multiplikation, Integration und Differentiation der Fourierreihen. Kapitel VII ist den Singularitäten gewidmet, deren bekannteste das Gibbssche Phänomen ist. Das folgende Kapitel behandelt das Poissonsche und das Fouriersche Integral. Der Schlußabschnitt endlich gibt eine ausführliche Theorie der mehrfachen Fourierschen Reihen. Das Werk nimmt eine Mittelstellung zwischen Lehrbuch und Handbuch ein. Denn zu der lehrbuchmäßigen Darstellung des heute klassischen Bestandes kommt die Aufzählung modernster Ergebnisse. Vielfach wird dabei wegen der Beweise auf die Originalliteratur verwiesen, ein Verfahren, das in seiner Sorgfalt wohltuend absticht von dem heute vielfach üblichen Brauch, zwar modernste Ergebnisse anzuführen, zwar den glücklichen Erfinder zu nennen, sich darüber aber auszuschweigen, wo Näheres zu finden ist. Demgegenüber führt unser Verf. solche Ergebnisse stets am gehörigen Ort mit genauer Quellenangabe an. Übrigens sind es nur wenige Dinge, deren Beweise nicht in die systematische Darstellung verwoben sind. Mancher Leser wird in dem Buche vielleicht die ausführliche Darstellung der Ergebnisse betr. Summierbarkeit der Fourierschen Reihen vermissen. Sie sind nur kurz gestreift.

Bieberbach.

G. Prasad, Six lectures on recent researches in the theory of Fourier series. University of Calcutta, Publication Department, Senate House.

Die Schrift gibt eine ausführliche Zusammenfassung der Ergebnisse über die Konvergenz und Summierbarkeit der Fourierschen Reihen, Dinge, um die auch der Verf. nicht unverdient ist. BIEBERBACH.

K. Knopp, Aufgabensammlung zur Funktionentheorie II: Aufgaben zur höheren Funktionentheorie. (Sammlung Göschen Nr. 878.) 142 S. Berlin u. Leipzig 1928, Walter de Gruyter & Co. Geb. *RM* 1.50.

Dieses Bändchen dient wie sein Vorgänger (Sammlung Göschen Nr. 877) dazu, den durch die beiden Bände des Verf. über Funktionentheorie und den von Bieberbach über konforme Abbildung vermittelten Stoff an zahlreichen Beispielen einzuüben und die vielseitige Verwendbarkeit der funktionentheoretischen Methoden zu zeigen. Nachdem das Eingangskapitel noch einige Aufgaben aus dem schon im ersten Bändchen behandelten Stoffgebiet beigesteuert hat, bringen die folgenden Kapitel Aufgaben aus den etwas schwierigeren Bereichen: Singuläre Stellen, ganze und meromorphe Funktionen, periodische Funktionen, analytische Fortsetzung, mehrdeutige Funktionen und Riemannsche Flächen, konforme Abbildung. Das Durcharbeiten dieser Sammlung wird jedem Studierenden von größtem Nutzen sein, aber auch der Dozent wird manche Anregung aus ihr schöpfen.

Stuttgart. DOETSCH.

G. Hoheisel, Partielle Differentialgleichungen. (Sammlung Göschen Bd. 1003.) Berlin 1928, W. de Gruyter.

Der Band bringt die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung und die Charakteristikentheorie der Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Diese letzteren werden als Spezialfall des allgemeinsten Systems der Differentialgleichungen erster Ordnung aufgefaßt, für das ein in Anlehnung an Janet bewiesener allgemeiner Existenzsatz aufgenommen ist. Die Theorie der einzelnen Differentialgleichung erster Ordnung wird vom vollständigen Integral her aufgerollt. Die Berührungstransformationen und die kanonischen Transformationen finden ausführliche Berücksichtigung. Auf knappem Raum hat es der Verf. glänzend verstanden, eine allen modernen Ansprüchen genügende, alles Wesentliche berücksichtigende Theorie der genannten Typen der Differentialgleichungen zu geben.

BIEBERBACH.

G. Vivanti, Elemente der Theorie der Integralgleichungen. Übersetzt und mit Anmerkungen versehen von Friedrich Schwank. Hannover 1929, Helwingsche Verlagsbuchhandlung.

Das Buch bringt die einfachsten Sätze über Volterrasche und Fredholmsche Integralgleichungen in leicht faßlicher und auch in der Übersetzung gut lesbarer Form, die freilich oft etwas altbacken anmutet und den Schwung, den ihr operatives Denken geben könnte, hier und da vermissen läßt. Ein mit allerdings oft sehr orakelhaften Inhaltsangaben versehenes Literaturverzeichnis sowie die Anmerkungen des Übersetzers — meist Nachweise anschließender Literatur — werden auch ihrerseits dazu beitragen, dem Anfänger das Buch zu einem brauchbaren Wegweiser werden zu lassen. BIEBERBACH.

E. Picard, Leçons sur quelques équations fonctionnelles avec des applications à divers problèmes d'analyse et de physique mathématique. Paris 1928, Gauthier-Villars.

Nachdem Herr Picard darauf verzichtet hat, den vierten Band seines traité d'analyse erscheinen zu lassen, sollen als Ersatz in einzelnen Heften seine Vorlesungen an der Sorbonne erscheinen. In diese Reihe gehört auch schon das Heft: Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles avec des applications à la physique mathématique, das im vergangenen Jahre veröffentlicht wurde. In dem hier vorliegenden wird zunächst die Funktionalgleichung $f(x) + f(y) = f(x + y)$ im reellen Gebiet untersucht und Anwendungen auf die nichteuklidische Geometrie vorgetragen. In einem zweiten Abschnitt wird, von der Gammafunktion und der Weierstraßschen Theorie der elliptischen Funktionen ausgehend, die von Poincaré begonnene Theorie der Funktionen mit rationalem Additions- oder Multiplikationstheorem dargelegt. Weitere Abschnitte behandeln die Differenzengleichungen, die Picardschen Transzendenten, die Abelsche Funktionalgleichung und geben einige Anwendungen der Integralgleichungen.

Die von Herrn E. Blanc gelieferte Redaktion der Vorlesungen ist klar und präzis. BIEBERBACH.

P. M. Batchelder, An indrotuction to linear difference equations. 209 S. Cambridge Mass. 1927, The Harvard University Press und Humphrey Milford, Oxford University Press, Amen House Warwick Square London E. C. 4.

Die beiden ersten Kapitel dieses Buches sind einer leicht faßlichen Einführung in die Theorie der linearen Differenzengleichungen erster Ordnung gewidmet. Die beiden anderen Kapitel gelten der Theorie der linearen homogenen Differenzengleichung zweiter Ordnung mit linearen Koeffizienten. Die Fälle, in denen die Wurzeln der charakteristischen Gleichung nicht von Null und von Unendlich verschieden sind, erfahren dabei zum ersten Male in der Literatur eine eingehende Diskussion. Der Fall, daß beide einander gleich sind, wird auch in dieser Darstellung noch nicht zu abschließenden Ergebnissen geführt.

Die Darstellung ist klar und jedem Kenner der Anfangsgründe der Funktionentheorie verständlich. BIEBERBACH.

P. Crantz, Sphärische Trigonometrie. Zweite Auflage von M. Hauptmann. (Aus Natur und Geisteswelt 605.) Leipzig 1929, B. G. Teubner.

In überaus anschaulicher und lebendiger Form werden hier die Elemente der sphärischen Trigonometrie für den Selbstunterricht auseinandergesetzt. Die Heranziehung der Mittel der darstellenden Geometrie (Grund- und Aufriß) zum Beweis der Sätze lassen die Darstellung besonders originell erscheinen. Erfreulich ist es, daß eine Darstellung der Elemente der sphärischen Trigonometrie nun dazu übergeht, auch die Nomographie zur Auflösung der Dreiecke heranzuziehen. Weiteste Verbreitung ist dem Büchlein im Interesse der Wissenschaft zu wünschen. BIEBERBACH.

H. Beck, Elementargeometrie. 112 S. 58 Abb. Leipzig 1929, Akademische Verlagsgesellschaft.

Die Schrift ist aus Anfängervorlesungen hervorgegangen und handelt von der affinen und der metrischen Geometrie der Ebene. An geometrischen Einzelsätzen findet man wenig, um so mehr Betrachtungen aber zur Systematik der geometrischen Sätze und über die Abbildungen und Gruppen der Elementargeometrie. Als wohl gelungen kann man die Einführung der orthogonalen Elemente bezeichnen. Sie beruht auf der Heranziehung von Affinitäten der Periode vier. Schief ist des Verf. Meinung über den Aufbau der analytischen Affingeometrie. Wenn man hierzu die vom Verf. ängstlich vermiedenen Vektoren heranzieht, so gelingt dieser Aufbau mühelos im unmittelbaren Anschluß an Tatsachen der geometrischen Anschauung. Auch die Flächen- und Teilverhältnisse können so ohne Bezugnahme auf Längen und Winkel bequem erfaßt werden. BIEBERBACH.

L. Heffter und C. Koehler, Lehrbuch der analytischen Geometrie. Grundlagen. Projektive, Euklidische, Nichteuklidische Geometrie. Bd. I. Grundlagen. Grundgebilde I. Stufe. Euklidische Ebene. 477 S. mit 112 Fig. 2. Aufl. Karlsruhe 1927, G. Braun. Geh. *RM* 20.—; geb. *RM* 21.—.

Von dem bekannten Lehrbuche der analytischen Geometrie, dessen I. Bd. 1905, dessen II. Bd. 1923 erschienen ist, liegt nunmehr der I. Bd. in 2. Auflage vor.[1]) Die Neuauflage, die von dem erstgenannten Verfasser herausgegeben ist, weicht, bei einer Verminderung des Umfanges um rund 50 Seiten, teilweise erheblich von der ursprünglichen Fassung ab.

Das Buch beginnt, um zunächst über den Inhalt zu berichten, mit einer axiomatischen Grundlegung der reellen projektiven Geometrie, im engsten Anschluß an L. Heffters 1921 erschienene Schrift „Die Grundlagen der Geometrie als Unterbau für die analytische Geometrie" (27. S.): I. Axiome der Verknüpfung, zehn aus je zwei dualen Axiomen bestehende Paare; II. Drei Axiome der Anordnung; III. Dedekindsches Stetigkeitsaxiom; projektive Koordinaten in einstufigen Grundgebilden; Doppelverhältnisse; Fundamentalsätze der Projektivitäten und Kollineationen (in den genannten „Grundlagen" nicht enthalten). Nun wird durch die Auszeichnung der uneigentlichen Elemente im Axiom IV die reelle affine Geometrie gewonnen, im Axiom V durch die „orthogonale Paarung" in der uneigentlichen Ebene die reelle äquiforme Geometrie.[2]) Anschließend wird in den Grundgebilden I. Stufe zunächst die projektive Geometrie behandelt (Doppelverhältnisse und homogene Koordinaten, Involutionen), dann die Parallelgeometrie in der eigentlichen Punktreihe (Abstandsverhältnisse, inhomogene und homogene Koordinaten), endlich die Orthogonalgeometrie im eigentlichen Büschel (absolute Strahlen, Richtungsverhältnisse, normierte Koordinaten, trigonometrische Funktionen eines Strahlenpaares, Formel von Laguerre). Nachdem so die eindimensionale

---

1) Zwei Lücken ausfüllende Zusätze zu S. 14 und 24 der neuen Auflage sind vom Verlage den Beziehern der ersten Exemplare zugegangen und den weiteren Exemplaren eingefügt worden.

2) Das Axiom V wird in einer von L. Heffters „Grundlagen" abweichenden, verbesserten Form gebracht, in der die unvorbereitete Einführung eines imaginären Kegelschnittes vermieden wird.

parabolische Geometrie gewonnen ist (Euklidische Punktreihe), ebenso die elliptische (Euklidisches Strahlenbüschel), wird anschließend die hyperbolische Geometrie in den Grundgebilden I. Stufe behandelt, bei der an die Stelle der oben erwähnten Axiome IV und V ein hyperbolisches Axiom tritt (Bewegungen, hyperbolische Funktionen). In der gleichen systematischen Reihenfolge schließt sich die Geometrie in den Grundgebilden II. Stufe an, wobei im projektiven Teil unter anderem behandelt werden: homogene Punkt- und Linienkoordinaten, imaginäre Elemente, Dreiecke, vollständige Vierecke und Vierseite, Kollineationen und Korrelationen, Kurven 2. Grades, Sätze von Pascal und Brianchon, Realitätsfragen, Polareigenschaften, Eichkegelschnitte, Kegelschnittbüschel und -scharen. Aus der Parallelgeometrie in der eigentlichen Ebene seien genannt: die Sätze von Ceva und Menelaos, verschiedene Arten von Koordinatensystemen, Affinitäten, affine Eigenschaften der Kegelschnitte sowie der Kegelschnittbüschel und -scharen. Den Schluß bildet die Orthogonalgeometrie in der eigentlichen Ebene: absolute Punkte, rechtwinklige und andere Koordinaten, trigonometrische Funktionen, Kreise (Potenz, Inversion, Ähnlichkeitspunkte), Hauptachsen und Brennpunktseigenschaften, Kegelschnittbüschel und -scharen.[1]) Ein kurzer Anhang bringt die Elemente der Determinanten.

Durch die aus dieser Inhaltsübersicht erkennbare Darstellung der projektiven, affinen, Euklidischen Geometrie in engem Anschluß an die Klein-Cayleysche Auffassung der Euklidischen Metrik und an Kleins Erlanger Programm, nimmt das Buch eine Sonderstellung in der Lehrbuchliteratur ein, die so bekannt ist, daß sich nähere Ausführungen und eine Stellungnahme hierzu erübrigen.

In der 1. Auflage ging die Darstellung von einigen bekannten Sätzen aus; das Doppelverhältnis wurde auf metrischem Wege gewonnen, dann erst dessen projektiv-invarianter Charakter nachgewiesen. Jetzt ist durch die Voranstellung der Axiomatik die Möglichkeit gegeben, das Doppelverhältnis rein projektiv einzuführen. Nach dem Vorwort ist in dem Buch eine völlig elementar einsetzende und durchwegs leicht faßliche Darstellung beabsichtigt. Von dieser Absicht wird durch die neue Fassung zweifellos etwas abgerückt, da im Vorworte zur 1. Auflage angegebene triftige pädagogische Gründe für die dortige Anordnung sprechen. Die Voranstellung der Axiomatik hat in der Regel wirklichen Wert nur für jemand, der wenigstens die Elemente des Gegenstandes schon kennt. In der Arithmetik z. B. und der Euklidischen Geometrie liegt dieser Fall in der Regel vor, in der projektiven Geometrie nicht, außerdem bietet diese — darin liegt der Grund für ihre späte Entwicklung — wegen der Hereinbeziehung der uneigentlichen Elemente gewisse begriffliche Schwierigkeiten, vor allem für den Anfänger. Wenn trotzdem in der neuen Auflage dieser Weg beschritten wurde, dann mußte die Axiomatik möglichst einfach und mit Berücksichtigung der Fassungskraft des Anfängers behandelt werden. Es ist anzuerkennen, daß dies erfolgreich angestrebt wird, sowohl durch die erläuternden Bemerkungen zu den Axiomen als auch durch die,

1) Die äquiforme Geometrie im Bündel enthält der II. Band, der nach der dem I. Band angefügten Reklameanzeige des Verlages in seiner bisher vorliegenden 1. Auflage auch als Fortsetzung der 2. Auflage des I. Bandes verwendbar bleibt.

man könnte fast sagen konziliante, Form der Axiome, die in leicht verständlicher, dualer Form gebracht werden, unter Verzicht auf Beschränkung der axiomatischen Forderungen auf ein Minimum. Das Buch gewinnt durch die Voranstellung der Axiomatik an Einheitlichkeit und Schönheit und ist, vor allem für den Studierenden, der wenigstens eine Ahnung von dem Gegenstande mitbringt, von großem Werte, dank der Konsequenz des Aufbaues und der äußerst sorgfältigen Durcharbeitung, die aus tiefer Kenntnis der projektiven Geometrie herauswächst. Als Beispiel hierfür sei die Behandlung der äquiformen Koordinaten S. 96ff. genannt oder S. 226ff. die Einführung der Eichkurven und die projektive Verallgemeinerung des Pythagoreischen Lehrsatzes.

Daß die Behandlung der Kegelschnittbüschel und -scharen, wie schon in der 1. Auflage, vielleicht zu stark in Einzelheiten geht, mag nur als meine rein persönliche Ansicht erwähnt werden. Zu wünschen wäre eine erheblich größere Zahl von Übungsaufgaben, die zwar den Studierenden im ästhetischen Genusse der Lektüre stören, aber zu eigener Mitarbeit veranlassen würden. Die gegenüber der 1. Auflage neu eingeführte Bezeichnung „Umschließungslage" beim hyperbolischen Wurf (S. 17 und 47) ist sprachlich nicht glücklich, wie die Anordnungsmöglichkeit $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ zeigt; diese Anordnung würde zwar den projektiv Denkenden nicht stören, der Ausdruck „ein Punktpaar umschließt ein anderes" appelliert aber doch wohl an unsere Euklidische Vorstellung und nicht an die projektive, nach der von zwei Punktpaaren jedes das andere umschließen könnte.

Zum Schlusse noch eine axiomatische Bemerkung über die Behandlung des Imaginären: Eine wirkliche Schwierigkeit, vor allem für den Anfänger, bei der Behandlung des Imaginären in der Geometrie besteht darin, daß nach der Einführung der imaginären Elemente ein Teil der reellen Begriffsbildungen (wie Abstand, Flächeninhalt, Winkelgröße, Schnittpunkt zweier Geraden) im Imaginären bestehen bleibt, während andere Begriffe (wie trennen, zwischen, Durchlaufen einer Geraden) nicht ins Imaginäre herübergenommen werden. Wie vielfach in der Algebra, werden auch im vorliegenden Buche die reellen Elemente axiomatisch eingeführt, ohne daß bei der Erweiterung ins Komplexe darauf eingegangen würde, daß nun nicht mehr alle Axiome erfüllbar sind, hier die Anordnungsaxiome und das Stetigkeitsaxiom (womit auch die aus ihnen abgeleiteten Begriffsbildungen verloren gehen). *Man steht daher nach der Einführung der imaginären Elemente nicht mehr auf dem axiomatischen Fundament.* Das Buch gibt daher die *axiomatische* Einstellung mit der Einführung der imaginären Elemente auf, indem es — für eine *genetische* Darstellung korrekt — die geometrischen Beziehungen in Komplexen durch ihren analytischen Ausdruck definiert (S. 50). Die Anordnungsaxiome und das Stetigkeitsaxiom liefern im Reellen als wesentlichstes Ergebnis die umkehrbar-eindeutige Zuordnung zwischen den Punkten der Geraden und den reellen Zahlen. Diese Tatsache übernimmt man ins Komplexe, nicht aber die zu ihr führenden Axiome. Daher könnte man diese Tatsache für die komplexen Zahlen und die komplexen Punkte der Geraden in axiomatisch verfeinerter Form nebst einigen weiteren Axiomen als Axiom den Verknüpfungsaxiomen folgen lassen und durch spätere Hinzufügung der Anordnungsaxiome die

so bisher gewonnene komplexe projektive Geometrie zur reellen projektiven Geometrie verengern.[1]) Die Realitätsuntersuchungen könnten dann jeweils den allgemeinen komplexen Aussagen folgen, die linearen und quadratischen Formen würden zunächst mit komplexen Koeffizienten eingeführt werden[2]), das Prinzip des Fortschreitens vom Allgemeinen zum Speziellen wäre damit konsequent durchgeführt. Dadurch würde die Darstellung allerdings noch mehr dem Anfänger entrückt werden.

Die guten, klaren Figuren befestigen den erfreulichen Eindruck des wertvollen Buches. BALDUS.

K. Kommerell, Aufgaben zur synthetischen Geometrie aus der Württembergischen Referendarprüfung für Mathematiker. 136 S. mit 81 Fig. Leipzig und Berlin 1925, B. G. Teubner.

Nach dem Vorwort ist die Herausgabe der Aufgaben aus höherer Mathematik und analytischer Mechanik beabsichtigt, die seit 1877 in der Württembergischen Lehramtsprüfung gestellt wurden. Das vorliegende Buch ist der erste Band dieser Folge. Der Verfasser stellt sich zwei Aufgaben: er will auf der einen Seite dem historisch Interessierten zeigen, wie hoch die Anforderungen an die mathematische Ausbildung der Kandidaten in der synthetischen Geometrie gestellt waren, und will auf der anderen Seite mit der Lösung der Aufgaben nicht nur eine Darstellung geben, die auf bestimmte Examensfragen eindrillt, sondern ein wertvolles Übungsbuch für den Hochschulunterricht, das fast ein Lehrbuch ersetzen kann.

Die erste Absicht ist insofern voll erreicht, als man den zwingenden Eindruck gewinnt, daß die synthetische Geometrie in Württemberg intensiv betrieben wird und die Examensanforderungen in ihr recht hoch, in Einzelfällen vielleicht sogar zu hoch sind. Da die Aufgaben aus systematischen Gründen nicht chronologisch geordnet sind, ist damit dem historisch Interessierten die Möglichkeit genommen, sich ein Bild davon zu machen, ob im Laufe dieser 49 Jahre die Schwierigkeit der Aufgaben variiert hat und wie; auch wird der mit den speziellen württembergischen Prüfungsverhältnissen nicht Vertraute eine Aufklärung darüber vermissen, warum die Zahl der Aufgaben in den einzelnen Jahren so stark schwankt, zwischen einer Aufgabe (1925) und sieben Aufgaben (1888), während aus den Jahren 1909, 10, 20, 21, 23 überhaupt keine Aufgaben vorliegen. Endlich fehlen Angaben über die für die Bearbeitung der einzelnen Aufgaben bewilligten Zeiten. Durch ein chronologisches Verzeichnis der Aufgaben mit kurzen Ausführungen zu den übrigen hier berührten Punkten würde das Buch in seiner historischen Absicht gefördert werden.

Die zweite Aufgabe, die sich der Verfasser gestellt hat, ein geschlossenes, allgemein verwertbares Übungsmaterial zu liefern, war nicht leicht zu lösen. Die 113 Aufgaben sind zwar zweifellos recht verschiedenartig, was

1) Eine schon lange geplante, ins einzelne gehende Darstellung dieses Weges werde ich an anderer Stelle bringen.

2) So wäre man auch in der Lage, die grundlegenden Sätze gleich allgemein auszusprechen, z. B. den Satz, daß fünf Punkte in der Ebene, von denen keine drei kollinear liegen, genau einen Kegelschnitt bestimmen. Es ist immer mißlich, wenn man zwar komplexe Punkte eingeführt hat, aber Sätze wie diesen noch nicht aussprechen kann, weil man sich immer noch auf quadratische Formen mit reellen Koeffizienten beschränkt.

schon aus den Überschriften der 11 Abschnitte des Buches hervorgeht: Projektive Beziehung der Grundgebilde erster Stufe; Die Sätze von Pascal und Brianchon; Involutionen; Der Lehrsatz von Desargues; Brennpunkte; Aufgaben zweiten Grades; Projektive Beziehung der Grundgebilde höherer Stufe; Die Regelflächen zweiter Ordnung; Geometrische Örter; Vermischte Aufgaben; Die Regelflächen 3. Ordnung. Trotzdem war sicher viel Arbeit nötig, um aus diesen Aufgaben, die unter den einengenden Bedingungen des Examens an Zeit und Schwierigkeit entstanden und die nicht in der Absicht gestellt wurden, zu einem bestimmten Zeitpunkte das ganze Gebiet der synthetischen Geometrie zu fassen, ein möglichst geschlossenes Ganzes zu machen; dies ist dem Verfasser dank seiner genauen Kenntnis des Stoffes dadurch geglückt, daß er die Aufgaben mit Klarheit in größere Zusammenhänge gestellt hat und vielfach, mit Literaturangaben, erheblich über das hinausgegangen ist, was als Bearbeitung der Aufgabe im Examen gedacht war.

Die Formulierung der Aufgaben ist wörtlich beibehalten worden. Kleine Retouchen an deren Text wären in einigen Fällen wünschenswert gewesen: so wäre, um nur zwei Beispiele zu nennen, bei den Aufgaben 19 und 20 die Bezeichnung der Punkte mit großen, der Geraden mit kleinen lateinischen Buchstaben, statt umgekehrt, erwünscht, in Übereinstimmung mit den übrigen Aufgaben; in Aufgabe 5 setzen die Ausführungen am Schlusse von S. 10 voraus, daß von der Regelfläche nur 3 Erzeugende jeder Schar gegeben sind, was aus dem Texte der Aufgabe nicht klar hervorgeht. Diese Aufgabe 10 gehört übrigens zu denen, die man wohl als zu schwer bezeichnen wird, wie es bei Aufgabe 35 der Verfasser mit Recht tut.

Nicht ganz klar ist die Stellung zu den komplexen Elementen: aus der Formulierung des Satzes „In einem projektiven Grundgebilde 1. Stufe bildet jedes Paar zusammengehöriger Elemente mit den Doppelelementen ein konstantes Doppelverhältnis“, S. 3 scheint zu folgen, daß auch komplexe Elemente zugelassen sind, während nach dem Wortlaute der Aufgabe 4 „harmonisch getrennte Punkte“ — was nur im Reellen einen Sinn hat — an reelle Elemente gedacht zu sein scheint. Ebenso sind mit Regelflächen 2. Ordnung immer Flächen mit reellen Erzeugenden gemeint.

Es liegt an den Aufgaben und nicht am Verfasser, daß die korrelativen Verwandtschaften zu kurz kommen, mit ihnen die Flächen 2. Grades, die nicht reelle Regelflächen sind.

Bei dem reichen Inhalte des Buches wäre ein ausführliches Sachverzeichnis willkommen.

Wiederholt verweist der Verfasser statt eigener Ausführungen auf Lehrbücher, vor allem auf Reyes „Geometrie der Lage“ — die übrigens nach der neuesten Auflage zitiert werden sollte — woraus hervorgeht, daß er sein Buch nicht als vollen Ersatz für ein Lehrbuch aufgefaßt haben will. Diese Aufgabensammlung ist eine vorzügliche Ergänzung zu jedem Lehrbuche der synthetischen Geometrie, zumal sie manches behandelt, was sonst vielfach zu kurz kommt, hierzu gehört z. B. die Betonung des Zeichnerischen, vor allem auch der mit dem Lineal allein durchführbaren Konstruktionen und die große Zahl metrischer Aufgaben. Auch wer die synthetische Geometrie genauer kennt, wird das Buch mit Interesse und Gewinn lesen.

Baldus.

Ch. Michel, Compléments de géometrie moderne. Paris 1926, Librairie Vuibert.

Der Verf. wendet sich an Leser, die mit den Anfangsgründen der projektiven Geometrie vertraut sind. Z. B. beginnt das Buch gleich mit der Erzeugung der Kurven zweiter Ordnung aus zwei projektiven Büscheln. In streng synthetischer Darstellung älterer Observanz, will heißen in strenger Vermeidung des Koordinatenbegriffes und unter Vermeidung einer sauberen Axiomatik, wird eine Fülle von Material an bewiesenen Sätzen und Übungsaufgaben dargelegt. Kurven und Flächen zweiter Ordnung, ebene und Raumkurven dritter Ordnung, Regelflächen dritter Ordnung, Zylindroid, kennzeichnen kurz die behandelten Gegenstände. Das Fehlen eines Sachregisters erleichtert gewiß nicht die Benutzung des schönen Buches. • BIEBERBACH.

R. Baldus, Nichteuklidische Geometrie. Hyperbolische Geometrie der Ebene. 152 S. Mit 71 Figuren. (Sammlung Göschen 970.) Berlin, Walter de Gruyter & Co.

Das Buch behandelt die ebene hyperbolische Geometrie. Nach einer historischen Einleitung wird zunächst die Axiomatik der absoluten Geometrie behandelt: es werden die Axiomgruppen der Verknüpfung, Anordnung, Kongruenz und Stetigkeit besprochen, doch werden mit Rücksicht auf den Umfang des Buches in diesem Kapitel Beweise nicht gegeben. In der Formulierung der Axiome schließt sich Verf. im wesentlichen an die von Hilbert in den „Grundlagen der Geometrie" gegebene Darstellung an; nur bei den Axiomen der Kongruenz, in denen die reduzierte Formulierung von A. Rosenthal gegeben wird, und bei denen der Stetigkeit, in denen neben dem Archimedischen Axiom statt des Vollständigkeitsaxioms das Cantorsche Stetigkeitsaxiom zum Ausgangspunkt genommen wird, weicht die Darstellung von der Hilbertschen ab. Nach einigen Betrachtungen über das Euklidische Parallelenaxiom wendet sich die Betrachtung dem Kleinschen Modell der hyperbolischen Geometrie zu, dem als Fundamentalkegelschnitt speziell ein Kreis zugrunde gelegt wird. Die Behandlung der hyperbolischen Geometrie wird an Hand dieses Modells, und zwar unter konsequenter Anwendung des Prinzips der speziellen Lage, sehr weit geführt.

Das Buch ist in sechs Abschnitte gegliedert: I. Der geschichtliche Weg zur nichteuklidischen Geometrie. II. Axiomatik der absoluten Geometrie. III. Die Euklidische Geometrie. IV. Axiomatik der hyperbolischen Geometrie im Einheitskreise. V. Die hyperbolische Geometrie als selbständige Disziplin. VI. Schlußbetrachtungen.

Das Buch ist außerordentlich klar und fesselnd geschrieben; seine Lektüre muß Studierenden und Lehrern auf das allerwärmste empfohlen werden.

Berlin-Lankwitz. FEIGL.

E. Cartan, Leçons sur la géometrie des espaces de Riemann. (Cahiers scientifiques publiés sous la direction de M. Gaston Julia.) Paris 1928, Gauthier-Villars.

Ein lebensprühendes Buch, daß sich von der Mehrzahl der modernen Bücher mit ähnlichem Titel vor allem dadurch unterscheidet, daß nicht die

Darstellung des formalen Apparates die Hauptsache ist, sondern vielmehr inhaltlich bedeutungsvolle Theorien im Mittelpunkt der Erörterung stehen. Ein erstes Kapitel behandelt das notwendigste über Vektoren und Tensoren. Ein zweites gilt der Euklidischen Geometrie unter Zugrundelegung beliebiger krummliniger Koordinaten. So ist der Boden geebnet, um in einem folgenden Kapitel die lokal Euklidischen Räume, d. i. die Clifford-Kleinschen Raumformen mit euklidischer Maßbestimmung zu behandeln. Die Darstellung gipfelt in einer Aufzählung der zweidimensionalen Raumformen, berücksichtigt aber hinsichtlich der Aufzählung der mehrdimensionalen Raumformen nicht, was aus der kristallographischen Literatur und den neueren Arbeiten (von Bieberbach und von Frobenius) über Bewegungsgruppen hierüber hätte gesagt werden können. Unter Verwendung Euklidischer Tangential- und Oskulationsräume führt das folgende Kapitel in die allgemeine Riemannsche Geometrie ein. Das folgende Kapitel gilt der axiomatischen Charakterisierung der Räume konstanter Riemannscher Krümmung, die dann in Kap. VI ausführlich behandelt werden. Die Riemannsche Krümmung, die Bianchischen Identitäten und die Riemannschen Normalkoordinaten bilden den Gegenstand von Kap. VII, VIII und IX. Hier wird also alles abgehandelt, was mit der Krümmungstheorie zu tun hat. Methodisch bedient sich die Darstellung der Verfahrungsweisen, die der Verf. gelegentlich seiner Untersuchungen über das Pfaffsche Problem ausgebildet hat. Die Überlegenheit dieser Methoden gegenüber anderen scheint mir klar aus dem schönen Erfolg hervorzugehen, den Cartan erst kürzlich durch den Beweis des Satzes gehabt hat, daß man jeden n-dimensionalen Riemannschen Raum mit definiter Maßbestimmung in einen $\frac{n(n+1)}{2}$-dimensionalen Euklidischen einbetten kann, ein Satz, der seit Schläfli eine ganze Generation in die tödliche Verlegenheit unzulänglichen Zitierens versetzt hat. Bieberbach.

T. Levi-Civita, Der absolute Differentialkalkül und seine Anwendungen in Geometrie und Physik. Autorisierte deutsche Ausgabe von A. Duschek. XI und 310 S. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Bd. XXVIII.) Berlin 1928, Julius Springer.

Es ist sehr zu begrüßen, daß nach der italienischen und englischen nunmehr auch eine deutsche Ausgabe der Vorlesungen über den absoluten Differentialkalkül von Levi-Civita erschienen ist. Bilden doch diese Vorlesungen in gleicher Weise durch die wissenschaftliche Persönlichkeit des Verfassers wie auch durch seine außerordentliche Darstellungskunst eine geradezu ideale Einführung in den absoluten Differentialkalkül, die Riemannsche Geometrie und die Relativitätstheorie.

Da die italienische Originalausgabe an dieser Stelle bereits eingehend besprochen wurde[1]), sollen im folgenden nur die Änderungen angegeben werden, welche die deutsche Bearbeitung gegenüber dem Urbild erfahren hat. Diese sind allerdings ziemlich bedeutend. Zunächst sind neu hinzugekommen die beiden letzten Kapitel über die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie, die zusammen mehr als ein Drittel des Buches umfassen.

1) Dieser Jahresbericht, 34 (1926), 2. Abt., S. 31 f.

Wohl um den Umfang des Bandes nicht allzusehr anschwellen zu lassen, sind dafür die ersten drei Kapitel des Originales (Determinanti e matrici funzionali. Sistemi di equazioni ai differenziali totali. Equazioni lineari a derivate parziali. Sistemi completi) weggeblieben. Durch diese Streichung wurde eine vollständige Umarbeitung und Ergänzung des nunmehrigen ersten Kapitels über die algebraischen Grundlagen des absoluten Differentialkalküls notwendig, die der Übersetzer vorgenommen hat. Die übrigen Kapitel (II bis VII der deutschen Ausgabe) sind in der Hauptsache ungeändert geblieben. Nur das vierte Kapitel, das von der Krümmung einer Riemannschen Mannigfaltigkeit handelt, hat durch eine Darstellung der besonderen Verhältnisse bei dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten und durch die Ableitung der Differentialgleichungen für die geodätische Abweichung im n-dimensionalen Riemannschen Raum eine wesentliche Erweiterung erfahren. Sonst ist bloß ein ganz kurzer Abschnitt über die kovarianten Ableitungen der ε-Tensoren (im dritten Kapitel) hinzugekommen. Als rein formale Änderung ist zu erwähnen die lückenlose Durchführung der Schreibweise des Tensorkalküls. Leider ist damit ein — wenn auch ganz unwesentlicher — Zug des Originales verwischt worden, dessen Bezeichnungsweise der feststehenden italienischen Tradition folgt.

Die beiden neu hinzugefügten Kapitel behandeln die Entwicklung der Mechanik und der geometrischen Optik und ihre Beziehung zu Einsteins vierdimensionaler Welt (Kap. VIII), ferner die Gravitationsgleichungen und die allgemeine Relativitätstheorie (Kap. IX), während Elektrizität und Magnetismus von der Betrachtung ausgeschlossen bleiben. Der Verfasser befolgt dabei, um mit seinen eigenen Worten zu reden, die „Methode, von den klassischen Gesetzen auszugehen und zu untersuchen, welche Änderungen sich an diesen Gesetzen vornehmen lassen, wenn man folgende zwei Bedingungen stellt: Erstens sollen diese Änderungen so geringfügig sein, daß sie unter gewöhnlichen Verhältnissen überhaupt vernachlässigt werden können, und zweitens sollen die so geänderten Gesetze invariant sein gegenüber allen Transformationen der vierdimensionalen Raum-Zeit-Welt, die eine bestimmte quadratische Differentialform ungeändert lassen." Der Vorteil, den diese Methode gerade für eine einführende Darstellung bietet, liegt auf der Hand: dem Lernenden wird schrittweise gezeigt, daß die neue Entwicklung der behandelten Teile der Physik mit einer gewissen Zwangsläufigkeit zum relativistischen Standpunkt führt, der auf diese Weise als ganz naheliegend und naturgemäß erscheint. In der Tat sind denn auch die beiden Kapitel zu einer der schönsten Einführungen in die Relativitätstheorie geworden, die auch für den mit dem Gegenstand Vertrauten eine überaus genußreiche Lektüre bildet.

Die Übersetzung liest sich angenehm und gibt den besonderen Charakter des italienischen Originales getreu wieder.

Prag. L. Berwald.

L. P. Eisenhart, Non-Riemannian Geometry. (American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. VIII.) VIII u. 184 S. New-York 1927; American Mathematical Society.

Das neue Buch von Eisenhart, das aus Vorlesungen beim Ithaca Colloquium der American Mathematical Society (1925) hervorgegangen ist,

handelt von den Verallgemeinerungen des Begriffes einer Riemannschen Mannigfaltigkeit, die seit Weyls Reiner Infinitesimalgeometrie entwickelt worden sind. Im Vordergrunde steht dabei die Theorie der affin-zusammenhängenden Räume mit und ohne „Torsion", d. h. mit unsymmetrischen oder symmetrischen Komponenten des affinen Zusammenhanges. Nicht berücksichtigt ist die Theorie der „allgemeinen" Räume, deren Metrik durch ein Integral über eine homogene Funktion erster Dimension in den Differentialen der Koordinaten bestimmt wird, sowie deren affine Verallgemeinerung. Doch werden die einschlägigen Arbeiten in der Einleitung kurz gekennzeichnet und in dem beigegebenen Literaturverzeichnis angeführt.

Wie schon des gleichen Verfassers „Riemannian Geometry", so erhält auch der vorliegende Band seinen besonderen Charakter dadurch, daß von den vorgetragenen Theorien das bevorzugt wird, woran amerikanische Autoren aktiven Anteil haben. Außer zahlreichen Einzelheiten verschiedener Natur gehört dazu in erster Reihe diejenige Auffassung der affin-zusammenhängenden Räume ohne Torsion, für welche die geodätischen Linien das Primäre sind, und im Zusammenhange damit die von Weyl begründete projektive Theorie solcher Räume. Diese affine bzw. projektive „Geometrie der Bahnkurven" wird im zweiten und dritten Kapitel ausführlich dargestellt, während das erste Kapitel der unsymmetrischen affinen Übertragung gewidmet ist und das letzte sich mit den Unterräumen affinzusammenhängender Räume beschäftigt.

Im ersten Kapitel wird zunächst die unsymmetrische affine Übertragung sowie die mit ihr verbundene symmetrische rein analytisch eingeführt, die wichtigsten zugehörigen Tensoren studiert und erst dann die Parallelübertragung kontravarianter Vektoren und die geodätischen Linien besprochen. Nach einem Hilfssatze über Systeme partieller Differentialgleichungen, der im weiteren Verlaufe wiederholt benutzt wird, folgt die Betrachtung der Felder von parallelen kontravarianten Vektoren, der Parallelverschiebung eines kontravarianten Vektors um eine infinitesimale geschlossene Kurve, der Parallelübertragung kovarianter Vektoren. Daran schließt sich die Besprechung der Änderungen des affinen Zusammenhanges, die den Parallelismus erhalten. Sodann behandelt ein kurzer Abschnitt die halbsymmetrische Übertragung, zwei längere die assoziierten Vektorfelder und Richtungen. Endlich wird die Riccische Theorie der orthogonalen Kurvenkongruenzen auf affin-zusammenhängende Räume verallgemeinert.

Das zweite Kapitel beginnt mit zwei kennzeichnenden Eigenschaften der affin-zusammenhängenden Räume ohne Torsion (Existenz örtlich geodätischer Koordinaten, Existenz infinitesimaler Parallelogramme) und beschäftigt sich anschließend mit dem Krümmungstensor und den geodätischen Linien solcher Räume, ferner mit den affinen Normalkoordinaten sowie dem ersten Krümmungsvektor einer Kurve. Hierauf wird die Verallgemeinerung des Satzes von Fermi über die Existenz geodätischer Koordinaten längs einer Kurve für die betrachteten Räume bewiesen, werden die von Veblen und T. Y. Thomas eingeführten Normaltensoren und Erweiterungen eines Tensors ausführlich behandelt und die Frage der Äquivalenz zweier symmetrischer Übertragungen besprochen. Nun folgen die besonderen Arten affin-zusammenhängender Räume: der Riemannsche, insbesondere der ebene, und der metrische Raum von Weyl. Schließlich wird

der Fall betrachtet, in dem die Differentialgleichungen der geodätischen Linien ein homogenes quadratisches erstes Integral besitzen.

Im dritten Kapitel werden vorerst die projektiven Abänderungen des affinen Zusammenhanges näher diskutiert, der Weylsche Projektiv-Krümmungstensor eingeführt, die Änderung der affinen Normalkoordinaten bei projektiver Abänderung des Zusammenhanges untersucht und die projektiv-ebenen Räume betrachtet. Sodann werden nach T. Y. Thomas aus den Komponenten eines affinen Zusammenhanges Komponenten des zugehörigen projektiven Zusammenhanges gebildet, die bei projektiver Abänderung des affinen Zusammenhanges ungeändert bleiben und aus ihnen der Projektivkrümmungstensor abgeleitet. Nun wird die Frage nach der Äquivalenz zweier projektiven Zusammenhänge beantwortet, worauf der „normale" affine Zusammenhang von Cartan, der unter allen affinen Zusammenhängen mit demselben projektiven Zusammenhang ausgezeichnet ist, ferner der projektive Parameter einer geodätischen Linie, die örtlich projektiven Koordinaten und die projektiven Normalkoordinaten eingeführt werden. Es folgt die Besprechung des Verhaltens homogener erster Integrale der Differentialgleichungen der geodätischen Linien bei projektiver Abänderung des Zusammenhanges sowie derjenigen Räume, für welche diese Differentialgleichungen $\frac{n(n+1)}{2}$ unabhängige homogene lineare erste Integrale besitzen. Nach einer neuen Herleitung des Verhaltens der Komponenten des projektiven Zusammenhanges bei Koordinatentransformation schließt das Kapitel mit einem eingehenden Studium der infinitesimalen Kollineationen (bzw. Affinitäten) eines affin-zusammenhängenden Raumes, d. h. derjenigen infinitesimalen Transformationen, welche die geodätischen Linien in ebensolche überführen (und überdies den affinen Parameter dieser Linien erhalten), sowie der kontinuierlichen Gruppen von Kollineationen.

Das letzte Kapitel bringt, wie schon erwähnt, die Geometrie der Unterräume in affin-zusammenhängenden Räumen, der Hauptsache nach im Anschlusse an die Darstellung von Schouten, wobei zuerst der Fall einer Hyperfläche besprochen wird, dann der allgemeinere einer n-dimensionalen Fläche im m-dimensionalen affin-zusammenhängenden Raum.

Wie aus der vorstehenden ausführlichen Inhaltsangabe ohne weiteres ersichtlich ist, bildet das Buch von Eisenhart eine wertvolle Bereicherung und Ergänzung der vorhandenen zusammenfassenden Literatur über die neueren Verallgemeinerungen des Raumbegriffes.

Prag. L. Berwald.

E. Salkowski. Grundzüge der darstellenden Geometrie. (Mathematik und ihre Anwendungen in Monographien und Lehrbüchern. Herausgegeben von E. Hilb, Bd. 3). 100 S. Leipzig 1928, Akademische Verlagsgesellschaft.

Die kleine Schrift behandelt in flüssiger Form die Elemente der darstellenden Geometrie in dem Umfang, wie sie jedem Oberrealschüler geläufig sein dürften, und beabsichtigt damit eine Einführung zu den mit Spannung erwarteten Hessenbergschen Vorlesungen zu bieten, die in Kürze, von

Salkowski herausgegeben, in der gleichen Sammlung erscheinen sollen. Daß für eine solche Einleitung ein Bedürfnis vorlag, wird hoffentlich der Erfolg des Buches lehren. BIEBERBACH.

Max Lagally, Vorlesungen über Vektorrechnung. (Mathematik und ihre Anwendungen in Monographien und Lehrbüchern. Herausgegeben von E. Hilb, Bd. 2.) 358 S. Leipzig 1928, Akademische Verlagsgesellschaft.

Diese neue Vektorrechnung stellt sich würdig dem klassischen Werk von Gibbs-Wilson an die Seite. Von diesem beeinflußt, macht sie doch durchaus den Eindruck, Niederschlag selbständigen Ringens mit dem hier und da spröden Stoff zu sein. Was der Verf. in dem absichtlich auf Geometrie und Mechanik beschränkten Anwendungen bietet, ist in sich gerundet und geschlossen. Namentlich zwingt der eingeflochtene Abriß der Differentialgeometrie auch den zu achtungsvollem Interesse, der selber über diese Dinge nachgedacht hat.

Die Darstellung des Verf., der einen axiomatisch etwas lockeren Stil schreibt, hat mich hier und da etwas befremdet. Darin, daß der engen Beziehung der Dyaden zum Matrizenkalkül nicht gedacht wird, mag wohl mit mir noch mancher andere von modernem Denken beeindruckte Mathematiker einen wohl durch die physikalischen Neigungen des Verf. hervorgerufenen Mangel erblicken, den zu beseitigen eine zweite Auflage dem Verf. hoffentlich bald Gelegenheit bietet, zumal ein solcher äußerer Erfolg nur eine wohlverdiente Anerkennung für ein hervorragendes Werk bedeuten würde. BIEBERBACH.

A. Brill, Vorlesungen über allgemeine Mechanik. München 1928, R. Oldenbourg.

Es ist bewundernswert zu sehen, welch reichen Inhalt der Verf. auf knappem Raum und doch in durchweg ausführlicher Darstellung vor uns ausbreitet. Statik, Kinematik und Dynamik der Punktsysteme und starren Körper machen den Gegenstand des Buches aus. Überall knüpft der Verf. an einfache naheliegende Beispiele an. Gerade die Bearbeitung solcher Dinge, die zahlreichen eingestreuten historischen Bemerkungen, die Hinweise auf die modernste anschließende Entwicklung machen das Buch zu einem für die Einführung der Studierenden der Mathematik besonders geeigneten. So ist nicht zu verstehen, daß es so schwer gehalten hat, einen Verleger zu finden, der ein auf der Lehrerfahrung vieler Jahrzehnte beruhendes, an die Clebschsche Tradition anknüpfendes und doch — von einigen Äußerlichkeiten abgesehen — modernes Buch dem Publikum hat vorlegen wollen. Dem Buche ist eine weite Verbreitung zu wünschen und wohl sicher. BIEBERBACH.

Rudolf Beyer, Einführung in die Kinematik. VIII u. 150 S. Leipzig 1928, Dr. Max Jänecke. Kart. RM 8.70.

Das Buch entwickelt die Grundlagen und zeichnerischen Methoden der *ebenen* Bewegungsgeometrie in einem Umfang, wie sie der praktische Ingenieur braucht: Geschwindigkeit der Punkte eines starren Systems (Momentanzentrum, Rast- und Gangpolbahn), Ersatz der Bahnkurve durch Krümmungskreis und zeichnerische Ermittlung desselben, Beschleunigungs-

verhältnisse, insbesondere auch bei Relativbewegung (Satz von Coriolis), Kurvenführung, Relativbewegung mehrerer Systeme, schließlich Darstellung einer Bewegung im Weg-Zeit-Diagramm und den analogen Diagrammen für die Geschwindigkeit usw. Die Theorie wird fortlaufend auf die Lehre von den Getrieben angewendet, zahlreiche spezielle, der Praxis entnommene Beispiele werden durchgearbeitet, so daß das Buch für den Techniker als recht geeignet bezeichnet werden kann. Nicht befriedigend vom mathematischen Standpunkt aus, aber auch in pädagogischer Hinsicht, finde ich die Art und Weise, wie die grundlegenden Begriffe der Geschwindigkeit und Beschleunigung eingeführt werden. Gewiß, der Verfasser will auf sein Publikum Rücksicht nehmen und redet daher im Anfang bei der Definition der Geschwindigkeit von dem „kleinen Vektor $d\mathfrak{s}$“ und dem „Zeitelement dt“, ohne von Grenzübergang und Differentialquotient zu sprechen. Warum tut er es dann aber später (S. 49) bei der Definition der Beschleunigung (übrigens ohne weitere Erläuterung dieser Begriffe), und warum bringt er die anschauliche geometrische Deutung des Differentialquotienten bzw. der Geschwindigkeit am Weg-Zeit-Diagramm schließlich doch noch, aber erst im letzten Kapitel des Buches? So muß ja der Leser zu der Meinung kommen, daß er an den verschiedenen Stellen ganz verschiedene Dinge kennengelernt habe. Das letzte Kapitel an den Anfang gestellt, würde durchweg saubere Definitionen schaffen und zugleich die Möglichkeit eröffnen, denjenigen, der den Begriff des Differentialquotienten noch nicht kennt, auf die anschaulichste Weise damit bekannt zu machen.

Stuttgart. DOETSCH.

G. Julia, Cours de Cinématique. 148 S. Mit 52 Figuren. Paris 1928, Gauthier-Villars & Cie.

Das Buch gibt Vorlesungen über Bewegungslehre wieder, die vor den étudiants de licence an der Sorbonne gehalten wurden; nach einer beigegebenen Anzeige steckt sich der Verfasser das Ziel, die Begriffe der Kinematik darzulegen, deren Kenntnis für die erfolgreiche Lektüre der klassischen Werke über theoretische Mechanik unerläßlich ist.

Nach der Bewegung des Punktes wird der momentane Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustand eines starren Körpers untersucht; dann wird die Zusammensetzung von Bewegungen behandelt. Fast die Hälfte des Büchleins ist einem tieferdringenden Studium der Kinematik des starren Körpers gewidmet; besonders eingehend, aber natürlich unter Beschränkung auf das Wichtigste, ist die Lehre von der ebenen Bewegung bis zur Euler-Savaryschen Formel dargestellt.

Als Anwendungen der theoretischen Erörterungen finden sich interessante Beispiele wichtiger Bewegungsformen in verschiedener Behandlungsweise ausgeführt; eine besondere pädagogische Feinheit ist darin zu erblicken, daß meistens die Betrachtung einiger einfacher, aber typischer Sonderfälle der des allgemeinen Falles vorausgeschickt wird. Der Verfasser benützt häufig die rein geometrische Methode, in besonders hübscher Weise bei der Gewinnung der Savaryschen Konstruktion auf Grund eines von Koenigs stammenden Gedankens und bei der knappen Behandlung des linearen Komplexes. Wo die Methode analytisch ist, sucht der Verfasser erfreulicherweise die Vektorrechnung zur Geltung zu bringen; freilich könnte dies mit

großem Vorteil in noch ausgiebigerem Maße geschehen. (Die zum Verständnis der älteren Schriften notwendige Bekanntschaft mit der reinen Koordinatenmethode kann durch geeignete Übungsaufgaben erreicht werden.) So ist die Herleitung des Satzes, daß der momentane Bewegungszustand eines starren Körpers immer eine Schraubung ist, ziemlich umständlich (man vergleiche etwa den leicht ganz einwandfrei zu gestaltenden Beweis bei Jaumann, Die Grundlagen der Bewegungslehre, Leipzig 1905, S. 157f.). Auch die Bestimmung der Bahnen der Punkte eines sich um einen festen Punkt bewegenden Körpers, dessen Winkelgeschwindigkeit als stetige Funktion der Zeit — mehr braucht nicht gefordert zu werden — gegeben ist, läßt sich bei Zugrundelegung der Vektordifferentialgleichung durchsichtiger behandeln. Zu dem kurz angedeuteten eleganten Verfahren von Darboux, nach dem man dieses Problem durch Einführung eines komplexen Parameters für die Minimalgeraden auf der Einheitskugel auf eine Riccatische Differentialgleichung zurückführen kann, ist zu sagen, daß es vielleicht ratsamer wäre, den anschaulicheren Zusammenhang zwischen dieser komplexen Zahl und den Kugelpunkten, den die stereographische Projektion vermittelt, in den Vordergrund zu stellen (vgl. Klein-Sommerfeld, Über die Theorie des Kreisels, Heft I, 1. Aufl. Leipzig 1897, S. 29f.). Im übrigen erfreut aber die Darstellung durch Flüssigkeit und Klarheit und im ganzen durch wohltuende Strenge. Musterhaft ist z. B. der den Funktionentheoretiker im Verfasser deutlich verratende Beweis für den Satz, daß eine Epizykloide, deren erzeugende Kreise inkommensurable Radien haben, jedem Punkt eines gewissen Gebietes der Ebene beliebig nahekommt.

Man kann aus dem Buche trotz seines geringen Umfangs wirklich Kinematik lernen, weil die Behandlungsweise den Problemen der Bewegungslehre durchweg angemessen ist; es erfüllt also seinen am Anfang ausgesprochenen Zweck vorzüglich. F. Löbell.

O. Henkel, Graphische Statik mit besonderer Berücksichtigung der Einflußlinien. II. Teil. 2. Aufl. (Sammlung Göschen 695.) Berlin 1928, W. de Gruyter.

Der in zweiter Auflage vorliegende zweite Teil behandelt die durchlaufenden Gelenkträger, die Dreigelenkbogen, Formänderungen gerader Träger, durchlaufende kontinuierliche Träger, Zweigelenkbogen und Zweigelenkrahmen, eingespannte Bogen und Steifrahmen. Bieberbach.

K. Federhofer, Graphische Kinematik und Kinetostatik des starren räumlichen Systems. 81 S. 5 Tafeln. Wien 1928, Julius Springer.

Der Verfasser hat sich der verdienstvollen Aufgabe unterzogen, die von Mayor, v. Mises und Prager angegebenen Abbildungen der Raumvektoren auf Stäbe und kotierte Punkte der Ebene für die Kinematik und die Kinetostatik des starren räumlichen Systems nutzbar zu machen. Es ist ihm so gelungen, umständliche Rechnungen durch überraschend übersichtliche Konstruktionen zu ersetzen. Bieberbach.

Verhandlungen des zweiten internationalen Kongresses für technische Mechanik. Zürich 1926. Im Auftrage des Organisationskomitees herausgegeben von E. Meißner. Zürich 1927, Orell Füßli.

Die internationalen Kongresse für technische Mechanik sind 1924 ins Leben getreten. In diesem Jahre fand der erste dieser Kongresse in Delft

statt. Sie sind nun zur ständigen Einrichtung geworden. Sie entsprechen einem tatsächlichen Bedürfnis der Zusammenarbeit, wie man schon an äußeren Umständen erkennen kann: der großen Zahl der Besucher und der großen Zahl der gehaltenen Vorträge. Diese sind teils experimentellen, teils theoretischen Inhaltes. Eine große Anzahl ist von unmittelbarem mathematischen Interesse. Aber doch wäre nur für einen Bruchteil derselben ein internationaler Mathematikerkongreß, wo bisher diese Fragen einen Unterschlupf gefunden hatten, der geeignete Ort gewesen. Ich zähle in der Folge die Vorträge auf, die über ihre eigentliche Absicht hinaus, auch dem nur mathematisch Interessierten von Wichtigkeit erscheinen mögen.

E. Meißner, Zürich: Elastische Oberflächenquerwellen. Th. von Kármán, Aachen: Über elastische Grenzzustände. L. Prandtl, Göttingen: Über die ausgebildete Turbulenz. T. Levi-Civita, Roma: Sur les chocs dans le problème des trois corps. L. Roy, Toulouse: Sur le potentiel thermodynamique interne des lignes élastiques. F. H. van den Dungen, Bruxelles: Les équations intégrales à plusieurs paramètres et la technique des vibrations. H. Hencky, Delft: Ternäre orthogonale Transformationen und ihre Anwendungen in der Theorie der Elastika. R. Miche, Le Caire: Le calcul pratique des problèmes élastiques à deux dimensions par la méthode des équations intégrales. E. Trefftz, Dresden: Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren. E. Schwerin, Berlin: Über die Transversalschwingungen von Stäben veränderlichen Querschnitts. K. Wolf, Wien: Schwingungen elastischer Seile. C. R. Soderberg, East Pittsburgh: Solutions of systems encountered in percussion tools. M. König, Rugby: Über ein neues Verfahren zur Ermittlung von Schwingungsperioden von Turbinenscheiben. G. Bouligand, Poitiers: Théorie du potentiel newtonien. Sur le principe de Picard. A. Buhl, Toulouse: Sur les origines „stokiennes" de la cinématique. B. Mayor, Lausanne: Sur les relations entre la théorie des percussions et celle des systèmes articulés de la résistance des matériaux. A. Stodola, Zürich: Kritische Störungen elastischer Wellen infolge Nachgiebigkeit des Ölpolsters in den Lagern. J. J. Koch, Delft: Bestimmung höherer kritischer Drehzahlen schnell laufender Wellen. Th. Pöschl, Karlsruhe: Über strenge Lösungen aus der Theorie der Bogenträger. A. Signorini, Napoli: Sur la statique du béton armé. K. Federhofer, Graz: Über die Berechnung der Einbeulung des gleichmäßig gedrückten Kreisringes. A. Weinstein, Breslau: Sur la vitesse de propagation de l'onde solitaire. R. Risser, Paris: Note au sujet des ondes d'émersion et d'impulsion. N. Zeilon, Lund: Ein allgemeines hydrodynamisches Potentialproblem. G. Hamel, Berlin: Ein hydrodynamischer Unitätssatz. St. Zaremba, Krakow: Sur une transformation du problème hydrodynamique. J. Hadamard, Paris: La formation des discontinuités dans les fluides.

BIEBERBACH.

A. Walther, Einführung in die mathematische Behandlung naturwissenschaftlicher Fragen. Erster Teil. Funktion und graphische Darstellung. Differential- und Integralrechnung. Mit 174 Abbildungen. 220 S. Berlin 1928, Julius Springer.

Es handelt sich um eine Sonderausgabe des gleichnamigen Beitrages in der Methodik der wissenschaftlichen Biologie. Ein gewiß sehr nützliches

Werk für alle, die es angeht. Das ist die große Zahl derer, die ohne inneres Verhältnis zu mathematischem Denken, durch die Tücke der Wissenschaft gezwungen werden, sich solcher Hilfsmittel zu bedienen. Sie sollen hier in möglichst müheloser Weise mit dem Handwerkszeug vertraut gemacht werden. Statt der Beweise treten daher meist sehr einleuchtende Plausibilitätsbetrachtungen, und es wird der Stoff an zahlreichen praktischen Beispielen erläutert. Zu bewundern ist der Fleiß, die Ausdauer, die Selbstverleugnung und der pädagogische Drang eines Gelehrten, der es über sich bringt, so elementare Dinge so ausführlich darzustellen, der gar, vom Zauber einer Sturmnacht am Kattegat umbraust, nichts Besseres zu tun weiß, als Stücke dieses Buches zu diktieren. Bieberbach.

Fr. A. Willers, Methoden der praktischen Analysis. 344 S. Mit 132 Figuren. (Göschens Lehrbücherei Bd. 12.) Berlin, W. de Gruyter. Geh. *ℛℳ* 20.—; geb. *ℛℳ* 21.50.

Das Buch gibt in bemerkenswerter Vollständigkeit und Vielseitigkeit unter steter Betonung des Wichtigen einen Überblick über alle Teile der praktischen Analysis. Beim Zahlenrechnen z. B. werden die graphischen wie maschinellen Hilfsmittel in gleicher Weise berücksichtigt, Rechenschieber, Nomographie und Rechenmaschinen ausführlich abgehandelt. Interpolation, Gleichungsauflösung. Differentiation und Integration, Differenzengleichungen und gewöhnliche Differentialgleichungen werden nach der praktischen Seite hin ausführlich erörtert. Überall wird das Vorgetragene an unmittelbar der Praxis der Anwendungsgebiete entnommenen Beispielen erläutert. Neben der Reichhaltigkeit des Methodischen scheint mir dies ein Vorzug zu sein, der dem Buch Verwendbarkeit und weite Verbreitung sichern wird. Bieberbach.

Horst von Sanden, Mathematisches Praktikum. Teil 1. (Teubners technische Leitfäden Band 27.) IV u. 122 S., 20 Zahlentafeln als Anhang. Leipzig u. Berlin 1927, B. G. Teubner. Geb. *ℛℳ* 6.80.

Das Buch ist eine Aufgabensammlung mit kurzen Zusammenstellungen der theoretischen Grundlagen und ist darauf berechnet, hauptsächlich an technischen Hochschulen neben den Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung benutzt zu werden. Da erfahrungsgemäß von dem erlernten systematischen Wissen zur praktischen Anwendung auf konkrete Einzelprobleme ein sehr weiter Schritt ist, so genügt es für den angehenden Techniker keineswegs, wenn ihm bloß versichert wird, daß er die gelernte Theorie einmal gut werde brauchen können, sondern er muß planmäßig durch recht viele Beispiele dazu erzogen werden, zunächst einmal in einem vorliegenden *technischen* Problem den mathematischen Kern zu sehen und die richtige Übersetzung in eine rein *mathematische* Aufgabe zu finden, und dann weiterhin diese so schnell und so exakt wie möglich zu lösen. Diese Schulung will das vorliegende Bändchen vermitteln, und man darf wohl sagen, daß ihm dies in ganz ausgezeichneter Weise gelingt. Allerdings: *praktisches Können* läßt sich nur durch *praktische Tätigkeit* erwerben, und wer den Inhalt des Buches nur wie eine Vorlesung an sich vorüberziehen lassen wollte, der würde sich leicht dazu verleitet sehen, diese Art von Mathematik gering einzuschätzen und das Gelesene ohne tieferen Nutzen beiseite

zu legen. Dieses Buch erfordert einen Benutzer, der mit dem Stift in der Hand jede Aufstellung und Rechnung selbst mitmacht, vielleicht für einige Zeit einmal selbständig weiterarbeitet, dann sich wieder von dem Mentor beraten läßt usw., der sich also keine Vorlesung, sondern eine Übungsstunde, ein „Praktikum", halten läßt — insofern ist der Titel des Buches sehr glücklich gewählt. Ein solcher Benutzer wird bald merken, daß auch diese Art von Mathematik ihre eigentümlichen Schwierigkeiten hat und welche Arbeit hinter den wenigen ihm vorgesetzten Seiten steckt. Behandelt werden Aufgaben, die unter folgende Rubriken fallen: Rechenschieber, Taylorscher Satz, Gleichungen, Ausgleichsrechnung, Integration (ohne Differentialgleichungen), Differentiation, Interpolation und Harmonische Analyse. Jedes Beispiel wird in sämtlichen Einzelheiten durchgerechnet, mit allen Erwägungen, die der gewissenhafte Rechner anzustellen hat (auf eine fortlaufende Kontrolle und Abschätzung der Meß- und Rechengenauigkeit wird der größte Wert gelegt), Irrwege werden als solche gekennzeichnet, manchmal wird eine Aufgabe von ganz verschiedenen Seiten her angepackt und auch der Umweg über eine mangelhafte Lösung zu einer befriedigenden nicht gescheut, denn nur durch Vergleich kann der Anfänger das Gefühl für den richtigen Weg lernen. Wer die wenigen, aber typischen Aufgaben, bei denen so ziemlich alles zur Sprache kommt, was der Praktiker zu beachten hat, nachdenklich mitrechnet, wird auch anderen technischen Problemen nicht ratlos gegenüberstehen, sondern sich zu helfen wissen.

Zum Schluß noch zwei Bemerkungen. Die eine betrifft das einleitende Kapitel, wo einiges über den Begriff der Irrationalzahl gesagt wird. Ich könnte mir gut denken, daß dadurch gerade mancher von denjenigen, für die das Buch in erster Linie gedacht ist, von ihm eine ganz falsche Vorstellung bekommt und von der Lektüre abgeschreckt wird. Der Verfasser will begreiflich machen, daß die Irrationalzahl keineswegs etwas so ganz Einfaches ist. Ist es aber nötig, dies gerade dem praktischen Rechner gegenüber zu tun, für den der Unterschied zwischen Rational- und Irrationalzahl überhaupt nicht existiert und für den jede Zahl ein Dezimalbruch ist, dessen Länge ausschließlich durch Fehlergrenzen bedingt wird? Was soll sich der Techniker, dessen Arglosigkeit noch nie durch eine Dedekind-Kur getrübt worden ist, bei folgenden Worten denken: „Eigentlich bedeutet das Wort ‚Irrationalzahl' gar nichts anderes als eine gewisse, einen nicht-periodischen Dezimalbruch erzeugende Rechenvorschrift ... Das Wort ‚Zahl' ... wird bei einer einen nicht-periodischen Dezimalbruch liefernden Rechenvorschrift deshalb gebraucht, weil bei der geometrischen Deutung der Zahlen durch Punkte auf einer Koordinatenachse gewissen Rechenvorschriften bestimmte Punkte entsprechen." Und wenn bei den Beispielen nach Erwähnung der Berechnung von $\sqrt{2}$ durch Näherungsbrüche gesagt wird: „Ebenso ist $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$ eine Rechenanweisung" (zur Gewinnung irrationaler Zahlen? Welchen Charakter die Summe hat, ist doch der Reihe gar nicht anzusehen, außerdem wird der Leser sofort denken: Wie ist das zu verstehen, wenn x selbst irrational ist? usw.). Mir will es psychologisch richtiger erscheinen, derartige Erörterungen, die in einem solchen Buch nun einmal nicht ausführlich gebracht werden können und auch gar nicht notwendig sind, lieber ganz wegzulassen. — Die zweite Be-

merkung bezieht sich auf die theoretische Einleitung zum Taylorschen Satz. Hier wird (S. 16) gesagt: „Der Taylorsche Satz ist der wichtigste der Differentialrechnung. Er erlaubt nämlich, unter gewissen Bedingungen komplizierte Funktionen durch ganze rationale Funktionen zu ersetzen." Dies scheint mir dem Wesen des Taylorschen Satzes und seiner Bedeutung für die Anwendungen nicht gerecht zu werden und den Leser, der später noch ganz andere Arten von approximierenden ganzen rationalen Funktionen (z. B. bei der Differenzenrechnung) mit ihren eigentümlichen approximierenden Eigenschaften kennen lernen soll, in eine falsche Einstellung zu drängen. *Ersetzen*, d. h. approximieren kann man *jede* Funktion durch *jede* ganze rationale Funktion, der Witz des Taylorschen Satzes liegt in dem Restglied, das an der Entwicklungsstelle von höherer Ordnung als das letzte mitgeführte Glied verschwindet.

Stuttgart. DOETSCH.

Martin Lindow, Numerische Infinitesimalrechnung. 176 S. Berlin 1928, Ferd. Dümmler.

Der Verf. unternimmt den lehrreichen und dankenswerten Versuch, einige in der Astronomie übliche Methoden auf mathematisch allgemeine Fälle zu übertragen. So gelingt es ihm, neue und interessante Methoden der praktischen Analysis zuzuführen. Aber um die Liebe der reinen Mathematiker wird er trotz mancher Geistreichelei vergeblich werben, solange er dabei stehen bleibt, die Sicherheit eines Verfahrens nicht in einer Fehlerabschätzung zu suchen, sondern darin, daß das betr. Verfahren nicht weitergeht. Die reinen Mathematiker sind zu sehr gewöhnt, im Versacken eines Gedankenganges einen Mißerfolg zu sehen, als daß sie sich belehren lassen könnten, daß das Versanden eines Verfahrens seinen Erfolg garantiere. Sind wir auch dem Verf. für die Darstellung von Verfahren dankbar, die in der Astronomie die Probe der praktischen Nachprüfung bestanden, so sollte doch der Verf. von uns lernen, daß Verallgemeinerung ohne Fehlerabschätzung in der Luft schwebt.

Ein Verfahren, das in der Astronomie sozusagen ein Bestandteil der Theorie geworden ist, die nun mit ihm zusammen der Prüfung an der Wirklichkeit unterliegt, braucht anderwärts sich nicht zu bewähren.

BIEBERBACH.

J. Peters, Sechsstellige Tafel der trigonometrischen Funktionen. VIII u. 293 S. Berlin SW 68. 1929, Ferd. Dümmlers Verlag.

Für die Zwecke des Rechnens mit der Rechenmaschine sind die vorhandenen siebenstelligen Tafeln als zu umständlich befunden worden. Der Verf. hat seine Tafeln so eingerichtet, daß für die Interpolation überall die ersten Differenzen ausreichen. Da aber bei $\omega = 0$ Interpolation für $\cot g\, \omega$ und $\operatorname{cosec} \omega$ unmöglich wird, sind in einer besonderen Tafel für $0^0\,0'$ bis $1^0\,20'$ die Werte von $\cot g\, \omega \cdot \omega$ zusammengestellt, da sich diese relativ langsam ändern und so aus der bekannten Sekundenzahl leicht $\operatorname{ctg} \omega$ und umgekehrt zu berechnen erlauben. BIEBERBACH.

F. J. Duarte, Nouvelles Tables de log $n!$ à 33 décimales depuis $n = 1$ jusqu'à $n = 3000$. Paris (VI e) Index generalis, 46 rue Jacob.

Zu den im Titel schon genannten Tafeln kommt noch eine auf 33 Dezimalen berechnete Tafel der Logarithmen der Zahlen $n = 1 + \frac{\varkappa}{10^\nu}$, $\varkappa = 1, \ldots, 9$; $\nu = 1, 0, \ldots, 16$. Mit ihrer Hilfe gelingt dann die Berechnung der Logarithmen beliebiger Zahlen mit einer durch die Größe der Zahl bestimmten Genauigkeit nach einem vom Verf. angegebenen Rechenschema, das darauf beruht, daß man durch Multiplikation (oder Division) mit Zahlen der angegebenen Art jede Zahl beliebig nahe an 1 heranbringen kann.

BIEBERBACH.

Arthur Gordon Webster, Partial Differential Equations of Mathematical Physics. Edited by Samuel J. Plimpton (B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen, Band XLII.) VII und 440 S. G. E. Stechert & Co. New York, B. G. Teubner Leipzig, 1927. Geh. ℛℳ 23.—; geb. ℛℳ 25.—.

Diejenigen partiellen Differentialgleichungen, meist zweiter Ordnung, die der mathematischen Physik, vor allem den Schwingungserscheinungen und der Elektrizitäts- und Wärmeleitung zugrunde liegen, haben dank dem Interesse, das sich ihnen immer wieder zuwandte, eine Fülle der schönsten und weitesttragenden Methoden hervorgebracht; Potentialtheorie, Fourierreihe und -integral, Riemannsche Integrationsmethode und vieles andere haben hier ihre Wurzel, und es gibt keinen schöneren Weg, in diese Dinge einzudringen als gerade von der Seite der mathematischen Physik her. Nun besitzen wir ja eine sehr ausführliche Darstellung jener Theorien in der von Mises-Frankschen Neubearbeitung des bekannten Werkes von Riemann-Weber. Das vorliegende Buch unterscheidet sich jedoch so von dem Riemann-Weber in seiner jetzigen Gestalt, daß es sich dank der verschiedenen Einstellung und Geschmacksrichtung der Benutzer wohl neben jenem behaupten kann. Der Unterschied liegt vor allem darin, daß es nicht so methodisch, weitschichtig und streng nach Sachgebieten aufgebaut ist wie der neue Riemann-Weber, sondern in vieler Beziehung mehr den älteren Ausgaben dieses Werkes ähnelt. Es leitet zunächst einmal sämtliche später behandelten Differentialgleichungen aus der Physik ab, um nach einem kurzen Abriß über partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, der etwas isoliert dasteht, zur mathematischen Behandlung der speziellen Gleichungen zweiter Ordnung aus der mathematischen Physik überzugehen. Das ordnende Prinzip ist hierbei nicht das physikalische Sachgebiet, sondern, was recht reizvoll ist, die mathematische Methode: So werden zunächst die Probleme behandelt, die sich mit Entwicklungen nach Orthogonalfunktionen, insbesondere Fourierschen Reihen behandeln lassen, dann folgen die potentialtheoretischen (Greenschen) Methoden, dann die Riemannsche Integrationsmethode, dann die Entwicklungen nach Kugel- und ähnlichen Funktionen, schließlich die Methoden der Integralgleichungen. Dabei wird der Leser meist bis an die modernsten Untersuchungen herangeführt, wie beispielsweise die Hadamardschen Untersuchungen über das Cauchysche Problem, wie das Buch überhaupt auf einem verhältnismäßig geringen Raum eine erstaunliche Stoffülle ausbreitet. Für eine neue Auflage möchte

man sich vielleicht das eine oder andere mathematisch noch etwas exakter formuliert wünschen, wenigstens wo es ohne weitere Aufblähung möglich ist. So ist z. B. die Definition des Kontinuums gleich zu Anfang verfehlt, läßt sich aber durch eine nicht längere richtige ersetzen. Jedoch abgesehen von solchen kleinen Schönheitsfehlern, die für den eigentlichen Zweck des Buches nicht von lebenswichtiger Bedeutung sind, stellt es ein für den praktischen Gebrauch äußerst nützliches Kompendium dar. Es ist daher zu begrüßen, daß der Verlag Teubner sich entschlossen hat, eine deutsche Übersetzung von Szegö besorgen zu lassen, die demnächst erscheinen soll.

Stuttgart. DOETSCH.

W. Müller, Mathematische Strömungslehre. Mit 137 Textabbildungen. 239 S. Berlin 1928, Julius Springer.

Eine Einleitung gibt die Herleitung der hydrodynamischen Grundgleichung auch mit Berücksichtigung der inneren Reibung, um so den Leser instandzusetzen, den Einfluß der Vernachlässigung der inneren Reibung abzuschätzen; denn in der folgenden Darstellung werden die Vorgänge in der Grenzschicht beiseite gelassen und nur Strömungen idealer Flüssigkeiten betrachtet. Die befolgte Methode ist die Quellsenkmethode und die Methode der konformen Abbildung. Mit Hilfe derselben werden in zahlreichen Beispielen die Strömungs- und Druckverhältnisse durchkonstruiert und die so gewonnene Theorie mit der Erfahrung konfrontiert. Die Fuhrmannschen Luftschiffmodelle, die Tragflügeltheorie, das Rotorproblem, die Theorie des Propellers und der Turbinen geben das Material zu Beispielen von aktueller Bedeutung. Die flüssige und, von gelegentlichen Ausnahmen abgesehen, klare Darstellung wird des Interesses nicht nur der technisch, sondern auch der mathematisch geschulten Kreise sicher sein. Wünschen möchte man, daß der Verf. mehr Sorgfalt auf die Erklärung der Bezeichnungen und Begriffsnamen verwendete. BIEBERBACH.

A. Flechsenhaar, Einführung in die Finanzmathematik. 2. Aufl. IV u. 109 S. Leipzig 1927, B. G. Teubner. Kart. *RM* 3.20.

Das Büchlein ist auf den Gebrauch an höheren Lehranstalten und Handelsschulen zugeschnitten, aber auch zum Selbststudium geeignet. Da es alles Notwendige, wie Potenzen, Logarithmen und das Einfachste über endliche und unendliche geometrische Reihen in einem „Vorkursus" rekapituliert, so ist es auch für den verständlich, der von seinen Schulkenntnissen nichts behalten hat. Es behandelt im wesentlichen zwei Gebiete: einerseits die Zinseszinsrechnung, Renten und Anleihen, andererseits die Versicherungsmathematik unter Voranstellung zweier Abschnitte über Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Zwecks größerer Verständlichkeit sind meistens spezielle Beispiele vorgerechnet, außerdem enthält jeder Abschnitt eine kleine Aufgabensammlung, zu der die Lösungen in einem besonderen Heftchen erscheinen sollen. Was die dem Buchdeckel eingehefteten und herausklappbaren Tabellen betrifft, so wäre zu wünschen, daß im Inhaltsverzeichnis etwas deutlicher gesagt würde, wo sie zu finden sind. Die dort angegebenen Seitenzahlen existieren nämlich in dem Buche gar nicht.

Stuttgart. DOETSCH.

Franz Baur, Korrelationsrechnung. (Mathematisch-physikalische Bibliothek Band 75.) IV u. 57 S. Leipzig und Berlin 1928, B. G. Teubner. Geh. *RM* 1.20.

Diese knappe Zusammenstellung des wichtigsten aus der in Biologie, Konjunkturforschung usw. so häufig, aber nicht immer richtig angewendeten Korrelationsrechnung ist sehr zu begrüßen; sie arbeitet die Problemstellung gut und leichtverständlich heraus und bringt das, was in den Anwendungen am meisten gebraucht wird (vor allem Regressionsgleichung, Korrelationskoeffizient und -verhältnis), in einer an dem grundlegenden Buch von Tschuprow, „Grundbegriffe und Grundprobleme der Korrelationstheorie" orientierten Form. Manches ist bei der Enge des zur Verfügung stehenden Raumes etwas knapp geraten, und besonders in den letzten Partien mußten die Beweise häufig unterdrückt werden. Jedoch ist durch zahlreiche Beispiele dafür gesorgt, daß der Leser, dem der stark konzentrierte theoretische Stoff vielleicht Schwierigkeiten bereitet, zum richtigen Verständnis des Gelesenen gelangt. Bei einer späteren Auflage könnte wohl für manches mehr Raum geschaffen werden dadurch, daß bei der Einleitung über Wahrscheinlichkeitsrechnung einiges weggelassen wird, so z. B. die klassische Definition der Wahrscheinlichkeit und was daran anschließt. Gebraucht wird nämlich in Wahrheit später immer nur die andere Definition als Limes einer relativen Häufigkeit.

Stuttgart. DOETSCH.

G. Förster, Geodäsie. (Sammlung Göschen Nr. 102.) 122 S. Berlin u. Leipzig 1927, Walter de Gruyter & Co. Geb. *RM* 1.50.

Das Bändchen ersetzt das früher von Reinhertz geschriebene und schließt von vornherein die sog. Niedere Geodäsie oder Feldmessung, die bereits in anderen Bänden der Sammlung Göschen behandelt ist, aus, um sich ganz auf die Landesvermessung und die sog. Höhere Geodäsie (Erdmessung) zu konzentrieren. Von ersterer behandelt es zunächst die theoretischen Grundlagen: Bezugsellipsoid, geodätische Linien, Winkelmessung, Einführung rechtwinkliger Koordinaten und konforme Abbildung auf die Ebene. Ein dann eingeschobener Paragraph über die Methode der kleinsten Quadrate dürfte wohl erheblich zu erweitern sein, um auch von jemandem, der die Dinge noch nicht kennt, verstanden zu werden, zum mindesten müßte das ohne Beweis hingestellte blutleere Schema durch Ausfüllung mit der Geodäsie entnommenen Begriffen belebt werden. Dann folgt das Wichtigste aus der Praxis der Landesvermessung: Die Herstellung von Triangulationsnetzen, die Winkelmessungen erster Ordnung mit dem Theodoliten, die Ausmessung der Basis mit Meßstangen oder Meßdraht, die Rechenarbeit für ein Hauptdreiecksnetz und Verdichtung des Netzes, Höhenbestimmung, Herstellung der Reichskarten und Meßtischblätter. — Der kleinere zweite Teil gibt, bei der Enge des Raumes naturgemäß hauptsächlich in referierender Form, einen Überblick über die Höhere Geodäsie: Niveauflächen und Geoid, die verschiedenen im Gebrauch befindlichen Referenzellipsoide, die die Erdgestalt in brauchbarer Weise annähern, die geographische Ortsbestimmung, die Berechnung der geodätischen Linie aus den geographischen Koordinaten, die mit der Gravitation zusammenhängenden Probleme, der Einfluß der Himmelskörper auf die Erd-

gestalt usw. Dadurch, daß die oft sehr weitschweifigen Herleitungen meist unterdrückt werden mußten, eignet sich das Büchlein recht gut zur Gewinnung einer ersten Übersicht und zum gelegentlichen Nachschlagen, was ja beides durchaus den Zielen der Sammlung Göschen entspricht.

Stuttgart. DOETSCH.

W. Immler, Leitfaden der Flugzeugnavigation. München 1928, R. Oldenbourg.

Das Buch enthält eine für die Praxis des Fliegers bestimmte Zusammenstellung der Methoden, die eine genügend rasche und genügend genaue Orts- und Kursbestimmung des Flugzeuges über Land und über See ermöglichen. Durchweg treten dabei graphische Hilfsmittel an die Stelle der sonst üblichen rechnerischen. Sie führen rascher zum Ziel und geben genügende Genauigkeit. Die verschiedenen Verfahren der Peilung auf optischem und drahtlosem Weg, die Bestimmung der Windeinflüsse, die kartographischen und instrumentellen Hilfsmittel erfahren neben den mathematischen Mitteln zur Auswertung der Beobachtungen eine ausführliche Darstellung. Das Buch wird auch vielen Lehrern zur Belebung des Unterrichtes nützliche Dienste tun. BIEBERBACH.

P. Werkmeister, Vermessungskunde I. (Sammlung Göschen 468.) Vierte Auflage. Berlin 1926, W. de Gruyter.

Das Bändchen behandelt die Instrumente für Horizontalmessungen und für Nivellements und lehrt ihre praktische Verwendung. BIEBERBACH.

M. Enßlin, Elastizitätslehre für Ingenieure. Bd. II. (Sammlung Göschen 957.) Berlin 1928, W. de Gruyter.

Das Bändchen behandelt statisch unbestimmte Konstruktionen. Die Sätze von Castigliano und Maxwell, der Dreimomentensatz, Vorspannungen, Temperaturspannungen, Fachwerke mit überzähligen Stützpunkten und überzähligen Stäben, Prinzip der virtuellen Verrückungen, Verschiebungsplan. BIEBERBACH.

Max Planck, Einführung in die theoretische Physik. 1. Band: Einführung in die allgemeine Mechanik. Vierte Aufl. VII u. 226 S. 3. Band: Einführung in die Theorie der Elektrizität und des Magnetismus. Zweite Aufl. VII u. 206 S. Leipzig 1928, S. Hirzel. Geh. je RM 6.—, geb. je RM 8.—.

Die Eigenart des Planckschen Leitfadens zur theoretischen Physik läßt sich wohl am besten mit den Worten des Vorwortes charakterisieren: „. . . . die Schwierigkeiten, mit denen der Studierende beim ersten Betreten des Gebiets der theoretischen Physik zu kämpfen hat, (betreffen) häufig weniger die mathematische Form als vielmehr den physikalischen Inhalt der ihm dargebotenen Gedankengänge. Nicht das Rechnen mit den Gleichungen, sondern das Aufstellen und namentlich auch das Interpretieren derselben ist es, was ihm am meisten zu schaffen macht. In dieser Richtung nun ihm hilfreich an die Hand zu gehen, ist der Hauptzweck des vorliegenden Leitfadens." Daß das Werk, in dem der berühmte Physiker die von ihm an der Universität Berlin gehaltenen Kursusvorlesungen der Öffentlichkeit übergeben hat, seinen Zweck erfüllt, wird am besten durch den Umstand

bezeugt, daß der erste Band seit 1916 bereits zum vierten Male erscheinen kann. Er behandelt zunächst die Mechanik des materiellen Punktes, hierbei besonders ausführlich die Zentralkräfte und das Zweikörperproblem, dann die Mechanik von Punktsystemen in der Anordnung: Statik des starren Körpers, Statik eines beliebigen Punktsystems, Dynamik des Punktsystems und Dynamik des starren Körpers, und dringt dabei vor bis zur Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung und zur Theorie des Kreisels. Seinem Charakter als Einführung entsprechend verbleibt das Buch im Rahmen der klassischen Theorie und läßt ebenso wie der die Elektrizität behandelnde Band das Einsteinsche Relativitätsprinzip außer Betracht. Da ich selbst als Student die Originalvorlesung Plancks hören durfte und mich mit Freude des hohen Nutzens und Genusses, die sie vermittelte, erinnere, so empfehle ich das Buch, das mit seiner zwanglosen, ansprechenden Diktion den Charakter der Vorlesung getreulich überliefert, vor allem den Studierenden. (Bloß bitte ich sie dringend, die Figur 7 nicht anzusehen, ihre Reproduktion etwa in einer Prüfung über darstellende Geometrie könnte ihnen den Kopf kosten!) — Der 1922 erstmals und nun in zweiter Auflage erschienene dritte Band ist nach ähnlichen Prinzipien bearbeitet wie der erste. Er leitet zunächst die Maxwellschen Gleichungen aus dem Energie- und Nahewirkungsprinzip ab und behandelt dann von den elektromagnetischen Erscheinungen die folgenden: Das elektrostatische Feld ohne Kontaktspannungen (wobei die wegen der Laplaceschen Gleichung herrschenden Analogien zur Mechanik ausgenutzt werden), dann mit Kontaktspannungen, das magnetostatische Feld (ohne Berücksichtigung der Hysteresis), die mechanischen Wirkungen im elektrischen und magnetischen Feld, das stationäre Feld, in dem die elektrischen und magnetischen Größen nicht mehr voneinander unabhängig sind, hierbei die elektrische Theorie des Magnetismus, die thermischen Wirkungen des stationären Feldes und die mechanischen Wirkungen zwischen Magnetismus und Stromkreis, bzw. zwischen Stromkreisen; weiter die quasistationären und dynamischen Vorgänge, hierbei als einfachste Beispiele die schnellen Hertzschen Wellen, Kugelwellen und die Fortpflanzung längs paralleler Drähte. Zum Schluß werden die Grenzen der Maxwell-Hertzschen Elektrodynamik aufgezeigt und die Behebung der Schwierigkeiten durch die Lorentzsche Theorie des ruhenden Äthers besprochen.

Stuttgart. DOETSCH.

K. Försterling, Lehrbuch der Optik. Leipzig, S. Hirzel.

Das vorliegende Werk ist weder vom mathematischen Standpunkte aus geschrieben, noch für Mathematiker bestimmt. Es will ein Lehrbuch für Physiker sein. Es will nach theoretischen Gesichtspunkten geordnet den tatsächlichen Inhalt der heutigen Optik vermitteln. Es wird also der nicht auf seine Kosten kommen, der sich über die mathematischen Hilfsmittel der theoretisch optischen Forschung informieren will. Vielmehr hat sich der Verf. mit Erfolg bemüht, mit möglichst einfachen mathematischen Hilfsmitteln auszukommen. Ein Mathematiker, der sich über die physikalischen Tatsachen auf optischem Gebiete orientieren will, wird aber deshalb gerne zu diesem Buche greifen, weil keine sonderlichen Vorkenntnisse aus anderen physikalischen Gebieten, keine sonderliche Vertrautheit mit

typisch physikalischen Sprechweisen vorausgesetzt wird. So wird sich dies Buch sicher auch unter jüngeren oder älteren Mathematikern manchen Freund erwerben. BIEBERBACH.

A. Haas, Materiewellen und Quantenmechanik. 1. Aufl. Leipzig 1928. 2. Aufl. Leipzig 1929, Akademische Verlagsgesellschaft.

Eine glänzend geschriebene Einführung in die Grundlagen der Theorien von De Broglie, Heisenberg und Schrödinger. Die Schrift versteht es, einem über ein Mindestmaß an mathematischer Schulung verfügenden, sonst aber in mathematischer Beziehung kenntnisarmen Leser eine lebendige Vorstellung der Grundgedanken und Auswirkungen jener Theorien zu vermitteln.

Rascher als die Besprechung hat erscheinen können, liegt die zweite Aufl. des trefflichen Werkes vor. Neu zugefügt sind u. a. Abschnitte über die Einwirkung des Lichtes auf die Atome, über quantenmechanische Resonanz, die relativistische Verallgemeinerung der wellenmechanischen Grundgleichung und über die Diracsche Theorie des Elektrons. BIEBERBACH.

Woldemar Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik (mit Ausschluß der Kristalloptik). Nachdruck der ersten Auflage, ergänzt durch eine spätere Arbeit des Verfassers und mit einem Geleitwort von Prof. M. v. Laue. Leipzig 1928, B. G. Teubner. Geh. RM 39.—, geb. RM 41.—.

Der Zeit entsprechend, aus der dies Buch stammt — es erschien zuerst im Jahre 1910 — beschäftigt es sich mit der Phänomenologie der Kristalle, da ja die ganze große Entwicklung unserer Kenntnisse von dem Gitteraufbau der Kristalle erst später einsetzte. Diese phänomenologische Behandlung aber ist in ihrer konsequenten Darstellung meisterhaft, und man muß dem Verlage danken, daß er sich zu diesem Nachdruck entschlossen hat. Der gesamte Stoff wird nach einer kurzen Einleitung in acht Kapitel geteilt, von denen sich die drei ersten mit den Symmetrieeigenschaften der Kristalle (es genügen hier die 32 Kristallklassen; die Schoenfliessche Aufstellung der 230 Raumgruppen wird z. B. mit der Kritik erwähnt: über den physikalischen Wert derartiger Betrachtungen zu urteilen, wäre durchaus verfrüht), Physikalischen Funktionen als gerichteten Größen und Allgemeinen physikalischen Hilfssätzen beschäftigen. In formaler Anordnung folgt nun der eigentliche Gegenstand des Buches in den Kapiteln IV—VIII mit den folgenden Überschriften: Wechselwirkung zwischen einem Skalar und einem Vektor, zwischen einem Skalar und einem Tensortripel, zwischen zwei Vektoren, zwischen zwei Tensoren und zwischen einem Vektor und einem Tensortripel, unter die jeweils die betreffenden physikalischen Phänomene subsumiert werden. v. SIMSON.

E. Schrödinger, Vier Vorlesungen über Wellenmechanik, gehalten an der Royal Institution in London im März 1928, übersetzt von H. Kopfermann. Berlin 1928, Springer.

In vier Vorlesungen gibt der Verfasser eine Einleitung in die Wellenmechanik, die mit einem Minimum an mathematischen Formulierungen auskommend, die Gedankengänge seiner Theorie außerordentlich plastisch herausarbeitet. v. SIMSON.

Darwin O. Lyon, Das periodische System in neuer Anordnung. VI u. 40 S., 4 Tafeln, 3 Spiralen und 23 Karten. Leipzig u. Wien 1928, Franz Deuticke.

Nach einer mit dem Späteren nur lose zusammenhängenden Einleitung über die Natur und die Häufigkeit des Vorkommens der chemischen Elemente in den Sternen und insbesondere auf der Erde werden in einem ersten Teil die Anordnung der Elemente in dem Meyer-Mendelejeffschen periodischen System und die pyramidale Anordnung nach Thomsen-Bohr besprochen und Fragen aufgeworfen, die bei ihnen offen bleiben. In einem zweiten Teil schlägt dann der Verfasser einige andere Anordnungen vor, so ordnet er z. B. die Elemente nach der Größe ihres elektrischen Widerstandes oder ihrer Wärmeausdehnung (insgesamt sind 15 physikalische Konstanten berücksichtigt), oder er verteilt sie längs einer Spirale, wobei dann gewisse Gesetzmäßigkeiten, z. B. Gruppierungen gleichartigen magnetischen Verhaltens zutage treten. Der Verfasser betont selbst die Problematik seiner Aufstellung, da man von vielen Elementen die betreffenden Konstanten noch nicht bestimmt hat und daher in der Anordnung nach der Größe dieser Konstanten Lücken bleiben müssen, über deren Länge man nichts weiß. Immerhin können seine Tabellen und Kurven vielleicht bei der Aufstellung von Atomtheorien von gewissem heuristischem Wert sein.

Stuttgart. DOETSCH.

K. Giebel, Das Pendel. IV u. 190 S. Halle 1928, Zentralverband der Deutschen Uhrmacher. Geh. *RM* 5.20; geb. *RM* 6.—.

Der Verfasser, der Direktor der Glashütter Uhrmacherschule ist, hat das Buch für den Gebrauch des Feinmechanikers und Uhrmachers gedacht, der sich mit der Herstellung exaktester Zeitregler beschäftigen muß, und behandelt nach den theoretischen Grundlagen der verschiedenen Pendel hauptsächlich die Errechnung der Störungen, die von der Veränderlichkeit der Gravitation mit dem Standort, von Stößen, von Temperaturschwankungen der Umgebung, von Temperaturdifferenzen der Pendelteile, von dem Auftrieb der Luft, von der Aufhängung des Pendels usw. herrühren. Diese Dinge sind auch für den Mathematiker und Physiker, der sie sonst in dieser Ausführlichkeit kaum kennenlernt, interessant, der Verfasser hat hier manches Weitverstreute übersichtlich zusammengetragen. An mathematischem Wissen wird nur sehr wenig vorausgesetzt, Differential- und Integralrechnung sind vermieden, und die wichtigsten mathematischen und physikalischen Grundlagen sind in den einleitenden Kapiteln zusammengestellt. Erfreulich ist, daß der Verfasser sich zur Übermittlung des reichlichen Tabellen- und Zahlenmaterials, das er dem Praktiker an die Hand gibt, auch des Nomogramms bedient hat. Von den Lesern dieses Referates dürften vor allem die Schulmänner Interesse an dem Buche haben, dem sie manche hübsche Aufgabe entnehmen können.

Stuttgart. DOETSCH.

Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

[Die Titel der eingesandten Schriften, mit Ausnahme der Sonderabdrucke, werden hier regelmäßig veröffentlicht. Besprechungen geeigneter Bücher bleiben vorbehalten. Eine Rücksendung der eingegangenen Schriften kann nicht erfolgen.]

Adler, Fünfstellige Logarithmen. (Sammlung Göschen Bd. 423.) 2. Aufl. Berlin 1929, W. de Gruyter. *RM* 1.50.

F. Cajori, A history of mathematical notations. Vol. 1: Notations in elementary mathematica. Vol. 2: Notations in higher mathematics. 451 u. 367 S. Chicago, Open Court Publishing Company. $ 12.—.

A. Coble, Algebraic Geometry and theta functions. Am. math. Soc. Coll. Publ. Vol. X. New York Am. math. Soc. 282 S. 1929. $ 3.—.

L. Eckhart, Der vierdimensionale Raum. (Math.-phys. Bibl. Bd. 84.) Leipzig 1929, B. G. Teubner. *RM* 1.20.

Forschungsinstitut für Geschichte der Naturwissenschaften zu Berlin. Zweiter Jahresbericht. Mit einer wissenschaftlichen Beilage: Aufgaben der Chemiegeschichte. (Von J. Ruska.) Berlin 1929, J. Springer. Geh. *RM* 1.50.

C. F. Gauß' Werke. Bd. XI. Zweite Abt. Abh. 2. 217 S. Berlin 1929, J. Springer. *RM* 24.—.

—— Werke. Bd. XII. 415 S. Berlin 1929, J. Springer. *RM* 49.—.

L. Lichtenstein, Grundlagen der Hydromechanik. (Die Grundlehren der math. Wiss., hrsg. von R. Courant, Bd. 30.) 506 S. Berlin 1929, J. Springer. Geh. *RM* 38.—, geb. *RM* 39.50.

A. Lotze, Punkt- und Vektorrechnung. 192 S. (Göschens Lehrbücherei, Bd. 13.) Berlin 1929, W. de Gruyter. *RM* 12.—.

O. Lörcher und **E. Löffler,** Leitfaden und Aufgabensammlung der Geometrie. 305 S. 7. Aufl. Leipzig 1929, B. G. Teubner. *RM* 3.50.

S. Valentiner, Vektoranalysis. 4. Aufl. (Sammlung Göschen 354.) Berlin 1929, W. de Gruyter. *RM* 1.50.

A. Wintner, Spektraltheorie der unendlichen Matrizen. Einführung in den analytischen Apparat der Quantenmechanik. Mit einer Einleitung vcn Leon Lichtenstein. 280 S. Leipzig 1929, S. Hirzel. *RM* 21.—, geb. *RM* 22.50.

Berichtigung

zu Heft 1/4 dieses Bandes.

Auf S. *50* ist versehentlich eine unvollständige Liste der anläßlich der Abelfeier vollzogenen Ehrenpromotionen abgedruckt. Die vollständige Liste findet sich S. *84*.

Auf S. *66* ist der letzte Satz ungültig, da die Beilage gesondert verschickt worden ist.

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

HERAUSGEGEBEN VON

L. BIEBERBACH IN BERLIN
O. BLUMENTHAL IN AACHEN
G. FABER IN MÜNCHEN



37. BAND · 1.—4. HEFT



VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1928

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG.

HERAUSGEGEBEN VON
L. BIEBERBACH IN BERLIN, O. BLUMENTHAL IN AACHEN,
G. FABER IN MÜNCHEN

VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Bücher usw.) sind an **Prof. Dr. L. Bieberbach in Berlin-Schmargendorf, Marienbader Str. 9**, zu richten.

Die Verfasser erhalten unentgeltlich: von im Auftrag der D. M.-V. erstatteten Berichten bis zu einem Umfang von 1½ Bogen und anderen Beiträgen bis zu ½ Bogen Umfang 100 Sonderabdrücke, bei darüber hinausgehendem Umfange 50 Sonderabdrücke von kleineren Mitteilungen 10.

Jeder Band umfaßt 12 Hefte in 3 bis 4 Lieferungen im Umfang von zusammen mindestens 30 Bogen. Der Preis des Bandes beträgt für **Mitglieder** der D. M.-V., die ihr Abonnement bei der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner, Leipzig, Poststraße 3, aufgeben müssen, *RM* 18.—, für **Nichtmitglieder** *RM* 27.—. Es bleibt überlassen, den Betrag auf einmal nach Erhalt der ersten Lieferung oder anteilig nach Erhalt einer jeden Lieferung zu erstatten. Der Preis für Einzellieferungen ist 20% höher als der Abonnementspreis.

Auf mehrfachen Wunsch bildet künftig das Mitgliederverzeichnis eine besondere Lieferung. Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung zählt z. Z. rund 1000 Mitglieder. Der Mitgliedsbeitrag für 1928 ist auf *RM* 5.– festgesetzt worden. Der Vorstand wurde ermächtigt, den Mitgliedern des Vereins zur Förderung des math.-nat. Unterrichtes, den Studenten, Assistenten und Privatdozenten auf ein an den Schriftführer der D. M.-V. (Prof. Bieberbach, Berlin-Schmargendorf, Marienbader Straße 9) zu richtendes Ersuchen den Beitrag auf *RM* 3.— zu ermäßigen. Auch sonst wird, wo es die finanziellen Verhältnisse erheischen, bereitwilligst entgegengekommen werden. Beitrittserklärungen nimmt ebenfalls der Schriftführer der Vereinigung oder die obengenannte Verlagsbuchhandlung entgegen. Der Jahresbeitrag ist an die Deutsche Math.-Vereinigung, Postscheckkonto 541 26 beim Postscheckamt Leipzig, einzusenden.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

1. Abteilung.

2. Abteilung.

[Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags]

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER VEREINIGUNG

HERAUSGEBER: L. BIEBERBACH
O. BLUMENTHAL / G. FABER

38. BAND
9.–12. HEFT

1929
BERLIN · B. G. TEUBNER · LEIPZIG

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

HERAUSGEGEBEN VON
L. BIEBERBACH IN BERLIN, O. BLUMENTHAL IN AACHEN,
G. FABER IN MÜNCHEN

VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG C 1, POSTSTRASSE 3

Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Bücher usw.) sind an Prof. Dr. L. Bieberbach in Berlin-Dahlem, Gelfertstraße 16, zu richten.

Die Verfasser erhalten unentgeltlich: von im Auftrag der D. M.-V. erstatteten Berichten bis zu einem Umfang von $1\frac{1}{2}$ Bogen und anderen Beiträgen bis zu $\frac{1}{2}$ Bogen Umfang 100 Sonderabdrücke, bei darüber hinausgehendem Umfange 50 Sonderabdrücke, von kleineren Mitteilungen 10.

Jeder Band umfaßt 12 Hefte in 3 bis 4 Lieferungen. Der Preis des Bandes beträgt für **Mitglieder** der D. M.-V., die ihr Abonnement bei der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner, Leipzig C 1, Poststraße 3, aufgeben müssen, *RM* 18.—, für **Nichtmitglieder** *RM* 27.—. Es bleibt überlassen, den Betrag auf einmal nach Erhalt der ersten Lieferung oder anteilig nach Erhalt einer jeden Lieferung zu erstatten. Der Preis für Einzellieferungen ist 20% höher als der Abonnementspreis.

Auf mehrfachen Wunsch bildet künftig das Mitgliederverzeichnis eine besondere Lieferung. Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung zählt z. Z. rund 1000 Mitglieder. Der Mitgliedsbeitrag für 1929 ist auf *RM* 5.— festgesetzt worden. Der Vorstand wurde ermächtigt, den Mitgliedern des Vereins zur Förderung des math.-nat. Unterrichtes, den Studenten, Assistenten und Privatdozenten auf ein an den Schriftführer der D. M.-V. (Prof. Bieberbach, Berlin-Dahlem, Gelfertstraße 16) zu richtendes Ersuchen den Beitrag auf *RM* 3.— zu ermäßigen. Auch sonst wird, wo es die finanziellen Verhältnisse erheischen, bereitwilligst entgegengekommen werden. Beitrittserklärungen nimmt ebenfalls der Schriftführer der Vereinigung oder die obengenannte Verlagsbuchhandlung entgegen. Der Jahresbeitrag ist an die Deutsche Math.-Vereinigung, Postscheckkonto 54126 beim Postscheckamt Leipzig, einzusenden.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES

1. Abteilung

2. Abteilung

Druck von B. G. Teubner in Leipzig

Ausgegeben am 12. Dezember 1929

